Etude du système de Lorenz

Guillaume de Crény Vives, Hugo Ruys-Arnaudet, Timothé Xiong, Celia Maréchal

June 10, 2025

Université de Toulouse

Introduction

- Années 1960 : Edward Lorenz (MIT)

  $\rightarrow$ Étude des échanges océan/atmosphère (Equations de Navier-Stokes)

  $\rightarrow$ Équations de Saltzman

  $\rightarrow$ Système de Lorenz (1963) : modèle simplifié - étude numérique

$$\begin{cases} x' = \sigma(y-x) \\ y' = x(\rho - z) - y \\ z' = xy - \beta z \end{cases} \tag{1}$$

- Observation : Forte sensibilité aux données initiales

  $\rightsquigarrow$ Naissance de la théorie du Chaos (conférence de 1972)

Notre objectif : Étude mathématique et numérique du système

Résultat de départ pour l'étude de solutions

- Hypothèse de départ : $\sigma > 0, \rho > 0, \beta > 0$
  → Cohérence avec le contexte physique et calculs plus simples

Jeu de données utilisé en pratique :

$$\sigma = 10,\ \rho = 28,\ \beta = \frac{8}{3}$$

- Résultat de départ :

Théorème

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Il existe une unique solution globale au système de Lorenz vérifiant $u(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$

Ce que cela signifie :

1. Pour chaque condition initiale : une seule trajectoire
2. Solution globale : pas d'explosion en temps fini et connaissance de **tout** le futur

Grandes lignes de la démonstration : existence et unicité

Le système de Lorenz s'écrit sous la forme $u' = f(u)$ avec :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto \begin{cases} \sigma(y-x) \\ x(\rho - z) - y \\ xy - \beta z \end{cases}$$

- Fonction polynomiale donc $\mathscr{C}^1$.
  → **conséquence :** f est localement Lipschitzienne.
- **Théorème de Cauchy-Lipschitz** : Existence locale d'une **unique solution** au système de Lorenz
  - ☞ Il existe $T > 0$ et $u \in \mathscr{C}^1([0,T], \mathbb{R}^3)$ qui satisfait le système de Lorenz sur $[0,T]$
  - ☞ Toute autre solution v coïncide avec u sur $[0,T]$

Grandes lignes de la démonstration : globalité

- On montre que u est uniformément bornée sur $[0, T]$.
  → Application du Lemme de Grönwall avec la fonction $t \mapsto \|u(t)\|_2^2$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_2^2 &= -2\sigma x^2 - 2y^2 - 2\beta z^2 + (\sigma+\rho)xy \\
&\leqslant (\rho-\sigma)x^2 + (\sigma+\rho-2)y^2 - 2\beta z^2
\end{aligned}
$$

On a utilisé que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.
En posant $C = \max(\rho-\sigma;\ \sigma+\rho-2; -2\beta)$:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_2^2 \leqslant C.\|u(t)\|_2^2
$$

Par le lemme de Grönwall : Pour tout $t \in [0, T]$ $\|u(t)\|_2 \leqslant K.e^{CT/2}$
Cette majoration est valable pour tout $T > 0$
Conclusion : La solution est globale, $I = [0, +\infty[$

Determination des points stationnaires

Le point (x,y,z) est stationnaire si $f(x,y,z)=0$

$$\begin{cases} \sigma(y-x)=0 \\ x(\rho-z)-y=0 \\ xy-\beta z=0 \end{cases} \tag{2}$$

- Solution triviale $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$ dans tous les cas.

$$\begin{cases} \sigma(y-x)=0 \\ x(\rho-z)-y=0 \\ xy-\beta z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ z=\rho-1 \\ x=\pm\sqrt{\beta(\rho-1)} \end{cases} \quad \text{si } \rho-1\geq 0 \tag{3}$$

Alors $(x,y,z)=(\sqrt{\beta(\rho-1)},\sqrt{\beta(\rho-1)},\rho-1)$ et $(x,y,z)=(-\sqrt{\beta(\rho-1)},-\sqrt{\beta(\rho-1)},\rho-1)$ sont aussi points stationnaires du système lorsque $\rho\geq 1$.

