

PROJET DE LA LICENCE DE MATHÉMATIQUES

Le système de Lorenz

Guillaume de CRENY VIVES, Celia MARECHAL, Timothé XIONG, Hugo RUYS-ARNAUDET

May 16, 2025



Projet encadré par : Francis FILBET

Année universitaire : 2024-2025

Contents

1	Introduction	2
2	Étude théorique du système de Lorenz	2
2.1	Énoncé du résultat principal de cette section	3
2.2	Rappels de cours	3
2.3	Démonstration du résultat principal	3
2.3.1	Existence locale par Cauchy Lipschitz	4
2.3.2	Cette solution reste bornée	4
2.3.3	Cette solution est globale	5
3	Comportement en temps long	6
3.1	Détermination des états stationnaires du système	6
3.2	Résultats préliminaires	6
3.3	Etude du point stationnaire $0_{\mathbb{R}^3}$	8
3.3.1	Etude d'une fonctionnelle de Lyapynov	8
3.3.2	Etude par linéarisation du système	9
4	Etude numérique avec la méthode de Runge-Kutta	12
4.1	Présentation de la méthode de Runge-Kutta 4	12
4.2	Résultats obtenus	13
4.2.1	Conditions initiales usuelles	13
4.2.2	Vérification des points stationnaires	14
4.2.3	Variation de ρ	16
4.2.4	Illustration du comportement chaotique du système de Lorenz	19
5	Conclusion	21
A	Appendice : Codes permettant l'étude numérique avec la méthode de Runge-Kutta	22

1 Introduction

En 1963, le météorologue Edward Lorenz est le premier à mettre en évidence le caractère chaotique (c'est-à-dire imprévisible) de la météorologie. Le modèle de Lorenz, appelé aussi système dynamique de Lorenz ou oscillateur de Lorenz, est une modélisation simplifiée de phénomènes météorologiques basée sur la mécanique des fluides. Son système résulte d'une grande simplification des équations de Navier-Stokes, qui décrivent le mouvement des fluides newtoniens et qui forment un système réputé pour être très difficile à résoudre. Les multiples approximations apportées par Lorenz au système le rendent moins significatif au niveau physique mais beaucoup plus intéressant d'un point de vue mathématique. Ce modèle simplifié est un système dynamique tridimensionnel dont la solution a un comportement chaotique dans certaines conditions.

Lorenz va découvrir deux particularités de son système ; l'importante sensibilité de la solution aux conditions initiales qui caractérise ce que l'on appelle un système dynamique chaotique, et la forme étrange de papillon prise par cette dernière dans certains cas. Le comportement chaotique de son système et cette forme atypique de sa solution a donné naissance à la célèbre métaphore de l'effet papillon utilisée par Lorenz lui-même lors d'une conférence intitulée : *Le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas ?*

Le modèle de Lorenz a eu des répercussions importantes en montrant les limites possibles sur la capacité de prédiction à long terme de l'évolution climatique et météorologique. C'est un élément important de la théorie selon laquelle l'atmosphère des planètes et des étoiles peut comporter une grande variété de régimes quasi périodiques et est sujette à des changements abrupts et, en apparence, aléatoires. Nous cherchons à approcher les fonctions $(x(t), y(t), z(t))$ pour tout $t \geq 0$ du système suivant :

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = x(\rho - z) - y \\ z' = xy - \beta z \end{cases} \quad (1)$$

Nous pouvons reconnaître dans ce système certaines caractéristiques d'un oscillateur comme un terme de vitesse ainsi qu'un autre de freinage à la première ligne, ou encore un terme d'amortissement dans la seconde à travers le " $-y$ ". $x(t)$ est proportionnel à l'intensité du mouvement de convection, $y(t)$ est proportionnel à la différence de température entre les courants ascendants et descendants, et $z(t)$ est proportionnel à l'écart du profil de température vertical par rapport à un profil linéaire. Ce modèle a pour objectif physique d'étudier le cas très particulier du phénomène de convection de Rayleigh-Bénard.

Notre objectif est de proposer une étude la plus complète possible de ce système (existence, unicité, états stationnaires), et d'autre part d'entreprendre une discrétisation numérique et de réaliser des simulations numériques en utilisant le langage Python.

2 Étude théorique du système de Lorenz

Soit le système de Lorenz

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = x(\rho - z) - y \\ z' = xy - \beta z \end{cases} \quad (2)$$

où nous supposerons que les paramètres σ , ρ et β sont positifs afin de distinguer un nombre raisonnable de cas lorsque cela sera nécessaire.

2.1 Énoncé du résultat principal de cette section

Dans la présente section, nous allons démontrer le résultat suivant,

Théorème 2.1. *Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Alors il existe une unique solution globale u au système de Lorenz vérifiant $u(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$.*

Pour démontrer ce résultat, nous allons commencer par montrer à l'aide du Théorème de Cauchy Lipschitz qu'il existe une unique solution maximale au système de Lorenz définie sur un intervalle, c'est-à-dire une solution qui ne peut pas être prolongée sur un intervalle plus grand. Ensuite, nous montrerons que cette solution est globale, c'est-à-dire que l'intervalle de définition de la solution est \mathbb{R}_+ ce que nous prouverons en montrant que la solution ne peut pas exploser.

Pour cela, on rappelle les théorèmes de cours suivants :

2.2 Rappels de cours

Cette section est consacrée à des rappels généraux du cours d'équations différentielles ordinaires.

Définition 2.1. *Soit I_0 un intervalle de \mathbb{R} , $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $f : I_0 \times E \rightarrow F$ une fonction. On dit que f est **lipschitzienne par rapport à u** ou **par rapport à la seconde variable** s'il existe une constante $L > 0$ telle que pour tous $(t, x), (t, y) \in I_0 \times E$, on ait*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_F \leq L \|x - y\|_E$$

Théorème 2.2. *Théorème de Cauchy Lipschitz*

Soient E un espace de Banach, I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , U un ouvert de E et $f \in \mathcal{C}(I \times U; E)$. Nous supposons qu'il existe un voisinage de $(t_0, u_0) \in I \times U$ tel que f soit Lipschitzienne en la seconde variable sur ce voisinage. Nous avons alors les propriétés suivantes :

Existence: il existe $\tau > 0$ et $u \in \mathcal{C}^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau], U)$ solution du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (3)$$

Unicité: Si v est une autre solution alors de ce problème de Cauchy, elle coïncide avec u sur un intervalle d'intérieur non vide inclus dans $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$

Régularité: Si de plus f est de classe C^r , $r \geq 1$, alors u est de classe C^{r+1}

Maintenant, on rappelle également un critère d'existence globale des solutions de (3) :

Théorème 2.3. *Critère de globalité de la solution*

Si E est de dimension finie et f est uniformément bornée sur $I \times E$, toutes les solutions maximales de $y' = f(t, y)$ sont globales.

2.3 Démonstration du résultat principal

On pose $t_0 = 0$. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ Le système (2) se réécrit $\frac{du}{dt} = f(u)$ où f désigne la fonction :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} \sigma(y - x) \\ x(\rho - z) - y \\ xy - \beta z \end{pmatrix} \quad (4)$$

Remarquons dès à présent que f ne dépend pas de la variable temporelle t , le système que nous étudions est alors dit autonome.

Aussi, f est une fonction polynomiale et est donc de classe \mathcal{C}^∞ . En particulier, f est de classe \mathcal{C}^1 ce qui entraîne que f est lipschitzienne en la variable d'état $u = (x, y, z)$.

On peut donc appliquer le théorème de Cauchy Lipschitz :

2.3.1 Existence locale par Cauchy Lipschitz

Nous appliquons le théorème de Cauchy Lipschitz vu à la section précédente. Ce résultat nous assure que pour toute condition initiale (x_0, y_0, z_0) en $t_0 = 0$, il existe une unique solution maximale $u(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot))$ définie sur l'intervalle $I = [0, T]$ avec $T > 0$, au système de Lorenz.

Maintenant que nous avons justifié l'existence d'une unique solution au système, nous souhaitons montrer que cette solution est bornée.

2.3.2 Cette solution reste bornée

L'objectif de cette sous-section est de montrer que la solution du système de Lorenz est bornée ce qui nous permettra de montrer par la suite que cette solution est globale.

