

Transformée de Radon : principe, application et reconstruction d'un signal à partir de sa transformée

Guillaume DE CRENY VIVES

Université Toulouse III Paul Sabatier

6 mai 2025

L'objectif de cette présentation est d'expliquer le principe de la transformée de Radon, en donner une application et expliquer comment reconstruire un signal à deux dimensions à partir de son sinogramme

Exemple introductif : Tomographie

Nous commençons par donner l'exemple d'application le plus connu de la transformée de Radon : la tomographie.

- Matériel : Un scanner
- Objectif : Étudier la densité d'un organe
- Résultat obtenu : une image interne du corps permettant d'observer l'organe sans avoir à l'ouvrir

Exemple introductif : Tomographie

Nous commençons par donner l'exemple d'application le plus connu de la transformée de Radon : la tomographie.

- Matériel : Un scanner
- Objectif : Étudier la densité d'un organe
- Résultat obtenu : une image interne du corps permettant d'observer l'organe sans avoir à l'ouvrir

Exemple introductif : Tomographie

Nous commençons par donner l'exemple d'application le plus connu de la transformée de Radon : la tomographie.

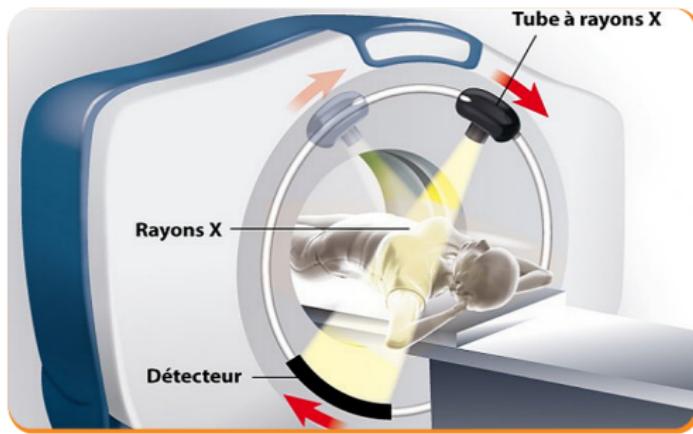
- Matériel : Un scanner
- Objectif : Étudier la densité d'un organe
- Résultat obtenu : une image interne du corps permettant d'observer l'organe sans avoir à l'ouvrir

Exemple introductif : Tomographie

Nous commençons par donner l'exemple d'application le plus connu de la transformée de Radon : la tomographie.

- Matériel : Un scanner
- Objectif : Étudier la densité d'un organe
- Résultat obtenu : une image interne du corps permettant d'observer l'organe sans avoir à l'ouvrir

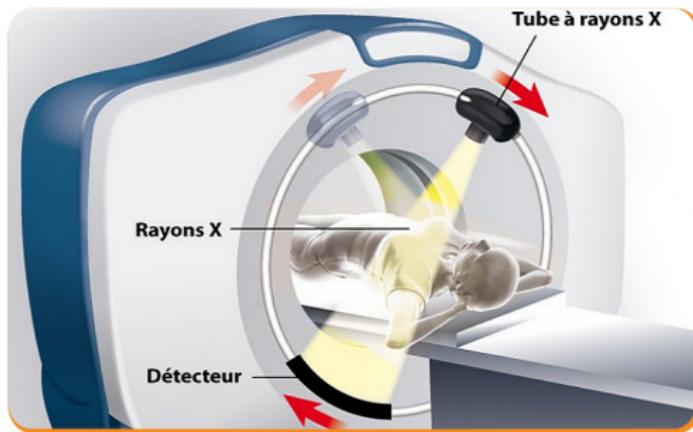
Exemple introductif : Tomographie - Principe



Fonctionnement du scanner

- Source de rayons X devant l'objet
- Écran ou détecteur → mesure de "la quantité de rayonnement qui a été absorbée"
- Rotation du système autour de l'objet

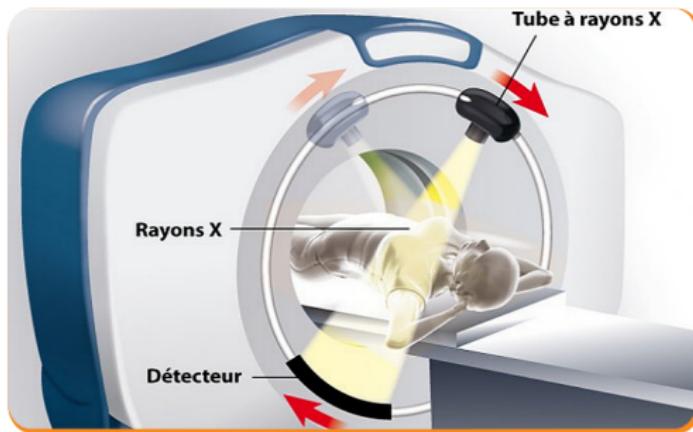
Exemple introductif : Tomographie - Principe



Fonctionnement du scanner

- Source de rayons X devant l'objet
- Écran ou détecteur → mesure de "la quantité de rayonnement qui a été absorbée"
- Rotation du système autour de l'objet

Exemple introductif : Tomographie - Principe



Fonctionnement du scanner

- Source de rayons X devant l'objet
- Écran ou détecteur → mesure de "la quantité de rayonnement qui a été absorbée"
- Rotation du système autour de l'objet

Exemple introductif : Tomographie

L'image brute observée par le scanner :

- Est inexploitable en l'état
- Nécessite un traitement mathématique

➤ Transformation de Radon

En TP, par soucis de simplicité, nous nous sommes limités à l'étude de la transformée de Radon pour des signaux à deux dimensions. Cette présentation se restreint donc à ce cadre.

Exemple introductif : Tomographie

L'image brute observée par le scanner :

- Est inexploitable en l'état
- Nécessite un traitement mathématique

➤ Transformation de Radon

En TP, par soucis de simplicité, nous nous sommes limités à l'étude de la transformée de Radon pour des signaux à deux dimensions. Cette présentation se restreint donc à ce cadre.

