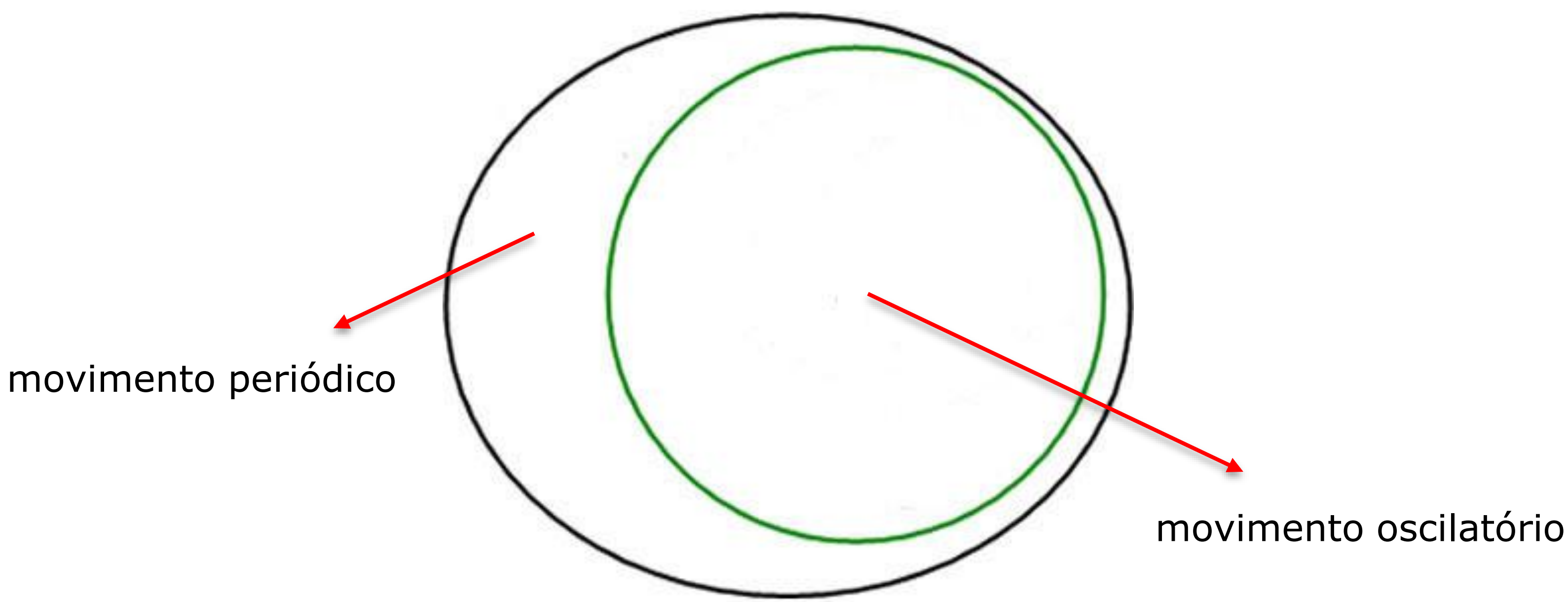
Movimento harmônico simples (MHS)

- **Movimento periódico:** movimento que se repete em intervalos de tempo sucessivos e iguais. Ex.: movimento circular uniforme (MCU).

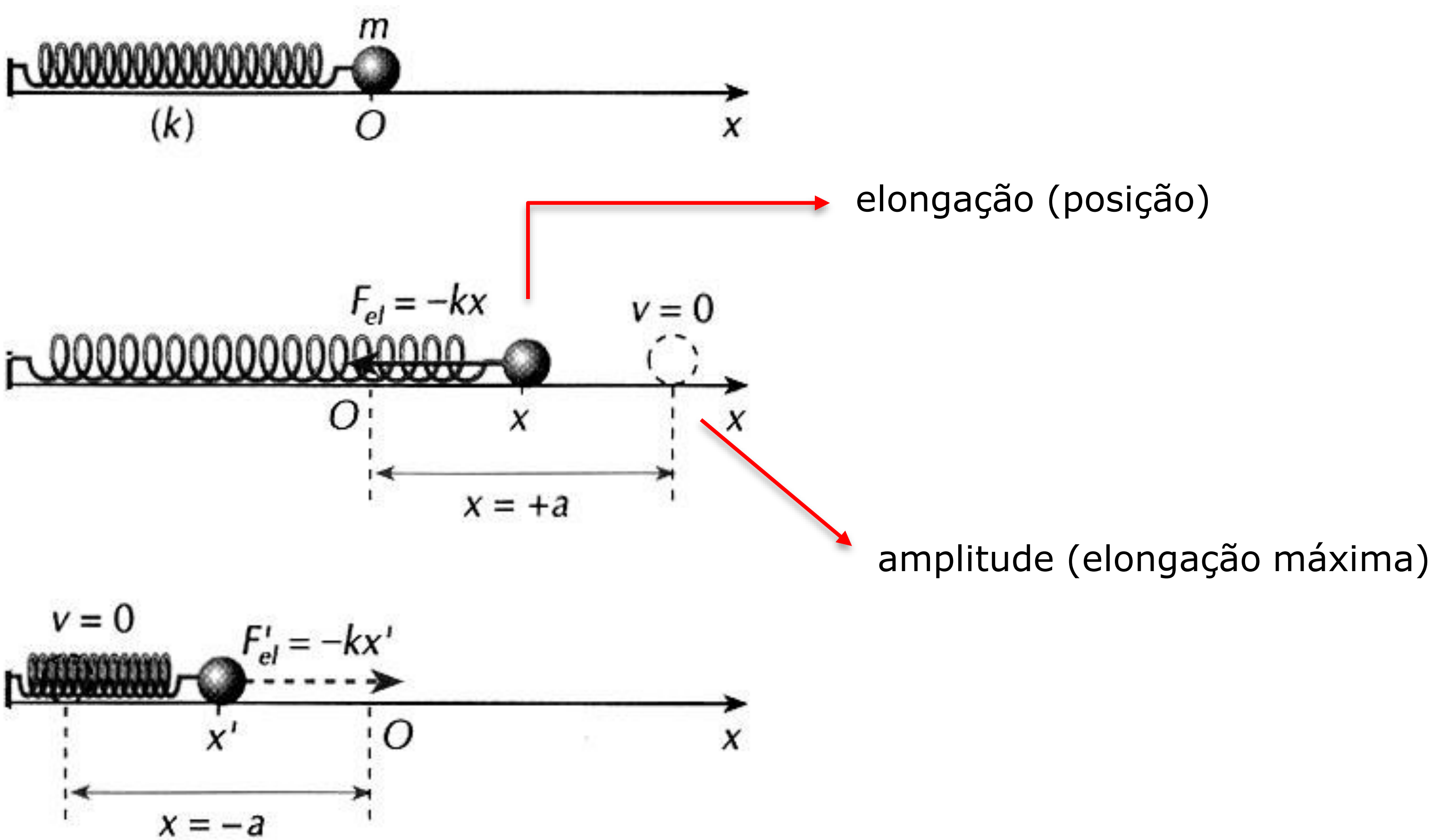
  → **Período (T):** menor intervalo de tempo para uma repetição

- **Movimento oscilatório:** todo movimento periódico cujo sentido é regularmente invertido. Ex.: o movimento dos ramos de um diapasão.



✓ *Movimento harmônico simples linear*

Considere uma partícula *P*, realizando um *movimento oscilatório e retilíneo* em torno de um ponto de equilíbrio *O*. Sejam *A* e *A′* os pontos de inversão do movimento.