Nous partons de l'égalité suivante où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne sur \mathbb{R}^3

$$\frac{d}{dt}\|u\|_2^2 = 2xx' + 2yy' + 2zz' \quad (5)$$

Calculons en substituant leurs expressions aux composantes dérivées :

$$\frac{d}{dt}\|u\|_2^2 = 2x(\sigma(y - x)) + 2y(x(\rho - z) - y) + 2z(xy - \beta z) = 2\sigma xy - 2\sigma x^2 + 2\rho xy - 2xyz - 2y^2 + 2zxy - 2\beta z^2$$

En factorisant, il vient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}\|u\|_2^2 = -\sigma x^2 - y^2 - \beta z^2 + xy(\sigma + \rho) \quad (6)$$

On peut majorer le terme en xy en utilisant l'inégalité algébrique :

$$\text{Pour tout } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha\beta = \leq \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} \quad (7)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|u\|_2^2 &= -2\sigma x^2 - 2y^2 - 2\beta z^2 + 2xy(\sigma + \rho) \\ &\leq -2\sigma x^2 - 2y^2 - 2\beta z^2 + 2(\sigma + \rho) \left[\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right] \\ &\leq x^2 [(\sigma + \rho) - 2\sigma] + y^2 [(\sigma + \rho) - 2] - 2\beta z^2 = (\rho - \sigma)x^2 + (\sigma + \rho - 2)y^2 - 2\beta z^2 \end{aligned} \quad (8)$$

On vient de montrer qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que $\frac{d}{dt}\|u(t)\|_2^2 \leq K\|u(t)\|_2^2$ pour tout $t \in I$. Il suffit en effet de poser $K := \max \{(\rho - \sigma); (\sigma + \rho - 2); 2\beta\}$

En multipliant chaque membre de l'inégalité précédente par la quantité $\exp(-tK) \geq 0$, et en notant $G(t) = \|u(t)\|_2^2$ pour tout $t \in I$ nous obtenons ce qui suit :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G(t) &\leq KG(t) \Rightarrow \exp(-tK)\frac{d}{dt}G(t) \leq K\exp(-tK)G(t) \\
&\Rightarrow \exp(-tK) - K\exp(-tK)G(t) \leq 0 \\
&\Rightarrow \frac{d}{dt}(\exp(-tK)G(t)) \leq 0
\end{aligned} \tag{9}$$

Nous intégrons ensuite les deux membres de l'inégalité entre 0 et $t \in I$ ce qui nous mène à :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G(t) \leq KG(t) &\Rightarrow \frac{d}{dt}(\exp(-tK)G(t)) \leq 0 \\
&\Rightarrow \exp(-tK)G(t) - \exp(-0 \times K)G(t_0) \leq 0 \\
&\Rightarrow \exp(-tK)G(t) \leq G(t_0) \\
&\Rightarrow G(t) \leq \exp(tK)G(t_0)
\end{aligned} \tag{10}$$

Finalement, nous venons de montrer que pour tout $t \in I$

$$\|u(t)\|_2^2 \leq \exp(tK) \|u(t_0)\|_2^2 \leq \exp(TK) \|u(t_0)\|_2^2 \text{ puisque } I = [0, T] \tag{11}$$

En conclusion, nous venons de montrer que la solution du système de Lorenz est bornée sur l'intervalle $I = [0, T]$. Les calculs effectués aux équations (9), (10) et (11) sont un cas particulier d'un résultat plus général très utilisé dans l'étude des EDO couramment appelé Lemme de Gronwall.

2.3.3 Cette solution est globale

Nous avons vu à la section précédente que la solution du système de Lorenz est majorée par une constante sur l'intervalle $[0, T]$ pour tout $T > 0$. Nous appliquons pour chaque $T > 0$ le théorème de globalité à l'intervalle $[0, T]$. Cela garantit la globalité de la solution c'est-à-dire son existence sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3 Comportement en temps long

3.1 Détermination des états stationnaires du système

Nous recherchons les points stationnaires du système de Lorenz ce qui consiste à résoudre l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

Ceci est équivalent à résoudre le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0 \\ x(\rho - z) - y = 0 \\ xy - \beta z = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Nous remarquons tout d'abord qu'une solution triviale de ce système est $(u_0, v_0, w_0) = (0, 0, 0)$.

Nous pouvons ensuite résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} (v - u) = 0 \\ u(\rho - w) - v = 0 \\ uv - \beta w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = u \\ w = \rho - 1 \\ u^2 = \beta(\rho - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = u \\ w = \rho - 1 \\ u = \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)} \end{cases} \quad (13)$$

On vérifie alors que les triplets

$$\begin{aligned} (u, v, w) &= (\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1) \\ (u, v, w) &= (-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1) \end{aligned}$$

sont des points stationnaires du système de Lorenz.

Maintenant que nous connaissons ces points stationnaires, nous souhaiterions en étudier la stabilité. Nous allons étudier un cas particulier, celui du point $(0, 0, 0)$.

3.2 Résultats préliminaires

Pour étudier la stabilité d'un point stationnaire, il existe plusieurs méthodes, nous allons nous intéresser à deux d'entre elles, l'étude d'une fonctionnelle de Lyapunov et la linéarisation du système.

Pour énoncer les résultats, nous posons le cadre suivant :

Soit E un espace de Banach, U un ouvert de E , $g \in \mathcal{C}(U, E)$. On s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} u' = g(t, u) \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (14)$$

Fonctionnelle de Lyapunov : Soit \bar{u} un point stationnaire du problème de Cauchy 14. Nous appelons fonction de Lyapunov une fonction $\mathcal{L} : U \rightarrow E$ continue et différentiable sur U vérifiant

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\bar{u}) < \mathcal{L}(u), \forall u \in U \setminus \{\bar{u}\} \\ \nabla \mathcal{L}(u) f(u) \leq 0, \forall u \in U \end{cases} \quad (15)$$

Théorème de Lyapunov Soient E un espace de Banach de dimension finie, $\bar{u} \in U$ un point d'équilibre de 14 . S'il existe une fonction de Lyapunov \mathcal{L} associée à l'équilibre $\bar{u} \in U$ alors cet équilibre est stable.

Linéarisation : Nous présentons dans ce qui suit la linéarisation du système. Cela consiste, partant d'un système d'équations non linéaire, à se ramener à un système d'équations différentielles linéaire.

Pour cela, nous effectuons un développement de Taylor de la fonction f qui définit le système de Lorenz au point u_∞ qui se trouve dans un voisinage du point stationnaire considéré. Dans ce qui suit, nous allons étudier la stabilité du point $0_{\mathbb{R}^3}$. On considère donc u_∞ au voisinage de zéro et obtenons :

$$\text{Pour tout } u \text{ au voisinage de } u_\infty, \text{ on a } f(u) = \nabla f(u_\infty)u + o(\|u\|) \quad (16)$$

On étudie donc le système linéarisé

$$f(u) = \nabla(u_\infty)u \quad (17)$$

On dit que le point stationnaire est

- **asymptotiquement stable** si la solution du système linéarisé autour de celui-ci converge.
- **stable** si la solution du système linéarisé reste bornée dans un voisinage de ce point.
- **répulsif** si la solution du système linéarisé diverge.

Pour étudier cette convergence, nous allons utiliser le fait que si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les trois valeurs propres (à priori complexes) de la matrice Jacobienne, le système linéarisé converge si et seulement si $\Re(\lambda_1) < 0$, $\Re(\lambda_2) < 0$ et $\Re(\lambda_3) < 0$.

En effet, plaçons nous dans le cadre plus général d'un système différentiel linéaire de la forme $Y' = AY$ pour A une matrice carrée diagonalisable de taille 3 dont on supposera pour simplifier les coefficients à valeurs dans \mathbb{R} et Y une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans \mathbb{R}^3 .

Comme A est diagonalisable, il existe une matrice de passage P et une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A telles que $A = PDP^{-1}$.

En substituant, nous obtenons que le système $Y' = AY$ est équivalent à $Y' = PDP^{-1}Y$ ce qui est à nouveau équivalent, en multipliant chaque membre de l'inégalité par P^{-1} , à $P^{-1}Y' = DP^{-1}Y$.

