

Валерий Хенкин

С у д о к в и к а

Sudoku + ica \approx Sudoquicka
(Sq)

Иерусалим
2011

Валерий Хенкин

Судоквика. $\text{Sudoku} + \text{ica} \approx \text{Sudoquicka (Sq)}$
Иерусалим, 2011

Напечатано в Израиле

ISBN 000-0000-00-0

© В. Хенкин, 2011

*Светлой памяти
Алексея Андреевича Ляпунова
Посвящается*

Судoku – популярная международная игра начала третьего тысячелетия – состоит в подборе чисел для заполнения пустых ячеек частично заполненной $(n \times n)$ -решётки, где n – произвольное составное натуральное число, чтобы продолжало выполняться некое свойство (L), верное для исходного расположения чисел в этой решётке.

Судoku происходит от японских «су» – число и «доку» – одно (единственное). Повальное увлечение Судoku подавалось в газетах под рубрикой «Сумасшествие Судoku» («Потрясающее Судoku»). Это название мы в свое время заменили одним словом – «Судoku-ку». Производное от этого слова – «Судокукер» – мы оставили в этой работе для обозначения человека, увлечённого Судoku.

Предлагаемое здесь английское написание слова Судоквика (искусство игры в Судoku) приведено с намёком на быстроту (quickness). Однако это не быстрота получения результата в конкретной задаче Судoku, а скорее всего быстрота вхождения в круг вопросов, связанных с решением задач Судoku повышенной трудности.

Настоящая книга предназначена, на наш взгляд, для тех, кому не только нравится решать задачи Судoku, но и кто хочет в решении этих задач продвинуться на более высокий уровень.

Эта книга состоит из четырёх глав и одного приложения. Глава 1 имеет теоретический характер, а глава 4, наоборот, – преимущественно практический. Во внутренних главах: 2 и 3 – осуществлён

постепенный переход от теоретических положений к практическим результатам. Приложение имеет сугубо математический характер.

В историческом аспекте рассматривались только такие числа n , для которых $n = p^2$, $p = 2, 3$ и 4 . При этом наиболее распространён случай $n = 9$, а $p = 3$. Последнее время рассматриваются и другие случаи, например, $n = 10$, а $p = 2$.

Для некоторых чисел n , например, для $n = 12$ имеется более одной пары множителей, на которые разлагается число n . В нашем случае это будут такие разложения: $12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$. Мы должны это учитывать и определять свойство (L), соотнеся его к тому или иному разложению числа n .

Глава 1. Постановка задачи

«...Границ, межей закон
Кто лихо преступает,
Тот будет вынут вон
Из тех, кто начинает...»

(Валерий Хенкин «Экстроекции»,
версификация «Ода Богине – ода Термине»)

§1. Решётки и матрицы

1. Для произвольного натурального числа n пусть

$$N_n = \{1, 2, \dots, n\}, N'_n = \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad (1)$$

$$\text{и } N_n^2 = N_n \times N_n = \{(i, j) : i, j \in N_n\}.$$

1.1.1.1. Определение. Множество N_n^2 назовём *основным n -квадратом*, а пары, его образующие, – *позициями*.

Минимальное составное число равно 4. И на (4×4) – решётке задачу Судoku называют Минисудоку.

1	2		
3	4		
		1	2
		3	4

Фиг. 1. Пример № 1.

На Фиг. 1 имеем задачу Минисудоку.

Свойство (L): В одной и той же строке, в одном и том же столбце и в одном и том же квадрате, выделенном двойными линиями, каждое из чисел: 1, 2, 3, 4 – встречается не более одного раза.

Наша задача: в пустые клетки поставить числа из N_4 , чтобы свойство (L) сохранялось. На Фиг. 2 приведено решение задачи Судoku для прмера № 1 в перевёрнутом виде. Начинаящему, прежде чем перевернуть книгу вверх ногами, рекомендуется самому попытаться решить эту задачу.

4	3	1	2
2	1	3	4
1	2	4	3
3	4	2	1

Фиг. 2. Решение задачи Судoku для примера № 1

Квадраты, выделенные двойными линиями на Фиг. 1 и 2, мы будем называть *модулями*.

2. В общем случае, если p – один из делителей произвольного составного числа n , отличный как от 1, так и от n , тогда число n можно представить в виде произведения

$$n = p \cdot \bar{p}, \quad (2)$$

где p и \bar{p} – натуральные числа и $1 < p, \bar{p} < n$.

В дальнейшем самоё $(n \times n)$ -решётку E и соответствующее ей множество N_n^2 мы будем изображать совместно. С этой целью занумеруем строки и столбцы решётки E числами от 1 до n . Тогда координаты юго-восточных углов ячеек E и образуют множество N_n^2 .

0	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Фиг. 3. Совместное изображение (6×6) -решётки E и множества N_6^2

В нашем примере на Фиг. 3 $n = 6$.

Тогда (2) примет такой вид:

$$6 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2.$$

Модульные прямоугольники $Q_{i,j}$, где $i = \overline{1,3}$ а $j = \overline{1,2}$, имеют координаты юго-восточных углов такие: $(2i, 3j)$ (синий цвет); а модульные прямоугольники $\overline{Q}_{i,j}$ (красный цвет), где $i = \overline{1,2}$, а $j = \overline{1,3}$, имеют координаты юго-восточных углов такие: $(3i, 2j)$.

Из Фиг. 3 также видно, что если мы транспонируем (6×6) -решётку E , т. е. повернём её вокруг главной диагонали, проходящей через позиции $(1, 1)$ и $(6, 6)$, то синие модули перейдут в красные модули и наоборот.

3. В общем случае мы будем говорить о p -модулях, т. е. о модульных $(p \times \bar{p})$ -прямоугольниках $Q_{i,j}$, где $i = \overline{1, \bar{p}}$, $j = \overline{1, \bar{p}}$ и координаты юго-восточного угла p -модуля $Q_{i,j}$ имеют вид:

$$Q_{i,j} : (pi, \bar{p}j). \quad (3)$$

1.1.3.1. Предложение. Транспонирование $(n \times n)$ -решётки E устанавливает взаимно однозначное соответствие между семейством

p -модулей $\{Q_{ij}\}$, удовлетворяющих (3), имеющих размерность $p \times \bar{p}$, где $i = \overline{1, \bar{p}}$ и $j = \overline{1, p}$, и семейством \bar{p} -модулей $\{\bar{Q}_{i'j'}\}$ таких, что

$$\bar{Q}_{i'j'} : (\bar{p}i', pj'), \quad (4)$$

имеющих размерность $\bar{p} \times p$, где $i' = \overline{1, p}$, а $j' = \overline{1, \bar{p}}$.

Доказательство.

1.1.3.2. Переносим чертёж решётки E с разбиением на (синие) p -модули Q_{ij} на прозрачную кальку.

1.1.3.3. Переворачиваем кальку с чертежом на обратную сторону.

1.1.3.4. Поворачиваем кальку на 90° против часовой стрелки.

1.1.3.5. Переносим чертёж с кальки на бумагу, получая при этом (красные) \bar{p} -модули $\bar{Q}_{i'j'}$, ч. и т. д.

4. Рассмотрим отображение $A: N_n^2 \rightarrow N_n'$, которое каждой позиции (i, j) , $i, j = \overline{1, n}$, ставит в соответствие число a_{ij} из N_n' . Табличное задание отображения A представим в виде квадратной n -матрицы $A = \|a_{ij}\|$ с элементами из N_n' . Множество всех таких матриц обозначим через \mathcal{O}_n .

Каждой матрице $A = \|a_{ij}\|$ из \mathcal{O}_n поставим в соответствие $(n \times n)$ -решётку $E = \|e_{ij}\|$, помещая в ячейку e_{ij} число k , если $a_{ij} = k$, $k \in N_n$, и оставляя e_{ij} пустой, если $a_{ij} = 0$, $i, j = \overline{1, n}$. В этом случае будем писать $E = \langle\langle A \rangle\rangle$. Обратное соответствие: $a_{ij} = k$, если в e_{ij} стоит число k из N_n , и $a_{ij} = 0$, если e_{ij} пуста – тоже имеет место и в этом случае будем писать $A = {}''E''$.

§2. Подмножества

1. Наряду с p -модулями рассмотрим и другие подмножества основного n -квадрата N_n^2 .

Для произвольной матрицы A из \mathcal{O}_n через U_A обозначим множество позиций в N_n^2 , отвечающих ненулевым элементам этой матрицы, и положим

$$V_A = N_n^2 \setminus U_A. \quad (5)$$

1.2.1.1. Определение. Элементы множества V_A назовем *нуль-позициями* матрицы A .

Некоторые подмножества N_n^2 мы будем называть *линиями*.

1.2.1.2. Определение. *r-линиями* назовём строки: r_1, r_2, \dots, r_n – основного n -квадрата N_n^2 , а *c-линиями* – его столбцы: c_1, c_2, \dots, c_n .

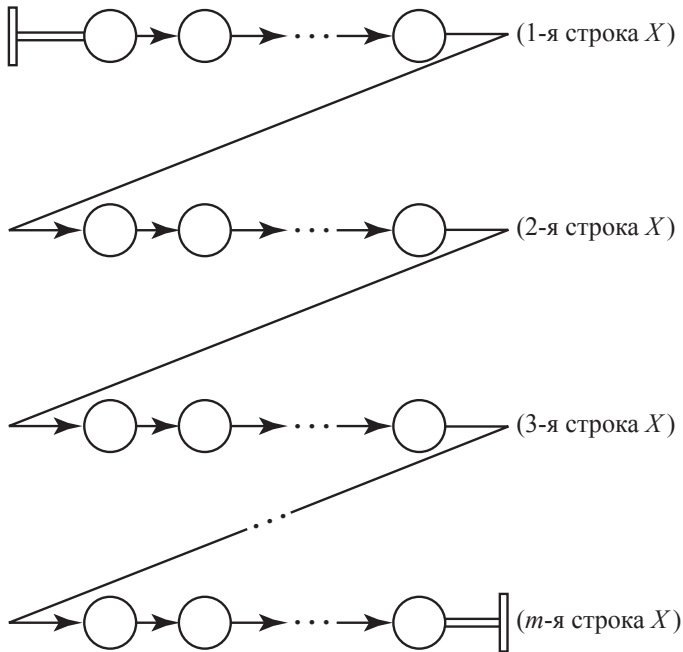
Чтобы превратить p -модули в линии, мы приведём следующее рассуждение:

Пусть $X = \|x_{ij}\|$ – прямоугольная матрица размерности $(m \times n)$, где m и n – натуральные числа, большие единицы, а x_{ij} – элементы произвольной природы.

1.2.1.3. Определение. Под *развёрткой* \check{X} матрицы X мы будем понимать $m \cdot n$ -мерный вектор

$$\check{X} = (x_1, x_2, \dots, x_{mn}), \quad (6)$$

полученный из матрицы X в соответствии с такой схемой:



Фиг. 4. Линия развертки матрицы X . (Схема = 1)

Схема, приведенная на Фиг. 4, в технике носит название: «Линия развёртки электронного луча».

2. Занумеруем элементы матрицы X согласно линии развёртки на Фиг. 4, а затем, расположив их по возрастанию номеров, мы получим $m \cdot n$ -мерный вектор (6).

Пусть k – произвольное число из $N_{m \cdot n}$, положим

$$k - 1 = sn + r, 0 \leq r < n \quad (7)$$

и пусть

$$i = s + 1 \text{ и } j = r + 1. \quad (8)$$

Тогда элемент x_{ij} матрицы X займёт в развёртке \check{X} позицию x_k .

Пусть теперь

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_{m \cdot n}), \quad (9)$$

$m \cdot n$ -мерный вектор.

1.2.2.1. Определение. Свёрткой \widehat{Y} вектора Y по схеме $= I$ назовём матрицу

$$\widehat{Y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_{n+1} & y_{n+2} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{(m-1)n+1} & y_{(m-1)n+2} & \dots & y_{m \cdot n} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

элементы которой вместе с элементами Y удовлетворяют соотношениям (7) и (8).

3. Возвращаясь к модульным прямоугольникам вида (3), рассмотрим $\bar{p} \times p$ -матрицу

$$Q = \|Q_{ij}\|. \quad (11)$$

Тогда получаем

$$\check{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n), \quad (12)$$

где для $k \in N_n$ связь между Q_k из \check{Q} и Q_{ij} из Q устанавливаем по формулам (7) и (8). А затем, обозначив \check{Q}_k , где Q_k входит в правую часть (12) через q_k , мы получим n q -линий основного n -квадрата N_n^2 .

Однако в отличие от r -линий и s -линий q -линии зависят от разбиения N_n^2 на модули.

Минимальным числом, с которого начинается такая неоднозначность, является число 12, поскольку это число двояко можно разложить на множители, а именно:

$$12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4.$$

В соответствии с этими разложениями (12×12) -решётку E можно двояко представить в виде 12-ти модулей, а именно: в виде 12-ти 2-модулей размерности 2×6 и в виде 12-ти 3-модулей размерности 3×4 – и q -линии для каждого случая свои.

Поэтому в общем случае уместно говорить о (q, p) -линиях для каждого делителя p числа n , удовлетворяющего неравенствам $1 < p < n$.

4. Обозначим через $N_n(A)$ подмножество N_n , которому принадлежат все значения ненулевых элементов матрицы $A = \|a_{ij}\|$ из \mathcal{O}_n .

1.2.4.1. Замечание. Для произвольных матрицы $A = \|a_{ij}\|$ из \mathcal{O}_n и числа k из N_n' запись “ $(k)_{ij}$ ” в матрице A эквивалентна записи “ $a_{ij} = k$ ”.

1.2.4.2. Определение. Скажем, что матрица $A = \|a_{ij}\|$ из \mathcal{O}_n обладает свойством (L, p) , где p – делитель числа n , отличный от 1 и от n , если любое число из $N_n(A)$ входит в каждую из её линий, а именно: r -линию, s -линию и (q, p) -линию – не более одного раза.

1.2.4.3. