Mengen

by

Dr. Günter Kolousek

Begriff

- Georg Cantor (1845 - 1918, dt. Mathematiker)
- Definition von Cantor (1895)
  ”Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente der Menge genannt werden) zu einem Ganzen.”
- Es kann also ”alles” in einer Menge enthalten sein: Bücher, Autos, Zahlen, Funktionen,…
- Eigenschaften: keine doppelten Elemente, keine Reihenfolge!!!
- $M = \{1, 2, 3\}, 1 \in M, 4 \notin M$
- Anzahl der Elemente von M heißt Mächtigkeit von M: $|M|$

Problem 1

- D.h. auch Mengen von Mengen sind nach dieser Definition erlaubt.
- Menge M **aller** Mengen!
  - Wenn M eine Menge ist, dann muss M auch sich selbst enthalten!
  - M ist also als Element in M enthalten.
  - Und in diesem M ist wiederum ein M enthalten, usw.

Problem 2

- Menge M aller Mengen, die sich **nicht** selbst als Element enthalten: $M = \{x|x \notin x\}$
- Nehmen wir an:
  - Fall 1: M enthält sich nicht selbst. Dann ist M eine Menge, die sich nicht selbst enthält und als solche ein Element von M!!! $\rightarrow$ Widerspruch!
  - Fall 2: M enthält sich als Element. Dann ist M eine Menge, die sich selbst enthält und als solche kein Element von M!!! $\rightarrow$ Widerspruch!
- Paradoxon von Bertrand Russell (1872 - 1970)
- Auch unter dem Namen Barbier-Paradoxon bekannt
  - Im Schaufenster eines Barbierladens steht ein Schild: Ich rasiere alle Männer des Dorfes, die sich nicht selbst rasieren. Rasiert sich der Barbier selbst?
- Lösung: Zermelo-Fraenkel-Mengelehre (10 Axiome)

Mengenschreibweisen

- Aufzählend
  - $N_g = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$
  - $N_g = \{0, 2, 4, ..., 10\}$
- Beschreibend
  - $N_g = \{x | x \in \mathbb{N}$ und x ist kleiner als 11 und gerade$\}$
  - $N_g = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 10 \wedge 2 | x\}$
  - $N_g = \{x | x \leq 10 \wedge 2 | x\}$ … Grundmenge ist gegeben: $\mathbb{N}$
  - $N_g = \{x | x \leq 10 \wedge x \bmod 2 = 0\}$
  - $N_g = \{x | x \leq 10 \wedge \exists m \in \mathbb{N} : 2m = x\}$
  - $N_g = \{2x | x \leq 5\}$

Gebräuchliche Mengen

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$
- $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
- $\mathbb{Q} = \{x | x = p/q, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
- $L = \{x | x^2 = 2\}, L \not\subseteq \mathbb{Q}, L \subset \mathbb{R}$
- $L = \{x | x^2 = -1\}, L \not\subseteq \mathbb{R}, L \subset \mathbb{C}$
  - $a + bi \in \mathbb{C}$
  - in Python:

```
>>> import cmath
>>> cmath.sqrt(-1)
1j
>>> 1j**2
(-1+0j)
```

Teilmenge

- $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A \rightarrow x \in B$
  - Für jede Menge M gilt: $\{\} \subseteq M$ und $M \subseteq M$
- $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$
- $A = B \Leftrightarrow \forall x \in A \rightarrow x \in B \wedge \forall y \in B \rightarrow y \in A$
  - $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- $A \supseteq B \Leftrightarrow \forall x \in B \rightarrow x \in A$
- $A \supset B \Leftrightarrow A \supseteq B \wedge A \neq B$

Rechenregeln

Für Teilmengen:

Reflexivität	$A \subseteq A$
Antisymmetrie	$A \subseteq B \land B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$
Transitivität	$A \subseteq B \land B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
Kleinstes und größtes Element	$\emptyset \subseteq A \subseteq G$