En effectuant le changement de variable $Z = P^{-1}Y$, nous obtenons finalement le système

$$Z' = DZ \quad (18)$$

Auquel nous pouvons appliquer une "méthode du facteur intégrant" adaptée à la forme matricielle faisant intervenir l'exponentielle de matrices :

$$\begin{aligned}
Z' = DZ &\iff \exp(-tD)Z' = \exp(-tD)DZ \\
&\iff \exp(-tD)Z' - \exp(-tD)DZ = 0 \\
&\iff \frac{d}{dt}(\exp(-tD)Z) = 0 \\
&\iff \exp(-tD)Z(t) - \exp(-t_0D)Z(t_0) = 0 \\
&\iff \exp(-tD)Z(t) = \exp(-t_0D)Z(t_0) \\
&\iff \exp(tD) \cdot \exp(-tD)Z(t) = \exp(tD) \cdot \exp(-t_0D)Z(t_0) \\
&\iff Z(t) = \exp((t-t_0)D)Z(t_0)
\end{aligned} \tag{19}$$

Par définition de l'exponentielle de matrice et comme D est diagonale,

$$Z(t) = \begin{pmatrix} e^{(t-t_0)\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(t-t_0)\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(t-t_0)\lambda_3} \end{pmatrix} Z(t_0) \tag{20}$$

Ainsi, Z ne converge que si, et seulement si chacun de ses coefficients diagonaux converge. Ce n'est le cas que si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$

3.3 Etude du point stationnaire $0_{\mathbb{R}^3}$

Nous allons étudier ici la stabilité du point stationnaire $0_{\mathbb{R}^3}$ grâce aux deux méthodes précédemment présentées.

3.3.1 Etude d'une fonctionnelle de Lyapynov

Pour certaines valeurs des paramètres σ, ρ, β , on a un retour à l'équilibre à vitesse exponentielle.

Pour montrer cela, on considère la fonction G définie par

$$G := \|u\|_2^2$$

On a vu à la section 2.3.2 qu'il existe une constante K telle que $\frac{d}{dt} \|u(t)\|_2^2 \leq K \|u(t)\|_2^2$.

Nous souhaiterions que K soit négative. Dans ce cas, la fonction G serait une fonctionnelle de Lyapunov. On reprend la majoration effectuée en 2.3.2 en utilisant l'inégalité suivante :

$$\text{Pour tout } \epsilon > 0, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha\beta = \alpha\sqrt{\epsilon} \times \frac{\beta}{\sqrt{\epsilon}} \leq \frac{\epsilon\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2\epsilon} \tag{21}$$

Nous choisissons $\epsilon = \frac{\sigma}{2^p}$ avec $p = 1, 2, \dots$ que nous allons fixer pour que les coefficients devant x^2, y^2, z^2 soient négatifs. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|u\|_2^2 &= -2\sigma x^2 - 2y^2 - 2\beta z^2 + 2xy(\sigma + \rho) \\
&\leq -2\sigma x^2 - 2y^2 - 2\beta z^2 + 2(\sigma + \rho) \left[\frac{\sigma x^2}{2^{p+1}} + \frac{y^2 2^p}{2\sigma} \right] \\
&\leq x^2 \left[\frac{2(\sigma + \rho)\sigma}{2^{p+1}} - 2\sigma \right] + y^2 \left[\frac{2^{p+1}(\sigma + \rho)}{2\sigma} - 2 \right] - 2\beta z^2 = A(p)x^2 + B(p)y^2 - 2\beta z^2
\end{aligned} \tag{22}$$

Le coefficient devant z^2 est déjà négatif puisque $\beta > 0$. Etudions le cas des coefficients A et B respectivement devant x^2 et y^2 :

- $A(p) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2\sigma}{2^{p+1}}((\sigma + \rho) - 2^{p+1}) \leq 0 \Leftrightarrow ((\sigma + \rho) - 2^{p+1}) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(\sigma + \rho)}{2} \leq 2^p$
- $B(p) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma}((\sigma + \rho)2^p - 2\sigma) \leq 0 \Leftrightarrow ((\sigma + \rho)2^p - 2\sigma) \leq 0 \Leftrightarrow (\sigma + \rho)2^p \leq 2\sigma \Leftrightarrow 2^p \leq \frac{2\sigma}{\sigma + \rho}$

Il faut donc que p soit choisi tel que :

$$\frac{\sigma + \rho}{2} \leq 2^p \leq \frac{2\sigma}{\sigma + \rho} \tag{23}$$

Or cela n'a de sens que si et seulement si $\frac{\sigma + \rho}{2} \leq \frac{2\sigma}{\sigma + \rho}$ ce qui équivaut à ce que $\sigma \geq (\sigma + \rho)^2$. Cette image représente l'ensemble des $(\rho, \sigma) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\sigma \geq (\sigma + \rho)^2$. On remarque que c'est un ensemble très restreint.

3.3.2 Etude par linéarisation du système

On veut linéariser le système pour étudier le point stationnaire $(0, 0, 0)$. Pour cela, en utilisant la méthode décrite dans en 3.2, on commence par déterminer la jacobienne :

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}$$

Pour connaître les conditions de stabilité du point $(0, 0, 0)$, on doit regarder le signe des valeurs propres de la jacobienne en remplaçant (x, y, z) par $(0, 0, 0)$. Les valeurs propres doivent être négatives ou nulles. On cherche les valeurs propres de la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

On cherche les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\det(J - \lambda I) = 0$$

On a:

$$\det(J - \lambda I) = (-\beta - \lambda) \det \begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma \\ \rho & -1 - \lambda \end{pmatrix}$$

On a donc déjà $\lambda_3 = -\beta$.

Il nous reste à voir pour quelles valeurs de λ on a :

$$\det \begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma \\ \rho & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (-\sigma - \lambda)(-1 - \lambda) - \rho\sigma = \lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + (\sigma - \rho\sigma) = 0$$

On reconnaît un polynôme du second degré dont on calcule le discriminant :

$$\Delta = (\sigma + 1)^2 4\sigma(\rho - 1) = \sigma^2 - 2\sigma + 1 + 4\sigma\rho = (\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho$$

Or $(\sigma - 1)^2 \geq 0$ et $4\sigma\rho \geq 0$ donc $\Delta \geq 0$

On trouve donc :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-(\sigma + 1) + \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(\rho - 1)}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{-(\sigma + 1) - \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(\rho - 1)}}{2} \end{aligned}$$

Les racines sont réelles (car $\Delta \geq 0$) donc leur partie imaginaire est nulle.

Maintenant que nous avons trouvé les valeurs propres de la Jacobienne, cherchons les valeurs de β , σ et ρ pour lesquelles nous avons une stabilité asymptotique, une stabilité simple, ou une instabilité.

Pour une stabilité asymptotique, il faut que les valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 soient strictement négatives.

On a déjà $\lambda_3 = -\beta$ donc $\lambda_3 < 0$ dès que $\beta > 0$.

En ce qui concerne λ_2 , si $\sigma > 0$ alors $(\sigma + 1) > 0$ et donc $-(\sigma + 1) - \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(\rho - 1)} < 0$ et on a alors $\lambda_2 < 0$.

Enfin pour λ_1 , comme on sait que pour tout $\sigma > 0$ on a $\sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(\rho - 1)} < (\sigma + 1)$,

il vient en passant au carré dans l'inégalité $(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(\rho - 1) < (\sigma + 1)^2$ ce qui entraîne $4\sigma(\rho - 1) < 0$ et finalement $\rho < 1$

En résumé : le point $(0, 0, 0)$ est stable asymptotiquement si $0 < \rho < 1$ et $\beta, \sigma > 0$.

Si $\rho = 1$ on a $\lambda_1 = \frac{-(\sigma + 1) - \sqrt{(\sigma + 1)^2}}{2} = 0$ mais λ_2 et $\lambda_3 < 0$. On ne peut donc pas caractériser cet équilibre, cela s'appelle un point de bifurcation où le seul équilibre est l'origine. Pour de plus amples détails, nous recommandons au lecteur l'article [**memoire-muhkle**] pour de plus amples détails.

Si $\rho > 1$ alors on a $\lambda_1 > 0$ ce qui donne une instabilité au système. Deux composantes sont stables pour λ_2 et λ_3 mais une autre est instable, il s'agit de celle correspondant à λ_1 .

4 Etude numérique avec la méthode de Runge-Kutta

Dans cette section, nous présenterons dans un premier temps la méthode de Runge-Kutta 4 et dans un second temps les résultats obtenus en appliquant cette méthode à notre système.

4.1 Présentation de la méthode de Runge-Kutta 4

Jusqu'ici nous avons prouvé l'existence et avons effectué une étude qualitative de la solution u du système de Lorenz. À présent, à défaut de calculer explicitement cette solution, nous souhaiterions l'approcher numériquement. C'est-à-dire que nous cherchons une approximation de la solution sur un intervalle de temps donné $[0, T]$.

