Aussagenlogik – 1: Einführung und Syntax

by

Dr. Günter Kolousek

Allgemeines

- Anfang in Griechenland: Aristoteles (384-322 v.Chr.)
- logisches Schließen
- Syllogismus: logischer Schluss
  - 2 Prämissen (Voraussetzung, Annahme)
    - Obersatz
    - Untersatz
  - Konklusion (Schlussfolgerung)
  - Beispiel
    - Obersatz: Alle Menschen sind sterblich
    - Untersatz: Alle Griechen sind Menschen
    - Konklusion: Alle Griechen sind sterblich
- Allgemein: Argument ist Folge von Aussagensätze, im speziellen
  - mehrere Prämissen
  - eine Konklusion

Arten der Logik

- Klassische Logiken
  - Aussagenlogik
  - Prädikatenlogik (1. Stufe)
  - Prädikatenlogik höherer Stufe
- Nichtklassische Logiken
  - mehrwertige Logiken
    - z.B., wahr, falsch, unbekannt
  - Fuzzy-Logik
    - Wenn die Körpertemperatur *erhöht*…
  - Modale Logiken
    - Es ist *möglich*, dass…
    - Es ist *notwendig*, dass…
  - Temporale Logiken
    - vorher, nachher, in 3 Wochen,…

Anwendungen der Logik in der IF

- Herleiten von neuen Erkenntnissen
- Beweisen von Sätzen
- Umformung und Vereinfachung von logischen Ausdrücken
- Schaltkreisentwurf
- Datenbanken
- Künstliche Intelligenz

Prinzipien der klassische Logiken

- Prinzip der Zweiwertigkeit (Bivalenzprinzip)
  Jede Aussage hat genau einen von zwei Wahrheitswerten, nämlich *wahr* oder *falsch*.
- Extensionalitätsprinzip
  Der Wahrheitswert jeder zusammengesetzten Aussagen ist eindeutig durch die Wahrheitswerte ihrer Teilaussagen bestimmt.

Beschreibung der Aussagenlogik

- Teilgebiet der klassischen Logik
  - befasst sich mit Aussagen
  - jede Aussage: eine von zwei Wahrheitswerten
    - Prinzip der Zweiwertigkeit
  - Wahrheitswert von zusammengesetzen Aussagen
  - Verknüpfung mittels *Junktoren*
  - Ausgehend von **strukturlosen** Elementaraussagen
    - bestimmbar aus Wahrheitswerten der Teilaussagen
  - Extensionalitätsprinzip
- Beispiel
  - Alle Schüler sind faul und alle Lehrer sind faul.
    - Elementaraussage 1: Alle Schüler sind faul.
    - Verküpfung (Junktor): und
    - Elementaraussage 2: Alle Lehrer sind faul.

Aussage

- sprachliches Konstrukt: wahr oder falsch
- Beispiele
  - 4 ist eine gerade Zahl.
  - 2 ist größer als 4.
  - Ich heiße Günter.
  - Ich heiße Maxi.
  - Ich heiße weder Maxi noch Günter.
  - Hier gibt es viele Autos.
  - Heute ist Dienstag.
  - Die Straße ist nass.
- Gegenbeispiele
  - Wann wurde Aristoteles geboren?
  - Schon wieder du!

Aussagenform

- Aussageformen enthalten Variable
  - Kontext
- Beispiele
  - Ich, du,… $\rightsquigarrow$ Person
  - Heute, Morgen,… $\rightsquigarrow$ Zeit
  - Hier, Dort,… $\rightsquigarrow$ Ort

Natürliche Sprache

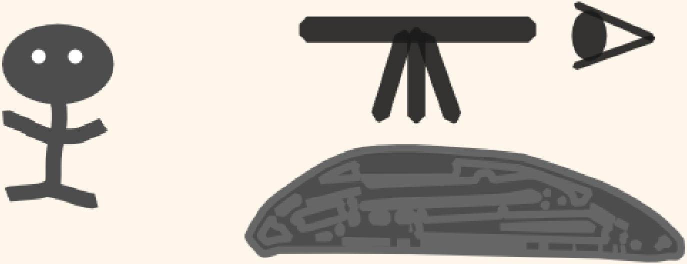
- historisch gewachsen
- Verständigung zwischen Menschen.
- gesprochen oder schriftlich verwendet.
- Redundanz: $\leadsto$ fehlende Buchstaben, ganze Wörter
- Beispiele
  - Deutsch, Chinesisch
  - Körpersprache
- Eigenschaften
  - nicht exakt
  - mehrdeutig
  - verändern sich

Beispiel

”Ich sah den Mann auf dem Berg mit dem Fernrohr”

