Aussagenlogik – 2: Semantik

by

Dr. Günter Kolousek

Semantik

- Die Bedeutung (Semantik) einer aussagenlogischen Formel besteht in den Wahrheitsbedingungen.
- Eine Bewertung V (auch Interpretation genannt)
  - ist eine Zuordnung von Wahrheitsbedingungen zu allen Satzbuchstaben (atomaren Formeln).
- Beispielformel: $p \wedge q \vee r$
  - Bewertung
    - $V(p) =$ 8 ist durch 2 teilbar
    - $V(q) =$ 6 ist das Produkt von 2 und 4
    - $V(r) =$ alle geraden Zahlen sind durch 3 teilbar
- Die Semantik zusammengesetzter Formeln $\rightsquigarrow$ Junktoren.
- D.h. $p \wedge q \vee r$ ergibt mit der Bewertung V den Wert 0.
  - Anstatt false bzw. falsch: aussagenlogische Konstante 0.
  - analog, true bzw. wahr: 1.

Junktoren 1

- Negation (einstellig, unär)

p	$\neg p$
0	1
1	0

- Konjunktion (zweistellig, binär)

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Disjunktion und Antivalenz

p	q	$p \vee q$	$p \veebar q$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

Junktoren 2

- (materielle) Implikation, Subjunktion

p	q	p → q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

  - Wenn ein Viereck rund wäre, wäre 4 kleiner als 2 … wahr!
  - Wenn die Erde eine Sonne wäre, dann ist $1 < 2$ … wahr!
  - Wenn ich 10000€ gespart habe, dann $\rightsquigarrow$ Weltreise
    - mehr als Implikation: nicht genug Geld $\rightsquigarrow$ keine Weltreise!
- Biimplikation, Äquivalenz

p	q	p ↔ q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Junktoren 3

- Präzedenz der Junktoren
  1. $\neg$ … bindet am stärksten
  2. $\wedge$
  3. $\vee$, $\underline{\vee}$
  4. $\rightarrow$
  5. $\leftrightarrow$ … bindet am schwächsten
- Beispiel
  - Unsere Zimmer sind mit Telefon und Radio oder Fernseher ausgestattet.
    - $p \wedge q \vee r$ … $(p \wedge q) \vee r$ oder $p \wedge (q \vee r)$
    - $V(p)$ … Zimmer hat Telefon
    - $V(q)$ … Zimmer hat Radio
    - $V(r)$ … Zimmer hat Fernseher

Wahrheitstafelmethode

- $p \wedge q \vee r$
- Wahrheitstafel

p	q	r	(p	∧	q)	∨	r
0	0	0		0		0	
0	0	1		0		1	
0	1	0		0		0	
0	1	1		0		1	
1	0	0		0		0	
1	0	1		0		1	
1	1	0		1		1	
1	1	1		1		1	

- Bildung der Formel aus Wahrheitstafel

Aufgaben

- Welche der folgenden Ausdrücke sind Aussagen?
  - $x^2 + 1 > 0$
  - Maxi ist älter als Mini.
  - $x^2 + 3x - 5$
  - Wie spät ist es?
- Formuliere in ”wenn…dann”
  - Ich gehe jeden Freitag ins Kino
  - Ich gehe nur freitags in Kino
  - Freitags gehe ich nie ins Kino

Aufgaben – 2

- Aussagenlogische Formel für vorhergende Aussagen mit
  - $V(p) =$ Es ist Freitag
  - $V(q) =$ Ich gehe ins Kino
- Wahrheitstafeln
  - $\neg p \vee (p \to \neg q)$
  - $p \vee q \to p \wedge q$
  - $p \to \neg p$
  - $(p \to q) \to r$
  - $p \to (q \to r)$

Tautologie und Kontradiktion

- Eine Formel A von AL ist genau dann **logisch wahr**, wenn sich allein aus der Bedeutung der Junktoren ergibt, dass A bzgl. aller Bewertungen wahr ist (Tautologie)
  - $p \vee \neg p$
  - $\rightsquigarrow$ allgemein gültig
- Eine Formel A von AL ist genau dann **logisch falsch**, wenn sich allein aus der Bedeutung der Junktoren ergibt, dass A bzgl. aller Bewertungen falsch ist (Kontradiktion)
  - $p \wedge \neg p$
  - $\rightsquigarrow$ unerfüllbar

Äquivalenz und Konsequenz

- Zwei Formeln F und G heißen (logisch) äquivalent, wenn sie in jeder Zeile ihrer Wahrheitstafeln übereinstimmen: $F \Leftrightarrow G$.
  - $a \rightarrow b \Leftrightarrow \neg a \vee b$
  - Die beiden Formeln F und G sind genau dann äquivalent, wenn die Formel $F \leftrightarrow G$ eine Tautologie ist.
- Die Formel G heißt eine (logische) Konsequenz, wenn in jeder Zeile ihrer Wahrheitstafel in der F wahr ist auch G wahr ist: $F \Rightarrow G$.
  - $q \Rightarrow p \rightarrow q$
  - Die Formel G ist eine Konsequenz der Formel F, wenn die Formel $F \rightarrow G$ eine Tautologie ist.

