

Yandex A'. Корневая оптимизация. Семинар.

Ваня Сафонов, Вова Новиков, Тихон Евтеев, Алексей Васильев

16 сентября 2023

Задача 1. За $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ найти у натурального числа n :

- а) все его натуральные делители;
- б) его разложение на простые множители.

Задача 2. Найти количество треугольников (циклов длины 3) в неориентированном графе без петель из n вершин и m ребёр за $\mathcal{O}(m\sqrt{m})$, при условии, что:

- а) в нём нет кратных рёбер;
- б) в нём могут быть кратные рёбра.

— — —

Задача 3. Дано дерево из n вершин, изначально в каждой вершине записано число 0. Есть запросы двух видов.

- 1. Прибавить ко всем вершинам, смежным с вершиной v , число x .
- 2. Узнать значение в вершине v .

Ответить на q запросов за время $\mathcal{O}(n + q\sqrt{n})$.

Задача 4. Дан граф, состоящий из n вершин и m ребер. Каждая вершина может быть покрашена в белый или черный цвет, изначально все вершины белые. Необходимо обработать q запросов двух видов:

- 1. Поменять цвет вершины v .
- 2. Найти любое ребро в графе, концы которого имеют разный цвет и удалить его. Если таких ребер не существует, то сообщить об этом.

Ответить на q запросов за время $\mathcal{O}(m + q\sqrt{m})$.

Задача 5. Дан текст t , далее в online поступают запросы вида: дана строка s , найти количество её вхождений в текст. Известно, что сумма длин строк по всем запросам не превосходит S . Ответить на запросы за время $\mathcal{O}(|t|\sqrt{S})$.

Задача 6. Дано дерево из n вершин, изначально все вершины покрашены в белый цвет. Есть запросы двух видов.

- 1. Покрасить вершину v в чёрный цвет.
- 2. Для вершины v найти расстояние до ближайшей чёрной вершины.

Ответить на q запросов за время $\mathcal{O}(n + q\sqrt{n})$.

— — —

Задача 7. Дан массив a из n чисел, а также q запросов $[l_i; r_i]$. Для каждого запроса найти МЕХ чисел из этого отрезка, то есть минимальное целое неотрицательное число, не представленное среди $a_{l_i}, a_{l_i+1}, \dots, a_{r_i}$. Ответить на запросы за время:

- а) $\mathcal{O}((n + q)\sqrt{n} \log n)$;
- б) $\mathcal{O}((n + q)\sqrt{n})$.

Задача 8. Дано дерево из n вершин, каждой вершине i сопоставлено число a_i . Также даны q запросов $(u_i; v_i)$. Для каждого запроса найти количество инверсий на пути из u_i в v_i : если этот путь представляет из себя последовательность вершин w_1, \dots, w_k , то необходимо найти количество пар (i, j) , таких что $a_{w_i} > a_{w_j}, i < j$.

Задача 9. Дан массив a из n чисел, а также q запросов двух видов.

- 1. Узнать МЕХ на отрезке $[l; r]$.
- 2. Установить значение i -го элемента массива равным x .

Ответить на запросы за время $\mathcal{O}((n + q) \cdot n^{\frac{2}{3}})$.

— — —