

**PROYECTO INTEGRADOR DE LA CARRERA DE
INGENIERÍA EN TELECOMUNICACIONES**

**CONFORMACIÓN DIGITAL DE HAZ PARA RECEPCIÓN DE
SEÑALES SATELITALES**

Lucas Mariano Grigolato
Estudiante

Dr. Santiago Hernández
Director

Ing. Nicolás Catalano
Co-director

Miembros del Jurado

Ing. Roberto Costantini (INVAP - Instituto Balseiro)

Dr. Damián Dellavale Clara (CONICET - Instituto Balseiro)

14 de Noviembre de 2020

Departamento de Ingeniería en Telecomunicaciones
Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

A Gordon Freeman

Índice de símbolos

- SNR: Signal to Noise Ratio - Relación Señal a Ruido.
- DBF: Digital Beamforming/Beamformer - Conformación/Conformador Digital de Haz.
- DOA: Direction Of Arrival - Dirección de arribo.
- FPGA: Field-Programmable Gate Array - Arreglo de compuertas programables.
- MUSIC: Multiple Signal Classification.
- ALU: Arreglo Lineal Uniforme.
- ACU: Arreglo Circular Uniforme.
- ARU: Arreglo Rectangular Uniforme.
- LEO: Low Earth Orbit - Baja órbita.
- SVD: Singular Value Decomposition.
- TLS: Total Least Squares
- RMSPE: Root Mean Square Percentage Error

Índice de contenidos

Índice de símbolos	v
Índice de contenidos	vii
Índice de figuras	ix
Índice de tablas	xi
Resumen	xiii
Abstract	xv
1. Introducción	1
1.0.1. Objetivos de proyecto	1
2. Conformación de haz	3
2.1. Introducción	3
2.2. Clasificación de conformadores de haz	7
2.3. Arreglos de antenas en fase	9
2.3.1. Tipos de arreglos	9
2.4. Problema a resolver	13
3. Algoritmos de estimación de dirección de arribo.	15
3.1. Introducción	15
3.1.1. Modelo de datos	16
3.2. El algoritmo MUSIC	20
3.2.1. Algoritmo	21
3.3. El algoritmo ESPRIT	21
3.3.1. Algoritmo	25
3.4. Simulaciones	26
3.4.1. RMSE vs. SNR	27
3.4.2. RMSE vs. σ_d	28
3.4.3. RMSE vs. N° de muestras	28
3.4.4. Tiempo vs. M	29
3.4.5. Tiempo de ejecución de la SVD	31
4. Muestreo estocástico	33
4.1. Conceptos generales	33

5. Diseño del sistema	35
5.1. Esquema de bloques	35
5.2. Muestreador aleatorio	35
5.3. Estimador de dirección de arribo	35
5.4. Conformador de haz	35
6. Estimación del número de señales arribantes	37
6.1. Conceptos generales	37
6.2. Método de la máxima derivada	37
6.3. Clasificador de autovalores mediante aprendizaje automático	37
7. Integración en GNU Radio	39
7.1. Conceptos generales	39
7.2. El modelo banda base	39
7.3. Implementación de módulos	39
7.4. El módulo gr-satellites	39
8. Resultados obtenidos	41
8.1. Tasa de error de bit	41
8.2. Errores en la ubicación de elementos del arreglo	41
8.3. Requerimientos de procesamiento	41
9. Implementación en FPGA	43
9.1. Conceptos generales	43
10. Trabajo a futuro	45
10.1. Innovación en la estimación	45
10.2. Interfaz con el sistema de adquisición	45
10.3. Empaquetamiento	45
10.4. Medición del patrón de radiación del arreglo	45
10.5. Interferencias destructivas	45
10.6. Smart Beamforming	45
A. Obtención de ángulos de arribo en ESPRIT	47
Bibliografía	49
Publicaciones asociadas	51
Agradecimientos	53

Índice de figuras

2.1. Representación de un enlace punto a punto utilizando antenas parabólicas, indicando sus correspondientes patrones de radiación junto con sus lóbulos principales y secundarios.	3
2.2. Antenas parabólicas móviles de la estación terrena perteneciente al Centro Espacial Teófilo Tabanera [1].	4
2.3. Sistema de coordenadas horizontales para comunicaciones satelitales.	5
2.4. Frente de onda plano arribando a un arreglo lineal de antenas. Se indica en rojo el elemento de referencia, en el cual se considera que la señal arribante tiene fase nula.	5
2.5. Clasificación de conformadores de haz según cómo manipulan la señal recibida.	8
2.6. Arreglo lineal uniforme.	10
2.7. Arreglo circular uniforme.	11
2.8. Arreglo rectangular uniforme.	12
2.9. Esquema del problema a resolver.	13
3.1. Representación geométrica de la estimación de DOA mediante la intersección del conjunto \mathfrak{A} con el subespacio de señal para el caso de DOA unidimensional, con $D = 2$ y $M = 3$	17
3.2. Geometría del arreglo de antenas para el análisis del algoritmo ESPRIT. En azul y en rojo se separan los elementos pertenecientes a los subarreglos Z_x y Z_y respectivamente [2].	22
3.3. Una posible elección de subarreglos para la aplicación del algoritmo ESPRIT en dos dimensiones utilizando un ARU.	24
3.4. Gráfico de comparación del RMSE en función de la SNR para los algoritmos MUSIC y ESPRIT.	27
3.5. Gráfica de $\mathbf{P}_{\mathbf{MU}}$ en el caso de una señal llegando al arreglo con dirección $(\theta = 45^\circ, \varphi = 30)$ para distintos valores de SNR. Puede observarse cómo a medida que aumenta la SNR la “energía” del pseudoespectro se concentra cada vez más en la dirección de arribo real.	28
3.6. Gráfico de comparación del RMSE en función de los errores en la separación de elementos para los algoritmos MUSIC y ESPRIT.	29
3.7. Gráfica de comparación del RMSE en función de la cantidad de vectores de muestras para los algoritmos MUSIC y ESPRIT.	30
3.8. Gráfica de comparación del tiempo de ejecución de los algoritmos MUSIC y ESPRIT en función de la cantidad de elementos del ARU.	30
3.9. Gráfica de tiempo de ejecución del algoritmo SVD en función de la cantidad M de elementos del ARU y la cantidad N de vectores de muestras de la entrada.	32
3.10. Gráfica de tiempo de ejecución del algoritmo SVD en función de la cantidad N de vectores de muestras de la entrada con $M = 16$	32

4.1.	34
--------------	----

Índice de tablas

Resumen

Este es el resumen en castellano.

La tesis debe reflejar el trabajo desarrollado, mostrando la metodología utilizada, los resultados obtenidos y las conclusiones que pueden inferirse de dichos resultados.

Palabras clave: FORMATO DE TESIS, LINEAMIENTOS DE ESCRITURA, INSTITUTO BAL-
SEIRO

Abstract

This is the title in English:

The thesis must reflect the work of the student, including the chosen methodology, the results and the conclusions that those results allow us to draw.

Keywords: THESIS FORMAT, TEMPLATES, INSTITUTO BALSEIRO

Capítulo 1

Introducción

“Mereces lo que sueñas.”

— Gustavo Cerati

Las comunicaciones inalámbricas son unas de las tecnologías de mayor crecimiento a lo largo del último siglo.

1.0.1. Objetivos de proyecto

Capítulo 2

Conformación de haz

“Never stopping. Never being satisfied. Never giving up. And if you keep pushing and keep moving forward, you’re gonna go to places you never even dreamed of.”

— Johnny Lawrence (Cobra Kai)

2.1. Introducción

Al momento de realizar una comunicación inalámbrica uno de los aspectos que más contribuyen a la calidad del enlace es su dirección con respecto a la orientación de las antenas tanto del transmisor como del receptor. La capacidad de una antena de transformar en potencia eléctrica la energía recibida en forma de onda electromagnética en una cierta dirección viene caracterizada por su **patrón de radiación**. Este patrón caracteriza, también, el efecto contrario, es decir, la capacidad de una antena de convertir en energía radiada en una dirección particular la potencia eléctrica con la cual se la alimenta. Es por esto que a la hora de diseñar un enlace inalámbrico se busca que la dirección de mayor radiación de la antena transmisora y de la receptora, es decir, el **lóbulos principal** del patrón de radiación, coincida con la dirección del enlace, como se muestra en la Figura 2.1, de manera tal de lograr la mayor eficiencia en la transmisión de energía, lo cual repercute en una mejor relación señal a ruido (**SNR** por sus siglas en inglés) en la señal recibida.

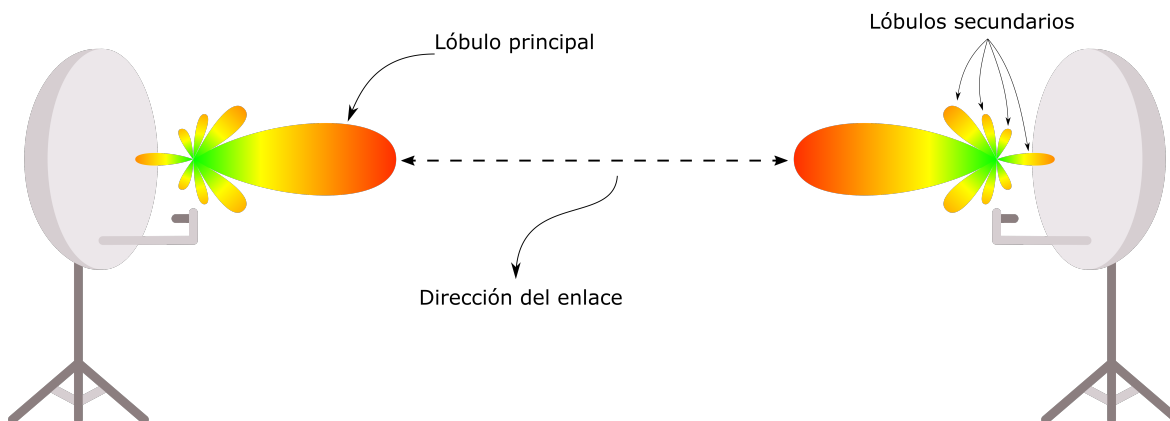


Figura 2.1: Representación de un enlace punto a punto utilizando antenas parabólicas, indicando sus correspondientes patrones de radiación junto con sus lóbulos principales y secundarios.

Lograr la mejor orientación de las antenas cuando el transmisor y el receptor se encuentran estáticos

no conlleva mayores dificultades. Las complicaciones aparecen cuando uno de los dos o ambos se encuentran en movimiento. En este caso la solución que permite aumentar la eficiencia del enlace implica que al menos una de las antenas dirija su patrón de radiación de manera tal de poder hacer un seguimiento del objetivo con el cual se desea comunicar. Esto se puede lograr utilizando antenas móviles, como es el caso de las antenas parabólicas de las estaciones terrenas que se comunican con satélites de baja y media órbita, como las que se muestran en la Figura 2.2.



Figura 2.2: Antenas parabólicas móviles de la estación terrena perteneciente al Centro Espacial Teófilo Tabanera [1].

Otra manera de lograr la orientación de los patrones de radiación de las antenas es mediante la técnica de **conformación de haz**, principal objeto de estudio de esta monografía. Esta técnica consiste en emular el comportamiento de una antena direccional mediante el sintetizado de patrones de radiación arbitrarios utilizando antenas estáticas. Esto se consigue utilizando un **arreglo de antenas en fase**, el cual consiste en un conjunto de antenas, generalmente idénticas, dispuestas en una disposición particular y con la capacidad de poder variar la fase relativa de la señal transmitida entre elementos, de manera tal de poder generar interferencias constructivas en la dirección en la que se quiere orientar el haz y destructivas en las direcciones desde las cuales se están recibiendo interferencias [3].

La técnica de conformación de haz se puede aplicar a cualquier recepción o transmisión punto a punto de señales, sin embargo en este trabajo se orientará el estudio a la implementación de un conformador de haz para realizar comunicaciones con satélites de baja órbita. Para esto es necesario primero definir un sistema de coordenadas útil para describir la dirección de arribo de señales al momento de implementar una comunicación satelital. Este sistema es conocido por **coordenadas horizontales** y está definido por [4]:

- **Azimut:** es el ángulo tomado sobre el plano horizontal de la estación terrena midiendo desde el norte hacia la proyección de la dirección del satélite sobre el mismo plano en sentido horario. A lo largo de este trabajo se lo indicará con la letra griega φ .
- **Elevación:** es el ángulo formado entre la dirección del satélite y el plano horizontal. A lo largo de este trabajo se lo indicará con la letra griega θ .

En la Figura 2.3 se muestra un esquema de este sistema de coordenadas.

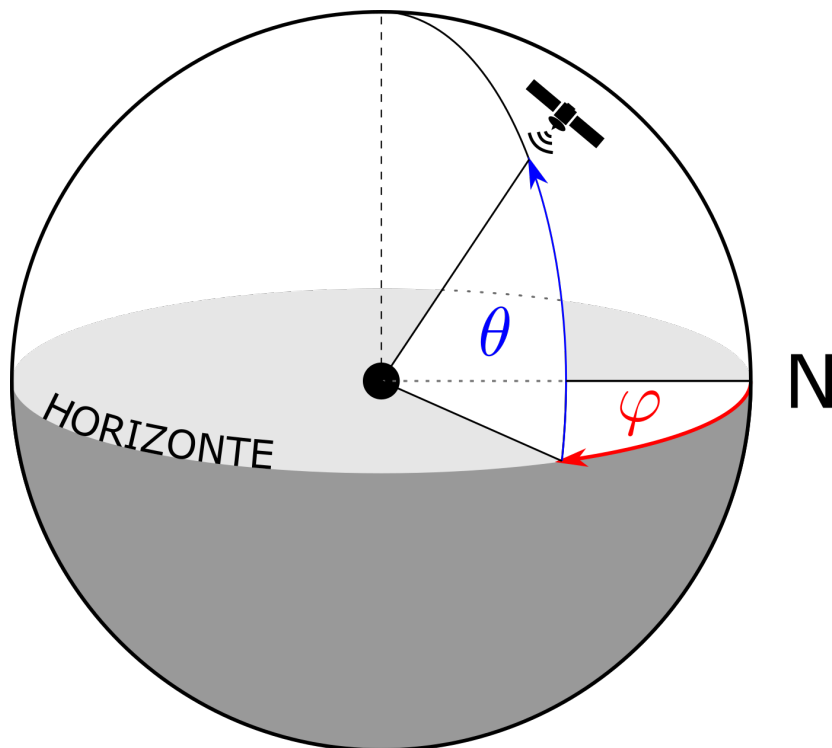


Figura 2.3: Sistema de coordenadas horizontales para comunicaciones satelitales.

Para comenzar a explicar en qué consiste la técnica de conformación de haz consideremos que tenemos un conjunto de antenas idénticas dispuestas sobre una línea y equidistantes unas de otras, a las cuales les llega un frente de onda con un cierto ángulo θ con respecto a la vertical, como se muestra en la Figura 2.4.

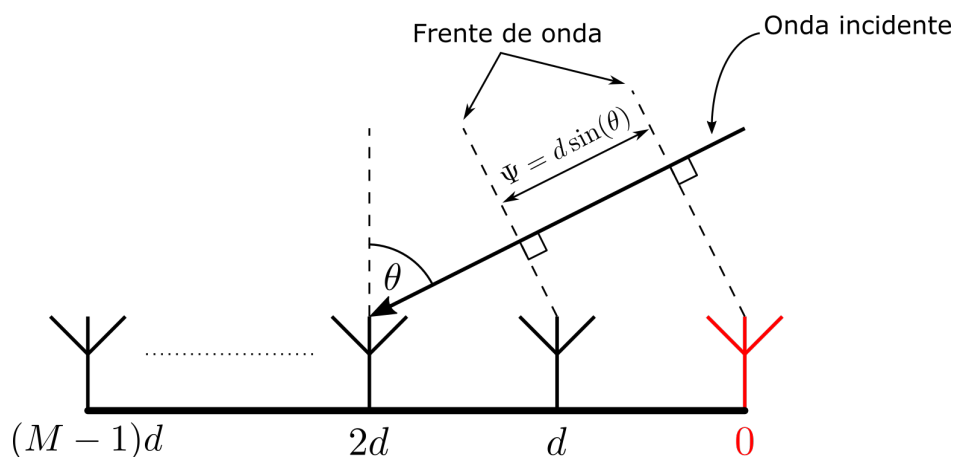


Figura 2.4: Frente de onda plano arribando a un arreglo lineal de antenas. Se indica en rojo el elemento de referencia, en el cual se considera que la señal arribante tiene fase nula.