O movimento do ponto *P* é um *movimento harmônico simples linear* (*MHS*) se a **força resultante**, que age sobre ele, tem *valor algébrico* ***diretamente proporcional à abscissa x*** *e de sinal contrário*:

$$F_R = F_{el} \Rightarrow \boxed{F_R = -kx}$$

constante elástica

- Obs.: forças que atuam em corpos que oscilam tendem sempre a trazê-los para a posição de equilíbrio. Elas são chamadas **forças restauradoras**.

devido à presença de forças dissipativas, as oscilações são gradativamente **amortecidas**

✓ Energia no MHS

✓ **Energia potencial:** da Mecânica temos

$$\boxed{E_P = \frac{kx^2}{2}}$$

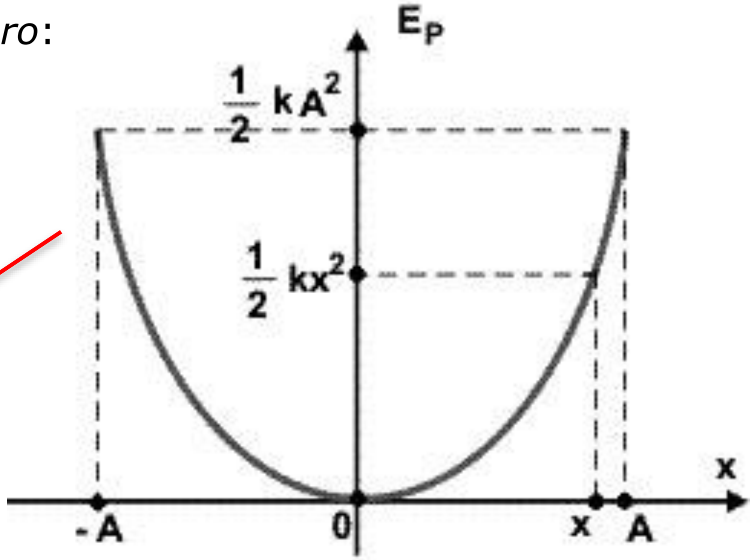
Nas posições de inversão do movimento *a energia potencial é máxima*:

$$x = \pm a \Rightarrow E_P = \frac{ka^2}{2}$$

Na posição de equilíbrio, *a energia potencial é igual a zero*:

$$x = 0 \Rightarrow \boxed{E_P = 0}$$

gráfico da energia potencial versus a posição



✓ **Energia cinética:** da Mecânica temos

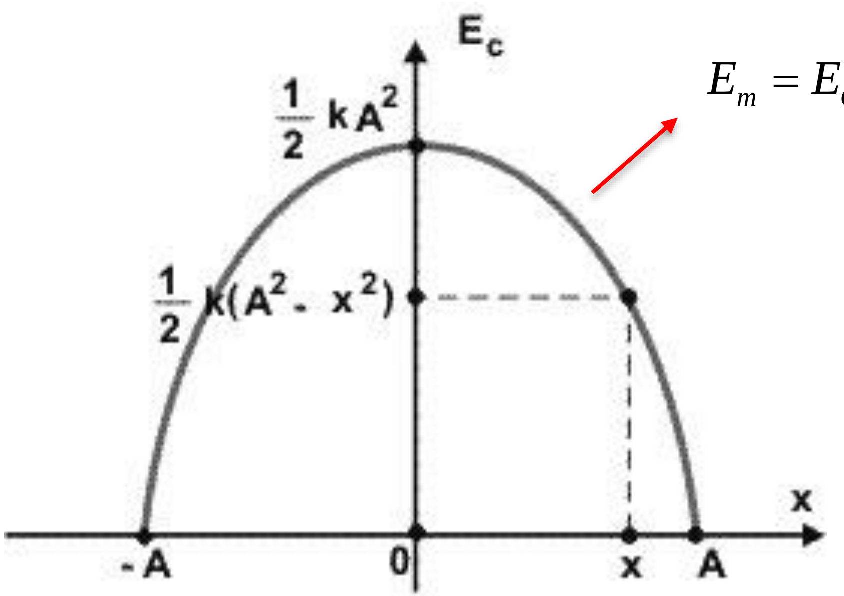
$$\boxed{E_C = \frac{mv^2}{2}}$$

Nas posições de inversão do movimento *a energia cinética é nula*:

$$x = \pm a \Rightarrow v = 0 \Rightarrow E_C = 0$$

Na posição de *equilíbrio* a energia cinética é *máxima*.

Graficamente temos:



$$E_m = E_C + E_P \Rightarrow cte = E_C + \frac{kx^2}{2} \Rightarrow \boxed{E_C = -\frac{kx^2}{2} + cte}$$

✓ **Energia mecânica:** por definição temos

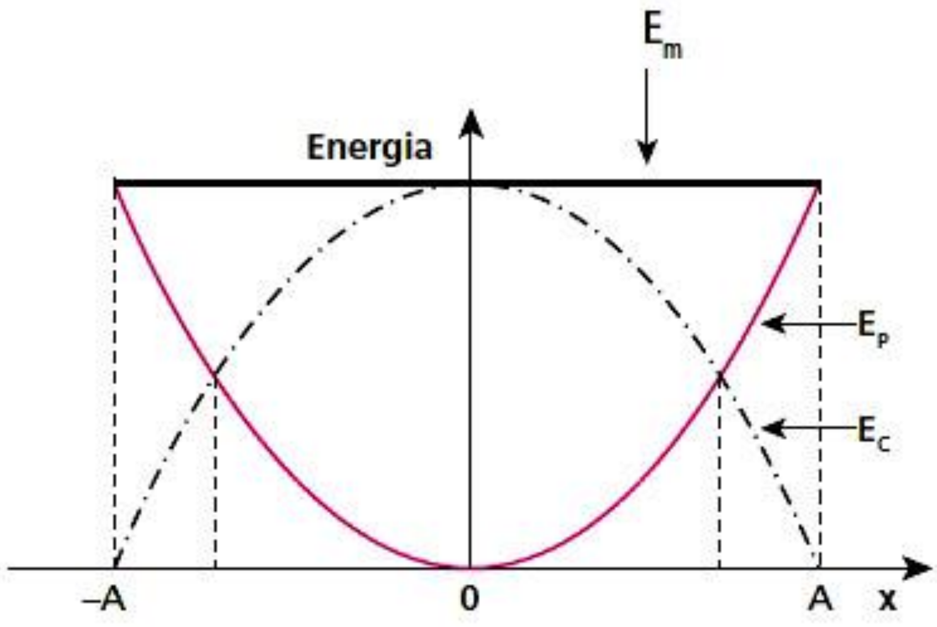
$$\boxed{E_m = E_C + E_P}$$

Para *x* = *a* temos:

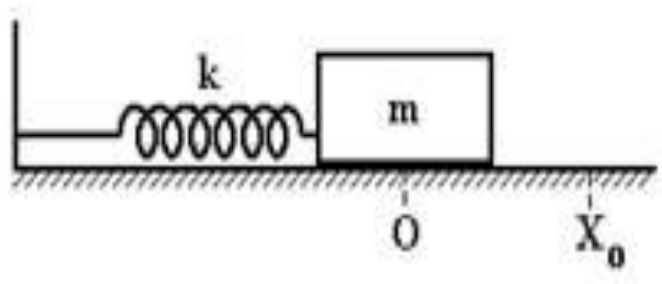
$$E_m = E_P + E_C \Rightarrow E_m = \frac{ka^2}{2} + 0 \Rightarrow \boxed{E_m = \frac{ka^2}{2}}$$

para qualquer posição é válida a relação

Graficamente:



(UNESP) Num sistema massa-mola, conforme a figura (superfície horizontal sem atrito) onde ***k*** é a constante elástica da mola, a massa é deslocada de uma distância $\boldsymbol{x_0}$, passando a oscilar.



a) Em que ponto, ou pontos, a energia cinética da massa é igual a 7/9 da energia potencial do sistema?
b) A energia cinética pode ser superior à potencial em algum ponto? Explique sua resposta.

RESOLUÇÃO

a) Sendo o sistema conservativo, temos:

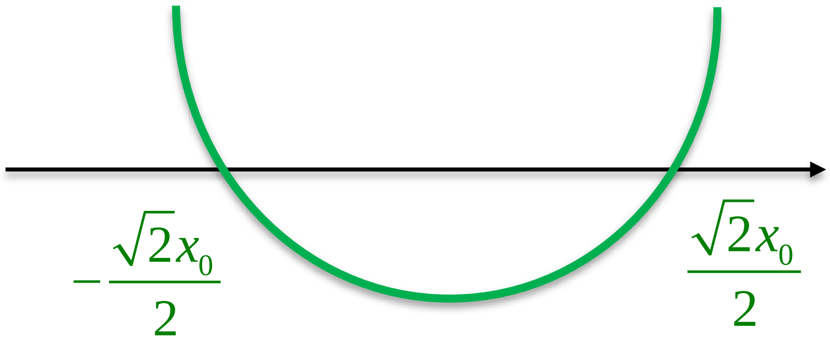
$$E_m = E_C + E_P \Rightarrow \frac{ka^2}{2} = \frac{7}{9}E_P + E_P \Rightarrow \frac{kx_0^2}{2} = \frac{16}{9}\frac{kx^2}{2} \Rightarrow \boxed{x = \pm\frac{3}{4}x_0}$$

b) Sendo a energia cinética maior que a potencial, temos:

$$\boxed{E_C > E_P} \Rightarrow E_m - E_P > E_P \Rightarrow E_m > 2E_P \Rightarrow \frac{kx_0^2}{2} > 2\frac{kx^2}{2} \Rightarrow \boxed{2x^2 - x_0^2 < 0}$$

Resolvendo a inequação polinomial de 2⁰ grau, temos:

- **<u>determinação das raízes da equação</u>** $2x^2 - x_0^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = x_0^2 \Rightarrow x = \pm\frac{x_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{x = \pm\frac{\sqrt{2}x_0}{2}}$

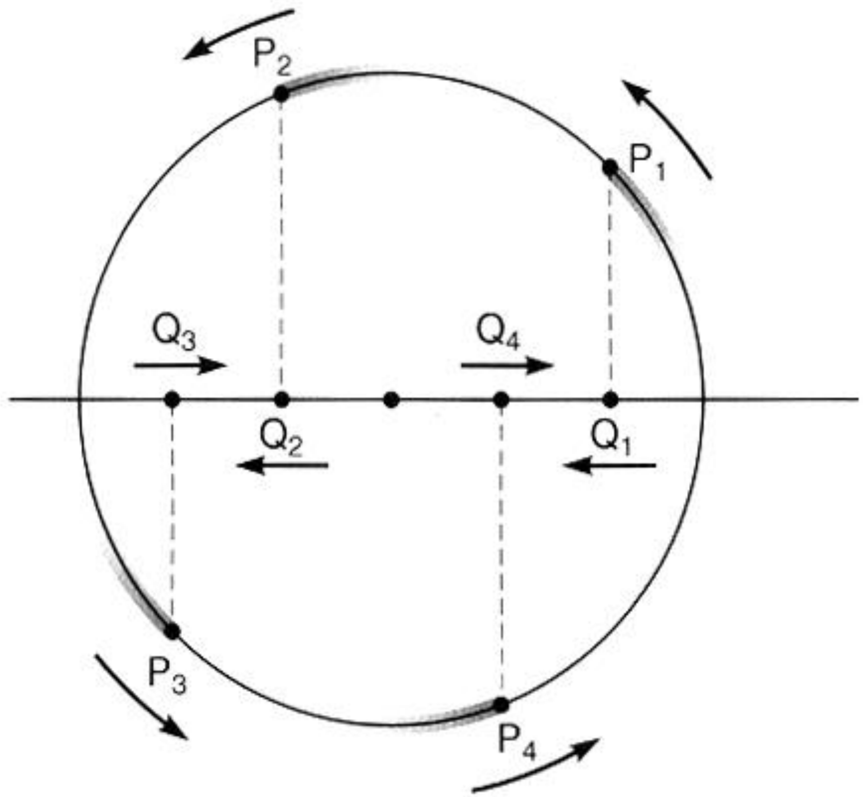


A solução da inequação será:

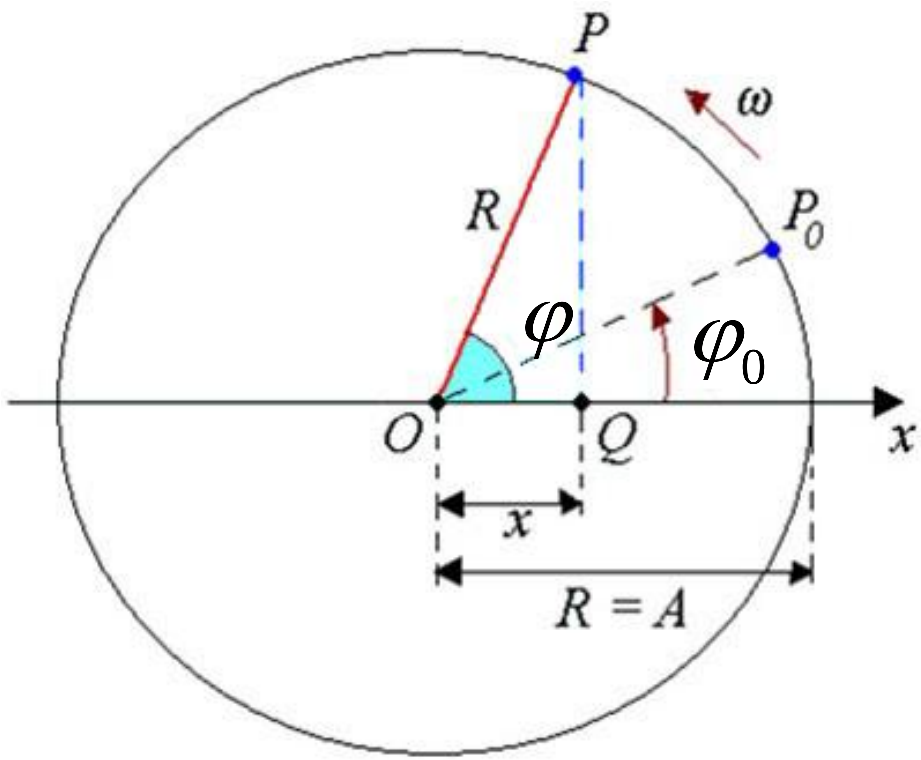
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / -\frac{\sqrt{2}x_0}{2} < x < \frac{\sqrt{2}x_0}{2} \right\}$$

✓ Equações horárias do MHS

É possível obter as equações horárias do *MHS* fazendo-se a projeção de um movimento circular uniforme sobre um dos seus diâmetros. O movimento dessa projeção também é harmônico simples, tal que o período *T* do *MCU* é igual ao do *MHS*.



✓ Posição (elongação)

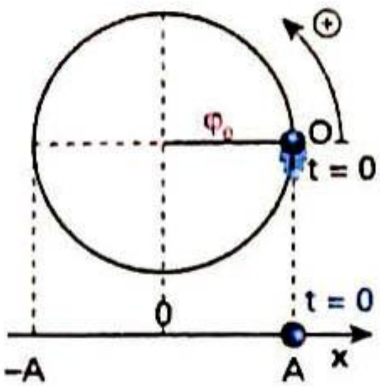


Da figura temos: $\cos\varphi = \dfrac{x}{a} \Rightarrow x = a.\cos\varphi \Rightarrow \boxed{x = a.\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)}$

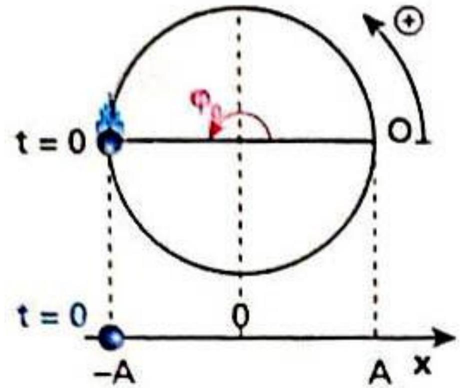
pulsação ou frequência angular $\left(\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}\right)$

fase inicial

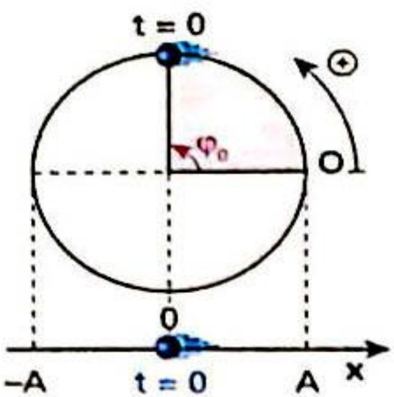
- Obs.: a fase inicial no MHS



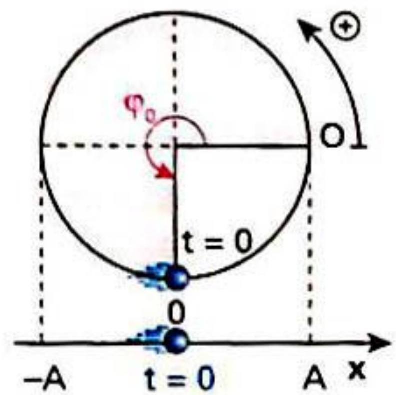
$$\varphi_0 = 0$$



$$\varphi_0 = \pi \text{ rad}$$

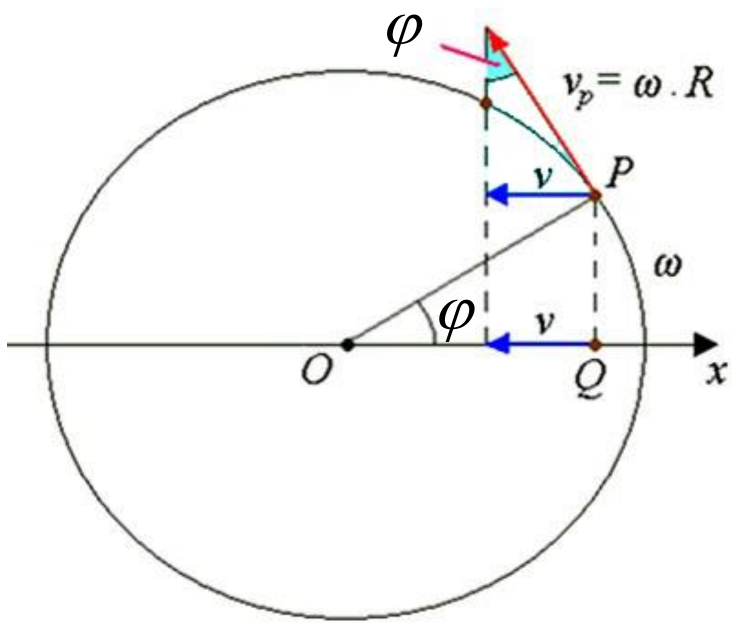


$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$



$$\varphi_0 = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

✓ **Velocidade**



Pode-se demonstrar que: $\boxed{v = -\omega . a . sen\left(\omega t + \varphi_0\right)}$

Nos pontos de inversão, a velocidade é nula:

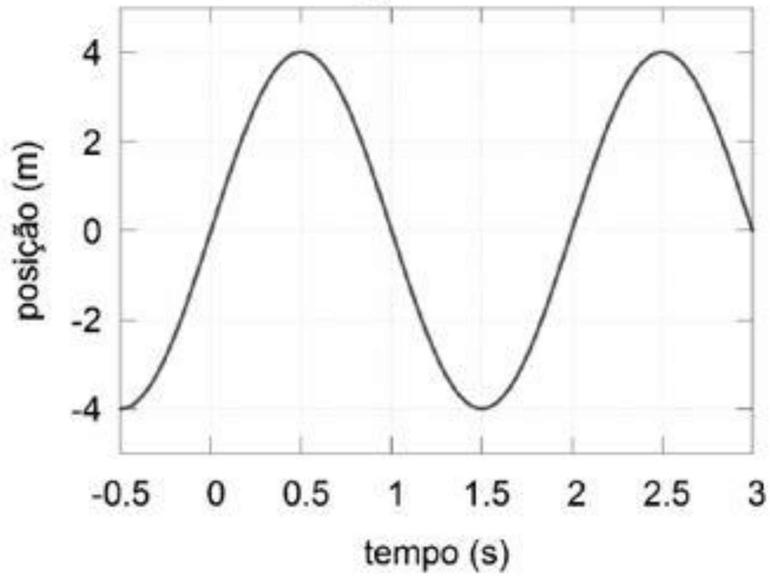
$$x = x_{máx} = +a \Rightarrow \cos\left(\omega t + \varphi_0\right) = +1 \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow sen\varphi = 0 \Rightarrow v = 0$$

$$x = x_{máx} = -a \Rightarrow \cos\left(\omega t + \varphi_0\right) = -1 \Rightarrow \cos\varphi = -1 \Rightarrow sen\varphi = 0 \Rightarrow v = 0$$

No *ponto de equilíbrio*, a *velocidade apresenta módulo máximo*:

$$x = 0 \Rightarrow \cos\left(\omega t + \varphi_0\right) = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow sen\varphi = \pm 1 \Rightarrow \boxed{\left|v\right| = v_{máx} = \omega a}$$

(UEG-2019) O gráfico a seguir representa a posição, em função do tempo, de um corpo que executa um movimento harmônico simples.



Para esse corpo, a função horária da velocidade *v(t)* é

a) $-4\pi.sen\left(\pi t+\frac{3\pi}{2}\right)$

b) $4.sen\left(4t+\pi\right)$

c) $4.\cos\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$

d) $4\pi.\cos\left(\pi t+\pi\right)$

e) $-4.sen\left(2t+\frac{3\pi}{2}\right)$

RESOLUÇÃO

A partir do gráfico, pode-se afirmar que:

- **amplitude:** $\boxed{a = 4m}$
- **período:** $\boxed{T = 2s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\omega = \pi \frac{rad}{s}}$
- **fase inicial:** $t = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi_0 = \frac{3\pi}{2} rad}$

Assim, substituindo os parâmetros na equação horária da velocidade de um MHS, temos:

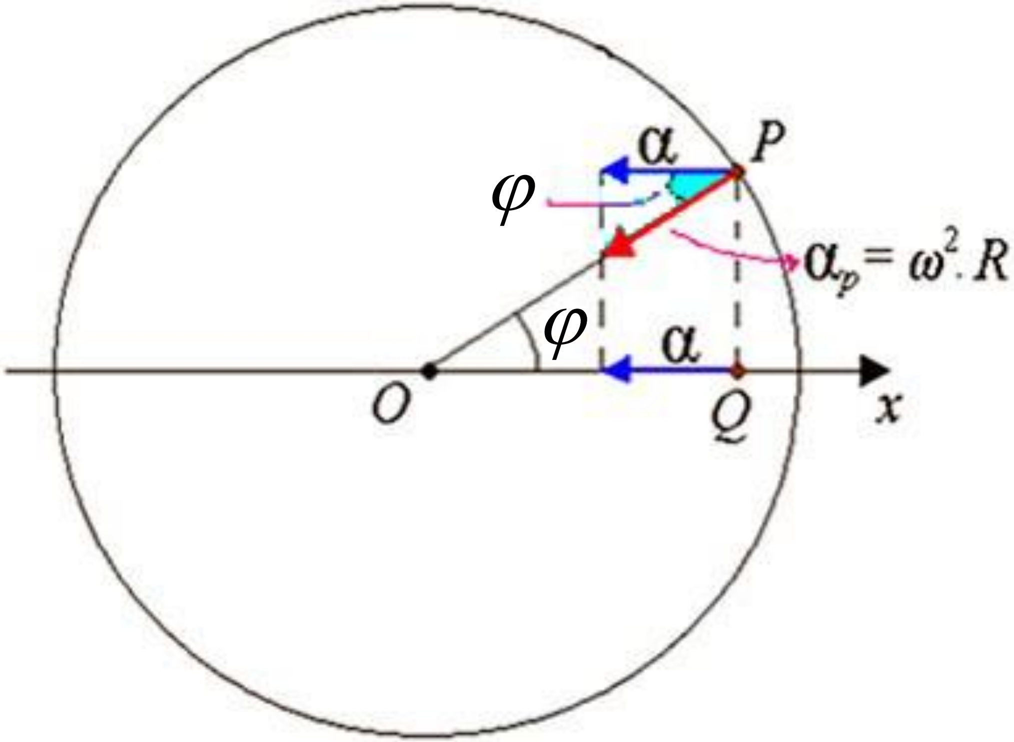
$$\boxed{v(t) = -\omega a.sen(\omega t + \varphi_0)} \Rightarrow v(t) = -4\pi.sen\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

A

➢ Obs.: equação de Torricelli para o MHS

$$\cos^2\varphi + sen^2\varphi = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(-\frac{v}{\omega a}\right)^2 = 1 \Rightarrow \boxed{v^2 = \omega^2\left(a^2 - x^2\right)}$$

✓ **Aceleração**



Da figura temos:

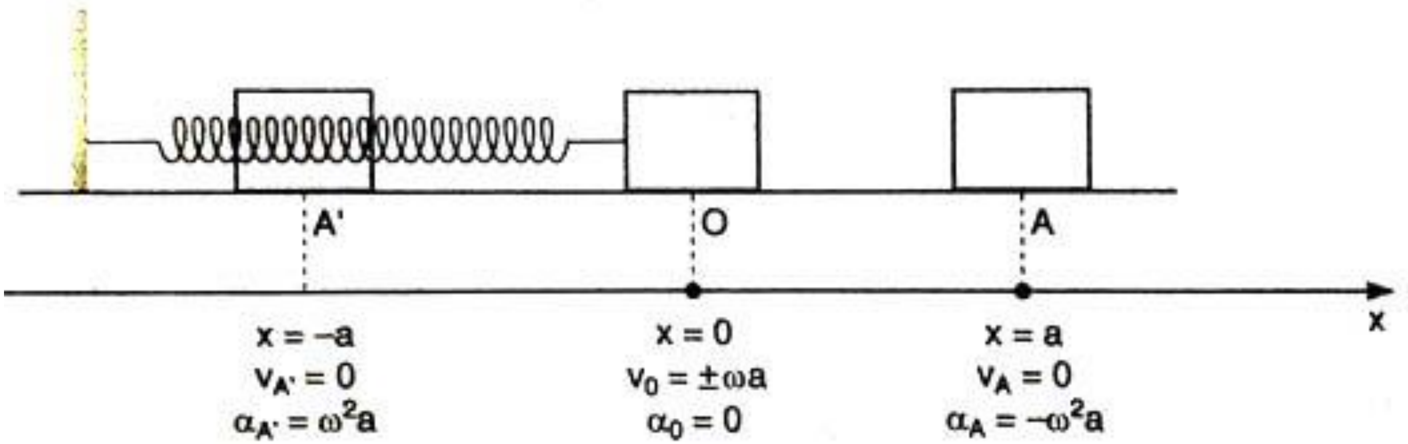
$$\boxed{\alpha = -\omega^2 a\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)}$$

Da equação anterior temos:

$$\boxed{\alpha = -\omega^2 x}$$

*Conclui-se então que a aceleração é **nula** na posição de **equilíbrio** e tem módulo **máximo** nas posições de **inversão**.*

- obs.: quadro-resumo das grandezas estudadas



✓ *Período e frequência no MHS*

Sendo a força restauradora a resultante temos:

$$F = F_R \Rightarrow F = m\alpha \Rightarrow -kx = m\left(-\omega^2 x\right) \Rightarrow \boxed{k = m\omega^2}$$

Dessa forma: $\omega^2 = \dfrac{k}{m} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}} \Rightarrow \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 = \dfrac{k}{m}$

frequência angular

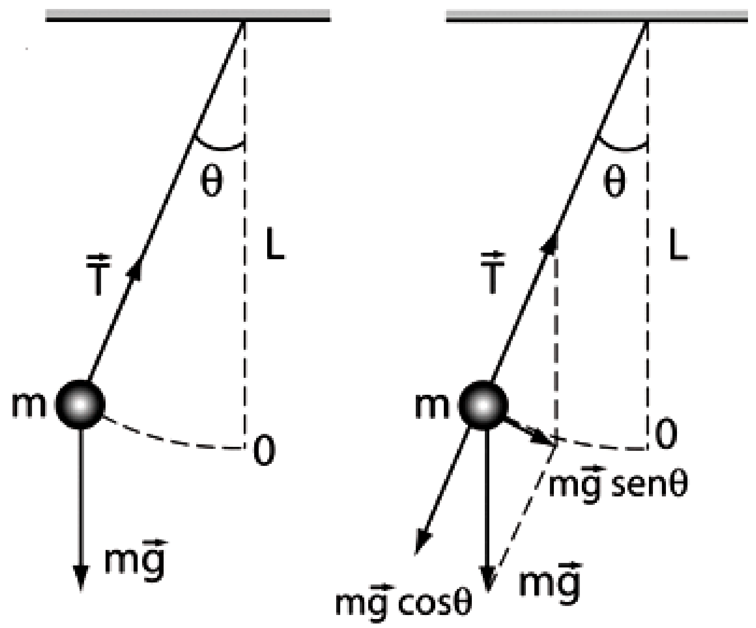
Para um *sistema elástico, constituído por uma mola ideal, ligada a um bloco (sistema massa-mola*) temos:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} \Rightarrow f = \frac{1}{T} \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

- Obs.: o período **não** depende da **amplitude**

✓ **Pêndulo simples**

Considere uma partícula de massa m suspensa por um fio de comprimento ℓ. A componente tangencial do peso é a força restauradora, logo:



$$P_x = F_{Rt} \Rightarrow F_{Rt} = mg.sen\theta$$

Mas para ângulos pequenos temos:

$$sen\theta \cong tg\theta \cong \theta$$

Logo $F_{Rt} = mg.\theta = mg.\frac{x}{\ell} = \frac{mg}{\ell}.x$

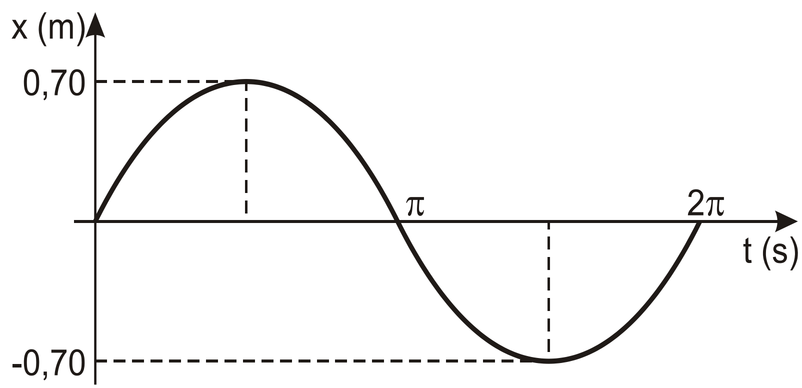
constante

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/\ell}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell}{mg}} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

força efetiva

- Obs.: o período **não** depende da **massa** do corpo

(UEG) A posição em função do tempo de um sistema massa-mola em um MHS é representada no gráfico a seguir. Admita que a inércia translacional do sistema seja 0,70kg e responda ao que se pede.



a) Qual é a amplitude e o período do MHS?
b) Qual é a constante elástica da mola?
c) Qual é o módulo da aceleração da massa quando a sua energia cinética for a metade da energia total do sistema?

