

Mehrwertige Logiken

by

Dr. Günter Kolousek

Arten der Logik

- ▶ Klassische Logiken
 - ▶ Aussagenlogik
 - ▶ Prädikatenlogik (1. Stufe)
 - ▶ Prädikatenlogik höherer Stufe
- ▶ Nichtklassische Logiken
 - ▶ mehrwertige Logiken
 - ▶ z.B., wahr, falsch, unbekannt
 - ▶ Fuzzy-Logik
 - ▶ Wenn die Körpertemperatur *erhöht*...
 - ▶ Modale Logiken
 - ▶ Es ist *möglich*, dass...
 - ▶ Es ist *notwendig*, dass...
 - ▶ Temporale Logiken
 - ▶ vorher, nachher, in 3 Wochen,...

Mehrwertige Logiken

- ▶ Prinzipien
 - ▶ *kein* Prinzip der Zweiwertigkeit (Bivalenzprinzip)
 - ▶ d.h. *mehr* Werte
 - ▶ Bedeutung der zusätzlichen Werte per se nicht definiert
 - ▶ jedoch sehr wohl: Extensionalitätsprinzip
- ▶ Anwendungen
 - ▶ Datenbanken
 - ▶ Wissensverarbeitung
 - ▶ Hardwareentwicklung

Dreiwertige Logiken

- ▶ 3 "Wahrheitswerte"
- ▶ wahr, falsch und...

Dreiwertige Logiken

- ▶ 3 "Wahrheitswerte"
- ▶ wahr, falsch und...
 - ▶ (kontingent) möglich (auch unbekannt)
 - ▶ "Morgen wird eine Seeschlacht stattfinden" (\rightarrow Aristoteles)

Dreiwertige Logiken

- ▶ 3 "Wahrheitswerte"
- ▶ wahr, falsch und...
 - ▶ (kontingent) möglich (auch unbekannt)
 - ▶ "Morgen wird eine Seeschlacht stattfinden" (\rightarrow Aristoteles)
 - ▶ "weder wahr noch falsch"

Dreiwertige Logiken

- ▶ 3 "Wahrheitswerte"
- ▶ wahr, falsch und...
 - ▶ (kontingent) möglich (auch unbekannt)
 - ▶ "Morgen wird eine Seeschlacht stattfinden" (→ Aristoteles)
 - ▶ "weder wahr noch falsch"
 - ▶ "sowohl wahr als auch falsch"

Dreiwertige Logiken

- ▶ 3 "Wahrheitswerte"
- ▶ wahr, falsch und...
 - ▶ (kontingent) möglich (auch unbekannt)
 - ▶ "Morgen wird eine Seeschlacht stattfinden" (→ Aristoteles)
 - ▶ "weder wahr noch falsch"
 - ▶ "sowohl wahr als auch falsch"
 - ▶ "bedeutungslos"

Dreiwertige Logiken

- ▶ 3 "Wahrheitswerte"
- ▶ wahr, falsch und...
 - ▶ (kontingent) möglich (auch unbekannt)
 - ▶ "Morgen wird eine Seeschlacht stattfinden" (→ Aristoteles)
 - ▶ "weder wahr noch falsch"
 - ▶ "sowohl wahr als auch falsch"
 - ▶ "bedeutungslos"
 - ▶ "halb wahr"

► Negation

a	$\neg a$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

- $\frac{1}{2}$ ist prinzipiell ein Symbol!
- als Wert betrachtet: $\neg a = 1 - a$

Junktoren – 2

► Konjunktion

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	$\frac{1}{2}$	0
0	1	0
$\frac{1}{2}$	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
1	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1

► allgemein: $a \wedge b = \min(a, b)$

Junktoren – 3

► Disjunktion

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	1
1	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1

► allgemein: $a \vee b = \max(a, b)$

Łukasiewicz-Logik L_3

- ▶ Jan Łukasiewicz, 1920
- ▶ 3. Wahrheitswert $m \dots$ "möglich"
 - ▶ nicht bewiesen, aber auch nicht widerlegt
- ▶ Junktoren wie vorher gezeigt
- ▶ *nicht alle* Tautologien gelten
 - ▶ wie z.B. $a \vee \neg a$
- ▶ Implikation ist eigens definiert
 - ▶ Biimplikation (Äquivalenz) definiert als:
$$a \leftrightarrow b \Leftrightarrow (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$$
 - ▶ und ergibt sich damit zu:
$$a \leftrightarrow b = 1 - |a - b|$$
 - ▶ Antivalenz definiert als:
$$a \underline{\vee} b \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)$$

Łukasiewicz-Logik L_3 – 2

► Implikation

a	b	$a \rightarrow b$
0	0	1
0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1

► allgemein: $a \rightarrow b = \min(1, 1 + b - a)$

► d.h.
$$a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{wenn } a \leq b \\ 1 + b - a & \text{anderenfalls} \end{cases}$$

► Achtung: $a \rightarrow b \not\equiv \neg a \vee b$

Kleene-Logik K_3

- ▶ Stephen Cole Kleene, 1938
- ▶ 3. Wahrheitswert i ... indeterminate (unbestimmt)
 - ▶ "weder wahr noch falsch"
- ▶ Implikation

a	b	$a \rightarrow b$
0	0	1
0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1

- ▶ Unterschied zu L_3 , wenn sowohl a als auch b jeweils $\frac{1}{2}$!
 - ▶ aber wie in klassischer Aussagenlogik: $a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b$
 - ▶ aber *keine* Tautologien, da auch $a \rightarrow a$ keine Tautologie

Priest-Logik P_3

- ▶ Graham Priest, 1979
- ▶ wie K_3 , aber 2 designierte Wahrheitswerte!
 - ▶ Tautologie: Aussage nimmt immer einen designierten Wahrheitswert an
 - ▶ d.h. designierter Wahrheitswert in AL ist 1
 - ▶ \rightarrow designierte Wahrheitswerte in P_3 sind 1 und $\frac{1}{2}$
- ▶ 3. Wahrheitswert $\frac{1}{2}$... overdetermined (überbestimmt)
 - ▶ "sowohl wahr als auch falsch"
- ▶ Tautologien wie in zweiwertiger Logik!

Bochvar-Logik B_3

- ▶ Dmitri Bochvar, 1937
- ▶ 3. Wahrheitswert m ... meaningless
 - ▶ "bedeutungslos" oder "paradox"
 - ▶ dieser wird als *contagious* (infektiös, ansteckend)
- ▶ Idee: Umgang mit Paradoxien (z.B. Lügnerparadoxon)
 - ▶ *Dieser Satz ist falsch*
 - ▶ gemäß Bochvar ist so ein Satz bedeutungslos → daher weder wahr noch falsch

Bochvar-Logik B_3 – 2

► Konjunktion

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
1	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1

Bochvar-Logik B_3 – 3

► Disjunktion

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
1	0	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1

Bochvar-Logik B_3 – 4

► Implikation

a	b	$a \rightarrow b$
0	0	1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
1	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1

Erweiterung

- ▶ mehr als 3 Werte
- ▶ z.B. Łukasiewicz-Logik L_n
 - ▶ Wahrheitswerte: $0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1$
 - ▶ $L_3: 0, \frac{1}{2}, 1$
 - ▶ $L_4: 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$
- ▶ z.B. Łukasiewicz-Logik L_∞
 - ▶ Wahrheitswerte: alle reellen Zahlen in $[0, 1]$
 - ▶ d.h. infinite-valued logic
- ▶ diese Wahrheitswerte werden als *Grad eines Wahrheitswertes* interpretiert!