Considerando que la señal proviene desde una distancia lejana (comparada con el tamaño del arreglo de antenas) podemos afirmar con gran precisión que el frente de onda que llega al arreglo de antenas es plano. La dirección de arribo de la señal, o **DOA** por sus siglas en inglés, en este caso definida únicamente por el ángulo θ , provoca que el frente de onda recorra distintas distancias al llegar a cada elemento del arreglo, y esa diferencia en las distancias generan un desfase en la señal recibida por cada receptor. Por ende, teniendo en cuenta que la separación entre elementos del arreglo es la misma y que el frente de onda se lo puede considerar como plano, y eligiendo convenientemente al primer elemento del arreglo al cual llega el frente de onda como elemento de referencia, podemos obtener la diferencia de camino recorrido por la señal transmitida al llegar a cada receptor haciendo:

$$\Psi_m = m \cdot d \sin(\theta), \quad m = 0, 1, 2, \dots, (M - 1), \quad (2.1)$$

siendo d la separación de elementos y M la cantidad de elementos en el arreglo.

La forma de onda de una onda viajera en campo lejano recibida por un receptor puntual, considerando un transmisor también puntual e isotrópico, puede ser expresada por la magnitud de su campo eléctrico como [5]:

$$E(\bar{r}, t) = s(t)e^{j(\omega_p t - \bar{k} \cdot \bar{r})}, \quad (2.2)$$

siendo:

- \bar{r} : el vector que une al transmisor con el receptor,
- $s(t)$: la señal transmitida en función del tiempo,
- $\omega_p = 2\pi f_p$: la frecuencia angular de la portadora,
- \bar{k} : el vector de onda, con $|\bar{k}| = \frac{2\pi}{\lambda_p}$,
- λ_p : la longitud de onda de la portadora.

Considerando el mismo arreglo de antenas de la Figura 2.4 podemos expresar la onda recibida por el m –ésimo elemento como

$$E_m(\bar{r}_m, t) = s(t)e^{j(\omega_p t - \bar{k} \cdot \bar{r}_m)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, (M - 1), \quad (2.3)$$

siendo \bar{r}_m el vector que une el transmisor con el m –ésimo receptor. Es necesario aclarar que para que esta expresión sea válida es necesario que se cumpla la condición de que la señal $s(t)$ sea de banda angosta [5], lo cual significa que su ancho de banda debe ser al menos uno o dos órdenes de magnitud menor a la inversa del tiempo que le lleva al frente de onda propagarse desde el primer al último elemento del arreglo. Esto permite asumir que la envolvente de la onda transmitida no varía demasiado en el tiempo que le lleva al frente de onda alcanzar todos los elementos del arreglo, y en cambio se la puede considerar constante. Dicho de otra forma, puede considerarse que $s(t) \approx s(t - \tau_{\text{máx}})$, siendo $\tau_{\text{máx}}$ el tiempo que le lleva al frente de onda ir desde el primer al último elemento del arreglo.

Por conveniencia para el resto del análisis se quitará el término $e^{j\omega_p t}$ correspondiente a la variación de la señal debido a la portadora para trabajar con la señal en banda base, la cual se denotará con la letra x . Si tomamos como referencia al primer elemento al cual le llega el frente de onda de la señal transmitida podemos considerar que la fase de la señal recibida por este es nula, y expresar al resto de las señales recibidas por los demás elementos en función de la señal de referencia como:

$$x_m(\theta, t) = s(t)e^{-j \cdot m \cdot k \cdot d \sin(\theta)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, (M - 1), \quad (2.4)$$

donde se observa que la señal recibida por el m – ésimo receptor difiere con respecto a las recibidas por el resto de los receptores únicamente en una fase, la cual además depende únicamente del ángulo de arribo θ y de la separación entre elementos d . Esto intuye a pensar que si se conocen estos dos parámetros (la dirección de arribo y la disposición en la que están dispuestas las antenas receptoras) se podría conocer fácilmente las fases relativas entre todas las señales, pudiendo así corregirlas y sumarlas de manera tal de poder aumentar la relación señal a ruido en la señal recibida por el conjunto de antenas. A esta técnica se la conoce como conformación de haz.

Más allá de que este análisis se hizo teniendo en cuenta muchas suposiciones y únicamente para el caso de una disposición de elementos del arreglo de antenas en una única dimensión, más adelante se mostrará que este mismo análisis vale para casos generales, particularmente con distintas disposiciones de arreglos de antenas en dos dimensiones. También el mismo análisis se puede aplicar para la transmisión direccional de señales utilizando arreglos de antenas, sin embargo ese análisis no es motivo de estudio de este trabajo.

A lo largo de este capítulo se desarrollará toda la teoría detrás de la conformación de haz, haciendo hincapié en los distintos tipos de técnicas que existen para su implementación, definiendo propiamente a los arreglos de antenas en fase y detallando los dos algoritmos de estimación de dirección de arribo que fueron de mayor importancia para la realización de este proyecto.

2.2. Clasificación de conformadores de haz

Según como se realice la implementación, los conformadores de haz pueden recibir distintas clasificaciones. Si se pone el foco en la manera de manipular las señales recibidas podemos distinguir entre los conformadores de haz analógicos y digitales [6]. En el caso del conformador de haz analógico la señal que llega a cada elemento del arreglo de antenas pasa por un desfasador analógico que permite compensar las fases relativas de las señales generadas cuando el frente de onda llega con una cierta dirección a cada elemento. Luego de esto, se combinan todas las señales con un combinador de potencias y solo se digitaliza la salida de este. Si se cuentan con M elementos en el arreglo, este método reduce la dimensión de la señal recibida de M a 1, reduciendo también así gran parte de la información recibida y solo permitiendo la recepción en una única dirección. Además de corregir las fases de las señales recibidas se puede además variar las ganancias de cada elemento de manera tal de generar interferencias destructivas en las direcciones donde queremos eliminar cualquier tipo de interferencia. Un esquema de este conformador se muestra en la Figura 2.5a, donde los pesos w_n son los números complejos que multiplican la señal recibida por cada elemento del arreglo para compensar las fases relativas y generar ganancias nulas en las direcciones de interferencias, de manera tal de poder así sintetizar el correspondiente patrón de radiación.

En el conformador digital de haz las señales son muestreadas y digitalizadas para luego ser procesadas por un procesador digital. En este caso se preserva la información disponible manteniendo todas las señales recibidas por cada elemento. De esta manera la dimensión de la señal recibida se mantiene, lo cual brinda una gran flexibilidad para operar con las muestras recibidas, permitiendo obtener grandes prestaciones que no se encuentran disponibles en su contraparte analógica. Algunas de ellas son la capacidad de rechazar automáticamente las interferencias o de estimar automáticamente la dirección de arribo de las señales de interés, la posibilidad de generar múltiples haces con un único conformador, lo cual permite recibir señales en múltiples direcciones de arribo, la capacidad de realizar una calibración de las antenas por procesamiento o la posibilidad de incluir inteligencia artificial en la conformación de haz, tema en el cual se entrará un poco más en detalle en la Sección 10.6.

Según la técnica utilizada, los conformadores de haces pueden también clasificarse en convenciona-

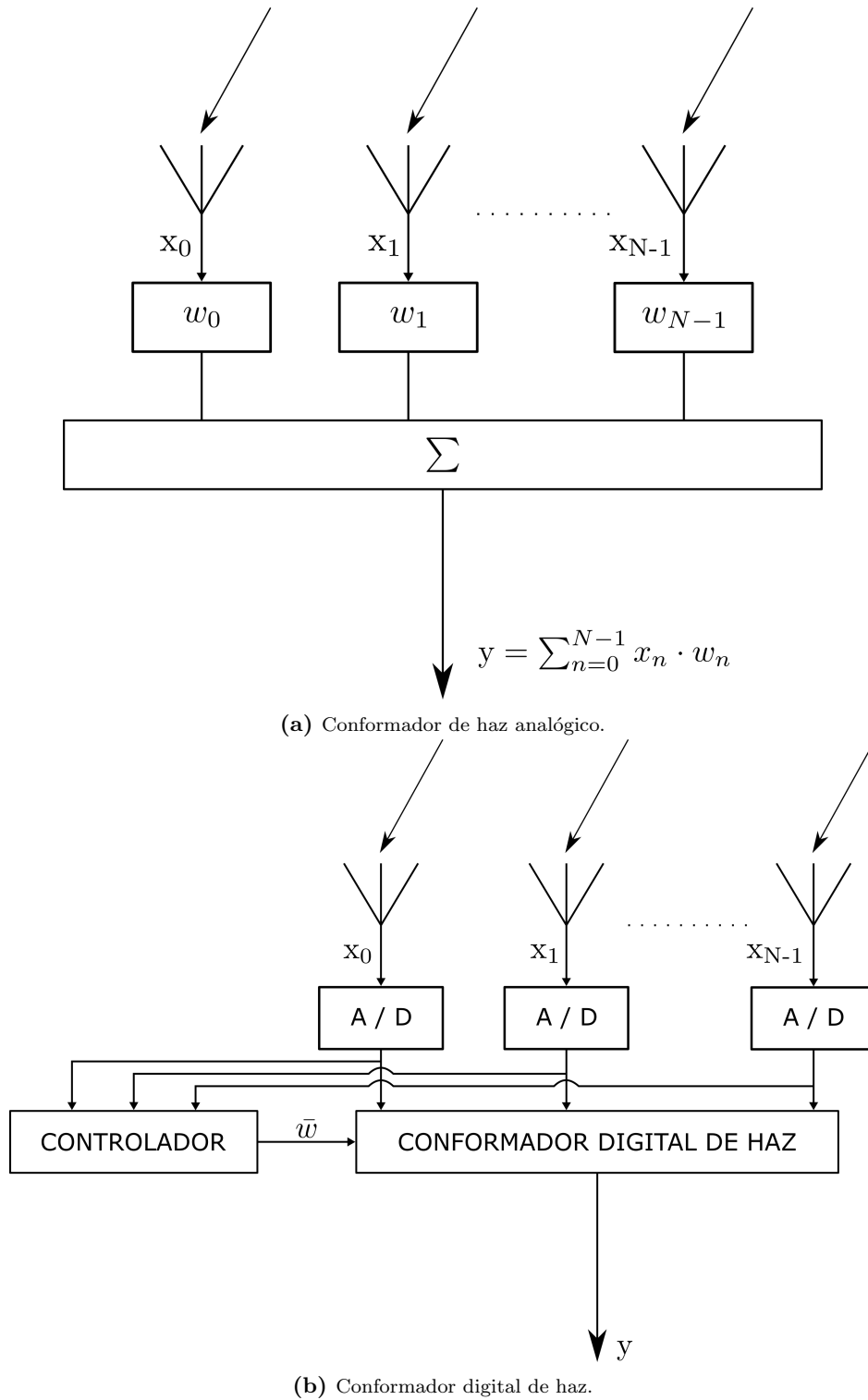


Figura 2.5: Clasificación de conformadores de haz según cómo manipulan la señal recibida.

les o adaptativos [7]. En el caso de los conformadores de haz convencionales el array de pesos y fases relativas se encuentran fijos, lo cual no permite realizar una adaptación a cambios en el tiempo ya sea en la dirección de arribo de la señal u otros cambios que pueden ocurrir en las características del arreglo o en el medio de transmisión. En cambio los conformadores adaptativos utilizan las propiedades estadísticas de la señal y del medio para variar los desfases y los pesos del filtro adaptativo y así poder hacer seguimiento de señales y mejorar la SNR.

A lo largo de este trabajo se estudiará la implementación de un conformador digital de haz adaptativo.

2.3. Arreglos de antenas en fase

Los arreglos de antenas en fase consisten en un conjunto de antenas estacionarias (elementos) dispuestas en una distribución unidimensional o bidimensional y que utilizan un control de variación de fases o retrasos temporales en cada elemento para escanear un haz en una dirección dada en el espacio y un control de amplitudes para dar forma al patrón de radiación [8]. Como ya se dijo, su principal uso se debe a la posibilidad que tienen de sintetizar un patrón de radiación direccional que puede ser dirigido electrónicamente.

La dimensión en la que están dispuestos los elementos del arreglo definen el direccionamiento que se le puede dar al haz sintetizado. En el caso de una disposición unidimensional solo se podrá dirigir el haz en función de la elevación, en cambio en disposiciones bidimensionales el haz se puede dirigir tanto en elevación como en azimut.

A primera vista pareciera ser que este tipo de antenas solo ofrece ventajas comparadas con las antenas de apertura fija. La relación de compromiso está en la dificultad de fabricación, ya que los arreglos de antenas en fase tienen complicaciones que no existen en otras antenas, como la necesidad de que no existan desfases en las conexiones entre los elementos o el problema del acoplamiento mutuo entre antenas debido a la poca separación que existe entre unas y otras.

2.3.1. Tipos de arreglos

A pesar de que los elementos de un arreglo de antenas en fase se pueden ubicar en cualquier disposición arbitraria, existen ciertas distribuciones que habilitan la utilización de técnicas que son de gran utilidad al trabajar con la conformación de haz, como lo es la posibilidad de utilizar algoritmos de estimación de dirección de arribo. Generalizando la expresión de la Ecuación 2.4 para el caso de elementos no isotrópicos, y asumiendo que la respuesta en frecuencia de los mismos es plana en todo rango de frecuencias, podemos ahora expresar a la señal recibida por cada elemento del arreglo como un vector definido como:

$$\bar{x}(\theta, t) = \bar{a}(\theta) \cdot s(t) + \bar{w}(t), \quad (2.5)$$

$$\bar{a}(\theta) = g(\theta) \cdot \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\bar{k} \cdot \bar{r}_0} & \dots & e^{-j\bar{k} \cdot \bar{r}_{M-1}} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

donde $\bar{a}(\theta)$ es el **vector de apuntamiento**, el cual aplica los correspondientes desfases a las señales de cada elemento y afecta su amplitud según la ganancia que tenga el arreglo de antenas en fase en la dirección de arribo de la señal, $g(\theta)$ es la ganancia de cada elemento del arreglo en la dirección θ si consideramos que todos los elementos son idénticos, \bar{k} es el vector de onda de la onda incidente y \bar{r}_m con $m = 0, 1, \dots, M-1$ es el vector que va desde el origen de coordenadas hasta el elemento m del arreglo. Como se puede ver, este vector de apuntamiento depende de la disposición del arreglo empleada. El vector $\bar{w}(t)$ es un vector de ruido aditivo que estará presente en cualquier implementación.

A continuación se mencionan las características de los tipos de arreglos más comunes.

Arreglo lineal uniforme

Dentro de las distribuciones regulares, el arreglo lineal uniforme (ALU) es la más simple de todas. Este arreglo consiste en disponer a los elementos colineales y separados a una misma distancia unos de otros, como se vio en el ejemplo de la Sección 2.1. Al ser una distribución unidimensional solo

permite direccionar el haz en una única dirección. Un esquema de este tipo de arreglos se muestra en la Figura 2.6.