Potenzmenge

- Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ ist die Menge aller Teilmengen von M
  - $\mathcal{P}(M) = \{N | N \subseteq M\}$
  - $M = \{a, b, c\}$
    $\mathcal{P}(M) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
  - Ist M endlich, dann ist $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$
  - Anstatt $\{\}$ schreiben wir auch $\emptyset$

Binäre Mengenoperationen

- Durchschnitt: $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
  - A und B heißen *disjunkt*, wenn ihre Schnittmenge leer ist.
- Vereinigung: $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$
- Differenz: $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
- Symmetrische Differenz:
  $A \bigtriangleup B = \{(x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$
  - $A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
  - $A \bigtriangleup B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Rechenregeln – 2

Idempotenz	$A \cap A = A$
	$A \cup A = A$
Beherrschung	$A \cup G = G$
	$A \cap \emptyset = \emptyset$
Identität	$A \cap G = A$
	$A \cup \emptyset = A$
Komplement	$A \cap \overline{A} = \emptyset$
	$A \cup \overline{A} = G$

(Idem…dasselbe, Potenz…Leistungskraft)

Rechenregeln – 3

Kommutativ-gesetz	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
Assoziativ-gesetz	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Distributiv-gesetz	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Absorptions-gesetz	$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$

Rechenregeln – 4

Komplemente
$$\overline{\emptyset} = G$$
$$\overline{G} = \emptyset$$

Doppelte Negation
$$\overline{\overline{A}} = A$$

De Morgan
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Komplementärmenge & Partition

- Komplementärmenge $\overline{A}$ (auch A^C) ist definiert durch $\overline{A} = \{x | x \notin A\}$ (Grundmenge G muss definiert sein)
- Partition: Menge von Teilmengen $A_1, A_2, ..., A_n$ von M:
  - $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = M$
  - $\forall A_i, A_j, i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$

Kartesische Produkt

- Tupel
  - geordnete Anordnung von Werten (Objekten)
    - $(5, 3) \neq (3, 5)$
    - Reihe 5, Sitz 3 vs. Reihe 3, Sitz 5!
  - Paar, Tripel, Quadrupel, n-Tupel
- Kartesisches Produkt zweier Mengen
  - $A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$
  - z.B. zweidimensionales Koordinatensystem
- n-faches Kartesisches Produkt
  - $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) | a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge ... \wedge a_n \in A_n\}$
  - z.B. $n = 3$: dreidimensionales Koordinatensystem

Relation

- Beziehung zwischen 2 oder mehreren Elementen (Objekten)
  - z.B. Vater-Mutter, Mutter-Sohn, Sohn-Tochter1-Tochter2
  - z.B. lexiographische Ordnungsrelation: ”Meier” steht vor ”Meyer” und auch vor ”Schmidt”
- Eine Relation R zwischen A und B ist eine Teilmenge von $A \times B$
  - $R \subseteq A \times B$
  - statt: $(a, b) \in R$ schreibt man auch $a\,R\,b$
  - z.B. $\leq = \{(a, b) | a \in A, b \in B, a$ kleiner oder gleich $b\}$, d.h. $a \leq b$
- Allgemein: $R \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$
- $\leadsto$ Prädikatenlogik, Relationale Algebra (Relationale Datenbanken)

Verkettung von Relationen

- $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$
- Komposition (Verkettung)
  $R \circ S \subseteq A \times C : a(R \circ S)c \Leftrightarrow \exists b \in B : a\,R\,b \wedge b\,S\,c$
- Umkehrrelation (inverse Relation)
  $R^{-1} \subseteq B \times A : b\,R^{-1}\,a \Leftrightarrow a\,R\,b$