Exemple introductif : Tomographie

L'image brute observée par le scanner :

- Est inexploitable en l'état
- Nécessite un traitement mathématique

➡ Transformation de Radon

En TP, par soucis de simplicité, nous nous sommes limités à l'étude de la transformée de Radon pour des signaux à deux dimensions. Cette présentation se restreint donc à ce cadre.

Exemple introductif : Tomographie

L'image brute observée par le scanner :

- Est inexploitable en l'état
- Nécessite un traitement mathématique

☞ Transformation de Radon

En TP, par soucis de simplicité, nous nous sommes limités à l'étude de la transformée de Radon pour des signaux à deux dimensions. Cette présentation se restreint donc à ce cadre.

Exemple introductif : Tomographie

L'image brute observée par le scanner :

- Est inexploitable en l'état
- Nécessite un traitement mathématique

☞ Transformation de Radon

En TP, par soucis de simplicité, nous nous sommes limités à l'étude de la transformée de Radon pour des signaux à deux dimensions. Cette présentation se restreint donc à ce cadre.

Principe théorique de la transformée de Radon

Code Python

Avec le code suivant, on génère un exemple d'image simple pour comprendre le principe de la transformée de Radon

```
u1 = numpy.zeros((64,64))
u1[m, n] = ((m - 32)**2 + (n - 32)**2 < 500) * 1
```

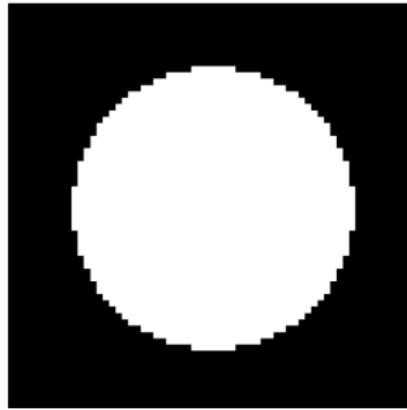
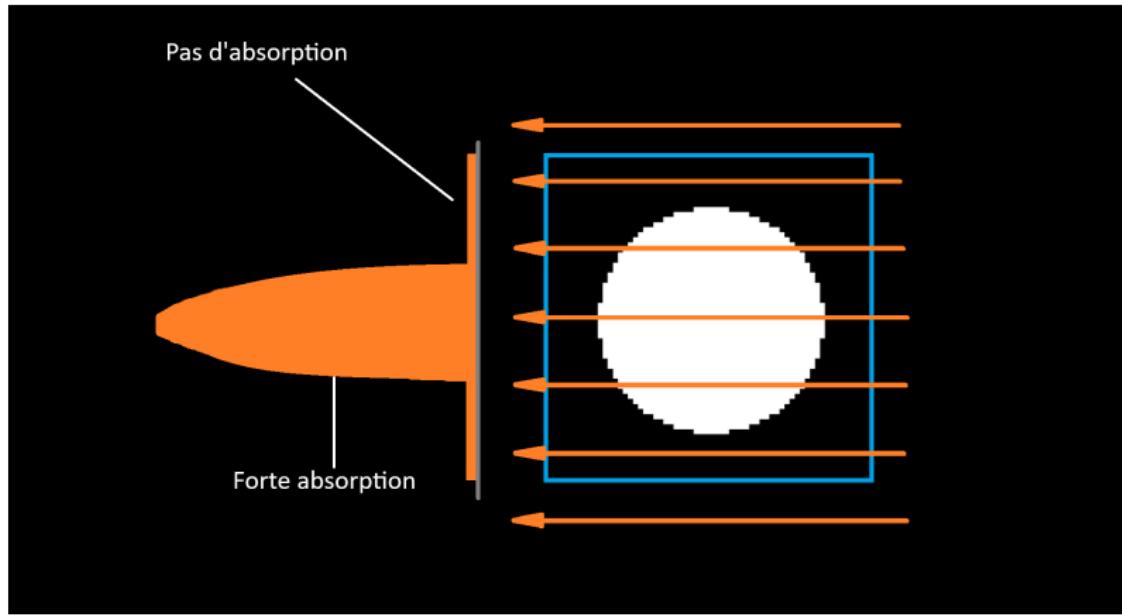


Figure 1 – Première image de test utilisée en TP

Idée de Radon

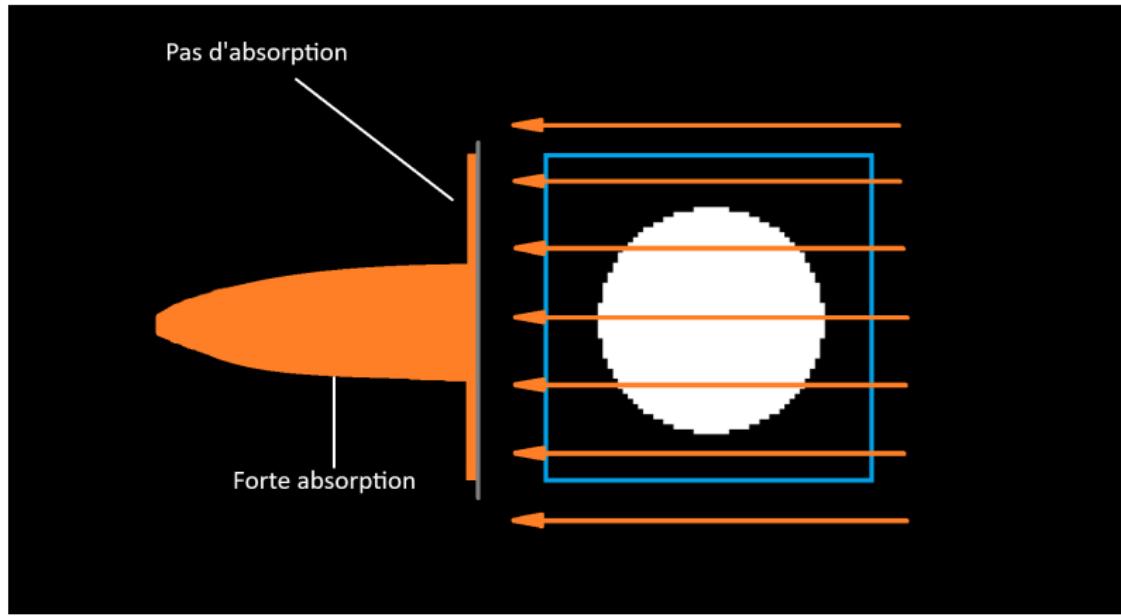
Imaginons que nous propagions de la lumière à travers notre image :