Linéarisation du système de Lorenz

- **Developpement de Taylor** de f au point u_∞ :

$$f(u) = \nabla f(u_\infty)u + o(\|u\|)$$

On étudie le système linéarisé : $f(u) = \nabla f(u_\infty)u$

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma(y-x) \\ x(\rho-z)-y \\ xy-\beta z \end{array} \right. \Rightarrow J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix} \tag{4}$$

- On va s'intéresser au point (0,0,0), ce qui revient à étudier la matrice :

$$J_0 = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} \tag{5}$$

Etude linéaire du point stationnaire (0,0,0)

$$J_0 = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} \tag{6}$$

- **Stabilité asymptotique** si la solution du système linéarisé converge.

Cela a lieu si : $\Re(\lambda_1) < 0$, $\Re(\lambda_2) < 0$ et $\Re(\lambda_3) < 0$

- On cherche les valeurs propres, les λ tels que :

$\det(J_0 - \lambda I) = 0$

$$\lambda_1 = \frac{-(\sigma+1) + \sqrt{(\sigma+1)^2 + 4\sigma(\rho-1)}}{2} < 0 \Rightarrow \boxed{\rho < 1}$$

$$\lambda_2 = \frac{-(\sigma+1) - \sqrt{(\sigma+1)^2 + 4\sigma(\rho-1)}}{2} < 0 \checkmark$$

$\lambda_3 = -\beta. < 0 \checkmark$

- Conclusion : Stabilité linéaire asymptotique si $\rho < 1$

Discrétisation et Méthode d'Euler Explicite

BUT : approcher les valeurs de la solution du système sur un intervalle $[a, b]$

Stratégie : discrétiser l'intervalle $[a, b]$

- $N \in \mathbb{N}^*$ est le nombre total de points dans la discrétisation
- $h > 0$: pas de discrétisation
- Pour $n \in \{0, \ldots, N\}$, on pose $t_n = t_0 + nh$ ($t_0 := a$ et $t_N = b$)
- On note yn l'approximation de $y(t_n)$.

Où y est la solution du problème de cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{7}$$

Méthode d'Euler Explicite:

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)}$$

Méthode	**Ordre**	**Erreur**
Euler explicite	1	$\mathcal{O}(h)$

Méthode Runge-Kutta 4 (RK4)

Pour résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{8}$$

Runge-Kutta 4:

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}$$

Valeurs des k

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

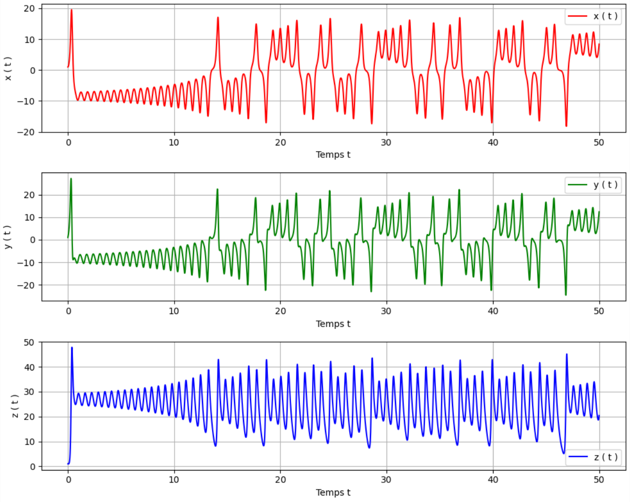
$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3)$$

Méthode	**Ordre**	**Erreur**
RK4	4	$\mathcal{O}(h^4)$

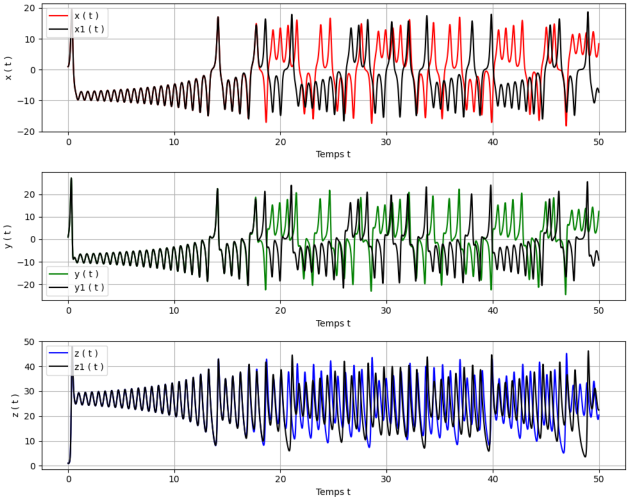
Comportement chaotique

- Nos conditions initiales usuelles : $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$, les paramètres $(\sigma, \rho, \beta) = (10, 28, 8/3)$ et le pas $h = 0.01$