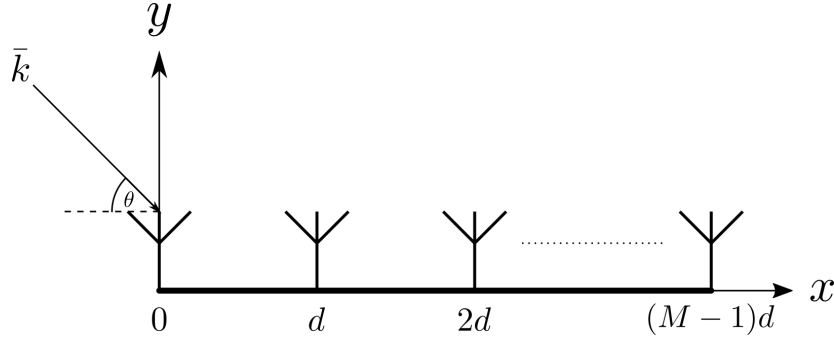


Figura 2.6: Arreglo lineal uniforme.

Si tomamos como el ángulo de arriba al indicado por la figura el vector de apuntamiento queda definido por:

$$\bar{a}_{ALU}(\theta) = g(\theta) \cdot \begin{bmatrix} 1 & e^{-jkd \cos \theta} & \dots & e^{-j(M-1)kd \cos \theta} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

donde $g(\theta)$ es la ganancia de cada elemento del arreglo en la dirección θ si consideramos que todos los elementos son idénticos.

Arreglo circular uniforme

Como su nombre lo indica, los arreglos circulares uniformes (ACU) consisten en disponer los elementos sobre una circunferencia, equidistante uno del otro, como se muestra en la Figura 2.7. Esta disposición bidimensional permite el escaneo tanto en elevación como en azimuth de las señales arribantes, y tienen la ventaja de que, por su simetría, permiten que el patrón de radiación sintetizado pueda ser rotado azimutalmente sin sufrir variaciones en su forma [9].

Para el caso bidimensional podemos definir al vector de onda \bar{k} correspondiente a la señal que arriba al arreglo en función del ángulo de elevación y el azimuth como:

$$\bar{k} = k \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) & \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

El vector \bar{r}_m considerando como origen de coordenadas el centro de la circunferencia que contiene al arreglo puede definirse como:

$$\bar{r}_m = R \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi \cdot m}{M}) & \sin(\frac{2\pi \cdot m}{M}) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

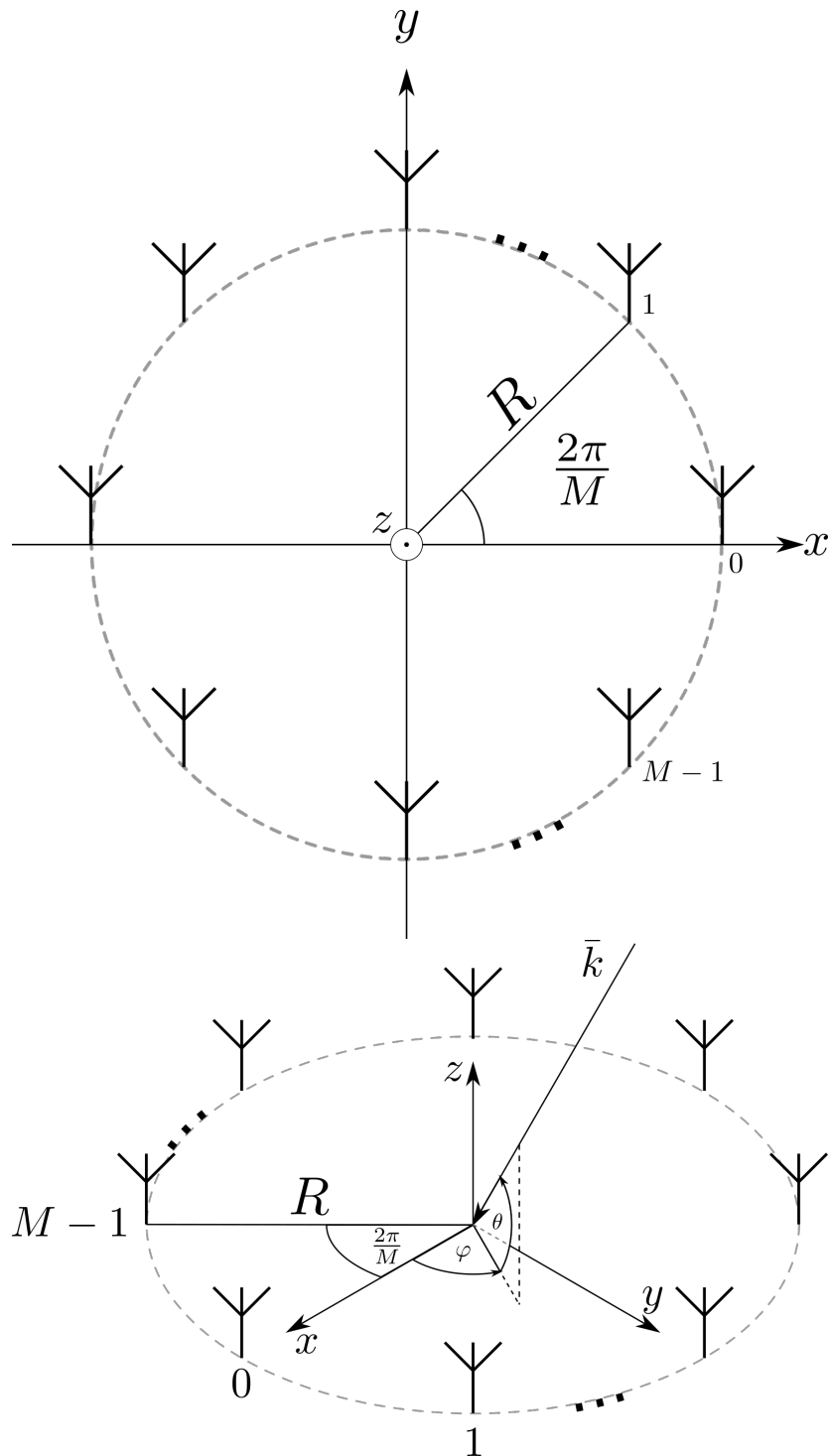
Entonces el vector de apuntamiento queda definido como:

$$\bar{a}_{ACU}(\theta, \varphi) = g(\theta, \varphi) \cdot \begin{bmatrix} e^{-jkR \cos \theta \cos \varphi} & \dots & e^{-jkR(\cos(\frac{2\pi \cdot m}{M}) \cos \theta \cdot \cos \varphi + \sin(\frac{2\pi \cdot m}{M}) \cos \theta \cdot \sin \varphi)} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Debe notarse que ahora la directividad de la antena queda expresada tanto en elevación como en azimuth.

Arreglo rectangular uniforme

El arreglo rectangular uniforme (ARU) es el tipo de arreglo de antenas en fase bidimensional más utilizado, debido a que permite contar con la mayor cantidad de elementos en un menor espacio, aumentando la **resolución** que se puede alcanzar tanto en elevación como azimuth, definiendo la resolución como la posibilidad de distinguir dos fuentes de señal poco espaciadas [5]. Esta disposición

**Figura 2.7:** Arreglo circular uniforme.

consiste en ubicar a los elementos en una grilla rectangular, manteniendo una misma distancia d cada uno con su adyacente. Un esquema de este tipo de arreglos se muestra en la Figura 2.8.

El vector \bar{r}_{m_x, m_y} que une al elemento ubicado en las coordenadas $d \cdot (m_x, m_y)$ con el origen de coordenadas, el cual va a estar ubicado en uno de los elementos del extremo del arreglo que se considerará como elemento de referencia, puede definirse como:

$$\bar{r}_{m_x, m_y} = d \begin{pmatrix} m_x & m_y \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

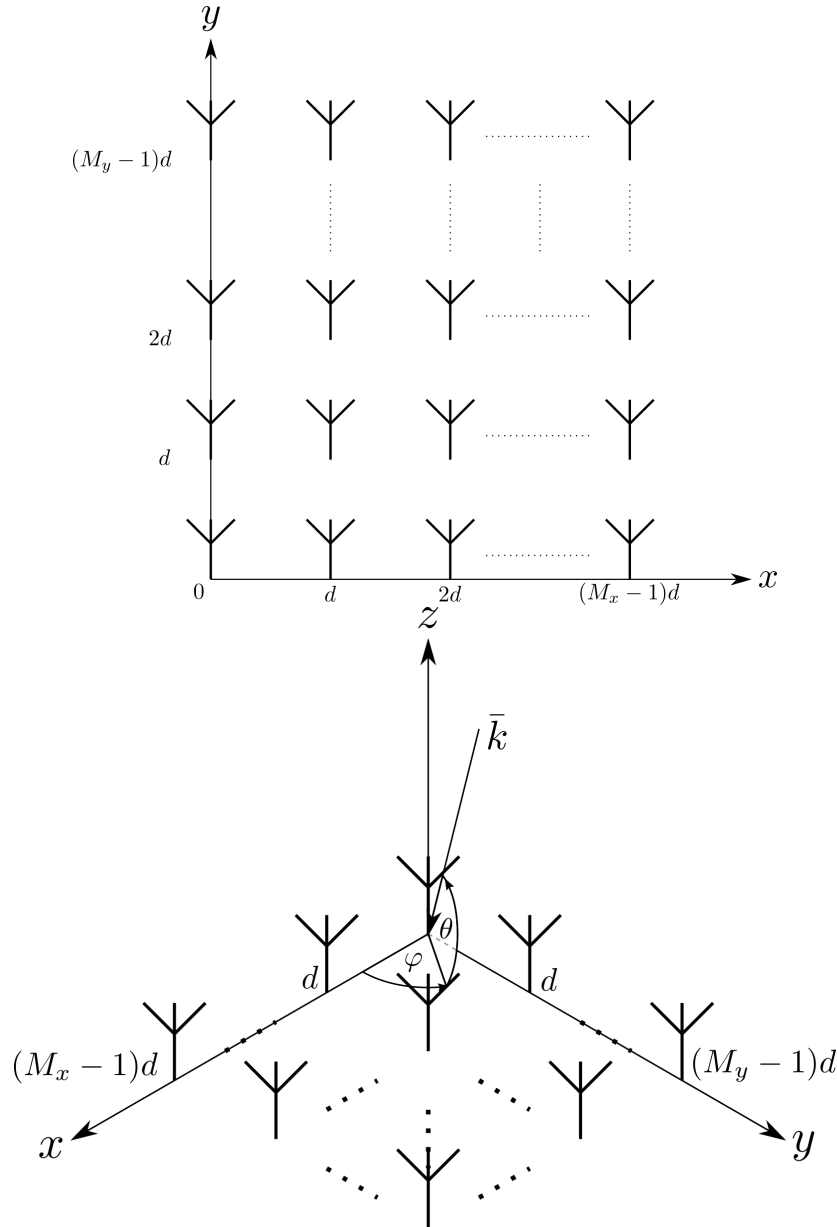


Figura 2.8: Arreglo rectangular uniforme.

Debido a que en este caso tenemos una disposición matricial de elementos se debe elegir una convención para identificar a cada elemento del arreglo con una ubicación de un vector. La convención elegida es la de apilar cada una de las columnas a lo largo del eje definido como y , de manera que el vector de muestras puede definirse como:

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_{0,0}(t) & \cdots & x_{0,M_y-1}(t) & \cdots & x_{M_x-1,0}(t) & \cdots & x_{M_x-1,M_y-1}(t) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Teniendo en cuenta lo anterior y utilizando el vector de onda definido en 2.8, podemos escribir el correspondiente vector de apuntamiento como:

$$\bar{a}_{ARU}(\theta, \varphi) = g(\theta, \varphi) \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cdots & e^{-jkd[(M_x-1)\cos\theta\cos\varphi + (M_y-1)\cos\theta\sin\varphi]} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

El arreglo rectangular uniforme es el tipo de arreglo más importante para el resto de este trabajo ya que es el elegido para realizar la implementación del sistema de conformación de haz que se busca

implementar.

2.4. Problema a resolver

Según los conceptos que se detallaron a lo largo de esta sección se pueden detallar aún más el objetivo mencionado en la Sección 1.0.1 y decir que el objetivo de este proyecto es realizar la implementación de un conformador digital de haz adaptativo para la recepción de señales de satélites LEO utilizando un arreglo de antenas en fase rectangular uniforme de 16 elementos dispuestos en una matriz de 4×4 . La señal satelital arriba al arreglo de antenas con una cierta dirección identificada por sus ángulos de elevación y azimut, identificados respectivamente por las letras θ y φ . Un esquema de este problema puede verse en la Figura 2.9.

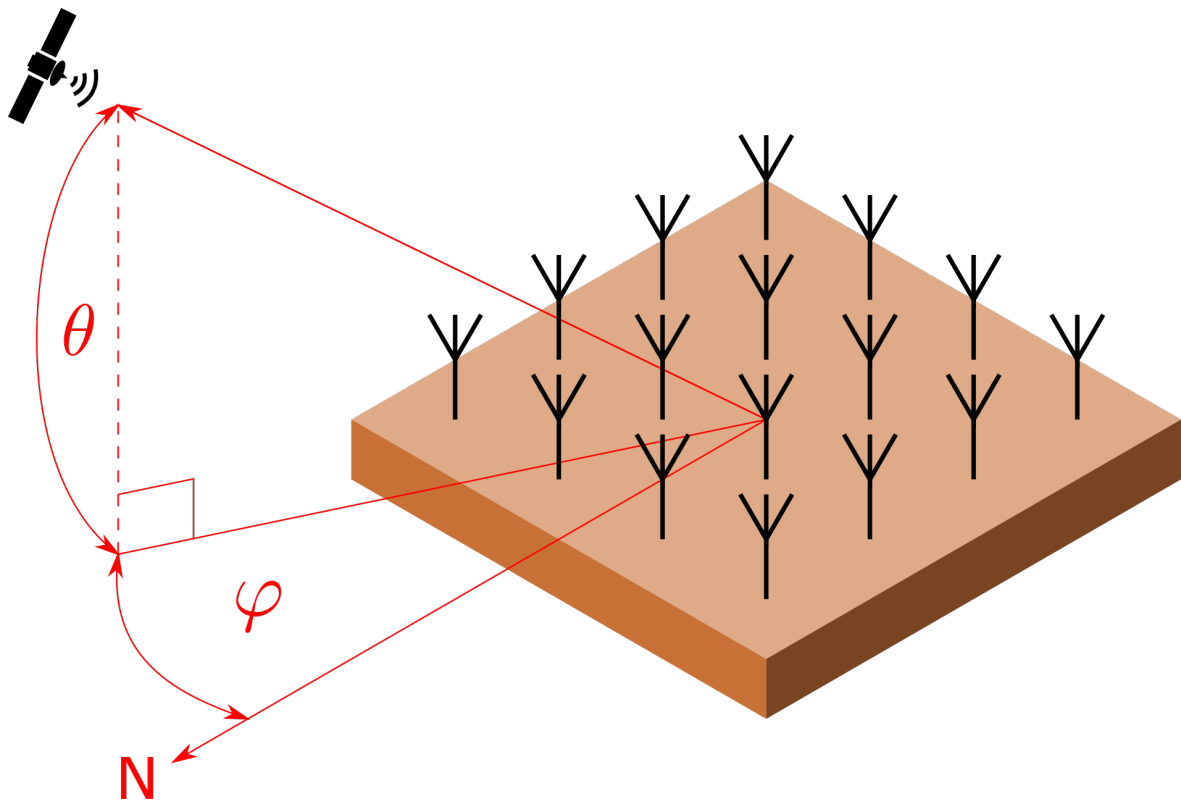


Figura 2.9: Esquema del problema a resolver.

Para realizar la conformación de haz se realizará la estimación de la dirección de arribo utilizando un algoritmo apropiado, el cual brindará esa información al conformador que se encargará de entregar la señal resultante. En la siguiente sección se hará un análisis de dos algoritmos de estimación de dirección de arribo, haciendo hincapié en las comparaciones en el rendimiento y la fiabilidad entre ambos.

Capítulo 3

Algoritmos de estimación de dirección de arribo.

