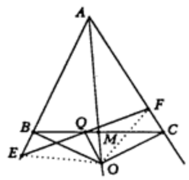
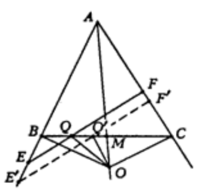
ного из O на EF – проведем $E'F'||EF$ (см. рис. б). Тогда, по доказанному выше, $E'Q' = Q'F'$ и если K – точка пересечения $Q'A$ с EF, то $EK = KF$. Но точка K отлична от Q, значит $EQ \neq QF$.

а



б



Замечание. Рисунок – а именно, тот факт, что середина Q основания равнобедренного треугольника EOF лежит на отрезке BC, – легко объяснить с помощью векторов: поскольку $\overrightarrow{OM} = \left(\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BE}\right) \Big/ 2$,

$\overrightarrow{OQ} = \left(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}\right) \Big/ 2$, то $\overrightarrow{OM} = \left(\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BE}\right) \Big/ 2$, а поскольку $\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{BE}$ равны по длине, их полусумма направлена по биссектрисе угла между их направлениями.

M1469. *Для любого целого положительного числа k через f(k) обозначим число всех элементов в множестве {k+1, k=2, ..., 2k}, в двоичном представлении каждого из которых имеется в точности три единицы.*
(a) Докажите, что для каждого целого положительного числа m существует хотя бы одно целое положительное число k такое, что f(k)=m.
(b) Найдите все целые положительные числа m, для каждого из которых существует единственное k, удовлетворяющее условию f(k)=m.

Пусть B_k – множество всех чисел от 1 до 2k, в двоичной записи которых ровно 3 единицы, $g(k)$ – число элементов в B_k. Ясно, что $g(k)$ – неубывающая функция и $f(k) = g(2k) - g(k)$.
Поэтому
$f(k+1) - f(k) = g(2k+2) - g(k+1) - (g(2k) - g(k)) =$
$= g(2k+2) - g(2k) - (g(k+1) - g(k))$

(a) Ясно, что $(2k{+}2) \in B_{2k+2}$ в том и только в том случае, когда $(k+1)_{k+1}$. Поэтому $f(k+1) - f(k)$ не может

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$g(k)$	0	0	1	1	2	4	4	4	5	7	7...
$f(k)$	1	2	3	4	5	5	5	6	7	7	...

вырасти сразу на 2, точнее,

$$f(k+1) - f(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } (2k+1) \in B_{2k+2} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Но поскольку, очевидно, $f(k)$ растет неограниченно, эта функция принимает все натуральные значения.
(b) Уравнение $f(k) = m$ имеет для некоторого тединственное решение в том и только в том случае, если $f(k+1) - f(k) = 1 = f(k) - (A(k-1)$,т.е. $(2k+1) \in B_{2k+2}$ и оба числа k и $k-1$ имеют по две единицы в двоичной записи; другими словами, $k = 2^m + 2, n \geq 2$. При этом

$$m = f(2^m + 2) = 1 + n(n-1)/2 \text{ (где } n = 2, 3, \dots),$$

это и есть все нужные, значения m.

M1470. *Покажите, что существует множество A, состоящее из целых положительных чисел, которое обладает следующим свойством: для каждого бесконечного множества S простых чисел существует $k \geq 2, m \in A$ и $n \notin A$ таких, что оба являются произведениями к различных элементов множества S.*

В качестве A можно взять множество произведений различных простых чисел вида $q_1q_2q_3...q_{q_1}$, где $q_1 < q_2 < ... < q_{q_1}$, (т.е. таких, что число сомножителей равно наименьшему из них: в входит $2\cdot3, 2\cdot5, 2\cdot7, \dots 3\cdot5\cdot7, 3\cdot5\cdot11, \dots$ и т.д.). Тогда для любого множества $S = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ простых чисел, $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ очевидно, $m = p_2p_3p\dots p_{p_2}$ входит в , а $n = p_3p_4\dots p_{p_2+1}$ не входит в A: $p_2 + 1 < p_3$, а разложение на простые множители единственно («основная теорема арифметики»).

Ф1478. *С высоты $H = 50$ м без начальной скорости отпускают камень. В тот же момент из точки, находящейся прямо под камнем, начинает удирать по горизонтальной плоскости с постоянной скоростью заяц. При какой минимальной скорости зайца расстояние между ним и камнем в процессе движения не будет уменьшаться?*

По условию камень падает с ускорением g без начальной скорости, а заяц движется равномерно. Обозначим скорость зайца через v. По теореме Пифагора можно выразить расстояние между зайцем и камнем. Но проще рассматривать квадрат этого расстояния - ведь если положительная величина не уменьшается, то и ее квадрат тоже не уменьшается, а писать лишних корней не придется. Итак,

$$x^2 = \left(H - \frac{gt^2}{2}\right)^2 + (vt)^2 = H^2 - Hgt^2 + \frac{g^2t^4}{4} + v^2t^2 =$$
$$= H^2 + t^2\left(\frac{g^2t^2}{4} + v^2 - gH\right)$$