La forme orange représente l'absorption des rayons par l'objet (c'est son ombre sur l'écran)

Idée de Radon

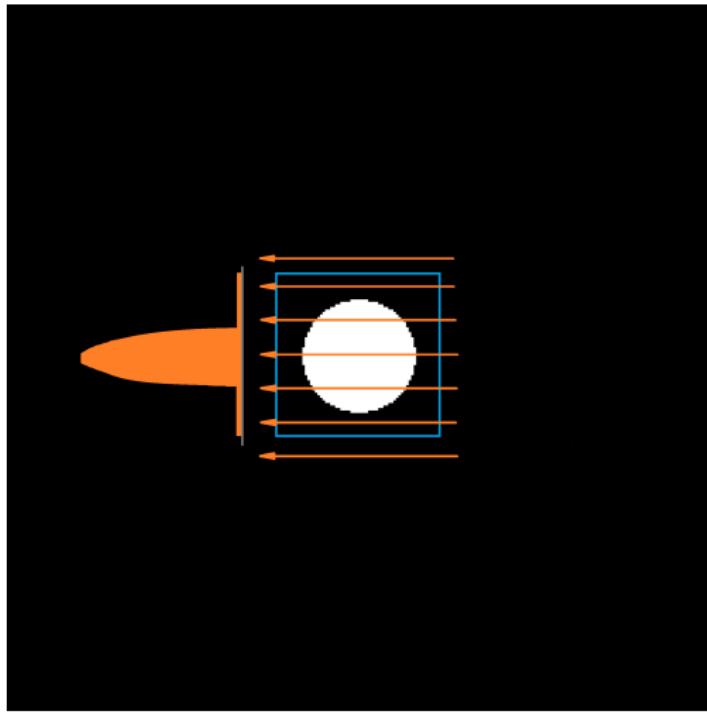
Imaginons que nous propagions de la lumière à travers notre image :

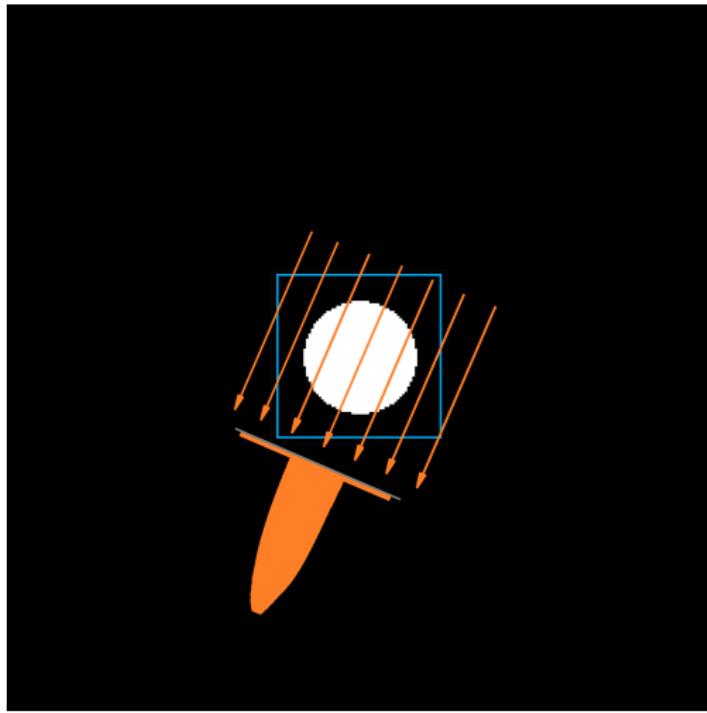


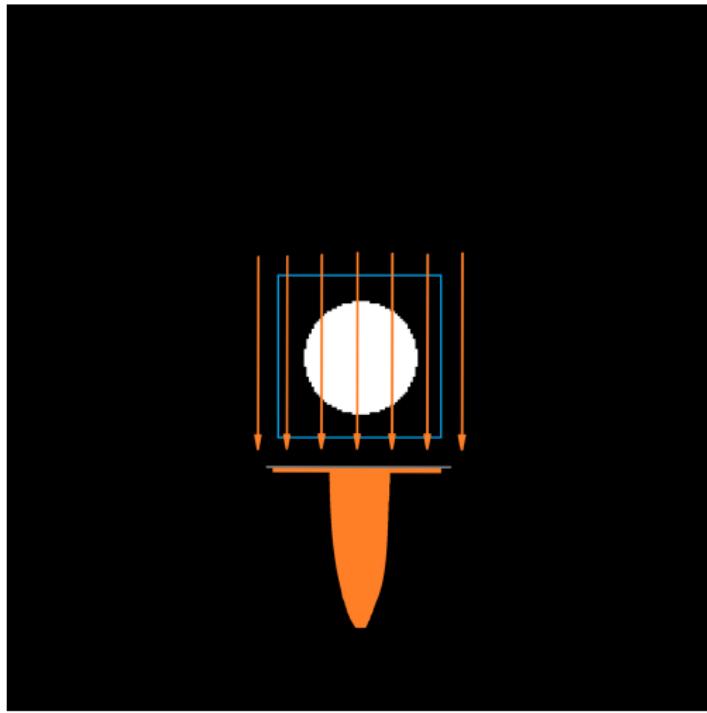
La forme orange représente l'absorption des rayons par l'objet (c'est son ombre sur l'écran)