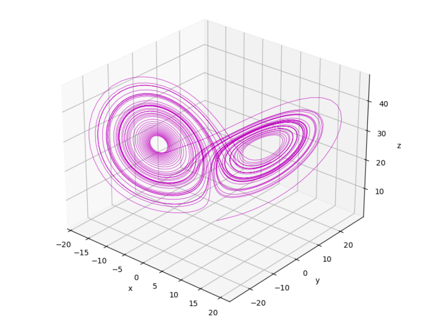
Comportement chaotique

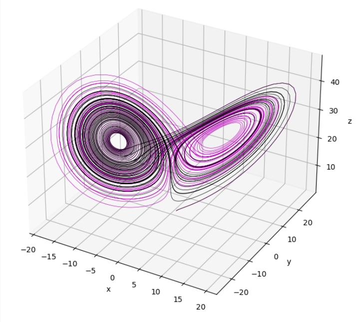
- Changement de conditions initiales, $(x_0, y_0, z_0) = (1.001, 1.001, 1.001)$ et les paramètres $(\sigma, \rho, \beta) = (10, 28, 8/3)$



Comportement chaotique

- Représentation en 3 dimension de l'évolution de ce système, avec nos conditions initiales usuelles.





- Exemple illustrant le phénomène de chaos déterministe.

Variation de ρ

- Pour toutes les représentations suivantes nous prendrons nos conditions initiales usuelles définie précédemment et feront varier uniquement la valeur de ρ afin de vérifié nos résultats théoriques sur la stabilité du point stationnaire $(0,0,0)$.

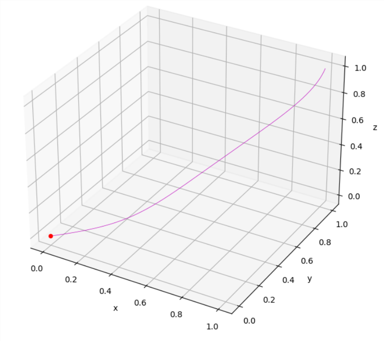


Figure 1: Système de Lorenz en 3d avec $\rho = 1/2$

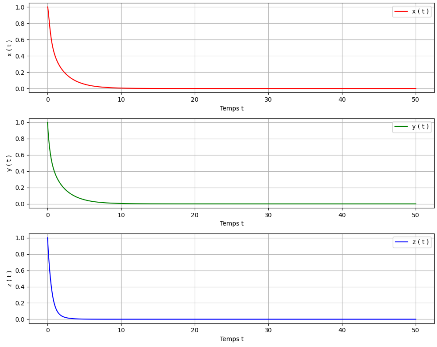


Figure 2: $x(t), y(t)$ et $z(t)$ du Système de Lorenz avec $\rho = 1/2$

Variation de ρ

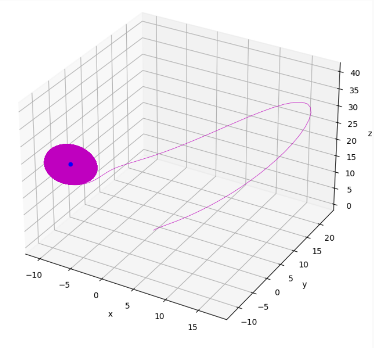


Figure 3: Système de Lorenz en 3d avec $\rho = 23.78$

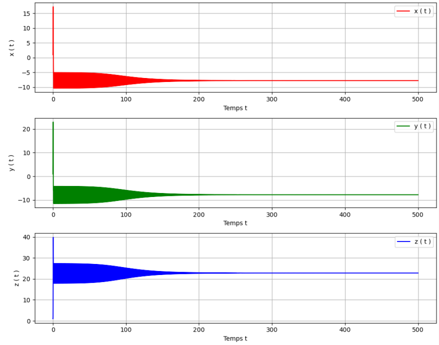


Figure 4: $x(t), y(t)$ et $z(t)$ du Système de Lorenz avec $\rho = 23.78$

- Convergence en temps très longs vers le point $(-\sqrt{\beta(\rho-1)}, -\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$ et plus vers $(0,0,0)$
- Cas "limite"