Wichtige Äquivalenzen 1

- $A \Leftrightarrow \neg\neg A$ (Gesetz der doppelten Negation)
- $A \wedge A \Leftrightarrow A$ (Idempotenz der Konjunktion)
  - (Idem … dasselbe, Potenz … Leistungskraft)
- $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ (Kommutativität der Konjunktion)
- $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ (Assoziativität der Konjunktion)
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ (1. Gesetz von De Morgan)

Wichtige Äquivalenzen 2

- $A \vee A \Leftrightarrow A$ (Idempotenz der Disjunktion)
- $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ (Kommutativität der Disjunktion)
- $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ (Assoziativität der Disjunktion)
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ (2. Gesetz von De Morgan)
- $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ 1. Distributivgesetz
- $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ 2. Distributivgesetz

Wichtige Äquivalenzen 3

- $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
- $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$
- $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow B \leftrightarrow A$ (Kommutativität der Biimplikation)
- $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) \Leftrightarrow (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$ (Assoziativität der Biimplikation)
- $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$
- $\neg(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow A \veebar B$
- $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Dualitätsprinzip

- Sind zwei Formeln A und B, in denen nur die Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ vorkommen, äquivalent, dann sind auch die Formeln, die aus A und B dadurch entstehen, dass alle auftretenden $\wedge$ durch $\vee$, $\vee$ durch $\wedge$, 1 durch 0 und 0 durch 1 ersetzt werden, ebenfalls äquivalent.
- Beispiel
  - $a \wedge 1 \Leftrightarrow a$
  - Daher gilt: $a \vee 0 \Leftrightarrow a$

Einsetzungstheorem

- Wir bezeichnen mit A[p/B] diejenige Formel, die aus A dadurch entsteht, dass für jedes Vorkommen der Aussagenvariablen p in A die Formel B eingesetzt wird.
  - A: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow p$
  - B: $(r \wedge s)$
  - A[p/B]: $((r \wedge s) \rightarrow q) \leftrightarrow (r \wedge s)$
- Einsetzungstheorem: Ist A eine Tautologie bzw. eine Kontradiktion, dann auch A[p/B].
  - D.h. durch Einsetzen enstehen aus Tautologien wieder Tautologien und aus Kontradiktionen wieder Kontradiktionen.

Ersetzung

- Eine Teilformel ist:
  - Jede Formel A ist eine Teilformel von sich selbst.
  - Ist A eine zusammengesetzte Formel, etwa $\neg$ p, p $\wedge$ q,… dann sind auch p und q Teilformeln von A.
  - Jede Teilformel einer Teilformel von A ist ebenfalls eine Teilformel von A.
- Beispiel
  - A: p $\rightarrow$ (($\neg$ q $\vee$ r) $\rightarrow$ s)
  - Teilformeln von a:
    - p $\rightarrow$ (($\neg$ q $\vee$ r) $\rightarrow$ s)
    - p, ($\neg$ q $\vee$ r) $\rightarrow$ s,…
- Mit $A[[B/C]\,]$ wird diejenige Formel bezeichnet, die aus A dadurch entsteht, dass beliebig viele Vorkommnisse der Teilformel B von A durch die Formel C ersetzt werden.
- Ersetzungstheorem: Ist $B \Leftrightarrow C$, dann ist $A \Leftrightarrow A[[B/C]\,]$.

Schaltjahr

- Umlauf Erde um Sonne: 365.24219… Tage
- Schaltjahr
  - alle 4 Jahre ein Tag dazu
  - dann allerdings: Schnitt 365.25 Tage
    - daher alle 100 Jahre: kein Tag hinzu
  - dann allerdings: Schnitt unter 355.24219…
    - daher alle 400 Jahre: doch Tag hinzu

Schaltjahr – 2

- Algorithmus

```python
def schaltjahr(jahr):
    if jahr % 4 == 0:
        if jahr % 100 == 0:
            if jahr % 400 == 0:
                return True
            else:
                return False
        else:
            return True
    else:
        return False
```