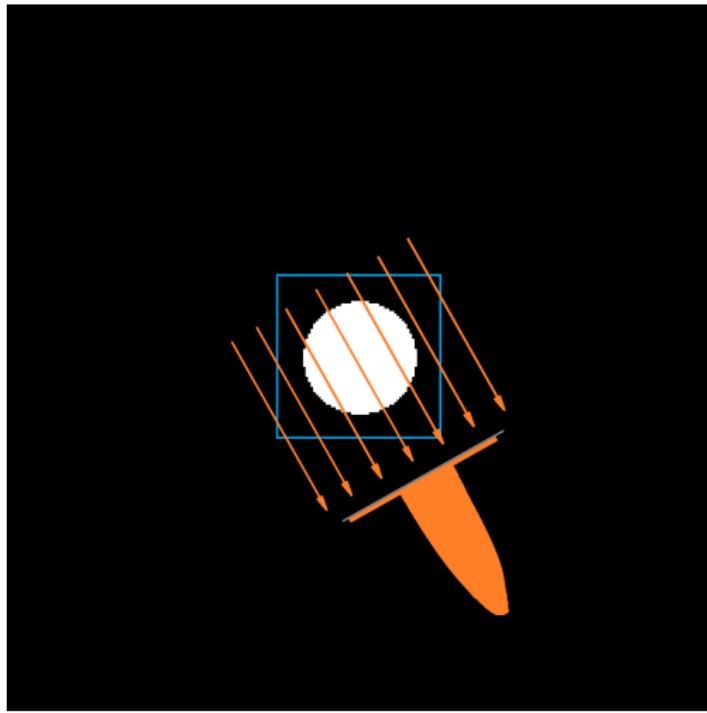
Idée : (J. Radon, 1917) : Si nous connaissons l'ombre de l'objet d'étude lorsque celui-ci est éclairé sous le plus d'angles différents possible, cela permet de le caractériser.

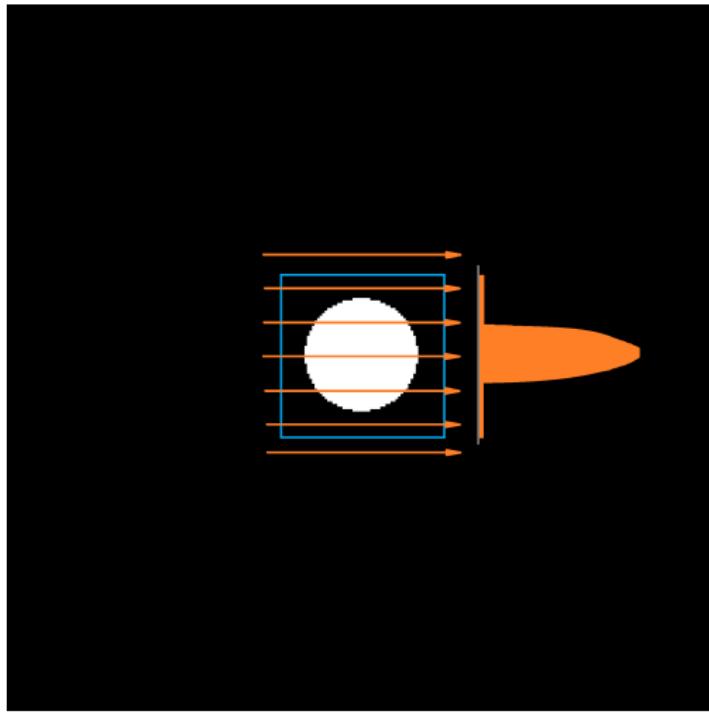
Idée : (J. Radon, 1917) : Si nous connaissons l'ombre de l'objet d'étude lorsque celui-ci est éclairé sous le plus d'angles différents possible, cela permet de le caractériser.