Variation de ρ

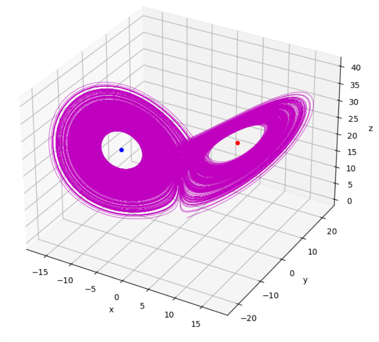


Figure 5: Système de Lorenz en 3d avec $\rho = 23.79$

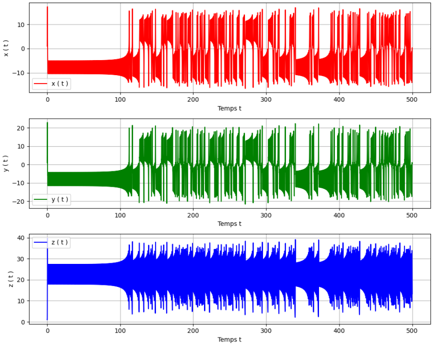


Figure 6: $x(t), y(t)$ et $z(t)$ du Système de Lorenz avec $\rho = 23.79$

- Cas "limite" entre la stabilité asymptotique de ce point et une stabilité non asymptotique autour des deux points $(\sqrt{\beta(\rho-1)}, \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$ et $(-\sqrt{\beta(\rho-1)}, -\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$.

Vérification des points stationnaires

- Nous choisissons les mêmes paramètres $(\sigma,\rho,\beta) = (10,28,8/3)$. Puis nous allons réprésenter l'évolution de x, y et z avec nos 3 points stationnaires théoriques comme conditions initiales x_0, y_0, z_0.

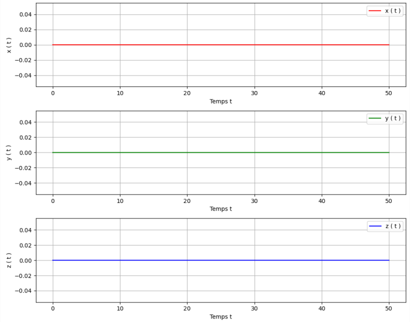


Figure 7: $x(t), y(t)$ et $z(t)$ du Système de Lorenz avec $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$

Vérification des points stationnaires

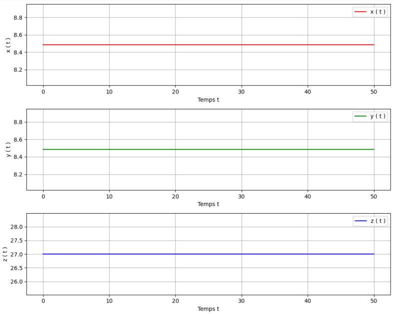


Figure 8: $x(t), y(t)$ et $z(t)$ du Système de Lorenz avec $(x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{\beta(\rho-1)}, \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$

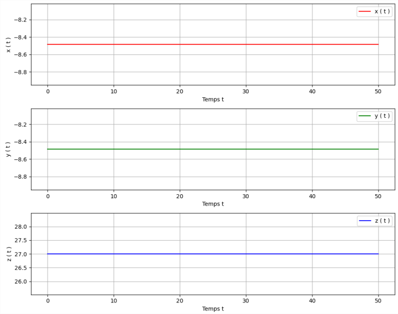


Figure 9: $x(t), y(t)$ et $z(t)$ du Système de Lorenz avec $(x_0, y_0, z_0) = (-\sqrt{\beta(\rho-1)}, -\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$

- L'application de la méthode Runge-Kutta 4 nous permet de vérifier nos résultats théoriques graphiquement ici.

Conclusion

- Existence d'une solution
- Etude qualitative de cette solution:

  → Points stationnaires

  → Stabilité linéaire du point $(0,0,0)$
- Etude numérique:

  → Méthode de Runge-Kutta 4

  → Chaos Déterministe: grande sensibilté aux conditions initiales

  → Illustration des résultats théoriques
- Introduction de la théorie du Chaos