“Son nuestras elecciones, Harry, las que muestran lo que somos, mucho más que nuestras habilidades.”

— Albus Dumbledore

3.1. Introducción

Al momento de diseñar un conformador de haz adaptativo uno de los pasos más importantes es definir el algoritmo de estimación de **dirección de arribo**. Estos algoritmos explotan las propiedades estadísticas de las señales recibidas por los elementos del arreglo de antenas y entregan la dirección de arribo en las dimensiones correspondientes según el tipo de arreglo con el que se trabaje. El estudio de los algoritmos de estimación de DOA data **desde** la Segunda Guerra Mundial con la aparición del conformador de Bartlett [5], el cual consiste en hacer un escaneo de potencia en el dominio de búsqueda identificando la dirección que maximiza la potencia de salida. Este algoritmo pertenece al grupo de algoritmos basados en el análisis espectral, los cuales tienen la desventaja de que su resolución depende fuertemente del ancho del haz sintetizado y que requieren de una búsqueda en una o dos dimensiones para realizar la estimación, lo cual reduce su viabilidad si es que se los quiere utilizar para seguimientos de objetivos en tiempo real. Posteriormente, nuevos métodos fueron **descubiertos**, mejorando así el desempeño en la detección y en la eficiencia, como son los métodos basados en la separación de subespacios de señal y ruido, los cuales se basan en explotar las propiedades geométricas del arreglo de antenas y tienen la ventaja de que su resolución **no está limitada a la apertura del mismo**. Dentro de este tipo de algoritmos de estimación de DOA, los algoritmos *Multiple Signal Classification* (**MUSIC**) y *Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques* (**ESPRIT**) son dos de los más importantes, y son, además, los que se estudiarán a lo largo de este capítulo.

La disponibilidad en la utilización de un algoritmo dependerá fuertemente del tipo de arreglo con el que se cuente para la implementación, es por esto que a la hora de elegir la manera de disponer los elementos del arreglo para realizar un conformador de haz adaptativo hay que tener en cuenta cuáles distribuciones son aquellas que brindan mejores opciones para la estimación de DOA. Para dar un ejemplo, el algoritmo **Root-MUSIC** tiene un costo computacional relativamente bajo para lograr la **estimación** ya que su solución consiste simplemente en encontrar las raíces de un polinomio, pero solo funciona en arreglos lineales uniformes, por ende solo permite estimar la dirección de arribo en una

única dimensión.

Vale la pena aclarar que las técnicas utilizadas en este capítulo permiten, también, obtener información de otros parámetros de las señales arribantes, como pueden ser la frecuencia de portadora de las mismas o la cantidad de fuentes de señal que está recibiendo **la antena, los cuales los hacen algoritmos muy versátiles dentro del mundo del procesamiento estadístico de señales.**

Para realizar el análisis de los algoritmos mencionados se deberá primero definir un modelo de datos común que refleje matemáticamente cómo pueden ser representadas las muestras obtenidas por el arreglo de antenas.

3.1.1. Modelo de datos

Antes de especificar el modelo de datos es necesario aclarar que para los próximos análisis se considerará que el medio de transmisión es lineal, **y por ende vale** el principio de superposición. Debido a esto, si consideramos que a un arreglo de M elementos está llegando un número D de señales **en** distintas direcciones, la Ecuación 2.5 puede reescribirse como:

$$\bar{x}(t) = \sum_{d=0}^{D-1} \bar{a}(\theta_d, \varphi_d) \cdot s_d(t) + \bar{w}(t), \quad (3.1)$$

donde $\bar{a}(\theta_d, \varphi_d)$ con $d = 0, 1, \dots, D-1$ es el vector de apuntamiento que corresponde a la señal $s_d(t)$ llegando al arreglo con dirección (θ_d, φ_d) , **la cual es medida en el elemento de referencia.** Esta ecuación puede reescribirse en forma matricial haciendo:

$$\bar{x}(t) = \mathbf{A}(\theta, \varphi) \bar{s}(t) + \bar{w}(t), \quad (3.2)$$

$$\mathbf{A}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \bar{a}(\theta_0, \varphi_0) & \bar{a}(\theta_1, \varphi_1) & \cdots & \bar{a}(\theta_{D-1}, \varphi_{D-1}) \end{bmatrix}_{(M \times D)} \quad (3.3)$$

donde $\bar{s}(t) = [s_0(t), s_1(t), \dots, s_{D-1}(t)]^T$.

Si tomamos una instantánea de las muestras del arreglo vemos que las mismas pueden representarse como un vector de números complejos de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \mathbf{A}(\theta, \varphi) \bar{s} + \bar{w},$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{M-1} \end{bmatrix}_{(M \times 1)} = \begin{bmatrix} \bar{a}(\theta_0, \varphi_0) & \bar{a}(\theta_1, \varphi_1) & \cdots & \bar{a}(\theta_{D-1}, \varphi_{D-1}) \end{bmatrix}_{(M \times D)} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{D-1} \end{bmatrix}_{(D \times 1)} + \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{M-1} \end{bmatrix}_{(M \times 1)}$$

A partir de esto podemos ver que el vector de muestras \bar{x} pertenece a \mathbb{C}^M . Además, en ausencia de ruido, cada vector de muestras puede expresarse como combinación lineal de los vectores de \mathbf{A} , siendo los elementos de \bar{s} los coeficientes de esta combinación. Por ende, si $\bar{w} = \bar{0}$, las muestras estarán confinadas en un subespacio de dimensión D dentro de \mathbb{C}^M , generado por las columnas de \mathbf{A} , las cuales conforman la base del **subespacio de señal** \mathcal{S}_S [2]. Si definimos como \mathfrak{A} al conjunto que contiene a todos los posibles vectores de apuntamiento, para el caso **que** la dirección de arribo **sea** bidimensional **al** estos vectores definirán una superficie con forma de “sábana” en \mathbb{C}^M , y en el caso unidimensional definirán una curva cerrada. Identificar cuáles de todos los vectores de \mathfrak{A} conforman la base del subespacio de señal corresponde a encontrar las intersecciones entre la superficie M -dimensional formada por \mathfrak{A} y el subespacio de señal [10]. En la Figura 3.1 se muestra una representación para el caso de estimación de DOA unidimensional, con $D = 2$ y $M = 3$. Si **asumimos** que la función

que mapea las posibles direcciones de arribo (θ, φ) a elementos de \mathfrak{A} es inyectiva, encontrar los vectores de \mathbf{A} equivale a encontrar las direcciones de arribo de las D señales recibidas. Esto puede lograrse mediante un diseño apropiado del arreglo de antenas [2]. La dificultad radica ahora en definir \mathcal{S}_S a partir de las muestras obtenidas.

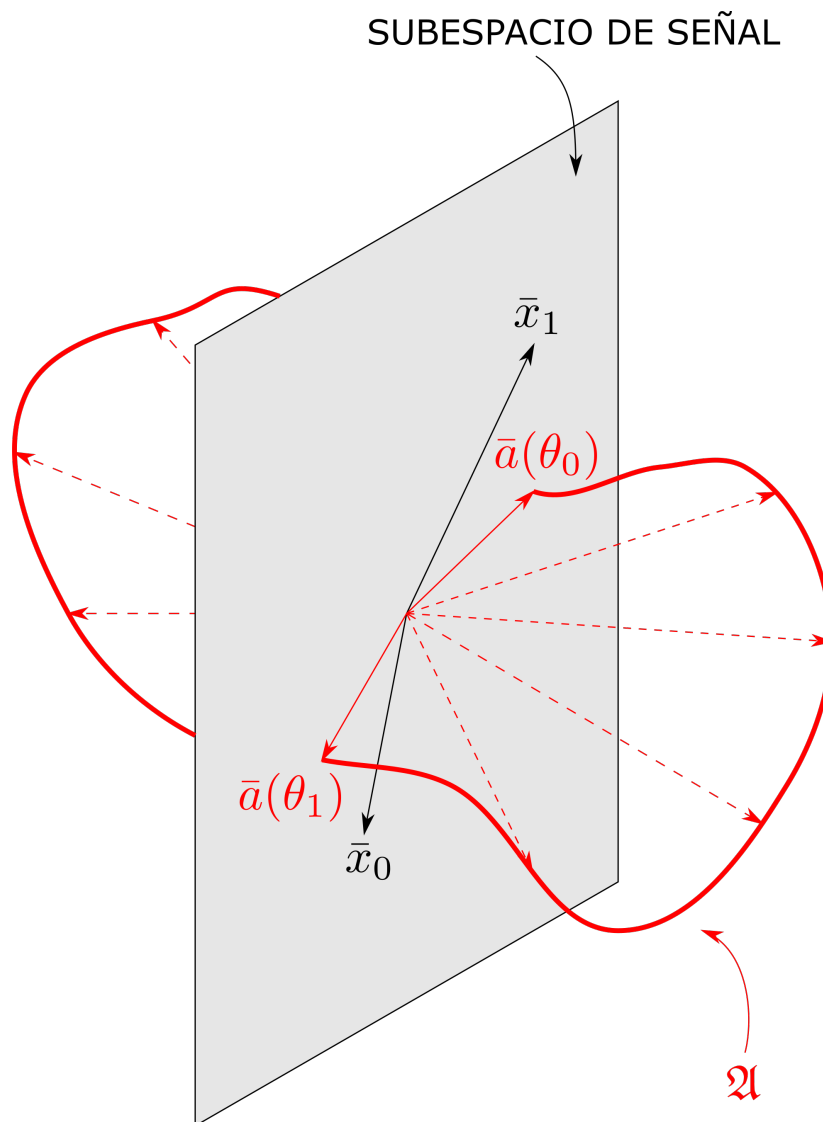


Figura 3.1: Representación geométrica de la estimación de DOA mediante la intersección del conjunto \mathfrak{A} con el subespacio de señal para el caso de DOA unidimensional, con $D = 2$ y $M = 3$.

La matriz de covarianza \mathbf{R}_{XX}

Al muestrear digitalmente cada elemento del arreglo tendremos el equivalente a un vector de muestras por cada período de muestreo. Si se quiere representar a todas las muestras tomadas durante

N períodos de muestreo se puede escribir:

$$\mathbf{X}_{(M \times N)} = \mathbf{A}(\theta, \varphi)_{(M \times D)} \times \mathbf{S}_{(D \times N)} + \mathbf{W}_{(M \times N)} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_0^0 & x_0^1 & \cdots & x_0^{N-1} \\ x_1^0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{M-1}^0 & \cdots & \cdots & x_{M-1}^{N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_0^0 & s_0^1 & \cdots & s_0^{N-1} \\ s_1^0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ s_{D-1}^0 & \cdots & \cdots & s_{D-1}^{N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_0^0 & w_0^1 & \cdots & w_0^{N-1} \\ w_1^0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ w_{M-1}^0 & \cdots & \cdots & w_{M-1}^{N-1} \end{bmatrix}$$

Para simplificar la notación a partir de ahora se indicará **al vector de apuntamiento** simplemente como **A**.

A partir de esto podemos encontrar la matriz de covarianza de las muestras haciendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} &= \overline{\mathbf{X}\mathbf{X}^H} = \overline{(\mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{W})(\mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{W})^H} = \overline{(\mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{W})(\mathbf{S}^H \mathbf{A}^H + \mathbf{W}^H)} \\ &= \overline{\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{S}^H \mathbf{A}^H} + \overline{\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{W}^H} + \overline{\mathbf{W}\mathbf{S}^H \mathbf{A}^H} + \overline{\mathbf{W}\mathbf{W}^H} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{R}_{\mathbf{S}\mathbf{S}}\mathbf{A}^H + \mathbf{R}_{\mathbf{W}\mathbf{W}} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{\mathbf{S}\mathbf{S}}\mathbf{A}^H + \sigma_w^2 \mathbf{I}_M \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde se **asumió** que las señales pueden ser modeladas como procesos estocásticos **estacionarios** y de media cero, y que el ruido es aditivo, blanco y gaussiano, de manera tal que la correlación entre la señal y el ruido **sea** nula. La matriz **R_{WW}** es la matriz de autocorrelación del ruido, siendo **I_M** la matriz identidad de ~~tamaño~~ $M \times M$ y $\sigma_w^2 = \mathbf{E}\{|w[n]|^2\}$ el nivel de potencia de ruido. Es necesario aclarar que la operación $\overline{\mathbf{X}\mathbf{X}^H}$ consiste en realizar el promedio entre las matrices obtenidas al multiplicar cada uno de los vectores columna de **X** por su transpuesto conjugado, es decir:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}^n (\bar{x}^n)^H, \quad (3.6)$$

siendo \bar{x}^n la columna **n** de la matriz **X**. En este análisis se considera la matriz de correlación teórica, la cual requiere de infinitas muestras para poder ser obtenida. En la práctica, la matriz de correlación **R_{XX}** debe ser estimada a partir de las muestras obtenidas haciendo [11]:

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} = \frac{1}{N} \mathbf{X}\mathbf{X}^H \quad (3.7)$$

siendo N la cantidad de muestras tomadas en la ventana temporal de medición. En lo que resta del análisis se seguirá considerando la correlación teórica, debiendo el lector tomar las respectivas consideraciones.

Debido a que los vectores de **A** definen la base del subespacio de señal, la matriz **AR_{SS}A^H** de tamaño $M \times M$ tiene rango D , por lo que es de rango incompleto, a diferencia de **R_{WW}** que es de rango completo. Si se considera que las señales que conforman la matriz **S** no están correlacionadas entre sí, la matriz de autocorrelación de señal **R_{SS}** es de la forma:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{S}\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} |s_0|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |s_1|^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & |s_{D-1}|^2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

siendo cada elemento de la diagonal la potencia de cada una de las señales.

Si se aplica la descomposición en autovalores a la matriz $\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$ puede escribirse [11]:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^H, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_{M-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = [\bar{e}_0 \quad \bar{e}_1 \quad \cdots \quad \bar{e}_{M-1}]$$

donde $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{M-1}$ son los autovalores de $\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$ en orden descendente y $\bar{e}_0, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{M-1}$ sus correspondientes autovectores. Los D autovalores más grandes serán iguales a la suma de los autovalores de $\mathbf{A}\mathbf{R}_{\mathbf{S}\mathbf{S}}\mathbf{A}^H$ más los autovalores de $\mathbf{R}_{\mathbf{W}\mathbf{W}}$, los cuales son todos iguales. Los $M - D$ autovalores más chicos solo estarán conformados por los autovalores de $\mathbf{R}_{\mathbf{W}\mathbf{W}}$. Analíticamente se puede escribir [11]:

$$\lambda_m = M \cdot |s_m|^2 + \sigma_w^2, \quad 0 \leq m \leq D - 1$$

$$\lambda_m = \sigma_w^2, \quad D \leq m \leq M - 1$$

Por ende, si separamos los autovalores y autovectores correspondientes a las señales y al ruido podemos realizar la siguiente descomposición:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} = \mathbf{E}_S \mathbf{\Lambda}_S \mathbf{E}_S^H + \sigma_w^2 \mathbf{E}_W \mathbf{E}_W^H \quad (3.10)$$

$$\mathbf{\Lambda}_S = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_{D-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_S = [\bar{e}_0 \quad \bar{e}_1 \quad \cdots \quad \bar{e}_{D-1}], \quad \mathbf{E}_N = [\bar{e}_D \quad \bar{e}_{D+1} \quad \cdots \quad \bar{e}_{M-1}]$$

donde los vectores de \mathbf{E}_S conforman otra base del subespacio de señal \mathcal{S}_S y los vectores de \mathbf{E}_N conforman una base del subespacio de ruido \mathcal{S}_N .