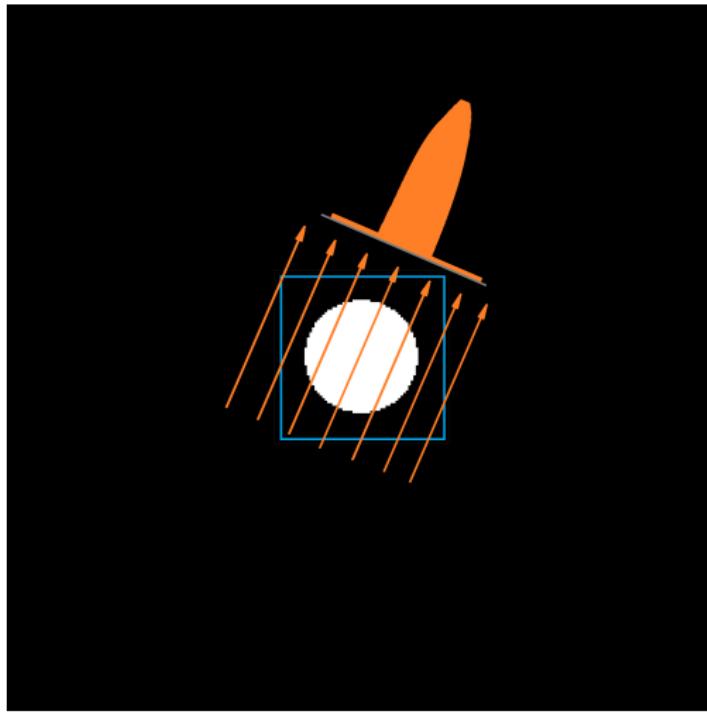


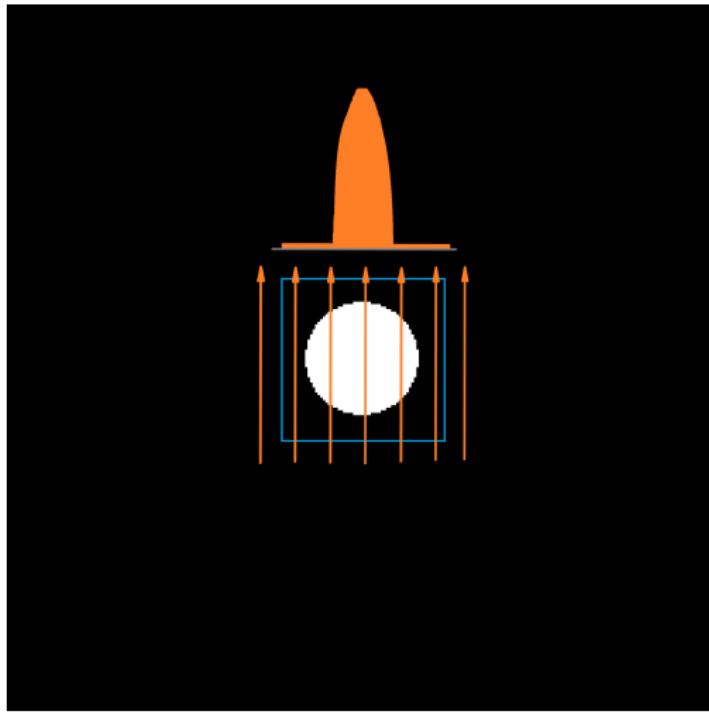


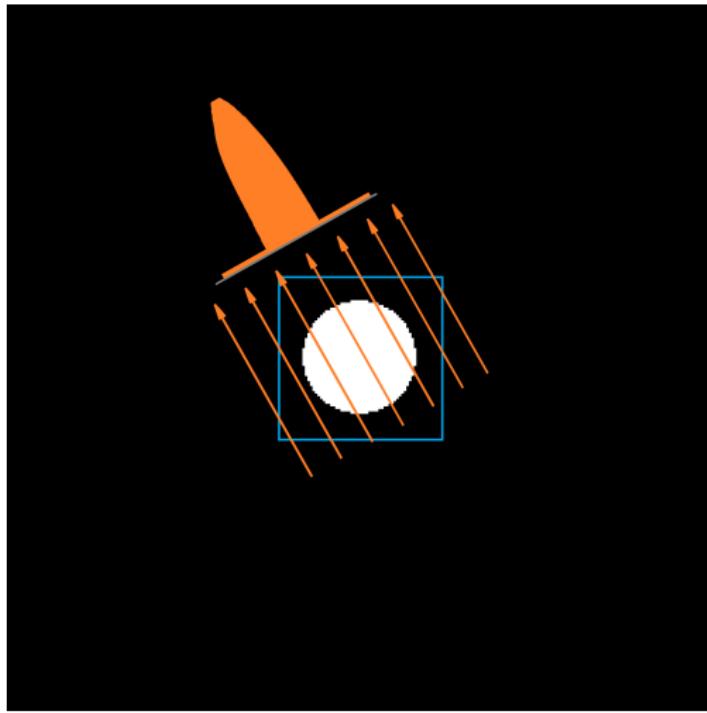


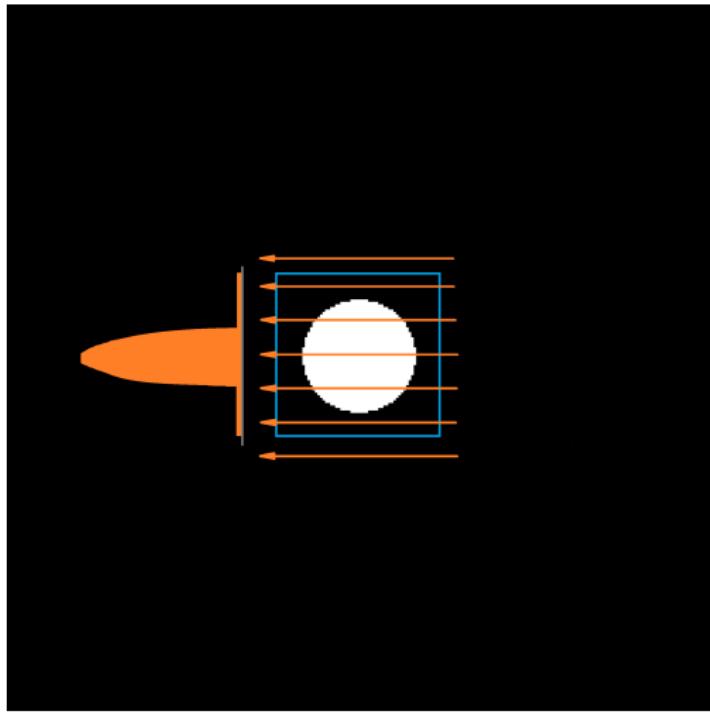












Observations

- Cette image de test est un cas "pathologique" : son ombre est la même quelque soit l'angle de la source de rayons. En principe, chaque angle donne une ombre différente mais cela aurait été beaucoup plus difficile à représenter sur ce document...
- Pour chaque angle θ , "l'ombre" représentée en orange est la quantité que nous noterons plus loin $R_\theta f(\cdot)$

Observations

- Cette image de test est un cas "pathologique" : son ombre est la même quelque soit l'angle de la source de rayons. En principe, chaque angle donne une ombre différente mais cela aurait été beaucoup plus difficile à représenter sur ce document...
- Pour chaque angle θ , "l'ombre" représentée en orange est la quantité que nous noterons plus loin $R_\theta f(\cdot)$

Observations

- Cette image de test est un cas "pathologique" : son ombre est la même quelque soit l'angle de la source de rayons. En principe, chaque angle donne une ombre différente mais cela aurait été beaucoup plus difficile à représenter sur ce document...
- Pour chaque angle θ , "l'ombre" représentée en orange est la quantité que nous noterons plus loin $R_\theta f(\cdot)$

Terminologie

Cadre : Dans le cas des signaux analogiques.

- f signal analogique (défini sur \mathbb{R}^2) dit fonction d'atténuation
- H est un intervalle de \mathbb{R} . C'est l'écran et $s \in H$ un point de l'écran.
- Pour θ fixé, $C_\theta(\Delta(s))$ est la quantité représentée en orange précédemment ("l'ombre de l'image") en un point s de l'écran : on l'appelle cumul d'atténuation le long de la droite $\Delta(s)$ qui est perpendiculaire à H et passant par s (cette droite représente le rayon qui passe en s).

Terminologie

Cadre : Dans le cas des signaux analogiques.

- f signal analogique (défini sur \mathbb{R}^2) dit fonction d'atténuation
- H est un intervalle de \mathbb{R} . C'est l'écran et $s \in H$ un point de l'écran.
- Pour θ fixé, $C_\theta(\Delta(s))$ est la quantité représentée en orange précédemment ("l'ombre de l'image") en un point s de l'écran : on l'appelle cumul d'atténuation le long de la droite $\Delta(s)$ qui est perpendiculaire à H et passant par s (cette droite représente le rayon qui passe en s).

Terminologie

Cadre : Dans le cas des signaux analogiques.