Interpretation 1

- ((Ich sah den Mann) auf dem Berg) mit dem Fernrohr

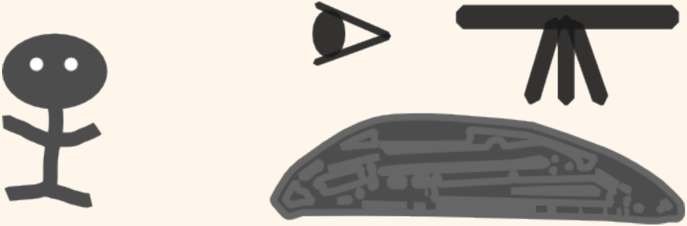


Interpretation 2

- (Ich sah (den Mann auf dem Berg)) mit dem Fernrohr

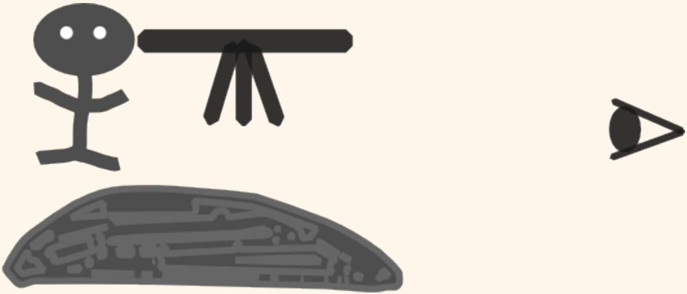
Interpretation 3

- (Ich sah den Mann) (auf dem Berg mit dem Fernrohr)



Interpretation 4

- Ich sah ((den Mann auf dem Berg) mit dem Fernrohr)



Interpretation 5

- Ich sah (den Mann (auf dem Berg mit dem Fernrohr))

Weitere (problematische) Beispiele

- Otto ist blond und 1.80m groß $\rightsquigarrow$
  Otto ist blond und Otto ist 1.80m groß
- Otto und Paul sind Geschwister $\rightsquigarrow$
  Otto ist ein Geschwister (!)
- Otto und Fritzi sind verheiratet $\rightsquigarrow$
  Otto ist verheiratet
  Fritzi ist verheiratet
  - miteinander?
- Heute Abend gehe ich ins Kino oder ins Theater.
  - exklusives oder!
- Ich habe kein Geld nicht.
  - Im österreichischen Dialekt: doppelte Verneinung $\rightsquigarrow$
    Verstärkung der Verneinung!

Beispiele für Argumente

- Alle Menschen sind sterblich
  Sokrates ist ein Mensch
  Also: Sokrates ist sterblich
  (deduktiv gültig; vom Allgemeinen zum Besonderen)
- Anfänger haben im Allgemeinen Schwierigkeiten mit der Logik
  Maxi ist ein Anfänger
  Also: Maxi hat Schwierigkeiten mit der Logik
  (nicht deduktiv gültig; vom Besonderen zum Allgemeinen)

Deduktiv gültige Beispiele

- Alle Katzen sind Tiere
  Alle Löwen sind Katzen
  Also: Alle Löwen sind Tiere
  (vom Allgemeinen zum Allgemeinen)
- Wenn Otto der Mörder ist, war er am Tatort
  Otto war nicht am Tatort
  Also: Otto ist nicht der Mörder
  (vom Besonderen zum Besonderen)
- Otto ist nicht blond
  Otto ist Schwede
  Also: Nicht alle Schweden sind blond
  (vom Besonderen zum Allgemeinen)

Nicht deduktiv gültige Beispiele

- Fast alle Schweden sind blond
  Otto ist ein Schwede
  Also: Otto ist blond
  (vom Allgemeinen zum Besonderen)
- Beim ersten Wurf ist eine Sechs gefallen
  Beim zweiten Wurf ist eine Sechs gefallen
  …
  Beim neunten Wurf ist eine Sechs gefallen
  Also: Beim zehnten Wurf ist eine Sechs gefallen
  (vom Besonderen zum Besonderen)

Formalisierung der Aussagen

- George Boole (1848)
- Verknüfung von Aussagen
- mit einfachen Operatoren
  - und, oder, nicht, wenn…dann,…
- Aussage: entweder wahr oder falsch
- Beispiele
  - Aussagen:
    - Es regnet
    - Die Straße ist nass
  - Verknüpfungen:
    - Es regnet und die Straße ist nass.
    - Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.
    - Wenn die Straße nicht nass ist, dann regnet es nicht.
    - Wenn es nicht regnet, dann ist die Straße nicht nass.

Umfang der Aussagenlogik

- Syntax der Aussagenlogik
  - Was sind Formeln?
  - Welche Formeln sind syntaktisch korrekt?
  - Was sind Junktoren?
- Semantik der Aussagenlogik
  - Bedeutung einer Formel?
  - Welche Formeln sind allgemeingültig (immer wahr)?
  - Welche Formeln sind unerfüllbar (immer falsch)?
- Verfahren und Methoden, die überprüfen, ob eine Formel allgemeingültig oder unerfüllbar ist.

Syntax der Aussagenlogik (AL)

- Grundzeichen der AL
  - Aussagenvariable: p, q, r,… wenn nötig mit Indizes p_1, p_2,…
  - aussagenlogische Operatoren (Junktoren): $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - Hilfszeichen: (,)
- Definition
  A ist genau dann eine aussagenlogische Formel von AL, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:
  - A ist ein Aussagenvariable (atomare Formel)
  - B und C sind Formeln von AL und A ist gleich $\neg B$, $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \rightarrow C$ oder $B \leftrightarrow C$.