Esto demuestra que a partir de una buena estimación de la matriz de covarianza de las muestras se pueden hallar las bases de los subespacios de señal y ruido, siempre y cuando la cantidad de elementos del arreglo de antenas M sea mayor a la cantidad de señales arribantes D , ya que sino el subespacio de las muestras sería de dimensión menor al subespacio de señal y no se podría realizar la separación con el subespacio de ruido. Para el caso práctico en el que la matriz de correlación de las muestras debe estimarse ocurrirá que los autovalores $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{W}\mathbf{W}}$ no serán iguales a σ_w^2 , y en los casos en los que la relación señal a ruido sea baja puede ser difícil diferenciar la frontera entre autovalores de ruido y autovalores de señal. Para encontrar esta frontera y así poder determinar la cantidad de señales arribantes para realizar la descomposición en subespacios de señal y ruido se puede recurrir a varios enfoques. Algunos de ellos se detallan en el Capítulo 6. Debido a que la matriz de autocorrelación muestral $\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$ es simétrica, sus autovectores son ortogonales, lo cual implica que el subespacio de ruido y el subespacio de señal son ortogonales entre sí, la cual es una característica de vital importancia para los algoritmos de estimación de dirección de arribo que se tratarán a continuación.

Descomposición en valores singulares (SVD)

Antes de iniciar con el análisis de los algoritmos de estimación de arribo es conveniente mencionar otra manera de realizar la descomposición del subespacio muestral en subespacio de señal y ruido sin tener que calcular la descomposición en autovalores de la matriz de covarianza $\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$. La alternativa

propuesta consiste en utilizar todo el conjunto de datos, es decir la matriz completa \mathbf{X} , y aplicarle la descomposición en valores singulares (SVD por sus siglas en inglés), la cual es una generalización de la descomposición en autovalores para matrices que no son cuadradas. Esta técnica tiene la ventaja por sobre la anterior de que no eleva al cuadrado los elementos de \mathbf{X} , como sí ocurre cuando se calcula su matriz de covarianza, por ende es capaz de reducir errores de redondeo debidos a la representación utilizada al operar con matrices mal acondicionadas [2].

Si se tiene que la descomposición en valores singulares de \mathbf{X}/\sqrt{N} viene dada por $\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H$ se puede demostrar que esta descomposición genera el mismo subespacio que la descomposición por autovalores de la matriz de covarianza viendo que:

$$\frac{1}{N}\mathbf{X}\mathbf{X}^H = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^2\mathbf{U}^H = \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} \quad (3.11)$$

dado que $\mathbf{\Sigma}$ es diagonal y real, y \mathbf{U} y \mathbf{V} son matrices unitarias. Por ende, los vectores singulares de la matriz \mathbf{U} son los autovectores de matriz de covarianza muestral $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$, por ende generan el mismo espacio.

3.2. El algoritmo MUSIC

Cuando las muestras obtenidas por el arreglo de antenas están contaminadas con ruido, y para el caso práctico en el que se cuentan con una cantidad N de muestras finitas, los subespacios obtenidos mediante el método descrito en la sección anterior son estimaciones del subespacio de ruido y señal, es decir, $\hat{\mathcal{S}}_S$ y $\hat{\mathcal{S}}_N$. Al no ser los subespacios teóricos, $\hat{\mathcal{S}}_S$ tiene componentes del subespacio de ruido y viceversa, por ende $\hat{\mathcal{S}}_S$ es ortogonal a \mathcal{S}_S . Esta cualidad de $\hat{\mathcal{S}}_S$ provoca que el método de encontrar las intersecciones entre \mathcal{S}_S y los elementos de \mathfrak{A} no pueda aplicarse, debido a que $\hat{\mathcal{S}}_S \cap \mathfrak{A} = \emptyset$, y de la misma manera no existen elementos de \mathfrak{A} que sean ortogonales a $\hat{\mathcal{S}}_N$ [2]. Sin embargo, aquellos elementos de \mathfrak{A} que se encuentren más cercanos a $\hat{\mathcal{S}}_S$ pueden ser considerados como los elementos que generan a \mathcal{S}_S y, por ende, los vectores que indican las direcciones de arribo de las D señales arribantes. La cuestión ahora es definir una noción de cercanía. En su altamente referenciado artículo de 1986 [10] Ralph O. Schmidt define una posible medida de distancia de un vector \bar{v} al subespacio de señal estimado $\hat{\mathcal{S}}_S$ como:

$$d^2 := \bar{v}^H \hat{\mathbf{E}}_N \hat{\mathbf{E}}_N^H \bar{v} \quad (3.12)$$

A partir de esta ecuación se pueden encontrar los elementos de \mathfrak{A} más cercanos al subespacio $\hat{\mathcal{S}}_S$ mediante una búsqueda en todos los elementos de \mathfrak{A} . Una forma gráfica de verlo es definiendo el “pseudoespectro”¹ $\mathbf{P}_{\mathbf{MU}}$ como [10]:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{MU}}(\theta, \varphi) = \frac{1}{d^2} = \frac{1}{\bar{a}(\theta, \varphi)^H \hat{\mathbf{E}}_N \hat{\mathbf{E}}_N^H \bar{a}(\theta, \varphi)} \quad (3.13)$$

siendo $\bar{a}(\theta, \varphi)$ cualquier elemento de \mathfrak{A} . Como se dijo, esta distancia será mínima cuando el vector medido sea uno de los elementos de \mathfrak{A} que pertenecen a \mathcal{S}_S , por ende si se grafica este pseudoespectro en todo el dominio de direcciones de arribo, es decir, en el dominio bidimensional que contiene a todos los posibles ángulos de elevación y azimut, este pseudoespectro mostrará picos en los puntos donde $\bar{a}(\theta, \varphi)$ se acerca más al subespacio $\hat{\mathcal{S}}_S$. El algoritmo *Multiple Signal Classification* propuesto por Schmidt consiste en realizar una estimación de \mathcal{S}_S y \mathcal{S}_N para luego conformar el pseudoespectro $\mathbf{P}_{\mathbf{MU}}$ y finalmente encontrar los D picos máximos, los cuales indicarán las correspondientes direcciones de arribo de las D señales arribantes. Como se mostró, este algoritmo no requiere de ninguna disposición

¹El término “pseudoespectro” es utilizado debido a que la magnitud representada por la Ecuación 3.13 no expresa información sobre la potencia de una señal, sino que hace una similitud entre su forma gráfica y los espectros de potencia.

particular de los elementos del arreglo, lo cual permite ser utilizado en cualquier caso en el que la forma del arreglo sea conocida. Debido a que este algoritmo requiere de una búsqueda en todo el dominio de DOA, la complejidad computacional puede ser muy alta según la cantidad de dimensiones que tenga la dirección de arribo y la resolución que se desee alcanzar en la detección de los picos. [Algunas mediciones](#) con respecto a este asunto se muestran en la Sección 3.4.

3.2.1. Algoritmo

A continuación se detallan los pasos para implementar el algoritmo MUSIC:

1. Formar la matriz \mathbf{X} definida en la Ecuación 3.4 utilizando varias muestras temporales y armar $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$ como se muestra en la Ecuación 3.7 o descomponer la matriz \mathbf{X} usando SVD.
2. Hallar las matrices \mathbf{E} y $\mathbf{\Lambda}$ de la descomposición en autovalores de $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$ que se muestra en la Ecuación 3.9.
3. Estimar el número \hat{D} de señales recibidas. Las técnicas para lograr esto se mencionan en el Capítulo 6.
4. Armar la matriz \mathbf{E}_N como se muestra en la Ecuación 3.10.
5. Evaluar $\mathbf{P}_{\mathbf{MU}}(\theta, \varphi)$ en función de θ y φ utilizando la Ecuación 3.13.
6. Elegir los \hat{D} picos máximos de $\mathbf{P}_{\mathbf{MU}}(\theta, \varphi)$ y extraer sus coordenadas (θ, φ) correspondientes a las direcciones de arribo de las \hat{D} señales recibidas.

3.3. El algoritmo ESPRIT

En 1989 Richard Roy y Thomas Kailath se alejan del enfoque de cercanía al subespacio de señal planteado por Schmidt y desarrollan un nuevo algoritmo de estimación de parámetros de señales llamado *Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques* (**ESPRIT**), el cual explota [las invariencias](#) en la geometría del arreglo de antenas.

Supongamos que tenemos un arreglo con una geometría arbitraria pero que está compuesta de elementos agrupados de a pares separados de manera traslacional por un vector $\bar{\Delta}$ como se muestra en la Figura 3.2. [Los elementos dentro de un par](#) tienen el mismo patrón de radiación, pero entre pares no se requiere que sean iguales.

Bajo esta geometría, se puede considerar que el arreglo está compuesto por dos subarreglos, identificados en la figura por los elementos azules y los elementos rojos, los cuales conforman los subarreglos Z_x y Z_y [respectivamente](#). Estos subarreglos son idénticos entre sí, con la única diferencia de que uno está trasladado con respecto al otro por el vector $\bar{\Delta}$. Las señales recibidas por cada elemento del par i pueden ser expresadas como:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \sum_{d=0}^{D-1} a_i(\theta_d, \varphi_d) \cdot s_d(t) + w_{x,i}(t) \\ y_i(t) &= \sum_{d=0}^{D-1} a_i(\theta_d, \varphi_d) \cdot e^{j\bar{k} \cdot \bar{\Delta}} \cdot s_d(t) + w_{y,i}(t), \end{aligned} \quad (3.14)$$

siendo $x_i(t)$ la señal recibida por el elemento perteneciente al subarreglo Z_x y dentro del [par \$i\$](#) , $y_i(t)$ la señal recibida por el elemento perteneciente al subarreglo Z_y dentro del [par \$i\$](#) y $a_i(\theta_d, \varphi_d)$ el elemento del vector de apuntamiento que corresponde al elemento de referencia del par [par \$i\$](#) (en este

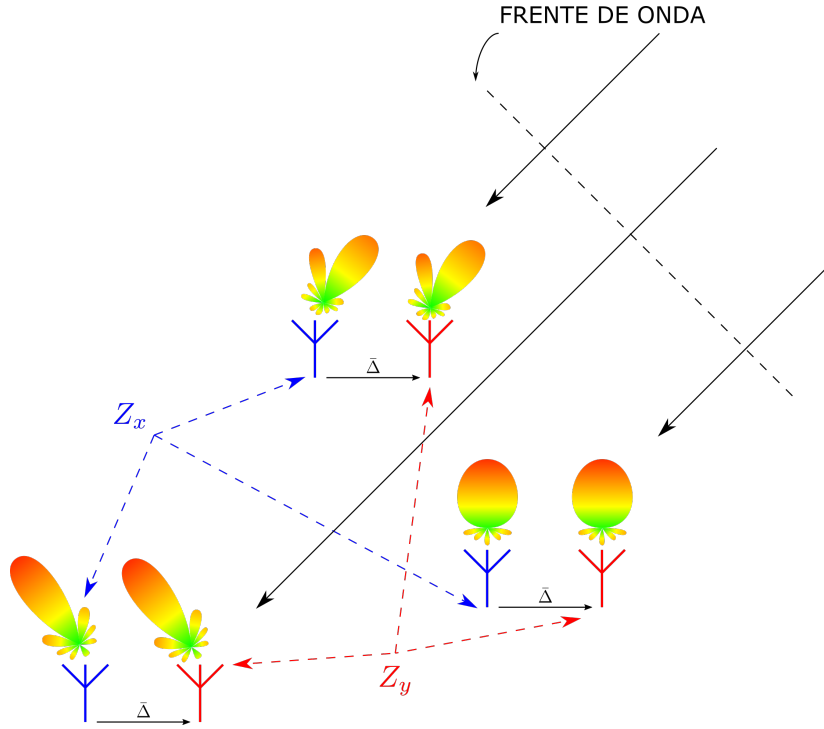


Figura 3.2: Geometría del arreglo de antenas para el análisis del algoritmo ESPRIT. En azul y en rojo se separan los elementos pertenecientes a los subarreglos Z_x y Z_y respectivamente [2].

caso el perteneciente a Z_x) para una dirección de arribo (θ_d, φ_d) . La dirección del vector de traslación $\bar{\Delta}$ indica la dirección con respecto a la cual se podrá estimar el ángulo de arribo. Por ejemplo, si la traslación se realiza sobre el eje x , solo se podrán estimar ángulos de arribo con respecto a este eje. Como consecuencia de esto, en el caso de la estimación bidimensional con ángulos de elevación y azimut se deberá contar con dos vectores de traslación, uno en cada dimensión de interés.

Combinando las salidas de todos los elementos de cada subarreglo se pueden expresar a las señales recibidas como:

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= \mathbf{A}s(t) + \bar{n}_x(t), \\ \bar{y}(t) &= \mathbf{A}\Phi s(t) + \bar{n}_y(t),\end{aligned}\tag{3.15}$$

donde \mathbf{A} es la matriz de apuntamiento correspondiente al subarreglo Z_x y Φ una matriz diagonal de tamaño $D \times D$ cuyos elementos están conformados por los desfases producidos entre pares de elementos para los D frentes de ondas recibidos, es decir:

$$\Phi = \begin{bmatrix} e^{j\bar{k}_0 \cdot \bar{\Delta}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{j\bar{k}_1 \cdot \bar{\Delta}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & e^{j\bar{k}_{D-1} \cdot \bar{\Delta}} \end{bmatrix} = \text{diag}\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{D-1}\}\tag{3.16}$$

siendo $\phi_d = e^{j\bar{k}_d \cdot \bar{\Delta}}$ con $d = 0, 1, \dots, D-1$. La matriz Φ recibe el nombre de **operador de rotación de subespacio** [2]. Si se define al número de pares de elementos como M , de manera tal que el número

de elementos sea $2M$, y al vector de salida del arreglo entero como $\bar{z}(t)$ podemos escribirlo como:

$$\bar{z}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}}s(t) + \bar{\mathbf{n}}(t), \quad (3.17)$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}\Phi \end{bmatrix}_{(2M \times D)}, \quad \bar{\mathbf{n}}(t) = \begin{bmatrix} \bar{n}_x \\ \bar{n}_y \end{bmatrix}_{(2M \times 1)}$$

Una consideración a tener en cuenta para el resto del análisis es que D tiene que ser menor a M , aunque **sobre posteriormente** se mostrará que en realidad D puede ser como máximo menor a la cantidad total de elementos en el arreglo.