L'idée générale des méthodes numériques est de calculer une valeur approchée de $u(t)$ en certains points de l'intervalle $[0, T]$. Pour cela, on subdivise l'intervalle $[0, T]$ en sous-intervalles de longueur h . La quantité h est appelée le pas de temps ou de discrétilsaion.

On pose :

$$t_n = nh \text{ avec } n = 0, 1, \dots, N_T = \lfloor \frac{T}{h} \rfloor \quad (24)$$

On note v_n une approximation de la fonction u au point t_n . On cherche alors à construire cette approximation v_n de sorte à ce qu'elle soit la plus précise possible.

La méthode de Runge Kutta 4 est, comme son nom l'indique, d'ordre 4, c'est-à-dire qu'en définissant l'erreur d'approximation entre v_n et $u(t_n)$ par $e_n = \|v_n - u(t_n)\|$, nous avons

$$\max_{0 \leq n \leq N_T} e_n = \mathcal{O}(h^4)$$

Ce schéma est le plus précis de tous ceux que nous avons étudiés cette année. Il s'écrit sous la forme suivante.

Méthode de Runge-Kutta 4

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, v_n) \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, v_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, v_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(t_n + h, v_n + hk_3) \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

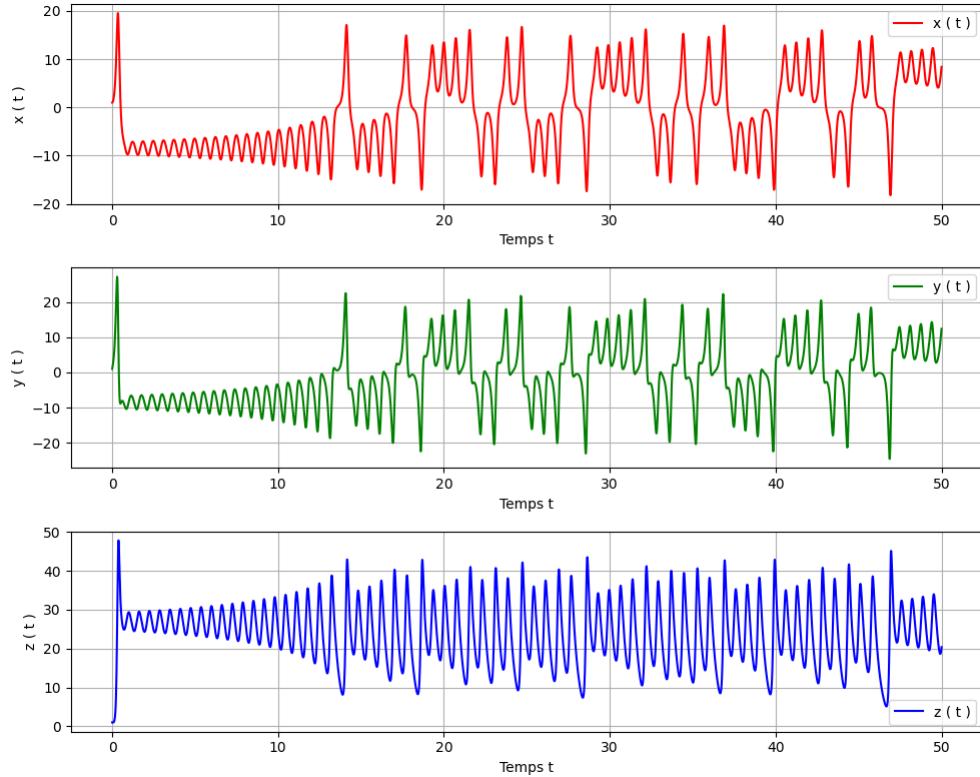
Tout au long de cette section nous allons donc utiliser la méthode de Runge-Kutta 4. Son avantage réside dans sa précision élevée tout en restant simple à implémenter. Les équations de Lorenz étant non linéaires et sensibles aux conditions initiales (effet papillon), une méthode précise comme Runge-Kutta 4 est indispensable. Contrairement à des méthodes plus simples (Euler explicite), Runge-Kutta 4 réduit les erreurs d'accumulation et capture efficacement la structure de l'attracteur.

4.2 Résultats obtenus

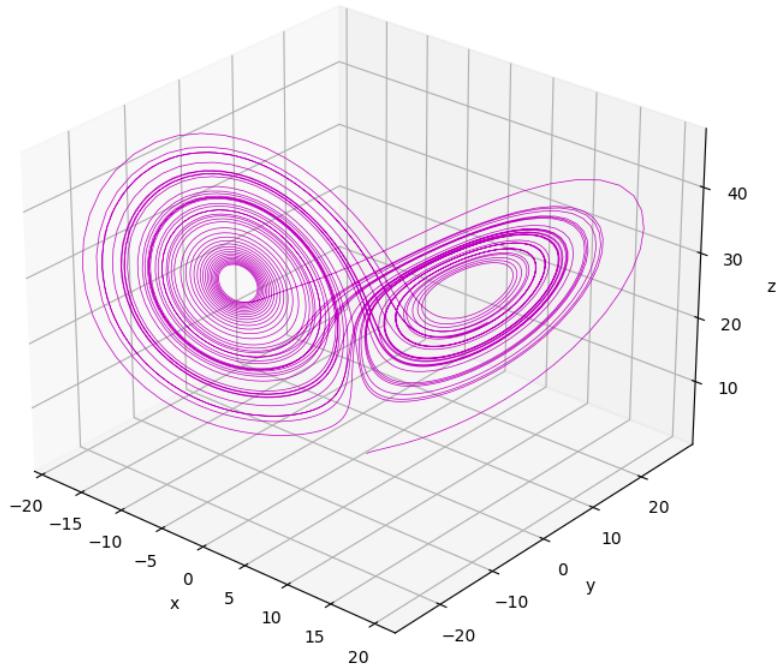
Dans cette partie nous étudions, grâce à la méthode de Runge-Kutta, l'évolution du système de Lorenz. Nous allons tester différentes conditions initiales en $t = 0$ sur $(x(t), y(t), z(t))$ et également étudier différents cas en changeant les valeurs du paramètre ρ afin d'illustrer nos résultats théoriques et apporter quelques résultats intéressants.

4.2.1 Conditions initiales usuelles

Commençons par représenter l'évolution de notre système avec les conditions initiales usuelles c'est à dire les plus courantes dans l'étude du système de Lorenz $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ et les paramètres $(\sigma, \rho, \beta) = (10, 28, 8/3)$. Ce sont ces conditions que Lorenz a utilisées lorsqu'il a travaillé sur ce système.



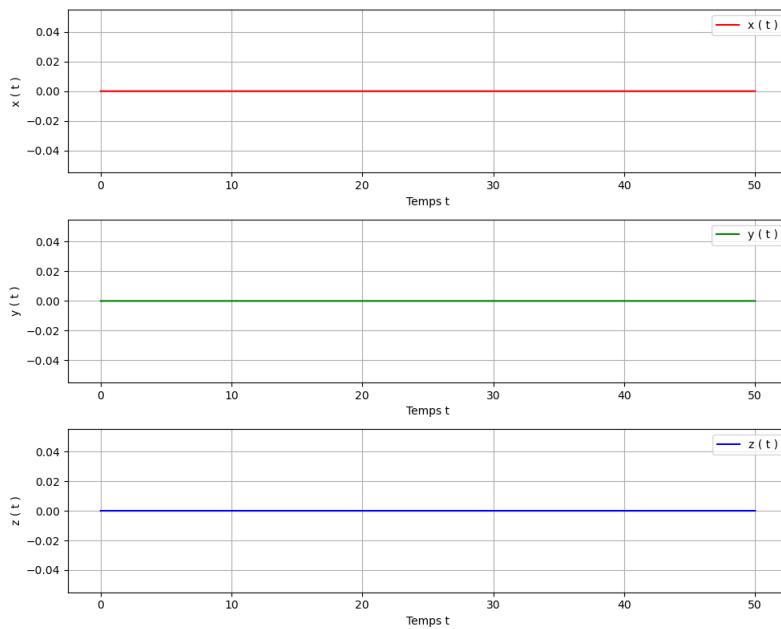
$x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ du Système de Lorenz avec les conditions initiales usuelles