- f signal analogique (défini sur \mathbb{R}^2) dit fonction d'atténuation
- H est un intervalle de \mathbb{R} . C'est l'écran et $s \in H$ un point de l'écran.
- Pour θ fixé, $C_\theta(\Delta(s))$ est la quantité représentée en orange précédemment ("l'ombre de l'image") en un point s de l'écran : on l'appelle cumul d'atténuation le long de la droite $\Delta(s)$ qui est perpendiculaire à H et passant par s (cette droite représente le rayon qui passe en s).

Terminologie

Cadre : Dans le cas des signaux analogiques.

- f signal analogique (défini sur \mathbb{R}^2) dit fonction d'atténuation
- H est un intervalle de \mathbb{R} . C'est l'écran et $s \in H$ un point de l'écran.
- Pour θ fixé, $C_\theta(\Delta(s))$ est la quantité représentée en orange précédemment ("l'ombre de l'image") en un point s de l'écran : on l'appelle cumul d'atténuation le long de la droite $\Delta(s)$ qui est perpendiculaire à H et passant par s (cette droite représente le rayon qui passe en s).

Il est temps de définir explicitement le cumul d'atténuation et la transformée de Radon :

Définition

On appelle cumul d'atténuation de f le long du rayon $\Delta(s)$ (qui coupe perpendiculairement H en s) la quantité :

$$C_{\Delta(s)} = \int_{\Delta(s)} f(x) dx$$

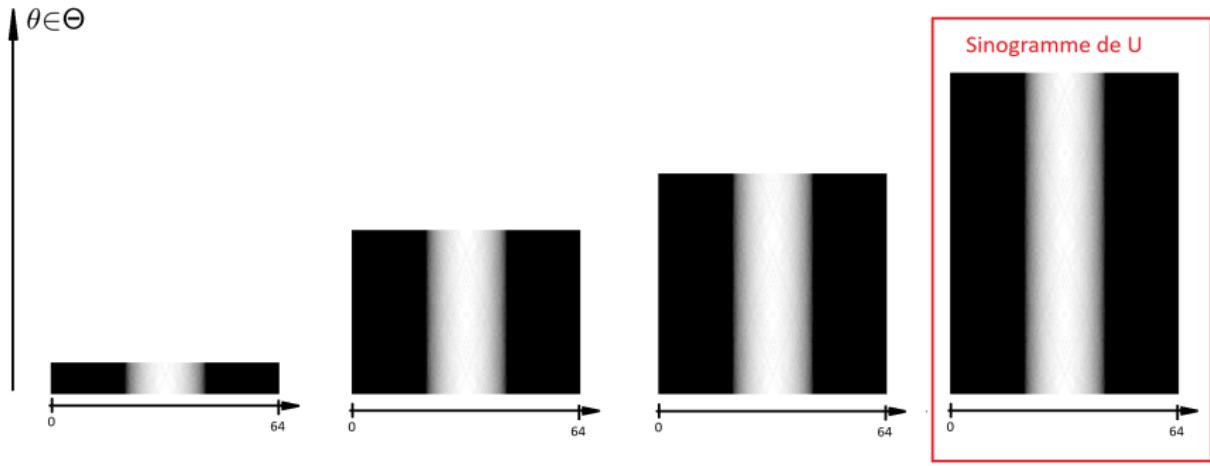
La définition de la Transformée de Radon suit en ajoutant l'idée de rotation faisant intervenir l'angle θ laissé de côté :

Définition

Sous les notations précédentes, la transformée de Radon de f est la quantité définie par :

$$\forall \theta \in [0, \pi[, \forall s \in \mathbb{R}, \mathcal{R}_\theta f(s) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(s \cos \theta - t \sin \theta, s \sin \theta + t \cos \theta) dt.$$

Si Θ est une discréétisation de $[0, \pi]$ avec de nombreux angles, alors avec la définition et les données de $(R_\theta u(\cdot))_{\theta \in \Theta}$, nous construisons le sinogramme de notre image de test :



D'autres exemples

Pour les autres images de tests utilisées en TP, nous nous contenterons de présenter l'image d'une part et son Sinogramme :