Los vectores de $\bar{\mathbf{A}}$ generan el subespacio de señal. Si se define la matriz \mathbf{Z} como la matriz conformada por los vectores obtenidos luego de muestrear N veces a todos los elementos del arreglo de antenas podemos expresarla de la siguiente manera:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \bar{z}_0 & \bar{z}_1 & \cdots & \bar{z}_{N-1} \end{bmatrix}_{(2M \times N)}, \quad (3.18)$$

donde \bar{z}_n con $n = 0, 1, \dots, N-1$ es el vector de muestras tomadas en el instante n . Si se aplica la descomposición en subespacio de ruido y señal de las muestras contenidas en la matriz \mathbf{Z} , como se mostró en la Sección 3.1.1, puede verse que la matriz \mathbf{E}_S genera el mismo espacio $2M$ -dimensional que los vectores de $\bar{\mathbf{A}}$, ya que ambos generan el subespacio de señal. **Debido a esto**, debe existir una matriz de transformación invertible \mathbf{T} que mapee elementos de \mathbf{E}_S a $\bar{\mathbf{A}}$, **es decir que exista \mathbf{T}** tal que:

$$\mathbf{E}_S = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{T} \quad (3.19)$$

Debido a esto la matriz \mathbf{E}_S puede descomponerse en dos submatrices \mathbf{E}_X y \mathbf{E}_Y de tamaño $M \times D$ de manera tal que:

$$\mathbf{E}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_X \\ \mathbf{E}_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{T} \\ \mathbf{A}\Phi\mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

de donde puede verse que

$$\text{Span}\{\mathbf{E}_X\} = \text{Span}\{\mathbf{E}_Y\} = \text{Span}\{\mathbf{A}\} \quad (3.21)$$

debido a que la rotación aplicada por Φ no modifica el subespacio generado [2]. Ahora se define la matriz \mathbf{E}_{XY} como:

$$\mathbf{E}_{XY} := [\mathbf{E}_X | \mathbf{E}_Y], \quad (3.22)$$

la cual tiene rango D debido a que \mathbf{E}_X y \mathbf{E}_Y **pertenecen al** mismo espacio de columnas. Debido a esto, debe existir una matriz $\mathbf{K} \in \mathbb{C}^{(2D \times D)}$ tal que:

$$\mathbf{0} = \mathbf{E}_{XY}\mathbf{K} = \mathbf{E}_X\mathbf{K}_X + \mathbf{E}_Y\mathbf{K}_Y \quad (3.23)$$

$$= \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{K}_X + \mathbf{A}\Phi\mathbf{T}\mathbf{K}_Y, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_X \\ \mathbf{K}_Y \end{bmatrix},$$

es decir que \mathbf{K} genera el núcleo de $\mathbf{E}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}$. A partir de la Ecuación 3.23 puede escribirse:

$$\begin{aligned} -\mathbf{E}_{\mathbf{X}}\mathbf{K}_{\mathbf{X}} &= \mathbf{E}_{\mathbf{Y}}\mathbf{K}_{\mathbf{Y}} \\ \mathbf{E}_{\mathbf{X}}(-\mathbf{K}_{\mathbf{X}}\mathbf{K}_{\mathbf{Y}}^{-1}) &= \mathbf{E}_{\mathbf{Y}} \\ \mathbf{E}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Psi} &= \mathbf{E}_{\mathbf{Y}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

siendo $\boldsymbol{\Psi} := -\mathbf{K}_{\mathbf{X}}\mathbf{K}_{\mathbf{Y}}^{-1}$ la matriz de transformación de $\mathbf{E}_{\mathbf{X}}$ a $\mathbf{E}_{\mathbf{Y}}$. A partir de esta definición se puede reescribir la Ecuación 3.24 de la siguiente manera:

$$\mathbf{A}\mathbf{T}\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{T}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi} \quad (3.26)$$

Asumiendo que \mathbf{A} es de rango completo se puede escribir:

$$\mathbf{T}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{T}^{-1} = \boldsymbol{\Phi}, \quad (3.27)$$

por ende, los autovalores de $\boldsymbol{\Psi}$ son los elementos de la diagonal de $\boldsymbol{\Phi}$, y los vectores de \mathbf{T} son los autovectores de $\boldsymbol{\Phi}$. Debido a esto, obteniendo una estimación de $\boldsymbol{\Psi}$ se puede obtener una estimación de la matriz $\boldsymbol{\Phi}$ y a partir de ahí los ángulos de arribo.

Los subarreglos no tienen por qué ser conjuntos disjuntos, la posibilidad de armar subarreglos con elementos en común está permitida en el algoritmo ESPRIT y es una técnica que permite reducir la cantidad de elementos necesaria para poder implementarlo. Si contamos con un arreglo de antenas en fase de geometría ARU se deberá aplicar el algoritmo ESPRIT en dos dimensiones distintas para obtener los ángulos de elevación y azimut de la dirección de arribo. La opción lógica es elegir subarreglos separados en el eje x y en el eje y , como se muestra en la Figura 3.3.

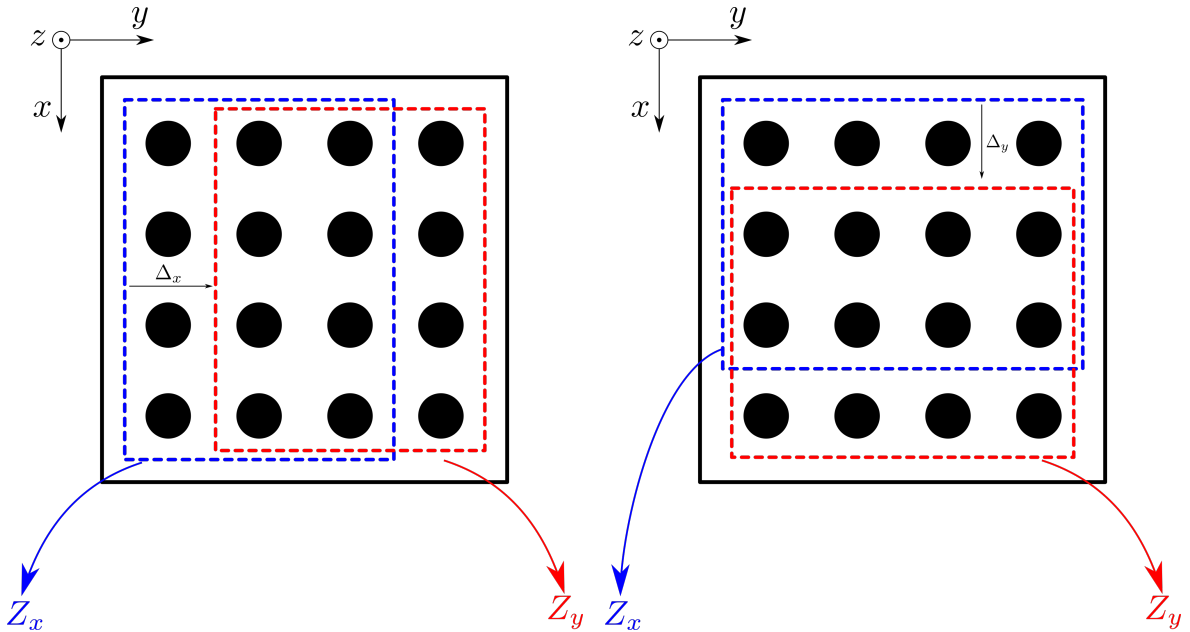


Figura 3.3: Una posible elección de subarreglos para la aplicación del algoritmo ESPRIT en dos dimensiones utilizando un ARU.

Teniendo una geometría como la mostrada, luego de utilizar ESPRIT en las dos dimensiones indicadas se obtendrán dos matrices $\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{x}}$ y $\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{y}}$ de tamaño $D \times 1$, los cuales permiten obtener los

ángulos de arribo haciendo:

$$\theta_d = \arccos \left(\sqrt{\frac{(\angle \phi_{x,d})^2 + (\angle \phi_{y,d})^2}{(k \cdot \delta)^2}} \right) \quad (3.28)$$

$$\varphi_d = \arctan \left(\frac{\angle \phi_{y,d}}{\angle \phi_{x,d}} \right) \quad (3.29)$$

con $d = 0, 1, \dots, D - 1$ y siendo δ la separación entre elementos.

La deducción de estas expresiones se muestra en el Apéndice A.

Estimación del operador de rotación de subespacio

Al igual que como ocurre en MUSIC, al no poder operar en la práctica con infinitas muestras, la matriz \mathbf{E}_S obtenida mediante SVD aplicada a la matriz \mathbf{Z} o por descomposición en autovalores de la estimación de la matriz de covarianza $\hat{\mathbf{R}}_{ZZ}$ no es la teórica, sino una estimación de ella, la cual se denota como $\hat{\mathbf{E}}_S$. Por ende $\hat{\mathbf{E}}_S$ no genera el subespacio de señal y $\text{Span}\{\hat{\mathbf{E}}_S\} \neq \text{Span}\{\bar{\mathbf{A}}\}$. Además $\text{Span}\{\hat{\mathbf{E}}_X\} \neq \text{Span}\{\hat{\mathbf{E}}_Y\}$, y debido a esto la matriz Ψ no puede encontrarse de la manera que se mostró en la Ecuación 3.25. Es por esto que debe elegirse un criterio para obtener una correcta estimación de $\hat{\Psi}$ para luego estimar $\hat{\Phi}$, y ese criterio es el de **mínimos cuadrados totales** (TLS por sus siglas en inglés). Este criterio consiste en reemplazar la matriz nula en la Ecuación 3.23 por una matriz de errores cuya norma de Frobenius debe minimizarse [2]. La solución a este problema primero consiste en calcular la SVD de la matriz $\hat{\mathbf{E}}_{XY}$ definida en la Ecuación 3.22:

$$\hat{\mathbf{E}}_{XY} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V} \quad (3.30)$$

A partir de esto se trabaja con la matriz $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{2D \times 2D}$, la cual se particiona en 4 matrices de tamaño $D \times D$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{00} & \mathbf{V}_{01} \\ \mathbf{V}_{10} & \mathbf{V}_{11} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Luego la solución TLS viene dada por:

$$\hat{\Psi}_{\text{TLS}} = -\mathbf{V}_{01}\mathbf{V}_{11}^{-1} \quad (3.32)$$

cuyos autovalores representan a los elementos $\hat{\phi}_d$ con $d = 0, 1, \dots, D - 1$ de la matriz $\hat{\Phi}$.

Finalmente, la dirección de arribo estimada $(\hat{\theta}_d, \hat{\phi}_d)$ se obtiene mediante las Ecuaciones 3.28 y 3.29.

3.3.1. Algoritmo

A continuación se detallan los pasos para implementar el algoritmo ESPRIT:

1. Separar el arreglo de antenas en dos subarreglos iguales pero trasladados por un vector $\bar{\Delta}$ uno del otro.
2. Formar la matriz \mathbf{Z} definida en la Ecuación 3.18 utilizando varias muestras temporales.
3. Realizar la descomposición en autovalores de la matriz $\hat{\mathbf{R}}_{ZZ}$ obtenida con la Ecuación 3.7 o realizar la SVD sobre la matriz \mathbf{Z} quedándose únicamente con los valores singulares y los vectores singulares izquierdos \mathbf{U} .

4. Estimar el número \hat{D} de señales recibidas. Las técnicas para lograr esto se mencionan en el Capítulo 6.
5. Elegir los \hat{D} autovectores de la descomposición de $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{ZZ}}$ correspondientes a los autovalores más grandes, o los vectores singulares de \mathbf{U} correspondientes a los valores singulares más grandes de la SVD de \mathbf{Z} para formar la matriz $\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{S}}$ como se indica en la Ecuación 3.10.
6. Separar la matriz $\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{S}}$ en $\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}$ y $\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{Y}}$ como se muestra en la Ecuación 3.20.
7. Armar la matriz $\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{XY}}$ como se muestra en la Ecuación 3.22 y obtener su SVD quedándose únicamente con los vectores singulares derechos \mathbf{V} .
8. Particionar la matriz \mathbf{V} en 4 submatrices de tamaño $D \times D$ como se muestra en la Ecuación 3.31.
9. Obtener $\hat{\Psi}_{\text{TLS}}$ como se indica en la Ecuación 3.32.
10. Obtener los elementos de la matriz $\hat{\Phi}$ obteniendo los autovalores de $\hat{\Psi}_{\text{TLS}}$.
11. Obtener los ángulos de arribo $(\hat{\theta}_d, \hat{\phi}_d)$ a partir de las Ecuaciones 3.28 y 3.29.

3.4. Simulaciones

Utilizando el modelo de muestras que se detalló en la Sección 3.1.1 y los algoritmos descritos en las Secciones 3.2.1 y 3.3.1, se implementaron ambas técnicas de estimación de dirección de arribo, comparándolas con respecto al error obtenido en la estimación y el tiempo de ejecución de cada una. En todas las simulaciones realizadas a continuación se utilizó el método de descomposición en valores singulares para la obtención de los estimadores de subespacios de señal y ruido, y no se realizó la estimación de cantidad de señales arribantes, fijando este número en 1. Además, en ambos algoritmos se utilizó una técnica de muestreo aleatorio para mejorar la eficiencia en las estimaciones, la cual se detalla en el Capítulo 4. Finalmente, se consideró que el arreglo de antenas es de tipo ARU de tamaño $M_x \times M_y$ y que la separación entre elementos es de media longitud de onda de la portadora. Para generar las muestras simuladas se desarrolló un algoritmo que a partir de una muestra de una señal generaba el vector de muestras correspondientes a cada elemento del arreglo, simulando el comportamiento de la señal llegando al mismo con una determinada DOA según el análisis descrito en la Sección 2.3.1 para el caso de un arreglo rectangular uniforme. Como señal de prueba se utilizó la captura de un beacon del satélite GOMX-1 [12].

En esta sección se utilizarán los siguientes símbolos para identificar a los parámetros de las simulaciones realizadas:

- M_x := número de elementos del ARU en la dirección x .
- M_y := número de elementos del ARU en la dirección y .
- M := número total de elementos en el ARU.
- $\mathfrak{R}_{\text{MUSIC}}$:= resolución del dominio de búsqueda del algoritmo MUSIC tanto en azimut como en elevación.
- N := número de vectores de muestras con los que se alimentó a cada algoritmo.
- σ_d := desvío estándar del error en la separación de elementos con respecto a la distancia nominal d .

3.4.1. RMSE vs. SNR

Para realizar esta simulación se promediaron 10 realizaciones por cada valor de SNR. En cada realización se alteraba aleatoriamente la DOA y las muestras elegidas por el algoritmo de muestreo aleatorio. Para el caso del algoritmo MUSIC, el dominio de búsqueda se generó de manera tal de poder contar con una resolución en la estimación de $\mathfrak{R}_{\text{MUSIC}} = 0,5^\circ$ tanto en elevación como en azimuth. La métrica de error utilizada en este análisis es la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE), la cual se obtiene de la siguiente manera:

$$\text{RMSE}(\hat{\theta}, \hat{\varphi}) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left((\hat{\theta}_i - \theta_i)^2 + (\hat{\varphi}_i - \varphi_i)^2 \right)} \quad (3.33)$$

siendo N el número de realizaciones. Los parámetros utilizados en esta simulación son:

- $M_x = 4$
- $M_y = 4$
- $N = 1500$ vectores de muestras
- $\sigma_d = 0$
- $\mathfrak{R}_{\text{MUSIC}} = 0,5^\circ$

Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 3.4.

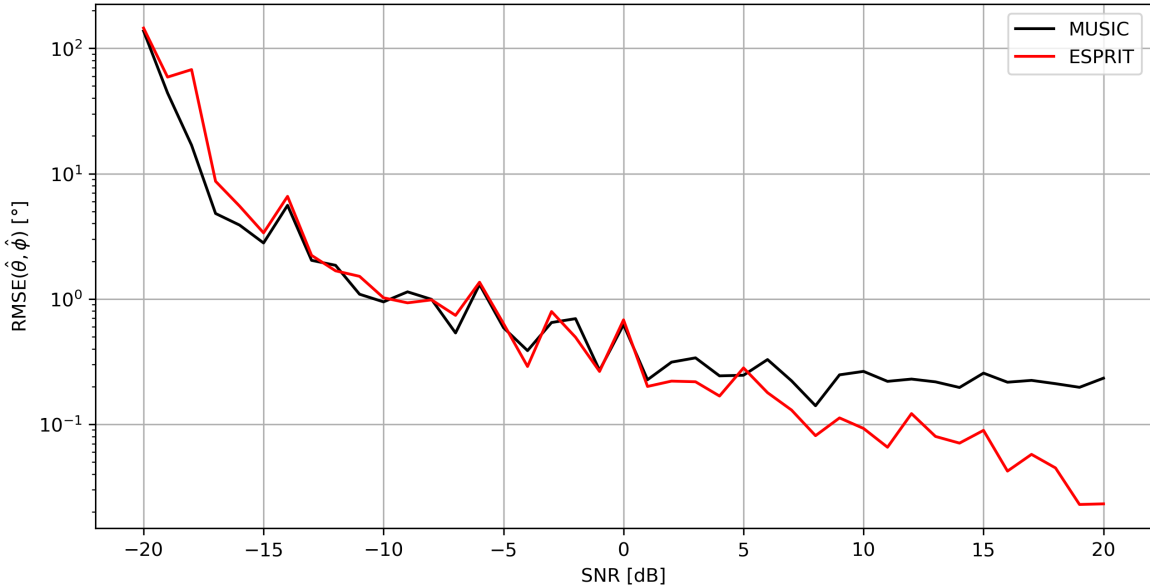


Figura 3.4: Gráfico de comparación del RMSE en función de la SNR para los algoritmos MUSIC y ESPRIT.

