Prädikatenlogik

by

Dr. Günter Kolousek

Motivation

- Argument
  - Alle Menschen sind sterblich.
  - Sokrates ist ein Mensch.
  - Also: Sokrates ist sterblich.
- Intuitiv: deduktiv gültig
- Aber: mit AL nicht nachzuweisen
  - $V(p) =$ Alle Menschen sind sterblich.
  - $V(q) =$ Sokrates ist ein Mensch.
  - $V(r) =$ Sokrates ist sterblich.
  - r folgt in AL sicher nicht aus p und q!

Erweiterungen zur Aussagenlogik

- Eigenschaften zu einem Objekt
  - z.B., dass Sokrates ein Grieche ist
- Beziehungen zwischen Objekten beschreiben
  - z.B., dass Maxi mit Mini verheiratet ist
- existentielle Aussagen treffen: *es gibt ein x, so dass…*
  - z.B., dass es mindestens Griechen, der Sokrates heißt
- universelle Aussagen treffen: *für jedes x gilt, dass…*
  - z.B., dass alle Menschen sterblich sind

Begriffe

- einfache Aussagen
  - Satzgegenstand: Subjekte, Individuen
    - z.B. Sokrates, Maxi, Mini
    - Alle betrachteten Gegenstände (Objekte, Individuen) werden in einer Menge zusammengefasst: Individuenbereich
  - Satzaussage: Prädikate
    - z.B. sterblich, ist verheiratet mit
- komplexe Aussagen
  - Verknüpfung mittels und, oder, nicht
- quantifizierende Aussagen
  - Alle…
  - Es existiert ein..

Die Syntax der Prädikatenlogik

- Grundzeichen
- Terme
- Formeln
- Freie und gebundene Variablen

Syntax - Grundzeichen

- Individuenkonstanten: a, b, c,… wenn nötig mit Indizes a_1, a_2,…
- Individuenvariablen: x, y, z, wenn nötig mit Indizes
  - Achtung: diese haben nichts mit den aussagenlogischen Variablen gemein!
- Funkionssymbole: f, g,…
- Prädikatssymbole: P, Q, R…, wenn mit Indizes
- Jedem Funktionssymbol bzw. Prädikatssymbol ist eine Stelligkeit zugeordnet
- Junktoren: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- Quantorenzeichen:
  - Allquantor: $\forall$
  - Existenzquantor: $\exists$
- Hilfszeichen: (,)

Syntax - Terme

- Definition eines Terms
  - Jede Konstante ist ein Term
  - Jede Variable ist ein Term
  - Ist f ein n-stelliges Funktionssymbol und sind $t_1, t_2, ..., t_n$ Terme, dann ist auch $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ ein Term.
- Beispiele für Terme, wenn natürliche Zahlen Konstanten sind und Addition (”add”) und Multiplikation (”mul”) Funktionen sind:
  - 42
  - $\text{add}(x, 7)$
  - $\text{add}(3, \text{mul}(4, 2))$

Syntax - Formeln

- Definition einer Formel (Zeichen: A, B, C, D, E, F, G)
  - Ist P ein n-stelliges Prädikatensymbol und sind $t_1, t_2, ..., t_n$ Terme, so ist $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ eine (atomare) Formel.
  - Für jede Formel F ist auch $\neg F$ eine Formel.
  - Für alle Formeln F und G sind auch $F \wedge G$, $F \vee G$, $F \rightarrow G$ oder $F \leftrightarrow G$ Formeln.
  - Ist x eine Variable und F eine Formel, so sind auch $\exists x : F$ und $\forall x : F$ Formeln.
- Beispiele für Formeln, wenn "even" ein einstelliges und "equal" ein zweistelliges Prädikat sind:
  - $\text{even}(42)$
  - $\text{equal}(42, \text{add}(2, \text{mul}(4, 10)))$
  - $\forall x : \text{even}(\text{mul}(2, x))$
  - $\exists x : (\forall y : \text{equal}(\text{add}(x, y), y))$

Syntax - Freie & gebundene Var.

