

# Яндекс А'. Геометрия 1. Семинар.

Ваня Сафонов, Вова Новиков, Тихон Евтеев, Алексей Васильев

30 сентября 2023

## Набор определений

Мы будем говорить о геометрии на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . На ней введены координаты, то есть существует точка  $(0, 0)$  и две перпендикулярные оси координат  $Ox$ ,  $Oy$ . Каждая точка на плоскости задается парой координат  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Не будем различать понятия точки и вектора. Для нас такое различие бесполезно — давайте просто считать, что точке с координатами  $(x, y)$  соответствует вектор  $(x, y)$ .

Таким образом, набор базовых геометрических примитивов, с которыми мы работаем это вектор, прямая и окружность.

**Вектор:** Задается двумя координатами  $(x, y)$ , где  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Прямая:** Задается тремя вещественными числами  $(a, b, c)$ , где  $a, b, c \in \mathbb{R}$  и  $(a, b) \neq (0, 0)$ . Числа называются коэффициентами прямой.

Точка (вектор)  $v = (x, y)$  лежит на прямой  $\ell = (a, b, c)$  тогда и только тогда, когда

$$ax + by + c = 0$$

*Простой вопрос:* что может быть, если  $a = b = 0$ ?

**Окружность:** Задается тремя вещественными числами  $(x_c, y_c, r)$ , где  $x_c, y_c \in \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Для такой окружности  $(x_c, y_c)$  будут координатами центра, число  $r$  радиусом.

Из теоремы Пифагора легко получить, что точка  $(x, y)$  лежит на окружности тогда и только тогда, когда

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

**Задача 1.** Это разминочная задача, в которой надо вспомнить, как делать различные штуки. Вы должны научиться мгновенно понимать, как делать любой из пунктов ниже.

1. Как работает сложение/вычитание векторов?
2. Что такое скалярное произведение векторов? Какие формулы для него существуют?
3. Как проверить, что два вектора перпендикулярны? Допустим у нас есть вектор  $(x, y)$ . Приведите пример вектора, перпендикулярного ему.
4. Что такое векторное произведение векторов? Какие формулы для него существуют? Как оно связано с площадью?
5. Как пересекать две прямые? Найдите формулу точки пересечения двух прямых в координатах.
6. У нас есть прямая  $ax + by + c = 0$ . Какие координаты у вектора перпендикулярного прямой? параллельного прямой?
7. У нас есть прямая  $ax + by + c = 0$ . Как найти любую точку, лежащую на этой прямой?
8. У нас есть две точки  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ . Найдите  $a, b, c$  для прямой, проходящей через них.
9. Мы сдвигаем прямую  $ax + by + c = 0$  на вектор  $(x_m, y_m)$ . Каким будет новое уравнение прямой?
10. Чему равно расстояние от точки  $(x, y)$  до прямой  $ax + by + c = 0$ ? Как действовать, если мы хотим найти точку, являющуюся проекцией? Как найти точку, симметричную  $(x, y)$  относительно прямой?
11. Задано две точки  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ . Как выглядит уравнение серединного перпендикуляра для отрезка, концами которого являются эти точки?
12. Даны координаты точек  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ . Как найти уравнение прямой, являющейся медианой, биссектрисой, высотой треугольника  $ABC$  из точки  $A$ ?

13. Даны точки  $A, B, C, D$ . Как проверить, что отрезки  $AB$  и  $CD$  пересекаются? Что если любое слово отрезок мы заменяем на луч? Запрещается использовать вещественные числа.
14. Как найти точки пересечения окружности и прямой? Какие случаи бывают?
15. Как найти точки пересечения двух окружностей? Какие случаи бывают?
16. Дана окружность и точка. Как найти уравнения касательных из точки к окружности? Как найти точки касания? Какие случаи бывают?

— — —

Время работы всех алгоритмов этого раздела должно быть  $O(n)$ , где  $n$  — размер многоугольника.

**Задача 2.** Вам дан многоугольник (необязательно выпуклый). Нужно найти его площадь.

**Задача 3.** Вам дан многоугольник (необязательно выпуклый). Также дана некоторая точка. Проверить, лежит ли точка внутри, на границе или вне многоугольника.

Какие есть более простые способы, если многоугольник выпуклый?

**Задача 4.** Вам дан многоугольник (необязательно выпуклый). Также дана некоторая точка. Найти кратчайшее расстояние от точки до какой-то точки многоугольника (внутренности или границы).

**Задача 5.** Вам дан многоугольник (необязательно выпуклый). Также дана некоторая точка вне многоугольника. Найти касательные из точки к многоугольнику. Приведите пример, когда касательной не существует.

— — —

**Задача 6.** Вам дано множество из  $n$  точек.

Найти три точки  $A, B, C$  из множества, такие что площадь  $ABC$  максимальна. Время работы  $O(n^2)$ .

**Задача 7.** Вам дано множество из  $n$  точек.

Поступает  $q$  запросов, каждый состоит из некоторого подмножества данных точек. Для каждого запроса нужно в ответ дать размер выпуклой оболочки этого подмножества точек.

На каждый запрос нужно отвечать за  $O(n)$ . Предподсчет за  $O(n \log n)$  времени и  $O(n)$  памяти.

— — —

**Задача 8.** Вам дано множество из  $n$  точек.

Для каждой точки из множества скажите площадь выпуклой оболочки всех точек множества кроме нее.

Необходимое время работы  $O(n \log n)$ .

**Задача 9.** Вам дан выпуклый многоугольник из  $n$  точек.

Поступает  $q$  запросов. В каждом запросе дается прямая. Чему будет равна ширина отрезка, если спроецировать многоугольник на эту прямую?

На запрос необходимо отвечать за  $O(\log n)$  в онлайн, время предподсчета  $O(n)$ .

**Задача 10.** Вам дано множество из  $n$  точек.

Поступает  $q$  запросов. В каждом запросе дается точка. Чему будет равна площадь выпуклой оболочки множества, если к нему добавить эту точку?

На запрос необходимо отвечать за  $O(\log n)$  в онлайн, время предподсчета  $O(n \log n)$ .