

Университет ИТМО

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной техники

Информатика

Лабораторная работа №6

Работа с системой компьютерной вёрстки \TeX

Вариант: $6 * 10 + 3 = 63$

Выполнил:

Воронов Григорий Алексеевич

Группа: Р3116

Преподаватель:

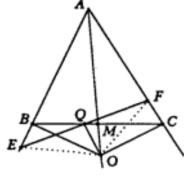
кандидат педагогических наук,

доцент факультета ПИиКТ,

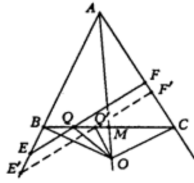
Авксентьева Елена Юрьевна

ного из O на EF – проведем $E'F' \parallel EF$ (см. рис. 6). Тогда, по доказанному выше, $E'Q' = Q'F'$ и если K – точка пересечения $Q'A$ с EF , то $EK = KF$. Но точка K отлична от Q , значит $EQ \neq QF$.

а



б



Замечание. Рисунок – а именно, тот факт, что середина Q основания равнобедренного треугольника EOF лежит на отрезке BC , – легко объяснить с помощью векторов:

поскольку $\vec{OM} = (\vec{CF} + \vec{BE}) / 2$,

$\vec{OQ} = (\vec{OE} + \vec{OF}) / 2$, то $\vec{OM} = (\vec{CF} + \vec{BE}) / 2$, а поскольку \vec{CF} и \vec{BE} равны по длине, их полусумма направлена по биссектрисе угла между их направлениями.

М1469. Для любого целого положительного числа k через $f(k)$ обозначим число всех элементов в множестве $\{k+1, k=2, \dots, 2k\}$, в двоичном представлении каждого из которых имеется в точности три единицы.

(а) Докажите, что для каждого целого положительного числа m существует хотя бы одно целое положительное число k такое, что $f(k)=m$.

(б) Найдите все целые положительные числа m , для каждого из которых существует единственное k , удовлетворяющее условию $f(k)=m$.

Пусть B_k – множество всех чисел от 1 до $2k$, в двоичной записи которых ровно 3 единицы, $g(k)$ – число элементов в B_k . Ясно, что $g(k)$ – неубывающая функция и $f(k) = g(2k) - g(k)$.

Поэтому

$$f(k+1) - f(k) = g(2k+2) - g(k+1) - (g(2k) - g(k)) = g(2k+2) - g(2k) - (g(k+1) - g(k))$$

(а) Ясно, что $(2k+2) \in B_{2k+2}$ в том и только в том случае, когда $(k+1)_{k+1}$. Поэтому $f(k+1) - f(k)$ не может

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$g(k)$	0	0	1	1	2	4	4	4	5	7	7...
$f(k)$	1	2	3	4	5	5	5	6	7	7	...

вырасти сразу на 2, точнее,

$$f(k+1) - f(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } (2k+1) \in B_{2k+2} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Но поскольку, очевидно, $f(k)$ растет неограниченно, эта функция принимает все натуральные значения.

(б) Уравнение $f(k) = m$ имеет для некоторого единственное решение в том и только в том случае, если $f(k+1) - f(k) = 1 = f(k) - (A(k-1))$, т.е. $(2k+1) \in B_{2k+2}$ и оба числа k и $k-1$ имеют по две единицы в двоичной записи; другими словами, $k = 2^m + 2, n \geq 2$. При этом

$$m = f(2^m + 2) = 1 + n(n-1)/2 \text{ (где } n = 2, 3, \dots),$$

это и есть все нужные, значения m .

М1470. Покажите, что существует множество A , состоящее из целых положительных чисел, которое обладает следующим свойством: для каждого бесконечного множества S простых чисел существует $k \geq 2, m \in A$ и $n \notin A$ таких, что оба являются произведениями k различных элементов множества S .

В качестве A можно взять множество произведений различных простых чисел вида $q_1 q_2 q_3 \dots q_{q_1}$, где $q_1 < q_2 < \dots < q_{q_1}$, (т.е. таких, что число сомножителей равно наименьшему из них: в входит $2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, \dots, 3 \cdot 5 \cdot 7, 3 \cdot 5 \cdot 11, \dots$ и т.д.). Тогда для любого множества $S = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ простых чисел, $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ очевидно, $m = p_2 p_3 p_4 \dots p_{p_2}$ входит в A , а $n = p_3 p_4 \dots p_{p_2+1}$ не входит в A : $p_2 + 1 < p_3$, а разложение на простые множители единственно («основная теорема арифметики»).

Ф1478. С высоты $H = 50$ м без начальной скорости отпускают камень. В тот же момент из точки, находящейся прямо под камнем, начинает удирать по горизонтальной плоскости с постоянной скоростью заяц. При какой минимальной скорости зайца расстояние между ним и камнем в процессе движения не будет уменьшаться?

По условию камень падает с ускорением g без начальной скорости, а заяц движется равномерно. Обозначим скорость зайца через v . По теореме Пифагора можно выразить расстояние между зайцем и камнем. Но проще рассматривать квадрат этого расстояния – ведь если положительная величина не уменьшается, то и ее квадрат тоже не уменьшается, а писать лишних корней не придется. Итак,

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(H - \frac{gt^2}{2} \right)^2 + (vt)^2 = H^2 - Hgt^2 + \frac{g^2 t^4}{4} + v^2 t^2 = \\ &= H^2 + t^2 \left(\frac{g^2 t^2}{4} + v^2 - gH \right) \end{aligned}$$