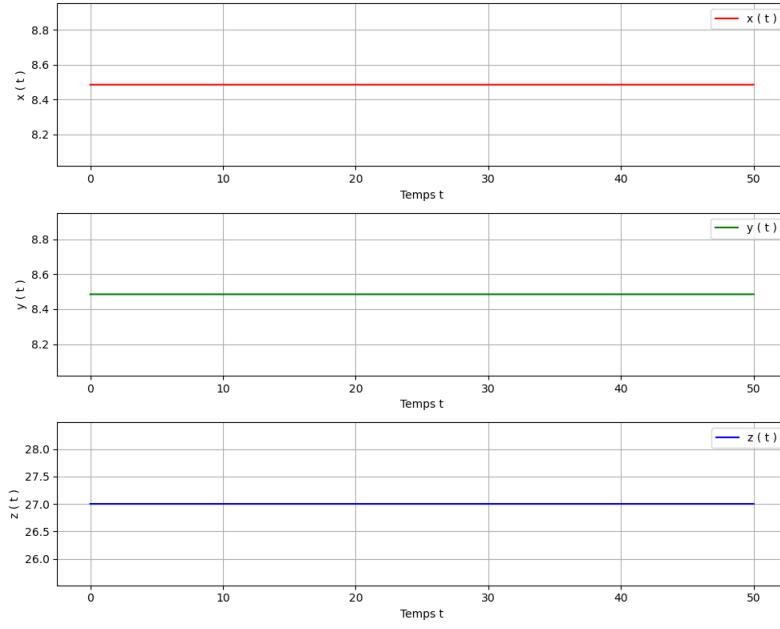
Système de Lorenz en 3d avec les conditions initiales usuelles

4.2.2 Vérification des points stationnaires

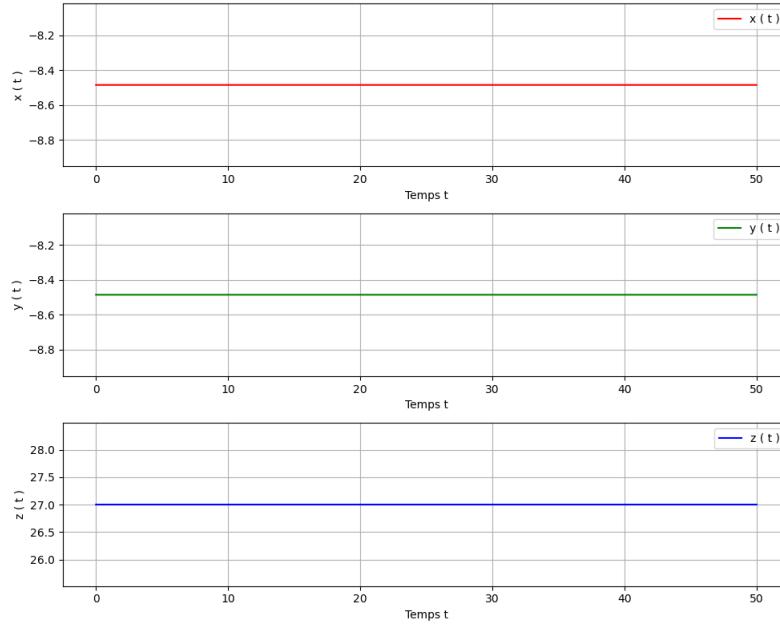
Dans cette section nous allons illustrer par la méthode de Runge Kutta que nos points stationnaires sont bel et bien des points stationnaires. Nous utilisons toujours les paramètres $\sigma = 10$, $\rho = 28$ et $\beta = 8/3$ utilisés à la section précédente.



$x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ du Système de Lorenz avec $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$



$x(t), y(t)$ et $z(t)$ du Système de Lorenz avec $(x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{\beta(\rho-1)}, \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$

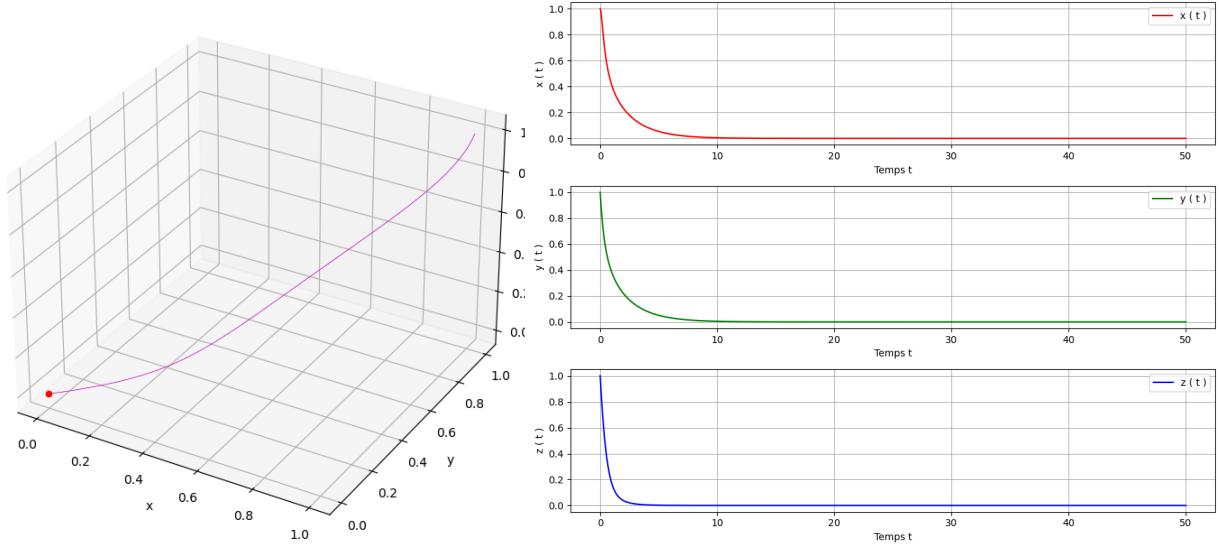


$x(t), y(t)$ et $z(t)$ du Système de Lorenz avec $(x_0, y_0, z_0) = (-\sqrt{\beta(\rho-1)}, -\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$

Nous constatons qu'il n'y a pas d'évolution, la solution reste constante pour les 3 conditions initiales. Ces trois applications du schéma de Runge-Kutta illustrent et confirment donc nos résultats théoriques. Les points étudiés sont bien des états stationnaires.

4.2.3 Variation de ρ

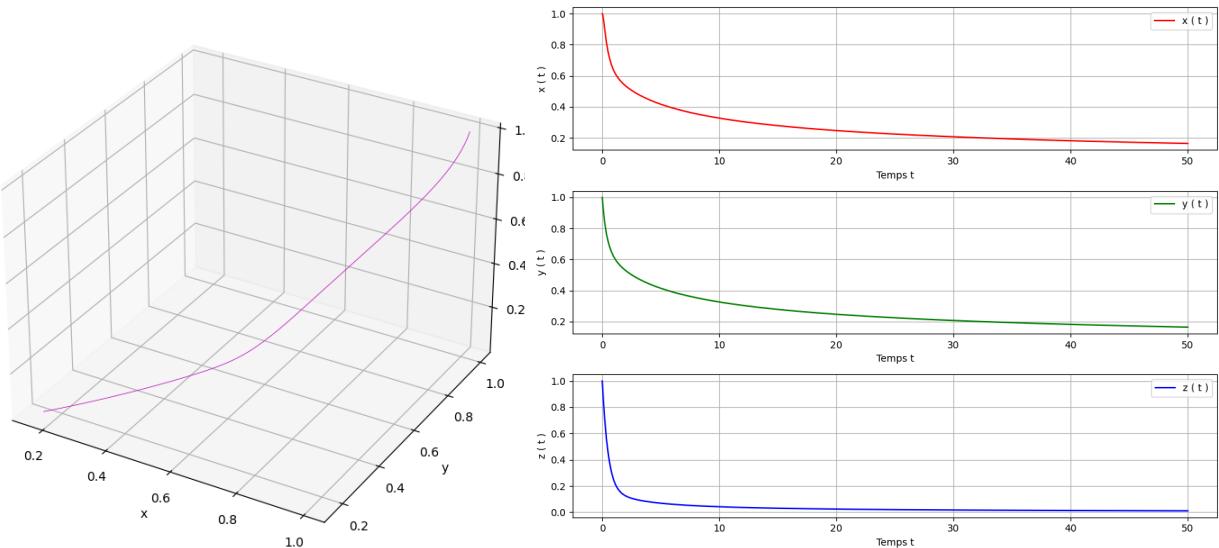
Dans ce qui suit, nous gardons les valeurs utilisées ci-dessus pour la condition initiale et pour les paramètres σ et β mais nous appliquons le schéma avec différentes valeurs de ρ . Nous allons prendre $\rho = 1/2; 1; 1.1; 10; 23.78$ et 23.79 . Cela va nous permettre d'illustrer les différents cas que nous avons pu étudier théoriquement mais aussi d'observer un phénomène inattendu.