Eigenschaften von Relationen

- R heißt transitiv, wenn $\forall a, b, c \in A : a\,R\,b \wedge b\,R\,c \Rightarrow a\,R\,c$
- R heißt reflexiv, wenn $\forall a \in A : a\,R\,a$
- R heißt irreflexiv, wenn $\forall a \in A : \neg(a\,R\,a)$
- R heißt symmetrisch, wenn $\forall a, b \in A : a\,R\,b \Rightarrow b\,R\,a$
- R heißt antisymmetrisch, wenn nicht gleichzeitig $a\,R\,b$ und $b\,R\,a$ (für $a \neq b$) gelten kann
  - also: $\forall a, b \in A : a\,R\,b \wedge b\,R\,a \Rightarrow a = b$
- R heißt asymmetrisch, wenn $\forall a, b \in A : a\,R\,b \Rightarrow \neg(b\,R\,a)$
  - jede asymmetrische Relation ist auch antisymmetrisch
    - d.h. ist ein Spezialfall der antisymmetrischen Relation
    - d.h. ist eine verschärfte Antisymmetrie
  - jede asymmetrische Relation ist auch irreflexiv
- R heißt total, wenn $\forall a, b \in A : a\,R\,b \vee b\,R\,a$
- R heißt trichotom, wenn $\forall a, b \in A :$ entweder $a\,R\,b$ oder $a = b$ oder $b\,R\,a$
  - damit automatisch: irreflexiv und asymmetrisch!

Ordnungsrelationen

Achtung auf verschieden verwendete Begriffe!

- Halbordung
  - auch: partielle Ordnung oder Partialordnung
  - Eigenschaften: reflexiv, antisymmetrisch, transitiv
  - Beispiel: $\subseteq$
- Totalordnung
  - auch: (schwache) Ordnung
  - Halbordnung, die total ist
  - Beispiel: $\leq$ auf $\mathbb{R}$
- Starke Totalordnung
  - auch: starke Ordnung
  - Eigenschaften: transitiv, trichotom
  - eine starke Totalordnung ist *keine* Totalordnung!
  - Beispiel: $<$ auf $\mathbb{R}$

Äquivalenzrelation

- Eigenschaften
  - reflexiv
  - symmetrisch
  - transitiv
- Es wird häufig das Symbol $\equiv$ verwendet.
- Beispiel: $=$ oder ”ist gleich alt wie”

Äquivalenzklasse

- Ist $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M, dann wird die Menge $[a]_{\equiv}$ als Äquivalenzklasse über M bezeichnet und ist definiert durch: $[a]_{\equiv} = \{b | b \in M \wedge a \equiv b\}$
- Die Äquivalenzklasse von x ist die Menge der Elemente, die äquivalent zu x sind.
- Die Äquivalenzklassen von von $\equiv$ bilden eine Partition von M
- Beispiel: Mengen aller Zahlen, die durch 2 dividiert den gleichen Rest ergeben.
  - $mod2 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | a \bmod 2 = b \bmod 2\}$
  - $[a]_{mod2} = \{b | b \in \mathbb{N} \wedge a \text{ mod2 } b\}$
  - $[1]_{mod2} = \{1, 3, 5, ...\}$
  - $[2]_{mod2} = \{0, 2, 4, ...\}$

Prioritäten

1. $\overline{A}$
2. $\times$
3. $\setminus, \triangle$
4. $\cap$
5. $\cup$
6. $\subset, \subseteq, =, \neq, \supseteq, \supseteq$

Nicht vergessen:

- In the face of ambiguity, refuse the temptation to guess.
- Explicit is better than implicit.

Multimenge

- mehrfaches Vorkommen
  - normale Menge ”ist eine” Multimenge
- Beispiel: Noten eines Schülers
  - $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}, M = \{2, 3, 3, 4, 4, 5\}$
- Darstellung durch Zugehörigkeitsfunktion
  - $M : G \to \mathbb{N}$
  - $M(1) = 0, M(2) = 1, M(3) = 2, M(4) = 2, M(5) = 1$
- Operationen
  - $\forall e :$
    - $(M \cap N)(e) = \min(M(e), N(e))$
    - $(M \cup N)(e) = \max(M(e), N(e))$
    - $(M \setminus N)(e) = \max(0, M(e) - N(e))$
    - $M \subseteq N \Leftrightarrow \forall e : M(e) \leq N(e)$
  - $|M| = \sum_e M(e)$