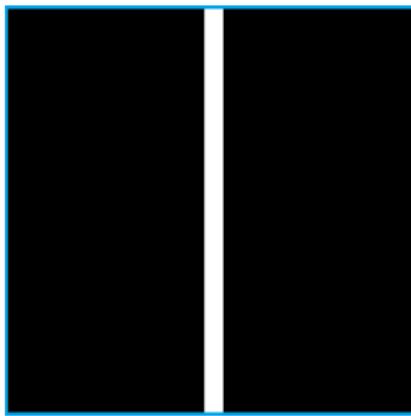


Figure 2 – L'image u_2



Figure 3 – Son sinogramme



Figure 4 – L'image u_3

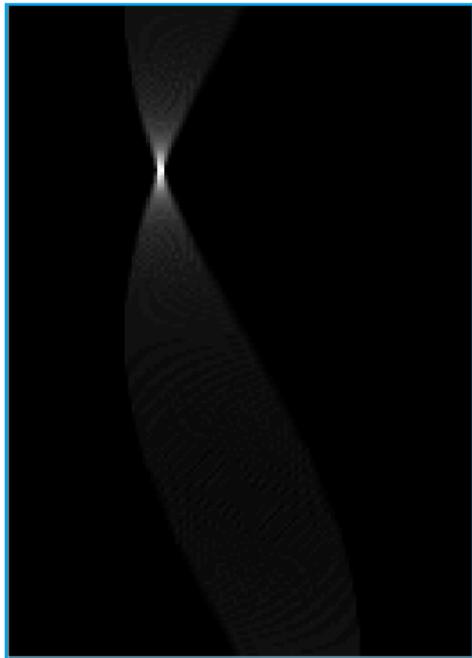


Figure 5 – Son sinogramme

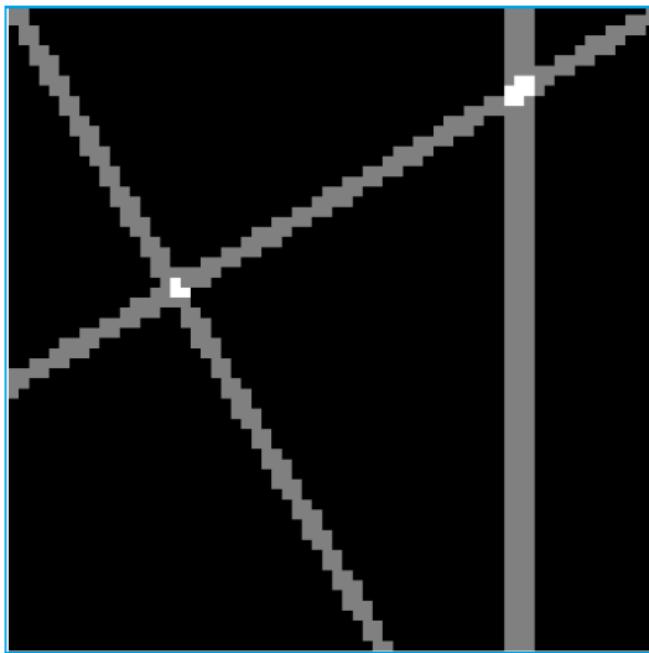


Figure 6 – L'image u_4

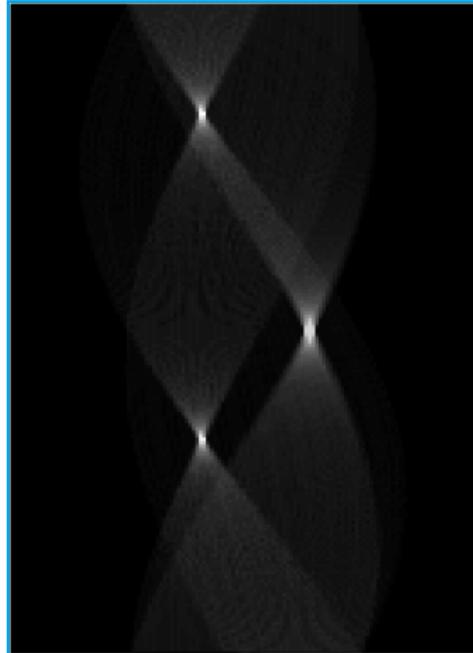


Figure 7 – Son sinogramme

Implémentation en Python

En approximant l'intégrale précédente par une somme de Riemann, on obtient que la transformée de Radon d'un signal digital N -périodique u est donnée $\forall \theta \in [0, \pi[, \forall s \in [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$ par :

$$\mathcal{R}u(\theta, s) := \frac{1}{N} \sum_{t=-N/2}^{N/2} u_{\text{round}\left(s \cos \theta - t \sin \theta + \frac{N}{2}\right), \text{round}\left(s \sin \theta + t \cos \theta + \frac{N}{2}\right)}$$

A la page suivante, on donne le code de la fonction `radon(u, M)` qui nous a servi à effectuer les transformations précédentes où M est le pas choisi pour discréteriser l'intervalle $[0, \pi]$.

Implémentation en Python

```
def radon(u,M):
    u=enlarge(u)
    N=u.shape[0]
    v=zeros((M,N))
    m,n=meshgrid(arange(M),arange(N))
    for t in range(int(-N/2),int(N/2)+1):
        theta=m*numpy.pi/M
        s=n - N/2
        k=numpy.round( s * numpy.cos(theta) - t * numpy.sin(theta)
                      + N/2 ).astype(int)
        l=numpy.round( s * numpy.sin(theta) + t * numpy.cos(theta)
                      + N/2 ).astype(int)
        k[k<0]=0
        k[k>=N]=N-1
        l[l<0]=0
        l[l>=N]=N-1
        v[m,n]+=u[k,l]
    return v/N
```

Transformation inverse

En tomographie, l'image perçue par le scanner n'est que le sinogramme. On voudrait donc savoir comment reconstruire un signal à partir de son sinogramme. On présente dans cette section la construction de la transformée de Radon inverse qui répond à cette question.

Pour inverser la transformée de Radon, on utilise le résultat suivant :

Fourier Slice Theorem ("Théorème de la tranche de Fourier")

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}: \hat{f}(\lambda \cos \theta, \lambda \sin \theta) = \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\lambda).$$

Démonstration : On effectue le changement de variables $(x, y) = R_\theta(s, t)$ (avec $dx dy = ds dt$) en admettant que $\mathcal{R}_\theta f \in L^1$

Détails de la démonstration (facultatif)

Par définition de la Transformée de Fourier

$$\hat{f}(\lambda \cos \theta, \lambda \sin \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-2i\pi(x\lambda \cos \theta + y\lambda \sin \theta)} dx dy \quad (1)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f \circ R_\theta(s, t) e^{-2i\pi(\lambda s(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta))} ds dt \quad (2)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f \circ R_\theta(s, t) e^{-2i\pi\lambda s} ds dt \quad (3)$$

Finalement, par Fubini

$$\hat{f}(\lambda \cos \theta, \lambda \sin \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_\theta f(s) e^{-2i\pi\lambda s} ds = \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\lambda)$$

On obtient alors la formule d'inversion suivante :

Corollaire : Formule de reconstruction pour la transformée de Radon

$$f(x, y) = \int_0^\pi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\lambda) e^{2i\pi\lambda(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\lambda \right) d\theta \quad (4)$$

$$= \int_0^\pi Q_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta \quad (5)$$

où Q_θ est la transformée de Fourier inverse de la fonction $\lambda \mapsto |\lambda| \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\lambda)$

Démonstration : On applique le changement de variable $(\xi, \nu) = (\lambda \cos \theta, \lambda \sin \theta)$ pour $(\lambda, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$ dans la formule de reconstruction de Fourier de f (avec $d\xi d\nu = |\lambda| d\lambda d\theta$)

Détails de la démonstration (facultatif)

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi, \nu) e^{2i\pi(x\xi + y\nu)} d\xi d\nu \quad (6)$$

$$= \int_0^\pi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| \hat{f}(\lambda \cos \theta, \lambda \sin \theta) e^{2i\pi\lambda(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\lambda \right) d\theta \quad (7)$$

$$= \int_0^\pi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\lambda) e^{2i\pi\lambda(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\lambda \right) d\theta \quad (8)$$

La deuxième égalité s'obtient en écrivant la définition de la transformée de Fourier inverse :

$$Q_\theta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\lambda) e^{-2i\pi\lambda x} d\lambda$$