Système de Lorenz en 3d avec $\rho = 1/2$

$x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ du Système de Lorenz
avec $\rho = 1/2$

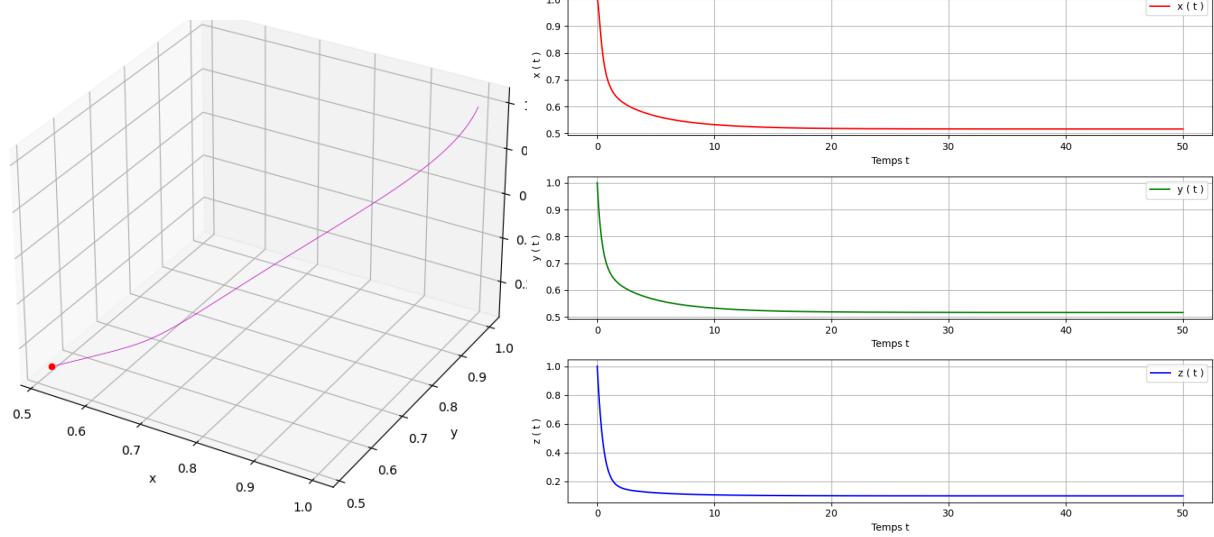
On observe ici que les fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ convergent assez vite vers le point $(0, 0, 0)$ (représenté en rouge) cela illustre le fait que le point $(0, 0, 0)$ est asymptotiquement stable lorsque $\rho < 1$.



Système de Lorenz en 3d avec $\rho = 1$

$x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ du Système de Lorenz
avec $\rho = 1$

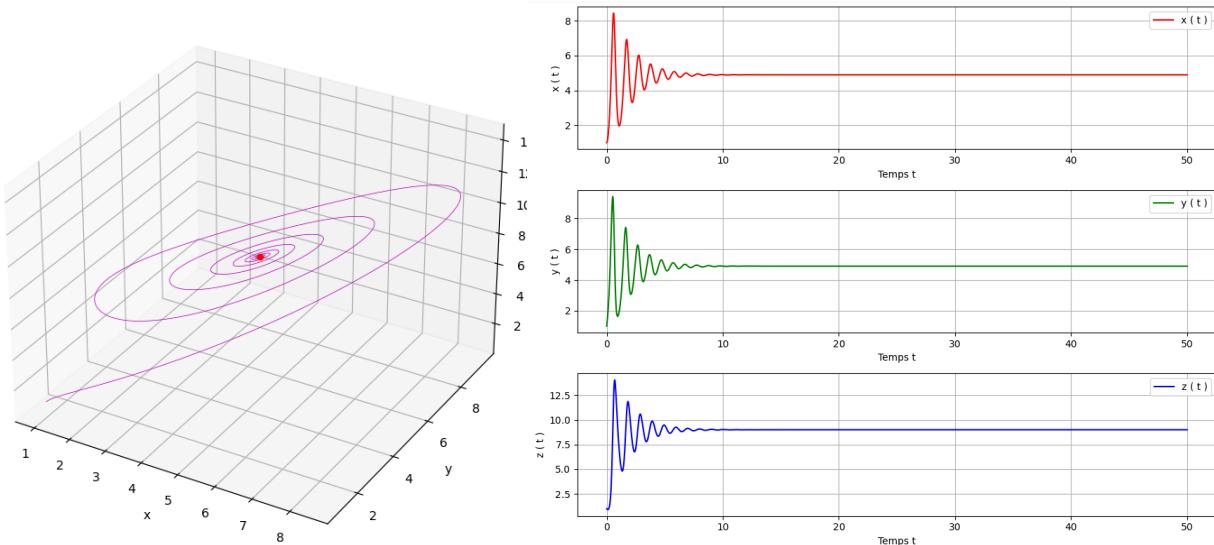
Sur les représentations ci-dessus, on observe que la solution du système converge vers l'origine du repère. Cela nous éclaire puisque lors de l'étude théorique, nous avons eu des difficultés à caractériser la stabilité dans le cas où $\rho = 1$.



Système de Lorenz en 3d avec $\rho = 1.1$

$x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ du Système de Lorenz
avec $\rho = 1.1$

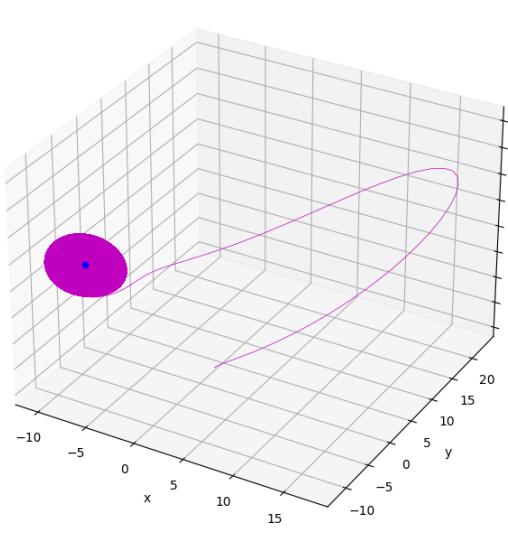
Ci-dessus nous observons que la solution $x(t), y(t), z(t)$ converge assez vite (en oscillant un peu) vers le point $(\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$ (représenté en rouge) quand $\rho > 1$. Nous avons donc de bonnes raisons de croire qu'avec ces paramètres, le point $(\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$ est asymptotiquement stable mais cela reste à démontrer.



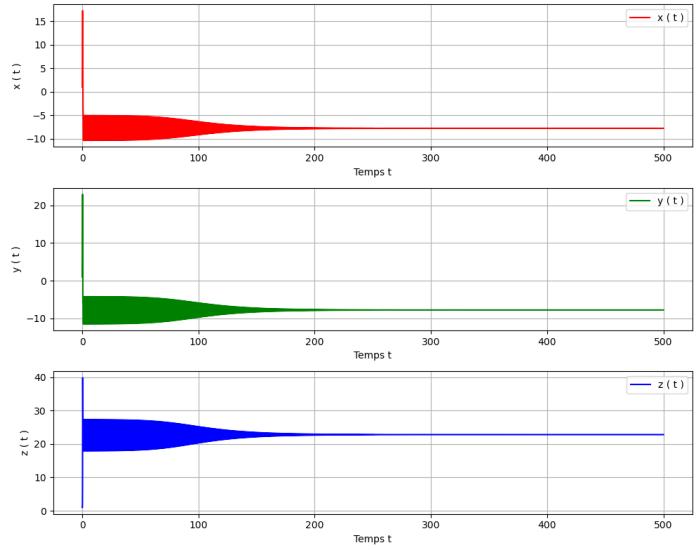
Système de Lorenz en 3d avec $\rho = 10$

$x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ du Système de Lorenz
avec $\rho = 10$

De la même manière, observons ici que la solution converge vers le point $(\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$ lorsque $\rho > 1$.