RESOLUÇÃO

a) A partir do gráfico, pode-se afirmar que:

- **amplitude:** $\boxed{a = 0,7m}$

- **período:** $\boxed{T = 2\pi s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{2\pi} \Rightarrow \boxed{\omega = 1\frac{rad}{s}}$

b) O período de um sistema massa-mola é dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow 2\pi = 2\pi\sqrt{\frac{0,7}{k}} \Rightarrow 1 = \frac{0,7}{k} \Rightarrow \boxed{k = 0,7\frac{N}{m}}$$

c) Inicialmente, deve-se determinar a deformação da mola para a situação pedida. Logo:

$$E_C = \frac{E_m}{2} \Rightarrow \boxed{E_C = \frac{ka^2}{4}}$$

$$E_m = E_C + E_P \Rightarrow \frac{ka^2}{2} = \frac{ka^2}{4} + \frac{kx^2}{2} \Rightarrow \frac{ka^2}{4} = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{x = \pm 0,35\sqrt{2}m}$$

Assim, temos: $|\alpha| = \omega^2 x \Rightarrow |\alpha| = 1^2.0,35\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{|\alpha| \cong 0,5\frac{m}{s^2}}$

(UFU) Márcia foi visitar sua avó em uma cidade muito fria e viu em sua sala um antigo relógio de pêndulo, funcionando perfeitamente. Ficou encantada com a bela relíquia e conseguiu de sua avó a permissão para trazer o relógio para sua casa em Uberlândia. No entanto, como as temperaturas em Uberlândia são muito mais elevadas do que na cidade de sua avó, Márcia imaginou que o pêndulo metálico poderia sofrer modificações em seu comprimento devido à mudança da temperatura. Desse modo, resolveu observar o movimento do pêndulo do relógio, para ver se havia diferenças em seu funcionamento.

D

Sabendo-se que a aceleração da gravidade possui o mesmo valor nas duas cidades, assinale a alternativa que representa a conclusão correta de Márcia acerca do funcionamento do relógio de pêndulo em Uberlândia.

a) Não houve alteração no período do pêndulo, pois este não depende do comprimento do pêndulo.

b) O tempo necessário para uma oscilação completa do pêndulo diminuiu, devido à diminuição do comprimento do pêndulo.

c) O tempo necessário para uma oscilação completa do pêndulo diminuiu, devido à dilatação do pêndulo.

d) O tempo necessário para uma oscilação completa do pêndulo aumentou, devido à dilatação do pêndulo.

(FUVEST-2016) Um pêndulo simples, constituído por um fio de comprimento L e uma pequena esfera, é colocado em oscilação. Uma haste horizontal rígida é inserida perpendicularmente ao plano de oscilação desse pêndulo, interceptando o movimento do fio na metade do seu comprimento, quando ele está na direção vertical. A partir desse momento, o período do movimento da esfera e dado por (**dado:** aceleração da gravidade = g; o fio não adere à haste horizontal)

a) $2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

b) $2\pi\sqrt{\dfrac{L}{2g}}$

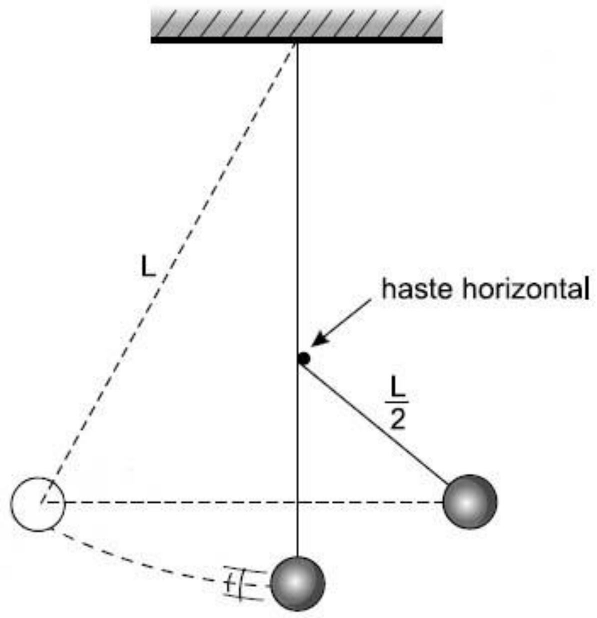
c) $\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}+\dfrac{L}{2g}}$

d) $2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}+\dfrac{L}{2g}}$

e) $\pi\left(\sqrt{\dfrac{L}{g}}+\sqrt{\dfrac{L}{2g}}\right)$

RESOLUÇÃO

Esquematizando a situação, temos:



O novo período (tempo para ir e voltar) será agora a junção de quatro momentos: **ida** com ***L/2***, ***ida*** com ***L***, ***volta*** com ***L*** e ***volta*** com ***L/2***. Assim, temos:

para o trecho com ***L/2***: $\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{4}.2\pi\sqrt{\frac{L/2}{g}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{2g}}$

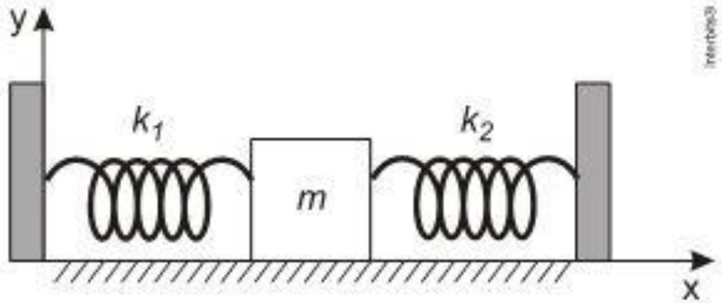
Dessa maneira, temos:

$$T_{total} = \left(\Delta t_L + \Delta t_{L/2}\right)_{ida} + \left(\Delta t_L + \Delta t_{L/2}\right)_{volta} = \left(\frac{1}{4}.2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{2g}}\right) + \left(\frac{1}{4}.2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{2g}}\right)$$

$$T_{total} = 2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{2g}}\right) \Rightarrow T_{total} = 2\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{L}{g}} + \sqrt{\frac{L}{2g}}\right) \Rightarrow \boxed{T_{total} = \pi\left(\sqrt{\frac{L}{g}} + \sqrt{\frac{L}{2g}}\right)}$$

E

(UECE) Um bloco de massa m, que se move sobre uma superfície horizontal sem atrito, está preso por duas molas de constantes elásticas k_1 e k_2 e massas desprezíveis com relação ao bloco, entre duas paredes fixas, conforme a figura.