Como puede apreciarse, ambos algoritmos se desempeñan de manera similar en el rango de SNR evaluado, alcanzando errores menores al grado para valores de SNR a partir de -5 dB. También se puede ver que para valores de SNR mayores a 0 dB MUSIC comienza a verse limitado por su resolución (la cual puede mejorarse a costa de un mayor requerimiento de procesamiento), y ESPRIT continúa mejorando la estimación alcanzando errores menores a $0,1^\circ$.

Como dato adicional en la Figura 3.5 se muestra cómo varía el pseudoespectro de MUSIC para el caso de una señal arribando con una DOA ($\theta = 45^\circ, \varphi = 30^\circ$) para distintos valores de SNR.

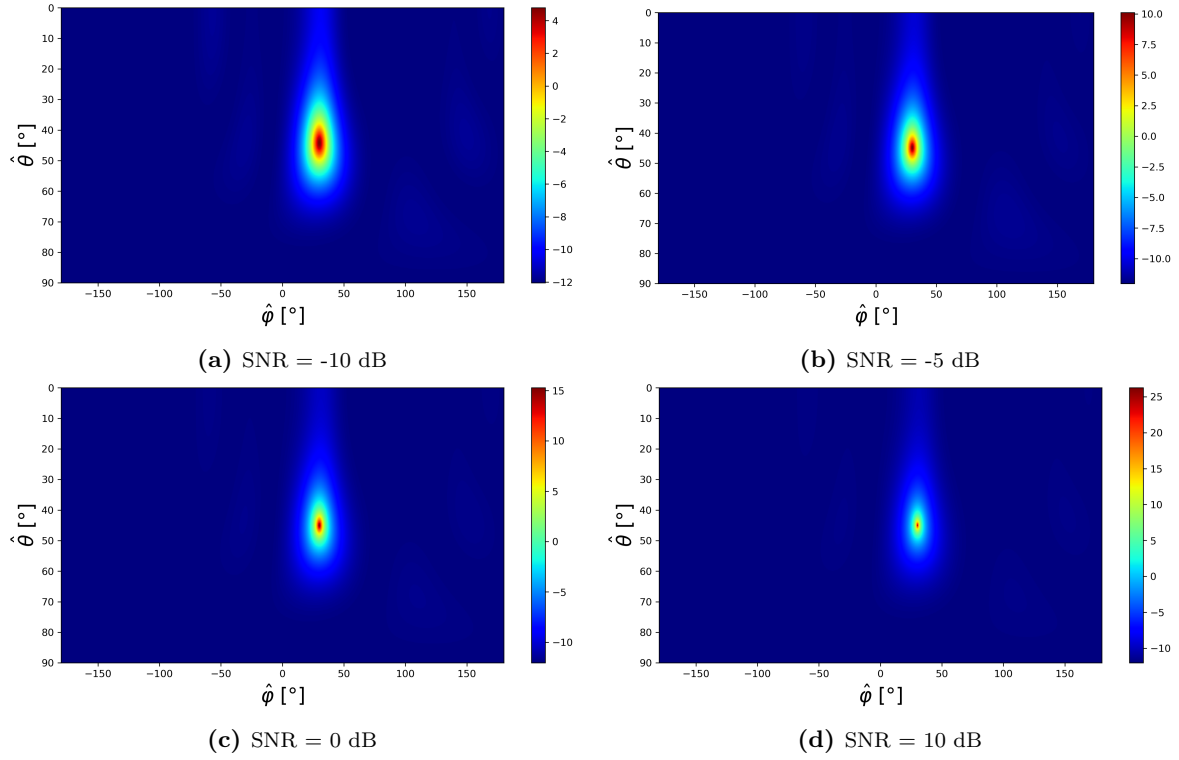


Figura 3.5: Gráfica de \mathbf{P}_{MU} en el caso de una señal llegando al arreglo con dirección $(\theta = 45^\circ, \varphi = 30)$ para distintos valores de SNR. Puede observarse cómo a medida que aumenta la SNR la “energía” del pseudoespectro se concentra cada vez más en la dirección de arribo real.

3.4.2. RMSE vs. σ_d

En este apartado se evalúan ambos algoritmos en función de errores aleatorios en la separación de elementos. Para hacer esto se suman en cada elemento fases aleatorias en ambas dimensiones del arreglo, de manera tal que se simulen errores gaussianos en la ubicación de elementos, ubicando el centro de la gaussiana en el centro de cada uno y tomando como desvío estándar σ_d de la distribución distintas fracciones de la distancia entre elementos d . Los parámetros utilizados en esta simulación son:

- SNR = 10 dB
- $M_x = 4$
- $M_y = 4$
- $N = 1500$ vectores de muestras
- $\Re_{\text{MUSIC}} = 0,5^\circ$

Los resultados que se muestran en la Figura 3.6 se obtuvieron promediando 10 realizaciones por cada valor de $\frac{\sigma_d}{d}$. Nuevamente, ambos algoritmos evolucionan de manera similar, manteniendo errores en el orden del grado para desviaciones del orden del 5 % en la separación entre elementos.

3.4.3. RMSE vs. N° de muestras

En esta comparación se analiza la variación del RMSE en función de las muestras utilizadas para realizar la estimación con ambos algoritmos. Para esto se repitieron 10 realizaciones por cada valor de N , promediándolas. Los parámetros de esta simulación son:

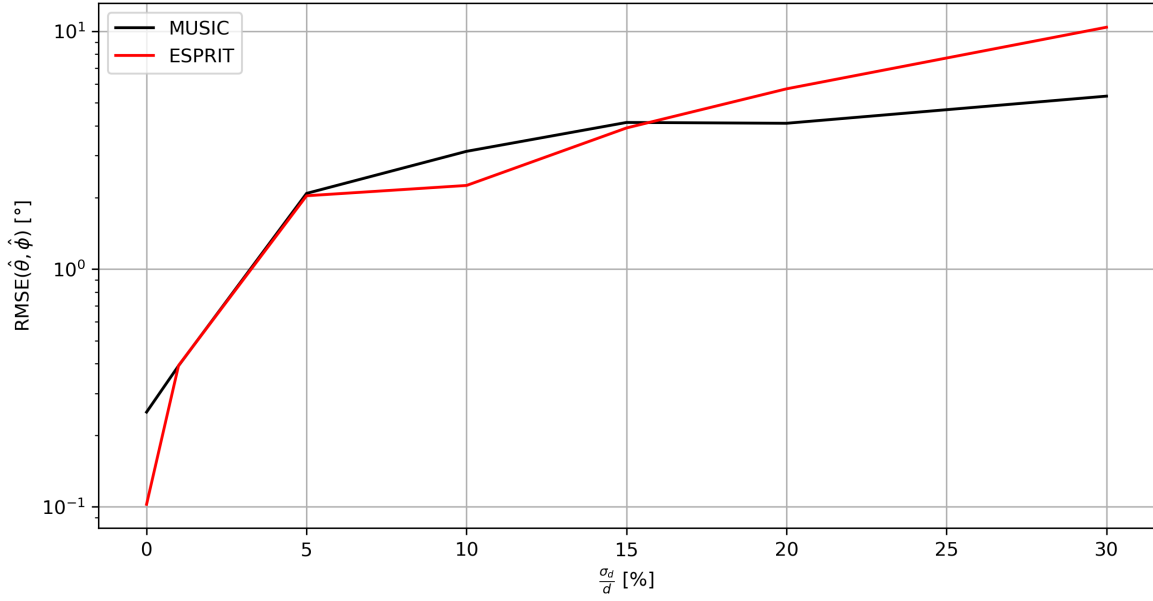


Figura 3.6: Gráfico de comparación del RMSE en función de los errores en la separación de elementos para los algoritmos MUSIC y ESPRIT.

- SNR = 10 dB
- $M_x = 4$
- $M_y = 4$
- $\sigma_d = 0$
- $\mathfrak{R}_{\text{MUSIC}} = 0,5^\circ$

Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 3.7. Como puede verse, ambos algoritmos mejoran su desempeño cuantas más muestras reciben debido a la mejor estimación que se logra de los subespacios de señal y de ruido, siguiendo una curva similar en ambos casos. Para el caso de gran cantidad de muestras, MUSIC muestra una asintota horizontal, producto de su limitada resolución. Sin embargo, para esta SNR elegida, se alcanzan errores menores a la décima del grado utilizando una cantidad de muestras del orden de 10^3 , lo cual computacionalmente no conlleva grandes costos como se mostrará posteriormente.

3.4.4. Tiempo vs. M

En esta sección se comparan los tiempos de ejecución de ambos algoritmos en función de la cantidad de elementos del arreglo. Además, en el caso de MUSIC también se analiza cuánto varían las curvas de tiempo para distintos valores de resoluciones alcanzadas. Para este análisis no se considera el tiempo que se tarda en realizar la SVD debido a que es una tarea común a ambos algoritmos, en cambio este análisis se realiza en la siguiente sección. Por ende en el caso de MUSIC sólo es evaluado el tiempo que lleva realizar los pasos 5 y 6 del algoritmo desarrollado en la Sección 3.2.1 y en el caso de ESPRIT solo se evalúan los pasos 6 a 11 descritos en la Sección 3.3.1. Los resultados se muestran en la Figura 3.8. Los parámetros definidos para esta simulación son:

- SNR = 10 dB
- $\sigma_d = 0$

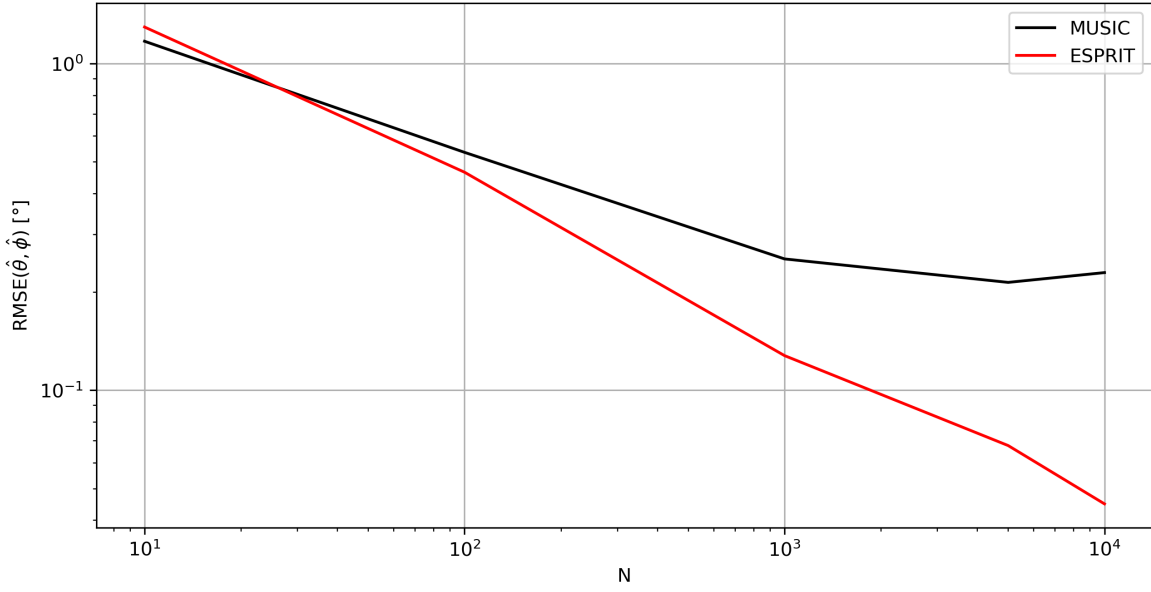


Figura 3.7: Gráfica de comparación del RMSE en función de la cantidad de vectores de muestras para los algoritmos MUSIC y ESPRIT.

- $N = 1500$ vectores de muestras
- $\mathfrak{R}_{\text{MUSIC}} = 0,5^\circ$

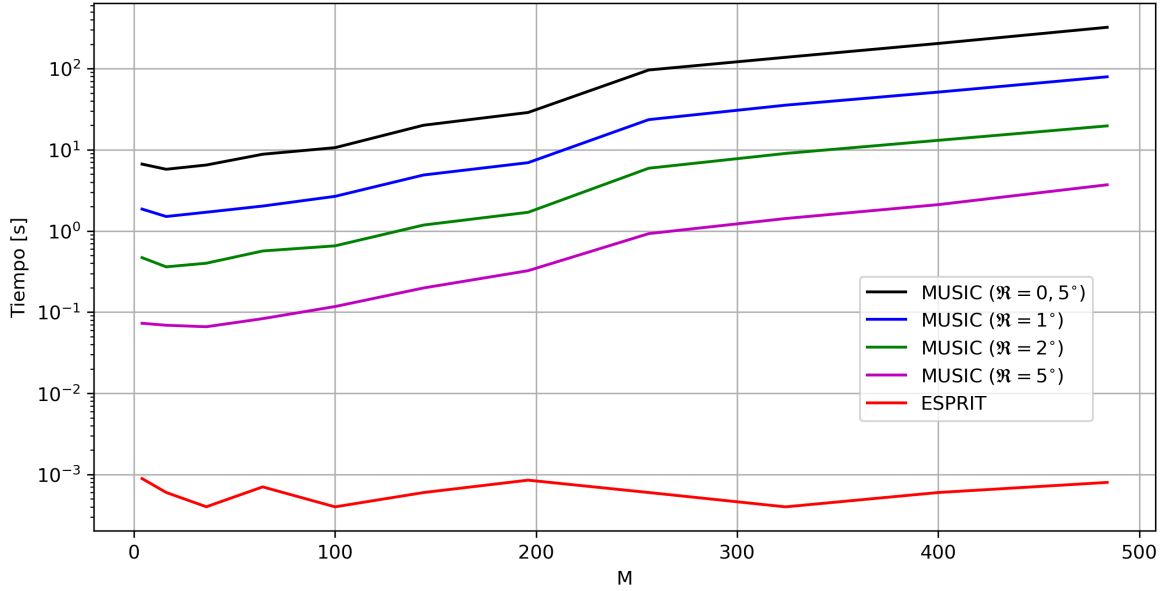


Figura 3.8: Gráfica de comparación del tiempo de ejecución de los algoritmos MUSIC y ESPRIT en función de la cantidad de elementos del ARU.

Como puede verse, para todos los valores de cantidad de elementos analizados, el algoritmo MUSIC resultó ser mucho menos eficiente que ESPRIT, obteniendo tiempos de al menos dos órdenes de magnitud mayor para $M < 100$ y tres órdenes mayor para $M > 300$ para una resolución en la estimación de $\mathfrak{R}_{\text{MUSIC}} = 5^\circ$. Además, si se analiza la curva de tiempos de MUSIC para una resolución de $\mathfrak{R}_{\text{MUSIC}} = 0,5^\circ$, la cual brinda un nivel de error semejante a ESPRIT como se mostró en la Sección 3.4.1, el tiempo de ejecución supera al ESPRIT por más de 5 órdenes de magnitud. Esto provoca que esta implementación del MUSIC sea ineficaz para aplicaciones de tiempo real como la que se

desea desarrollar en este proyecto. El motivo del incremento del costo computacional del MUSIC con respecto a M se debe al cálculo de la Ecuación 3.13, ya que todas las matrices que entran en la multiplicación tienen M filas, y la matriz $\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{N}}$ tiene mayor cantidad de columnas cuanto mayor sea M , lo que provoca que la cantidad de operaciones a realizar crezca rápidamente a medida que aumenta M . En cambio el algoritmo ESPRIT reduce la dimensión del problema separando $\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{S}}$ en $\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{X}}$ y $\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{Y}}$ para armar $\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{XY}}$ la cual como máximo puede tener una cantidad de filas de $M - 1$. Esta matriz solo es utilizada cuando se le aplica la descomposición en valores singulares, momento en el cual se comienza a operar con matrices de tamaño $D \times D$, siendo $D < M$. La complejidad de ambos algoritmos aumenta con el aumento en la cantidad de señales a estimar.