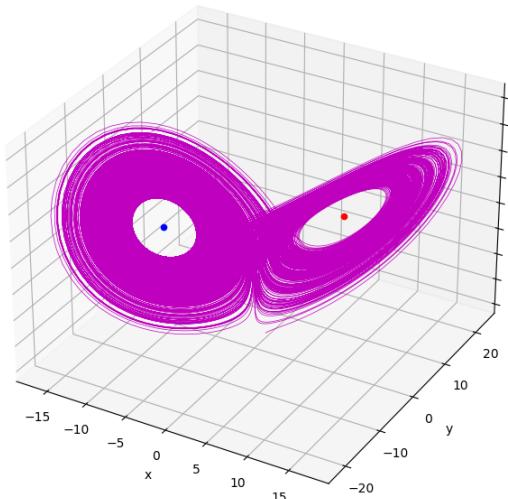


Système de Lorenz en 3d avec $\rho = 23.78$

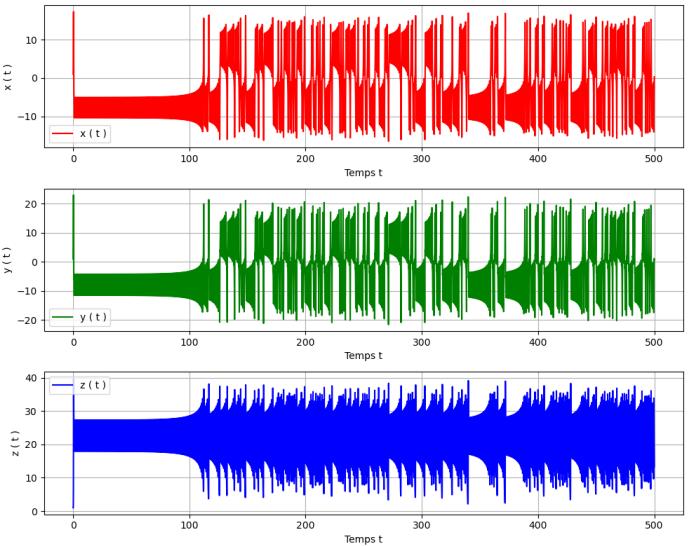


$x(t), y(t)$ et $z(t)$ du Système de Lorenz
avec $\rho = 23.78$

Sur les représentations ci-dessus que l'on a affichées sur un intervalle de temps plus long (nous allons à présent jusqu'à $T = 500$ alors que jusqu'ici nous prenions $T = 50$) pour observer la convergence, nous remarquons que le système converge à présent vers le point $(-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$ mais la valeur $\rho = 23.78$ présente un autre phénomène intéressant. Il s'agit en effet visiblement d'un cas "limite" entre la stabilité asymptotique de ce point et une stabilité non asymptotique autour des deux points $(\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$ et $(-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$.



Système de Lorenz en 3d avec $\rho = 23.79$

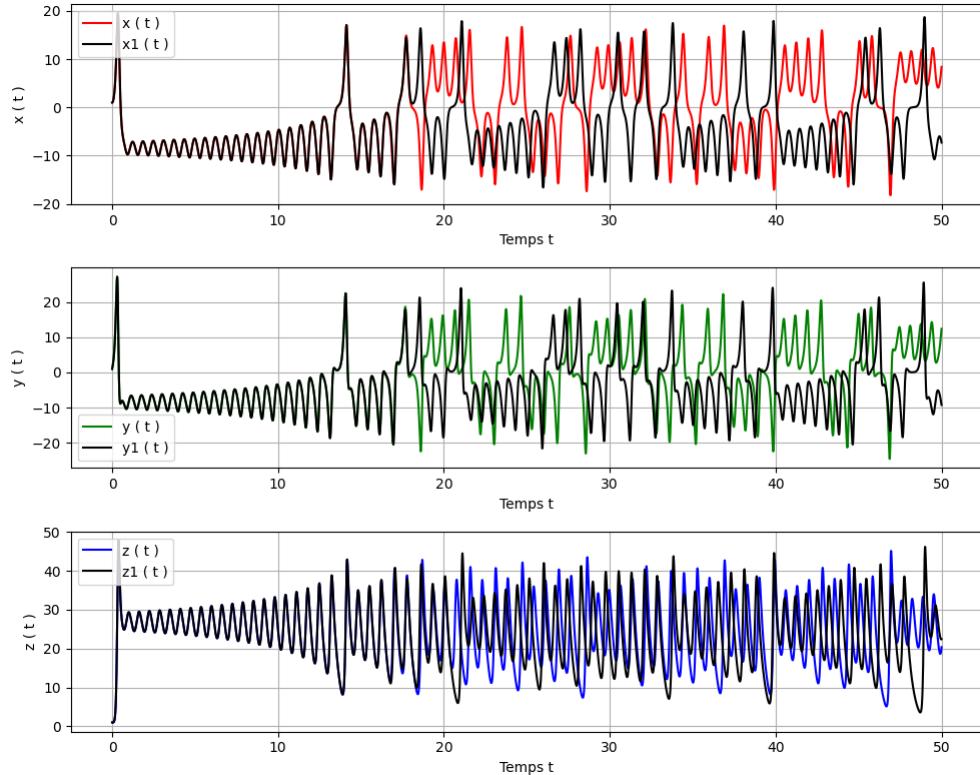


$x(t), y(t)$ et $z(t)$ du Système de Lorenz
avec $\rho = 23.79$

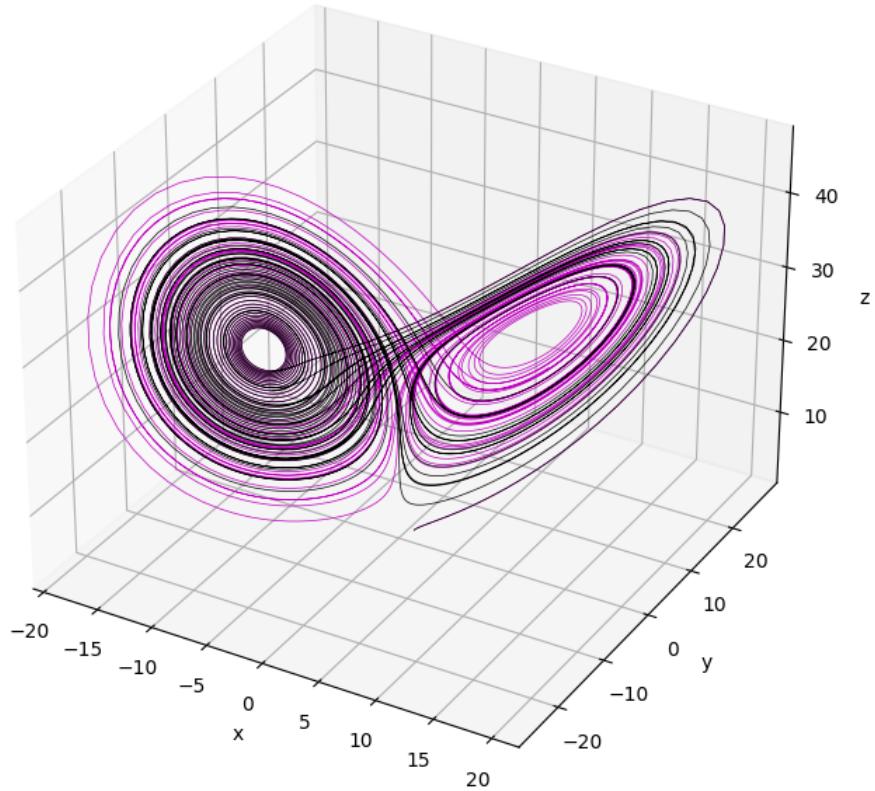
En effet, pour $\rho = 23.78$, notre système ne converge plus mais "tourne autour" des points stationnaires. Cela caractérise une stabilité désormais non asymptotique des deux points stationnaires $(\sqrt{\beta(\rho-1)}, \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$ et $(-\sqrt{\beta(\rho-1)}, -\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$. Gardons cependant à l'esprit que rien de tout cela n'a été prouvé rigoureusement ici, nous n'avons pas réussi à prouver dans l'état actuel de nos recherches qu'un tel comportement a lieu.

4.2.4 Illustration du comportement chaotique du système de Lorenz

Pour finir nous allons observer la sensibilité aux conditions initiales qui a rendu célèbre ce système d'équations. Nous introduisons dans ce qui suit une très légère variation des conditions initiales. Nous allons comparer sur le même graphique l'évolution du système avec pour conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ et l'évolution du système avec pour conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (1.001, 1.001, 1.001)$.