Schaltjahr – 3

- Algorithmus 2: besser!

```python
def schaltjahr(jahr):
    if jahr % 4:
        return False
    elif jahr % 100:
        return True
    elif jahr % 400:
        return False
    else:
        return True
```

Schaltjahr – 4

- Algorithmus 3: besser?

```python
def schaltjahr(jahr):
    return False if jahr % 4 else \
           (True if jahr % 100 else
           (False if jahr % 400 else True))
```

  - C++, Java,...: `(jahr % 4) ? false : ...`

Schaltjahr – 5

- Überlegungen zur Umsetzung von Algorithmus 2 in AL
  - `q if p else r`
    - in AL: $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$
  - `False if p else r`
    - in AL: $(p \rightarrow 0) \wedge (\neg p \rightarrow r) \Leftrightarrow$
      $(\neg p \vee 0) \wedge (\neg\neg p \vee r) \Leftrightarrow$
      $\neg p \wedge (p \vee r) \Leftrightarrow$
      $(\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge r) \Leftrightarrow$
      $\neg p \wedge r$
  - `True if p else r`
    - in AL: $(p \rightarrow 1) \wedge (\neg p \rightarrow r) \Leftrightarrow$
      $(\neg p \vee 1) \wedge (\neg\neg p \vee r) \Leftrightarrow$
      $1 \wedge (p \vee r) \Leftrightarrow$
      $p \vee r$

Schaltjahr – 6

- Bewertung V
  - $V(p) = \text{jahr} \bmod 4 \neq 0$
  - $V(q) = \text{jahr} \bmod 100 \neq 0$
  - $V(r) = \text{jahr} \bmod 400 \neq 0$
- in AL: $\neg p \wedge (q \vee (\neg r \wedge 1)) \Leftrightarrow \neg p \wedge (q \vee \neg r)$
- The winner is… Algorithmus 4:

```python
def schaltjahr4(jahr):
    return not jahr % 4 and \
           (jahr % 100 or not jahr % 400)
```

Schlussfolgerung

- ist eine der ältesten Anwendungen der Logik
- ausgehend von gewissen Voraussetzungen (Prämissen) erhält man unter Anwendung sogenannter Schlussregeln neue Aussagen (Konklusion).
- die meisten Schlussfolgerungen des alltäglichen Lebens sind keine logischen Folgerungen, sondern kommen aus der Erfahrung und Beobachtung: daher kann die Konklusion auch falsch sein.
- aussagenlogische Folgerungen sind immer richtig.

Schlussfolgerung – 2

- Verschiedene Formen der Tautologien können benutzt werden, um Schlüsse zu ziehen. Diese werden als Inferenzregeln (to infer … folgern) bezeichnet.
- Beispiele solcher Tautologien:
  - $p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q \ldots$ modus ponens (Abtrennungsregel)
  - Anwendung des logischen Schlusses (Syllogismus)
  - Obersatz: p
  - Untersatz: p $\rightarrow$ q
  - Konklusion: q
  - $\neg q \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow \neg p \ldots$ modus tollens (Widerlegungsregel)
  - $q \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \Rightarrow p \ldots$ Kontrapositionsregel
    - $\neg q \wedge (\neg p \rightarrow q) \Rightarrow p \ldots$ indirekter Beweis
  - $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r \ldots$ hypothetical syllogism

Aufgaben – 3

- Welche sind Tautologien, welche Kontradiktionen?
  - $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
  - $p \vee (p \rightarrow q)$
  - $q \vee (p \rightarrow q)$
  - $p \wedge \neg q \wedge (p \rightarrow q)$
- Beweise, dass die folgenden Formeln äquivalent sind!
  - $F = p \rightarrow q, G = \neg q \rightarrow \neg p$
  - $F = p \leftrightarrow q, G = p \wedge q \vee \neg p \wedge \neg q$
  - $F = \neg(p \leftrightarrow q), G = \neg p \leftrightarrow q$
  - $F = p \rightarrow (q \rightarrow r), G = p \wedge q \rightarrow r$
- Beweise, das G eine Konsequenz von F
  - $F = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r), G = p \rightarrow r$
  - $F = \neg(p \rightarrow q), G = p$
  - $F = q, G = p \rightarrow q$
  - $F = p \wedge (p \rightarrow q), G = q$

Aufgaben – 4

- Vereinfache
  - $p \rightarrow (p \rightarrow q)$
  - $p \lor (q \land \neg p)$
  - $p \land q \lor \neg p \land q$
  - $p \land (q \lor r \land p)$
  - $p \land (q \lor r \land \neg p)$
- Vereinfache

```python
def f(p, q):
    if p:
        if q: return p
        else: return False
    else:
        if not q: return False
        else: return True
```