Dans le cas des images discrètes, nous adaptons encore une fois la définition comme pour la transformée de Radon. On pose alors :

$$\Lambda_{m,n} = |\text{freq}(n)|$$

$$Q = \text{ifft}_{\text{lignes}}(\Lambda \times \text{fft}_{\text{lignes}}(u))$$

Et on obtient sous ces notation la définition de la transformée de Radon :

$$\forall m, n \in \{0, \dots, N-1\}: v_{m,n} := \frac{\pi}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} Q_{\mu, \text{round}\left(\frac{N}{2} + \left(m - \frac{N}{2}\right) \cos \frac{\pi \mu}{M} + \left(n - \frac{N}{2}\right) \sin \frac{\pi \mu}{M}\right)}$$

Implémentation en Python

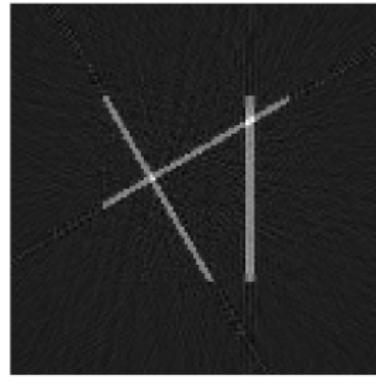
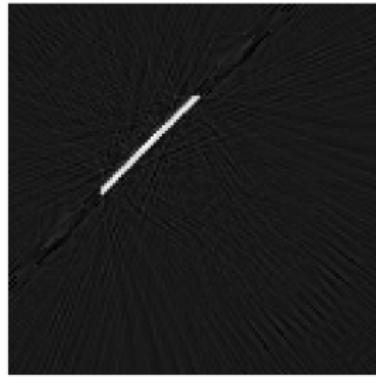
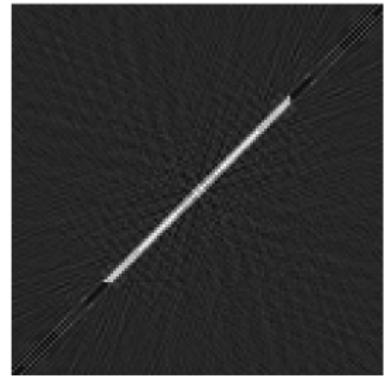
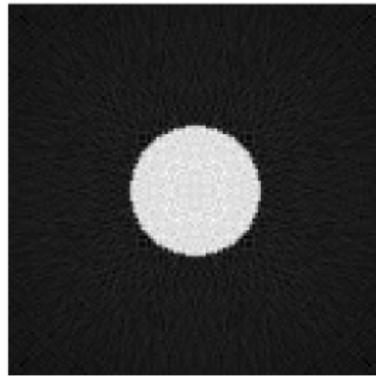
```
def iradon(u):
    M, N = u.shape # taille M x N
    freqs = fft.fftfreq(N, 2 * pi / N)

    Lambda = numpy.abs(freqs)[None, :]

    Q = numpy.real(fft.ifft(Lambda * fft.fft(u, axis=1), axis=1))
    m, n = meshgrid(arange(N), arange(N), indexing='ij')
    v = numpy.zeros((N, N))

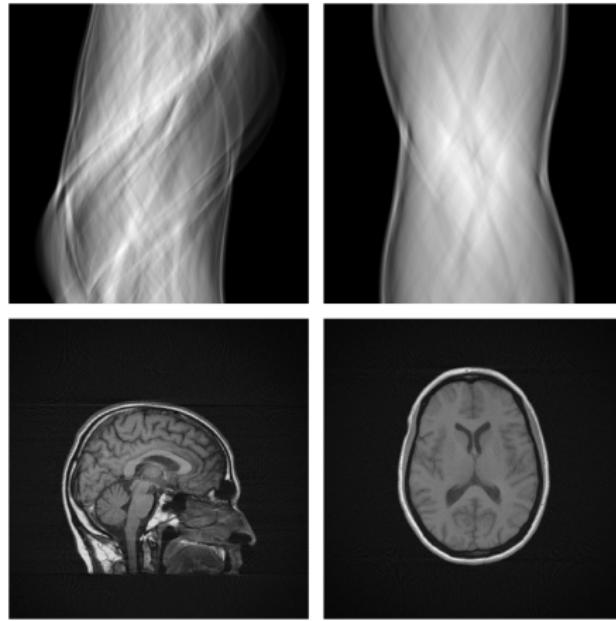
    for mu in range(M):
        theta = numpy.pi * mu / M
        l = numpy.round(N/2 + (m - N/2) * numpy.cos(theta) + (n - N/2) * numpy.sin(theta)).astype(int)
        l[l<0]=0
        l[l>=N]=N-1
        v += Q[mu, l]
    v *= pi / M
    return v
```

A partir des Sinogrammes obtenus précédemment, on retrouve nos images de départ avec des parasites.



Un lien avec notre exemple de départ

On nous a donné les deux sinogrammes brain1 et brain2. On leur applique iradon :

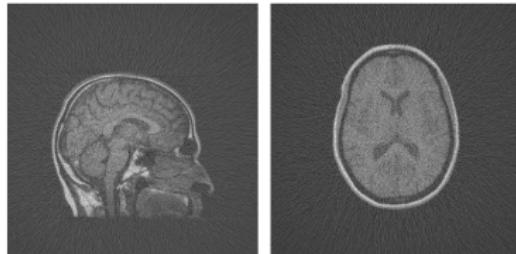


Sensibilité aux perturbations (si on a le temps d'en parler)

Le code suivant ajoute un bruit gaussien aux deux sinogrammes brain1 et brain2

```
sino1=open_image('brain1.png')
sino2=open_image('brain2.png')
sinos_bruités=[]
for sino in [sino1,sino2]:
    bruit=numpy.random.normal(1,0.05,size=sino.shape)
    sinos_bruités.append(sino*bruit)
```

L'application de iradon aux sinogrammes bruités :



Merci de m'avoir suivi jusqu'ici et sources

Pour cerner le sujet, j'ai utilisé les travaux suivants

- *Tomographie et transformée de Radon : des images de maths !*,
Romain Bondil, 22 décembre 2024
- *Looking through Objects - How Tomography Works !* Kolibril 6 août
2021