$x(t), y(t)$ et $z(t)$ du Système de Lorenz avec variations des conditions initiales



Système de Lorenz en 3d avec variations des conditions initiales

Sur les images ci-dessus nous observons en couleur la représentation du système avec les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ et en noir la représentation du système avec les conditions initiales auxquelles nous avons ajouté une légère perturbation $(x_0, y_0, z_0) = (1.001, 1.001, 1.001)$. On observe sur les deux représentations qu'au début de la simulation, les deux solutions ont un comportement similaire, mais qu'elles s'éloignent très rapidement l'une de l'autre (entre $t = 15$ et $t = 20$) et n'ont plus rien à voir l'une avec l'autre. Cela illustre que le système avec ces paramètres est chaotique, un petit changement au début implique une grande variation par la suite.

5 Conclusion

Ce projet nous a permis d'explorer le système de Lorenz, exemple emblématique de système dynamique non linéaire au comportement chaotique.

Dans un premier temps, nous avons établi rigoureusement l'existence et la globalité d'une solution à ce système et nous en avons effectué une analyse qualitative. Nous avons procédé à la détermination et à l'étude des points stationnaires, en particulier celui qui se trouve en l'origine, le triplet $(0, 0, 0)$. Cela nous a permis d'observer comment la stabilité du système dépend des paramètres ρ , β et σ . Nous avons ensuite développé une partie numérique qui nous a permis d'illustrer les résultats théoriques que nous avions obtenus précédemment ainsi que le comportement chaotique qui a rendu ce système si célèbre. Cette partie s'est notamment axée autour de l'étude des valeurs du paramètre ρ qui a un impact très important sur le comportement des solutions du système.

Au moyen de deux types de graphiques représentés en utilisant le langage python, nous avons observé le comportement des trajectoires du système pour différentes conditions initiales ainsi que pour une large gamme de paramètres. De plus, nous affiché le célèbre attracteur de Lorenz et sa forme de papillon. Enfin nous avons constaté par nous même la grande sensibilité aux conditions initiales : deux trajectoires partant de points très proches finissent par suivre des chemins complètement différents. Cela illustre un phénomène très récemment apparu en mathématiques : le chaos. Il est désormais aisément de comprendre que les premières personnes ayant étudié ce système aient été troublées par un tel comportement : des phénomènes imprévisibles alors même que l'objectif de telles équations était de saisir et de prévoir le comportement du monde qui nous entoure... Ce projet a aussi été l'occasion de prendre conscience de la chance que nous avons de disposer d'outils aussi puissants et performants que nos ordinateurs. Les "supercalculateurs" d'autan font aujourd'hui sourire quand on constate à quel point leur puissance était négligeable par rapport à celle que nous avons dans notre poche, dans un smartphone ultra-fin et ultra léger. Toujours est-il que cette puissance de calcul nous a permis d'approcher de manière très détaillée ce que nous n'arrivons pas à exprimer sous une forme explicite. Une représentation qui aurait certainement facilité les travaux de Lorenz.

Pour finir, il existe d'autres systèmes dynamiques en trois dimensions ayant des caractéristiques similaires, comme par exemple le système de Rössler introduit dans les années 1970, basé sur des équations plus simples que celles étudiées ici mais dont le comportement est également chaotique à long terme.

Remerciements

Nous souhaitons enfin remercier monsieur Francis FILBET d'avoir encadré ce projet et de nous avoir aiguillé dans nos travaux. Son regard avisé et ses précieux conseils nous ont beaucoup appris sur l'analyse numérique et sur la manière de rédiger correctement des mathématiques.

A Appendice : Codes permettant l'étude numérique avec la méthode de Runge-Kutta

Cet appendice contient les codes que nous avons utilisés pour les approximations numériques et les nombreuses représentations graphiques contenues dans ce document.

Importation des librairies utilisées et initialisation des valeurs de l'ennoncé de σ, ρ et β :

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 sigma = 10
5 rho = 28
6 beta = 8 / 3
```

Création d'une fonction qui représentera notre système:

```
1 def systeme_lorenz(etat):
2     x, y, z = etat
3     dxdt = sigma * (y - x)
4     dydt = x * (rho - z) - y
5     dzdt = x * y - beta * z
6     return np.array([dxdt, dydt, dzdt])
```

Création de la méthode de Runge Kutta 4 pour approcher nos valeurs numériques. La méthode de Runge Kutta 4 est d'ordre 4, c'est-à-dire qu'elle est exacte pour les polynômes de degré ≤ 3 .

```
1 def runge_kutta_4(fonction, etat, pas_temps):
2     k1 = fonction(etat)
3     k2 = fonction(etat + 0.5 * pas_temps * k1)
4     k3 = fonction(etat + 0.5 * pas_temps * k2)
5     k4 = fonction(etat + pas_temps * k3)
6     return etat + (pas_temps / 6.0) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)
```

Initialisation du système($t=0$), création d'une discréttisation pour la méthode Runge Kutta 4 et des tableaux vides $x_valeurs$, $y_valeurs$ et $z_valeurs$ pour stocker les valeurs de x,y et z :

```
1 etat_initial = np.array([1.0, 1.0, 1.0])
2
3
4 pas_temps = 0.01
5 temps_max = 50
6 nombre_pas = int(temps_max / pas_temps)
7
8
9 temps_valeurs = np.linspace(0, temps_max, nombre_pas)
10 x_valeurs = np.zeros(nombre_pas)
11 y_valeurs = np.zeros(nombre_pas)
12 z_valeurs = np.zeros(nombre_pas)
13
14
15 x_valeurs[0], y_valeurs[0], z_valeurs[0] = etat_initial
16 for i in range(1, nombre_pas):
17     etat = np.array([x_valeurs[i-1], y_valeurs[i-1], z_valeurs[i-1]])
18     nouvel_etat = runge_kutta_4(systeme_lorenz, etat, pas_temps)
19     x_valeurs[i], y_valeurs[i], z_valeurs[i] = nouvel_etat
```

Code permettant d'afficher les X,Y et Z du système (Figure 1):

```
1 plt.figure(figsize=(12, 8))
2
3
4 plt.subplot(3, 1, 1)
5 plt.plot(temps_valeurs, x_valeurs, label='x(t)', color='r')
```

```

6 plt.xlabel('Temps\u2075t')
7 plt.ylabel('x(t)')
8 plt.legend()
9 plt.grid()
10
11 plt.subplot(3, 1, 2)
12 plt.plot(temp_valeurs, y_valeurs, label='y(t)', color='g')
13 plt.xlabel('Temps\u2075t')
14 plt.ylabel('y(t)')
15 plt.legend()
16 plt.grid()
17
18 plt.subplot(3, 1, 3)
19 plt.plot(temp_valeurs, z_valeurs, label='z(t)', color='b')
20 plt.xlabel('Temps\u2075t')
21 plt.ylabel('z(t)')
22 plt.legend()
23 plt.grid()
24
25 plt.tight_layout()
26 plt.show()

```

Code permettant d'afficher en 3d le système(Figure2:)

```

1 fig = plt.figure(figsize=(10, 8))
2 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
3 ax.plot(x_valeurs, y_valeurs, z_valeurs, lw=0.5, color='m')
4 ax.set_xlabel('x')
5 ax.set_ylabel('y')
6 ax.set_zlabel('z')
7 ax.set_title('Attracteur\u00e7de\u00e7Lorenz')
8 plt.show()
9 beta = 8.0 / 3.0

```

References

- [1] Sylvie Benzoni Gavage. "Calcul différentiel et équations différentielles, Cours et exercices corrigés", Collection Sciences Sup, Dunod, février 2014
- [2] Francis Filbet. "Analyse numérique : algorithme et étude mathématique", Paris : Dunod ., 2013 2e édition - (Sciences sup : mathématiques)
- [3] Christophe Besse, "Résolution numérique des Équations Différentielles Ordinaires, L3 Mapi3", 2015 Polycopié accessible ici
- [4] Pierre Fougères. "Equations Différentielles Ordinaires (Math3-Diff2) Licence de Mathématiques, Niveau 3", Université Paul Sabatier, Semestre 5, 2024-2025
- [5] Edward Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. Journal of the atmospheric sciences 20.2 (1963), p. 130- 141.
- [6] Julie Muhlke. "Mémoire de L3, Le système de Lorenz", Cycle Pluridisciplinaire d'Études Supérieures - Université PSL, 2020.