Si se analizan las variaciones de tiempo entre distintas resoluciones de la solución brindada por MUSIC el motivo del crecimiento del costo a medida que se aumenta la resolución radica en el dominio de búsqueda en el que se debe calcular la Ecuación 3.13, ya que una mayor resolución implica mayores puntos del dominio donde se desea saber el valor de $\mathbf{P}_{\mathbf{MU}}(\theta, \varphi)$. El dominio de búsqueda puede reducirse a partir de la utilización de información previa sobre las direcciones de arribo estimadas, sin embargo la gran eficiencia de ESPRIT no motivó la realización de ese estudio para este trabajo.

3.4.5. Tiempo de ejecución de la SVD

En esta sección se analiza el costo computacional del algoritmo SVD implementado dentro de la librería NumPy [13] en función de la cantidad de elementos del arreglo M y la cantidad de vectores de muestras con el que se alimenta al algoritmo N . Debido a que en la simulación en función de M vamos a estar variando la cantidad de filas de la matriz \mathbf{X} definida en la Ecuación 3.4 y en la simulación en función de N vamos a estar variando las columnas se decidió que la variable que quede fija en cada una tenga el mismo valor, lo cual se logró fijando la cantidad de elementos del arreglo en 100 para la simulación en función de N y fijando la cantidad de vectores de muestras en 100 para la simulación en función de M . Por ende, los parámetros utilizados en estas simulaciones son los siguientes:

- SNR = 10 dB
- $M_x = 10$ (solo para el análisis en función de N)
- $M_y = 10$ (solo para el análisis en función de N)
- $N = 100$ vectores de muestras (solo para el análisis en función de M)
- $\sigma_d = 0$

obteniendo los resultados que se indican en la Figura 3.9.

Como puede observarse ambas simulaciones evolucionan de manera similar en todos los rangos, lo cual indica que este algoritmo no muestra preferencias con respecto a las dimensiones de la matriz de entrada. Siendo que para la aplicación de este proyecto se espera una cantidad fija de 16 elementos en el arreglo la gráfica que más interesa en este momento es la del tiempo de cómputo de la SVD en función de N , ya que indica a partir de qué cantidad de muestras este algoritmo complica la conformación de un sistema que opere en tiempo real. Es por esto que en la Figura 3.10 se muestra una nueva simulación del tiempo de cómputo de la SVD en función de N pero fijando M en 16 elementos.

Aquí puede verse que, para una cantidad de 16 elementos en el arreglo, la SVD puede realizarse en tiempos menores a la décima de segundo para una cantidad de vectores de muestras del orden de $N = 10^3$, y tiempos menores a la centésima de segundo con una cantidad de vectores del orden de $N = 500$. A partir de esta gráfica y la gráfica de la Figura 3.7 puede escogerse una tolerancia al error y un tiempo de ejecución para un cierto valor de SNR y así luego escoger la cantidad de muestras con las cuales se va a trabajar en la implementación real.



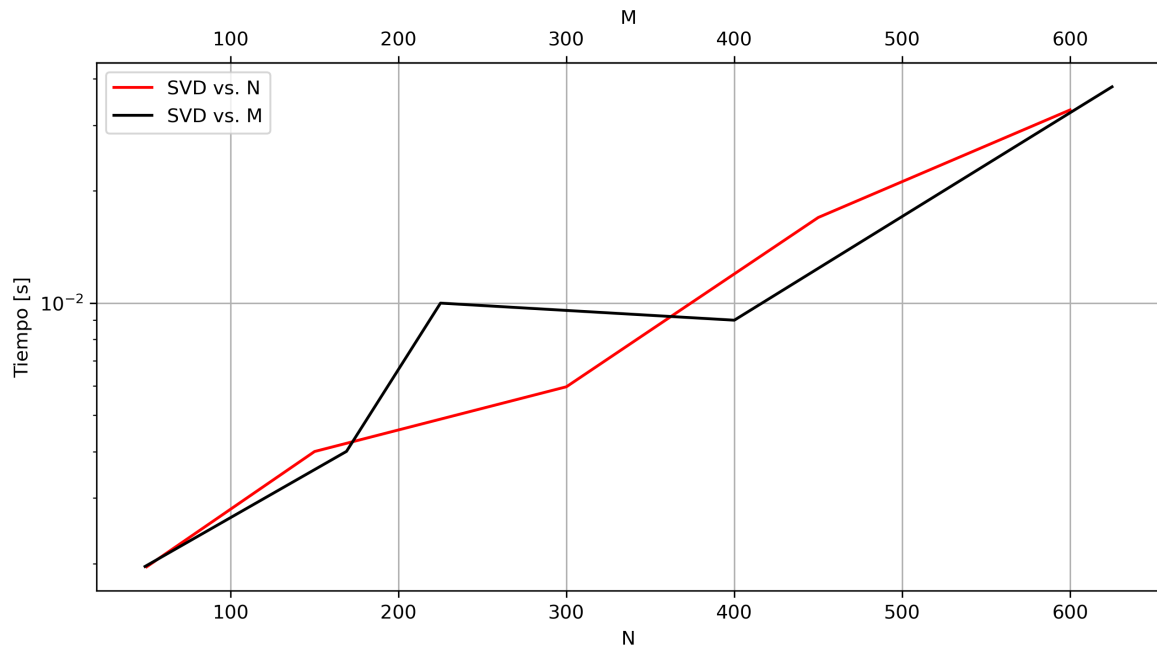


Figura 3.9: Gráfica de tiempo de ejecución del algoritmo SVD en función de la cantidad M de elementos del ARU y la cantidad N de vectores de muestras de la entrada.

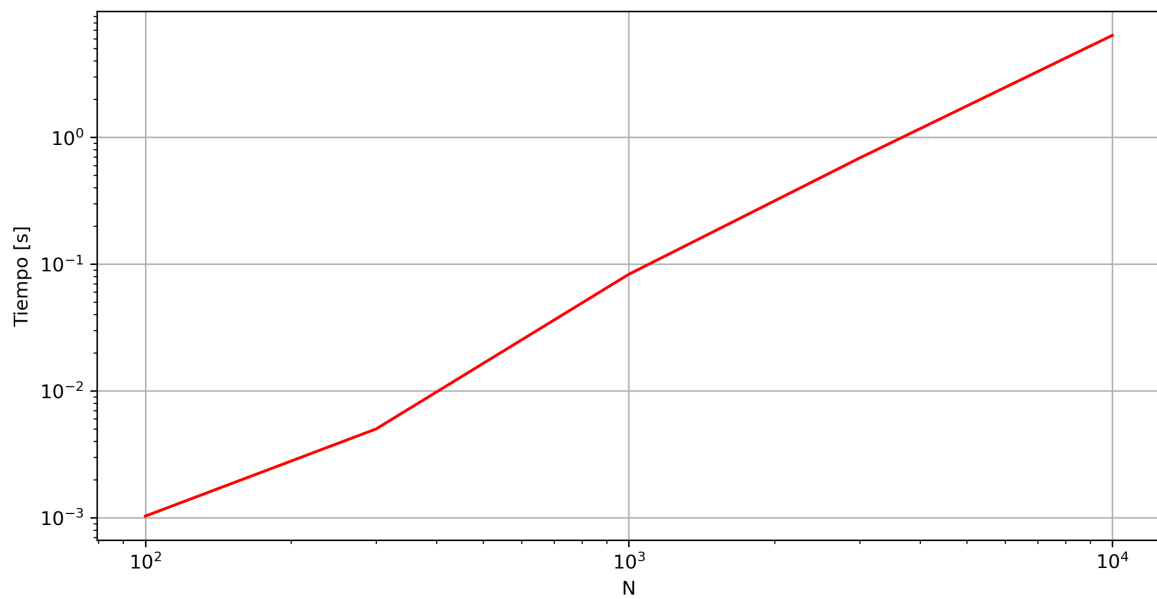


Figura 3.10: Gráfica de tiempo de ejecución del algoritmo SVD en función de la cantidad N de vectores de muestras de la entrada con $M = 16$.

Capítulo 4

Muestreo estocástico

“Debo esa variedad casi atroz a una institución que otras repúblicas ignoran o que obra en ellas de modo imperfecto y secreto: la lotería.”

— Jorge Luis Borges

4.1. Conceptos generales

Durante el desarrollo de las simulaciones de prueba de los algoritmos de estimación de DOA se observó que para el caso en el que se tenía más de una señal arribando al arreglo con anchos de banda $BW \ll f_s$ (siendo f_s la frecuencia de muestreo), no se podía realizar una correcta estimación de la dirección de arribo de ambas señales a menos que se tomara una cantidad de muestras que hacían impracticable su uso en tiempo real. Para explicar esto se mostrará el caso en el que las señales arribantes son senoidales puras de baja frecuencia comparadas a la frecuencia de muestreo.

Si suponemos ausencia de ruido vemos que la señal recibida en un elemento del arreglo puede representarse como se muestra en la Figura ??, donde $s_A(t)$ corresponde a la señal recibida de menor frecuencia.

En la Figura ?? se muestra cómo sería la representación que se obtiene al muestrear secuencialmente una porción de la señal recibida utilizando distintos valores de frecuencia de muestreo pero manteniendo una misma cantidad de muestras obtenidas.

Como puede verse, a medida que se aumenta la frecuencia de muestreo la porción

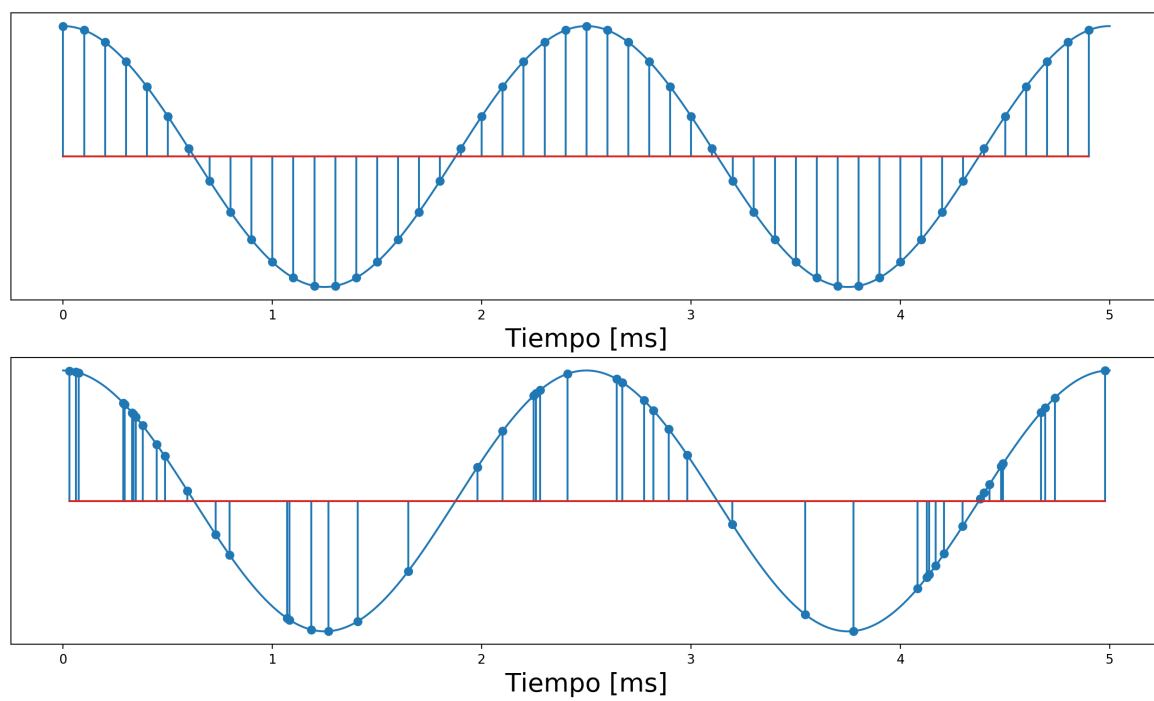


Figura 4.1

Capítulo 5

Diseño del sistema

- 5.1. Esquema de bloques
- 5.2. Muestreador aleatorio
- 5.3. Estimador de dirección de arribo
- 5.4. Conformador de haz

Capítulo 6

Estimación del número de señales arribantes

6.1. Conceptos generales

Uno podría elegir un umbral óptimo que separe a los autovalores, pero la práctica demuestra que este umbral es variable según la relación señal a ruido recibida.

6.2. Método de la máxima derivada

6.3. Clasificador de autovalores mediante aprendizaje automático

Capítulo 7

Integración en GNU Radio

- 7.1. Conceptos generales
- 7.2. El modelo banda base
- 7.3. Implementación de módulos
- 7.4. El módulo gr-satellites

Capítulo 8

Resultados obtenidos

8.1. Tasa de error de bit

8.2. Errores en la ubicación de elementos del arreglo

8.3. Requerimientos de procesamiento

Capítulo 9

Implementación en FPGA

9.1. Conceptos generales

Capítulo 10

Trabajo a futuro

10.1. Innovación en la estimación

10.2. Interfaz con el sistema de adquisición

10.3. Empaquetamiento

10.4. Medición del patrón de radiación del arreglo

10.5. Interferencias destructivas

Generación de pesos en los array para generar interferencias destructivas en direcciones donde arriban señales secundarias.

10.6. Smart Beamforming

Más allá que el algoritmo que se desarrolló en este proyecto puede considerarse de alguna manera “inteligente” debido a que es capaz de deducir por su cuenta la dirección de arribo de señales, el término **Smart Beamforming** refiere a técnicas de conformación de haz que utilizan algoritmos de inteligencia artificial para la estimación de dirección de arribo y la conformación de las señales arribantes.

Apéndice A

Obtención de ángulos de arribo en ESPRIT

Bibliografía

- [1] Kulichevsky, J. Antenas de la CONAE en la Estacion Terrena del Centro Espacial Teófilo Tabanera. https://es.wikipedia.org/wiki/Estaci%C3%B3n_Terrena_C%C3%B3rdooba, 11 2010. ix, 4
- [2] Roy, R., Kailath, T. Esprit-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, **37** (7), 984–995, 1989. ix, 16, 17, 20, 22, 23, 25
- [3] Balanis, C. A. Arrays: Linear, planar, and circular. En: *Antenna theory: analysis and design*, págs. 285–368. John Wiley & Sons, 2016. 4
- [4] Maral, G., Bousquet, M. Orbits and related issues. En: *Satellite communications systems: systems, techniques and technology*, págs. 19–97. John Wiley & Sons, 2009. 4
- [5] Krim, H., Viberg, M. Two decades of array signal processing research: the parametric approach. *IEEE Signal Processing Magazine*, **13** (4), 67–94, 1996. 6, 10, 15
- [6] Steyskal, H. Digital beamforming antennas, an introduction. *Microwave Journal*, págs. 107–124, 1987. 7
- [7] Weiß, M. Digital Antennas. *NATO Research and Technology Organisation*, 2009. 8
- [8] Mailloux, R. J. Phased arrays in radar and communication systems. En: *Phased Array Antenna Handbook*, págs. 1–61. Artech House, 2005. 9
- [9] Ioannides, P., Balanis, C. A. Uniform circular arrays for smart antennas. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, **47** (4), 192–206, 2005. 10
- [10] Schmidt, R. O. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **34** (3), 276–280, 1986. 16, 20
- [11] Ingle, V., Kogon, S., Manolakis, D. Harmonic models and frequency estimation techniques. En: *Statistical and Adaptive Signal Processing*, págs. 478–493. Artech, 2005. 18, 19
- [12] Estévez, D. Captura de beacon del satélite GOMX-1. <https://github.com/daniestevez/gr-ax100/blob/master/examples/gomx-1.wav>, 9 2016. 26
- [13] community, T. S. numpy.linalg.svd. <https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.linalg.svd.html>. 31

Publicaciones asociadas

1. Mi primer aviso en la revista **ABC**, 1996
2. Mi segunda publicación en la revista **ABC**, 1997

Agradecimientos

A todos los que se lo merecen, por merecerlo