Jede Gegenstandsvariable x, die im Bereich eines Quantors $\forall x :$ oder $\exists x :$ liegt, heißt *gebundene Variable*, anderenfalls *freie Variable*. Eine Variable kann in einer Formel sowohl frei als auch gebunden vorkommen:

$$\forall x : (\exists y : (P(x, y) \wedge Q(y, z, x)) \rightarrow R(y, x)) \Leftrightarrow S(x, z)$$

Eine Formel, die keine freien Variablen enthält, nennt man *geschlossene Formel*.

Die Semantik der Prädikatenlogik

- Allgemeines
- Beispiel einer Interpretation

Semantik - Allgemeines

- Grundzüge ähnlich der AL
- Anstatt Bewertung gibt es die Interpretation I:
  - Angabe einer nichtleeren Menge D, die den Bereich festlegt, auf den sich die Quantoren beziehen.
  - Zuordnung von Individuenkonstante zu Gegenstand aus D.
  - Bedeutung der Prädikatbuchstaben
    - Jedem einstelligen Prädikat wird eine Eigenschaft zugeordnet, die Individuen aus D haben können.
    - Jedes mehrstelliges Prädikat legt eine Beziehung zwischen Individuen aus D fest.
    - D.h. Prädikate sind n-stellige Relationen über dem Individuenbereich D.
- Wie bei AL hängt die Wahrheit eines Satzes von PL immer von der Interpretation ab.

Semantik - Bsp. einer Interpretation

- Interpretation I:
  - $D =$ Menge der natürlichen Zahlen
  - $a : 1$
  - $b : 2$
  - $c : 3$
  - $d : 4$
  - $e : 5$
  - $P(x), \text{even}(x)$: x ist eine gerade Zahl
  - $Q(x), \text{odd}(x)$: x ist eine ungerade Zahl
  - $R(x), \text{prim}(x)$: x ist eine Primzahl
  - $S(x, y), \text{less}(x, y)$: x ist kleiner als y
  - $T(x, y), \text{greater}(x, y)$: x ist größer als y
  - $U(x, y), \text{divisible}(x, y)$: x ist teilbar durch y
  - $V(x, y, z)$: x ist die Summe von y und z
- $\rightsquigarrow$ Weitere Formalisierung der Semantik wird weggelassen

Äquivalenzen und Konsequenzen

- Äquivalenzen
  - $\neg\forall x : A \Leftrightarrow \exists x : \neg A$
    - $\forall x : P(x) \Leftrightarrow \neg\exists x : \neg P(x)$
    - 'Alle Menschen haben eine Mutter' $\Leftrightarrow$ 'Es gibt keinen Mensch, der keine Mutter hat'.
  - $\neg\exists x : A \Leftrightarrow \forall x : \neg A$
  - $\forall x : A \wedge \forall x : B \Leftrightarrow \forall x : (A \wedge B)$
  - $\exists x : A \vee \exists x : B \Leftrightarrow \exists x : (A \vee B)$
  - $\forall x : (\forall y : A) \Leftrightarrow \forall y : (\forall x : A)$
  - $\exists x : (\exists y : A) \Leftrightarrow \exists y : (\exists x : A)$
- Konsequenzen
  - $\forall x : A \vee \forall x : B \Rightarrow \forall x : (A \vee B)$
  - $\exists x : (A \wedge B) \Rightarrow \exists x : A \wedge \exists x : B$
  - $\exists x : (\forall y : A) \Rightarrow \forall y : (\exists x : A)$

Schlüsse

Analog zu den aussagenlogischen Schlüssen lassen sich auch prädikatenlogischen Schlussregeln finden, wie z.B.:

- $A \wedge \forall x : (A \rightarrow B) \Rightarrow B$
- $\forall x : A \wedge (\exists x : A \rightarrow B) \Rightarrow \exists x : B$

Übergang zur PL höherer Stufe

- Prädikatenlogik erster Stufe
  - Die Individuenvariable generalisiert über Individuen
  - Für Prädikate gibt es keine Variable!
- Prädikatenlogik höherer Stufe
  - Auch über Prädikate wird generalisiert
    - Für alle Eigenschaften gilt,…
    - Es gibt ein Prädikat…