Resumo Matrizes

1. Introdução às Matrizes

1.1. Definição de Matriz

Uma **matriz** é uma tabela retangular de números organizados em linhas e colunas. As matrizes são denotadas geralmente por letras maiúsculas (A, B, C, etc.) e seus elementos individuais por letras minúsculas com dois índices (aij, onde *i* representa a linha e *j* a coluna).

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Aqui, a matriz A tem 2 linhas e 3 colunas (dimensão 2x3).

1.2. Representação de Matrizes

As matrizes podem ser classificadas de acordo com seu formato:

- **Matriz Retangular**: Número de linhas diferente do número de colunas (exemplo: 2x3).
- **Matriz Quadrada**: Mesmo número de linhas e colunas (exemplo: 3x3).
- **Matriz Linha**: Apenas uma linha (1xn).
- **Matriz Coluna**: Apenas uma coluna (nx1).

Ilustração:

$$\text{Matriz Linha: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Matriz Coluna: } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1.3. Tipos de Matrizes

- **Matriz Nula:** Todos os elementos são zero.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Identidade (I):** Matriz quadrada com 1s na diagonal principal e 0s nas demais posições.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Diagonal:** Matriz quadrada onde apenas os elementos da diagonal principal são diferentes de zero.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Triangular Superior/Inferior:** Matriz quadrada onde todos os elementos abaixo/acima da diagonal principal são zero.

$$\text{Triangular Superior: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Triangular Inferior: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Simétrica:** Matriz quadrada igual à sua transposta.

$$A = A^T$$

---

2. Operações Básicas com Matrizes

2.1. Adição de Matrizes

A adição de matrizes é possível apenas se as matrizes tiverem o **mesmo número de linhas e colunas**.
A operação é realizada elemento a elemento.

Definição: Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são matrizes de dimensão m×n, então:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

Propriedades da Adição:

- Comutativa: $A + B = B + A$
- Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Elemento Neutro: Existe uma matriz nula O tal que $A + O = A$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Exemplo de Exercício: Some as matrizes abaixo e verifique a propriedade comutativa.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Resposta Esperada:

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}, \quad B + A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$$

Portanto, $A + B = B + A$.

2.2. Subtração de Matrizes

A subtração de matrizes segue as mesmas condições da adição, exigindo que as matrizes tenham o **mesmo número de linhas e colunas**. A operação é realizada elemento a elemento.

Definição: Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são matrizes de dimensão m×n, então:

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$$

Propriedades da Subtração:

- Não comutativa: Em geral, $A - B \neq B - A$
- Associativa: $(A - B) - C = A - (B + C)$

Exemplo:

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 5-2 & 7-3 \\ 6-1 & 8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Exemplo de Exercício: Subtraia as matrizes A e B e explique o resultado obtido.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Resposta Esperada:

$$A - B = \begin{pmatrix} 4-1 & 9-3 \\ 2-4 & 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.3. Multiplicação por Escalar

A multiplicação por escalar envolve multiplicar cada elemento da matriz por um número real (escalar).

Definição: Se k é um escalar e $A = [a_{ij}]$ é uma matriz, então:

$$kA = [k \cdot a_{ij}]$$

Propriedades da Multiplicação Escalar:

- Distributiva em relação à adição de matrizes: $k(A + B) = kA + kB$
- Associativa com a multiplicação de escalares: $k(lA) = (kl)A$
- Elemento Neutro: $1A = A$

Exemplo:

$$k = 3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Exemplo de Exercício: Multiplique a matriz abaixo por 2 e discuta as propriedades observadas.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Resposta Esperada:

$$2A = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Observa-se que cada elemento foi multiplicado por 2, conforme a definição da multiplicação escalar.

3. Multiplicação de Matrizes

3.1. Condições para a Multiplicação

Para multiplicar duas matrizes A e B, o número de **colunas de A** deve ser igual ao número de **linhas de B**. Se A é de dimensão m×n e B de dimensão n×p, então o produto AB será uma matriz m×p.

Exemplo:

- A: 2×3
- B: 3×4
- AB: 2×4

3.2. Método de Multiplicação

A multiplicação de matrizes é realizada calculando o **produto escalar** das linhas de A com as colunas de B.

Passo a Passo:

1. **Identifique** a linha de A e a coluna de B que serão multiplicadas.
2. **Multiplique** os elementos correspondentes e **sume** os resultados.
3. **Repita** para todas as combinações de linhas de A e colunas de B.

Fórmula: Se $C = AB$, então:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

3.3. Propriedades da Multiplicação de Matrizes

- **Não Comutativa:** Em geral, $AB \neq BA$
- **Associativa:** $A(BC) = (AB)C$
- **Distributiva:** $A(B + C) = AB + AC$ e $(A + B)C = AC + BC$

3.4. Produtos Especiais

- **Produto de uma Matriz pela Inversa:** Se A é invertível, então:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- **Produto com a Matriz Identidade:**

$$AI = IA = A$$

Exemplo de Exercício: Multiplique as matrizes A e B abaixo e verifique a propriedade associativa.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Resposta Esperada: Primeiro, calcule AB:

$$AB = \begin{pmatrix} 2\cdot 4 + 0\cdot 6 & 2\cdot 5 + 0\cdot 7 \\ 1\cdot 4 + 3\cdot 6 & 1\cdot 5 + 3\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 22 & 26 \end{pmatrix}$$

Em seguida, calcule $(AB)C$ e $A(BC)$ para verificar $A(BC) = (AB)C$.

---

4. Determinantes e Inversas de Matrizes

4.1. Determinante de uma Matriz

O **determinante** é uma função que associa a cada matriz quadrada um número real, fornecendo informações sobre propriedades da matriz, como invertibilidade e o volume transformado por ela.

Definição:

- **Matriz 2x2:**

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det(A) = ad - bc$$

- **Matriz 3x3:**

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad \det(A) = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

Propriedades do Determinante:

- $\det(I) = 1$
- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- Se $\det(A) = 0$, A não é invertível

Interpretação Geométrica: O valor absoluto do determinante representa o fator de escala do volume após a transformação linear associada à matriz. O sinal indica a orientação da transformação.

Exemplo: Calcule o determinante da matriz 2x2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (3 \cdot 6) - (8 \cdot 4) = 18 - 32 = -14$$

Exemplo de Exercício: Calcule o determinante da matriz 3x3 e interprete o resultado.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Resposta Esperada:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2(4 \cdot 6 - 5 \cdot 0) - (-1)(0 \cdot 6 - 5 \cdot 1) + 3(0 \cdot 0 - 4 \cdot 1) \\ &= 2(24 - 0) + 1(0 - 5) + 3(0 - 4) \\ &= 48 - 5 - 12 \\ &= 31 \end{aligned}$$

Como $\det(A) \neq 0$, a matriz é invertível e a transformação preserva a orientação.

4.2. Matriz Inversa

A **matriz inversa** de uma matriz quadrada A é a matriz A^{-1} tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

A matriz A deve ser **invertível**, ou seja, $\det(A) \neq 0$.

Método de Cálculo (Matriz 2x2): Para uma matriz 2x2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Propriedades da Matriz Inversa:

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Exemplo: Encontre a inversa da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Primeiro, calcule o determinante:

$$\det(A) = (4 \cdot 6) - (7 \cdot 2) = 24 - 14 = 10$$

Então,

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.7 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Exemplo de Exercício: Encontre a inversa da matriz 2x2 e verifique multiplicando pela matriz original.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Resposta Esperada: Calcule o determinante:

$$\det(A) = (3 \cdot 4) - (2 \cdot 1) = 12 - 2 = 10$$

Inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.2 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Verificação:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 & -0.2 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3 \cdot 0.4 + 2 \cdot -0.1) & (3 \cdot -0.2 + 2 \cdot 0.3) \\ (1 \cdot 0.4 + 4 \cdot -0.1) & (1 \cdot -0.2 + 4 \cdot 0.3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

---

5. Sistemas Lineares e Matrizes

5.1. Representação de Sistemas Lineares com Matrizes

Um sistema linear pode ser representado na forma matricial $Ax = b$, onde:

- A é a matriz dos coeficientes
- x é o vetor das incógnitas
- b é o vetor dos termos constantes

Exemplo: Considere o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$$

Representação matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Então, $Ax = b$.

5.2. Métodos de Resolução Usando Matrizes

- **Método de Eliminação de Gauss:** Redução da matriz aumentada a uma forma escalonada para resolver o sistema.
- **Regra de Cramer:** Utiliza determinantes para resolver sistemas com número igual de equações e incógnitas.
- **Método da Matriz Inversa:** Se A é invertível, então $x = A^{-1}b$.

Exemplo de Resolução usando a Matriz Inversa: Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

Representação matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Calcule A^{-1}:

$$\det(A) = (1 \cdot 4) - (1 \cdot 3) = 4 - 3 = 1$$
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Então,

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 \\ -3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exemplo de Exercício: Resolva um sistema linear 3x3 utilizando a matriz inversa.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x + 3y + 3z = 7 \\ x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

Resposta Esperada:

1. Escrever a matriz A, vetor x e vetor b.
2. Calcular A^{-1}.
3. Calcular $x = A^{-1}b$.
4. Verificar a solução substituindo nas equações originais.

---

6. Transposição e Outras Operações Avançadas

6.1. Transposta de uma Matriz

A **transposta** de uma matriz A, denotada por A^T, é obtida trocando-se as linhas pelas colunas.

Definição: Se A é uma matriz m×n, então A^T é uma matriz n×m onde:

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

Propriedades:

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Exemplo de Exercício: Calcule a transposta da matriz abaixo e verifique suas propriedades.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Resposta Esperada:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

6.2. Rastreio e Traço de uma Matriz

- **Rastreio:** Refere-se a elementos específicos, geralmente usados em outros contextos.
- **Traço:** Soma dos elementos da diagonal principal de uma matriz quadrada.

Definição: Para uma matriz quadrada A de ordem n:

$$\text{Traço}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Propriedades:

- $\text{Traço}(A + B) = \text{Traço}(A) + \text{Traço}(B)$
- $\text{Traço}(kA) = k \cdot \text{Traço}(A)$
- $\text{Traço}(AB) = \text{Traço}(BA)$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{Traço}(A) = 3 + 4 + 6 = 13$$

Exemplo de Exercício: Encontre o traço da matriz quadrada abaixo e discuta suas propriedades.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Resposta Esperada:

$$\text{Traço}(A) = 1 + 5 + 9 = 15$$

6.3. Matriz Simétrica e Diagonalização

- **Matriz Simétrica:** Matriz quadrada igual à sua transposta ($A = A^T$).
- **Diagonalização:** Processo de encontrar uma matriz diagonal D similar a A, ou seja, $A = PDP^{-1}$, onde P é uma matriz de autovetores e D é uma matriz diagonal de autovalores.

Definição de Diagonalização: Uma matriz A é diagonalizável se existir uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tal que:

$$A = PDP^{-1}$$

Aplicações da Diagonalização:

- Simplificação de cálculos de potências de matrizes
- Resolução de sistemas diferenciais
- Análise de estruturas e vibrações em engenharia

Exemplo: Verifique se a matriz abaixo é simétrica e, se possível, diagonalize-a.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resposta Esperada:

- **Simetria:** $A = A^T$, portanto, é simétrica.
- **Diagonalização:** Encontrar autovalores e autovetores para construir P e D.