Dada uma velocidade inicial ao bloco, na direção do eixo x, este vibrará com frequência angular igual a

a) $\sqrt{\dfrac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)}}$ b) $\sqrt{\dfrac{(k_1+k_2)}{2m}}$ c) $\sqrt{\dfrac{(k_1-k_2)}{2m}}$ d) $\sqrt{\dfrac{(k_1+k_2)}{m}}$

RESOLUÇÃO

Deslocando o bloco para a direita, por exemplo, ele comprimirá a mola da direita um valor $\boldsymbol{x}$ e esticará a mola da esquerda um valor $\boldsymbol{x}$ também. Assim, com as deformações iguais, trata-se de uma associação em paralelo. Logo:

$$k_{eq} = \sum k \Rightarrow \boxed{k_{eq} = k_1 + k_2}$$

Substituindo a constante elástica equivalente na equação da frequência de um massa-mola:

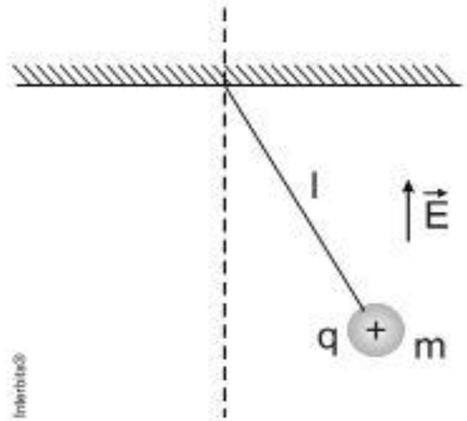
$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}}$$

Logo, a frequência angular será dada por:

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 2\pi . \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}}$$

D

(UFJF-2010) Um pêndulo simples é construído com uma esfera metálica de massa $m = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$kg, carregada positivamente com uma carga $q = 3{,}0 \cdot 10^{-5}$ C e um fio isolante de comprimento ℓ de massa desprezível. Quando um campo elétrico uniforme e constante $\vec{E}$ é aplicado verticalmente para cima, em toda a região do pêndulo, o seu período $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ dobra de valor. Considere $g = 10$ m/s².



a) Calcule a aceleração resultante, na presença dos campos elétrico e gravitacional.
b) Calcule a intensidade do campo elétrico.

RESOLUÇÃO

Para esse exercício, deve ser usada a ideia de força vertical efetiva. Logo:

$$F_{ef} = P - F_{e\ell} \Rightarrow F_{ef} = mg - |q|E$$

De acordo com o enunciado, o período dobra de valor com a adição do campo elétrico. Logo:

$$T_{depois} = 2T_{antes} \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{a}} = 2\left(2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\right) \Rightarrow \frac{\ell}{a} = 4\frac{\ell}{g} \Rightarrow a = \frac{g}{4} \Rightarrow \boxed{a = 2{,}5\frac{m}{s^2}}$$

b) Para o período final, temos:

$$T_{depois} = 2T_{antes} \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{m\ell}{mg - |q|E}} = 2\left(2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\right) \Rightarrow \frac{m\ell}{mg - |q|E} = \frac{4\ell}{g}$$

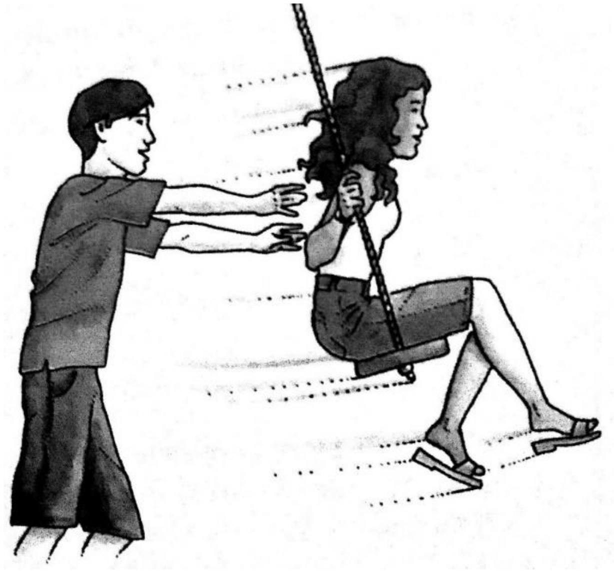
Daí, temos: $mg = 4mg - 4|q|E \Rightarrow 4|q|E = 3mg \Rightarrow 3.10^{-5}E = \frac{3}{4}.1.10^{-4}.10 \Rightarrow \boxed{E = 25\frac{N}{C}}$

✓ Oscilações forçadas e ressonância

Os sistemas mecânicos que oscilam sob ação exclusiva de forças restauradoras elásticas são chamados de **osciladores harmônicos**. Para cada oscilador harmônico o período e a frequência já estão definidos. Fazendo o sistema oscilar, para qualquer amplitude, sua frequência já está definida. Temos então **oscilações livres**.

Na prática, devido à presença de forças dissipativas, a amplitude de oscilação diminui gradativamente. Temos as chamadas **oscilações amortecidas**. É possível manter o sistema oscilando com o fornecimento externo e periódico de energia.

- Se o fornecimento externo de energia obrigar o sistema a oscilar com uma frequência diferente de sua frequência própria de vibração, dizemos que o sistema realiza **oscilações forçadas;**
- Se o fornecimento externo de energia obrigar o sistema a oscilar com uma frequência igual a sua frequência própria de vibração, dizemos que o sistema entra em **ressonância**. Nesse caso, o sistema gradativamente armazena energia, passando a vibrar com amplitude crescente.



➢ Obs.: a energia mecânica de vibração é dada por

$$E_m = \frac{ka^2}{2} = \frac{\left(m\omega^2\right)a^2}{2} = \frac{m\left(2\pi f\right)^2 a^2}{2} \Rightarrow \boxed{E_m = 2\pi^2 m f^2 a^2}$$

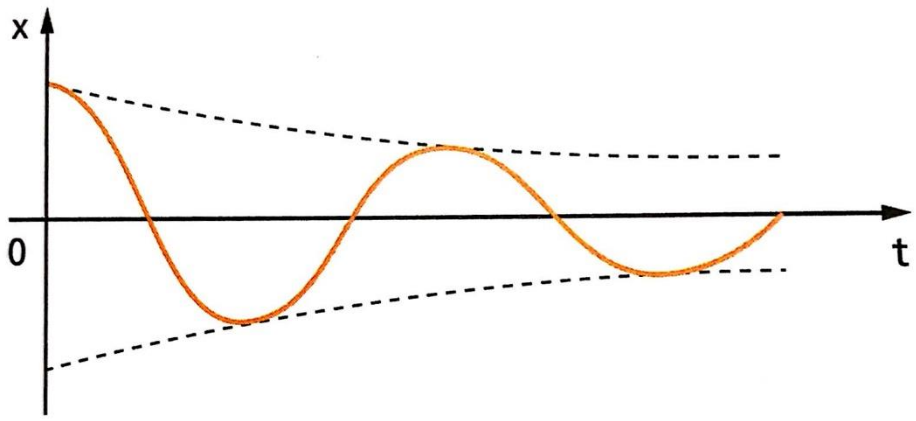
- Obs.: exemplo de **ressonância** (ponte Tacoma Narrows)

A ponte de Tacoma Narrows foi inaugurada em 1940. Desde o início notava-se uma oscilação vertical incomum, tornando-se uma atração local por causa das oscilações verticais constantes. Em 7 de novembro de 1940, sob ação de ventos com velocidade entre 60 km/h e 70 km/h, a ponte começou a oscilar, chegando a amplitudes de 5m.

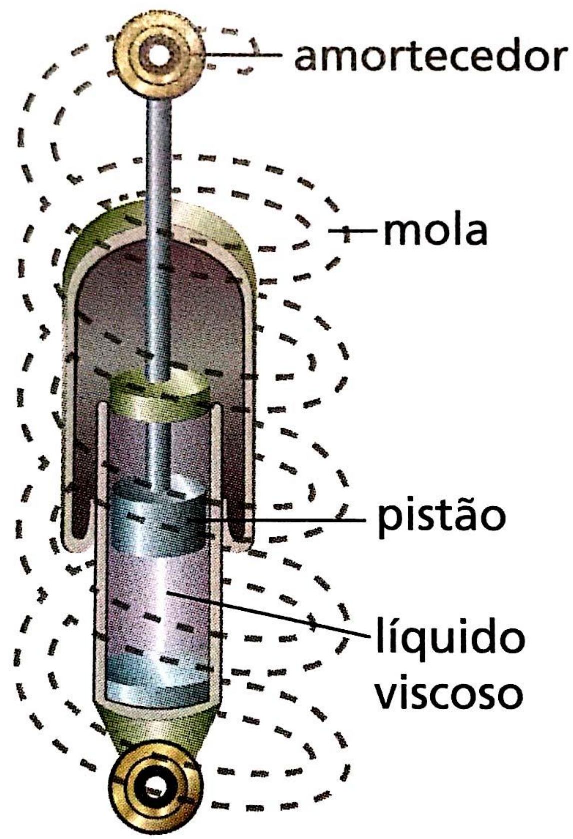
Por volta das 10h da manhã, a frequência de oscilação atingiu 36 ciclos por minuto, sofrendo oscilações horizontais que provocaram torções em toda sua estrutura. Por volta das 11h, o primeiro trecho de concreto se desprendeu e caiu no rio. Como a ponte de Tacoma era pênsil (suspensa por cabos com a mesma espessura), o vento entrou em ressonância com todos os cabos de uma vez.

✓ **Movimento harmônico amortecido**

Nos casos reais, há uma perda gradativa de energia mecânica devido aos vários tipos de atrito, por exemplo. Assim sendo, uma perda de energia mecânica acarreta uma diminuição da amplitude.

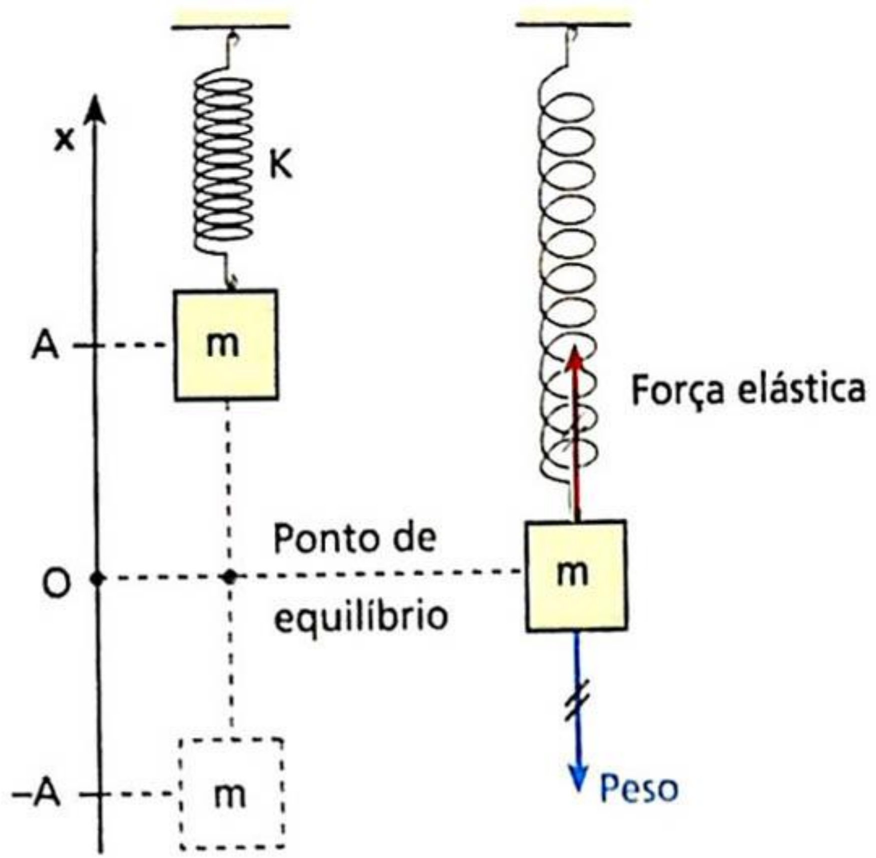


Na suspensão de um automóvel temos uma mola helicoidal destinada a absorver impactos. Para que a mola não fique oscilando por muito tempo, dentro dela há um amortecedor. No interior do amortecedor há um líquido muito viscoso, que amortece rapidamente o movimento do pistão.



✓ Oscilador massa-mola na vertical

Na posição vertical atuam no corpo o peso e a força elástica.



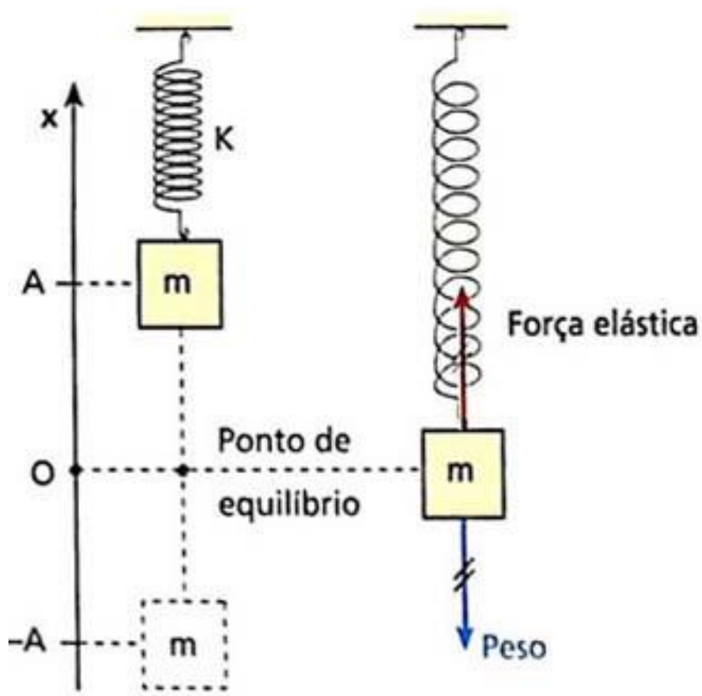
Nesse oscilador a força resultante no bloco não é mais a força elástica, mas sim a composição vetorial da força elástica com a força peso. No ponto de equilíbrio a força resultante é nula, mas a mola está deformada.

(UFG) Uma mola de constante elástica k = 50 N/m e massa desprezível tem uma extremidade fixa no teto e a outra presa a um corpo de massa m = 0,2kg. O corpo é mantido inicialmente numa posição em que a mola está relaxada e na vertical. Ao ser abandonado, ele passa a realizar um movimento harmônico simples, em que a amplitude e a energia cinética máxima são, respectivamente, (**dado:** g = 10 m/s²)

a) 4cm e 0,04 J
b) 4cm e 0,08 J
c) 8cm e 0,04 J
d) 8cm e 0,08 J
e) 8cm e 0,16 J

RESOLUÇÃO

A figura representa a situação apresentada no enunciado. Para a amplitude, temos:



Para a amplitude, temos: $F_{e\ell} = P \Rightarrow kx = mg \Rightarrow 50x = 0,2.10 \Rightarrow \boxed{x = 0,04m}$

$$\boxed{x = a = 4cm}$$

A energia cinética é máxima na posição de equilíbrio. Assim, pela conservação da energia mecânica, temos:

$$\left(E_m\right)_{amp} = \left(E_m\right)_{equil} \Rightarrow mgh = E_C + \frac{kx^2}{2} \Rightarrow E_C = 0,2.10.0,04 - \frac{50.\left(4.10^{-2}\right)^2}{2} \Rightarrow \boxed{E_C = 0,04J}$$

A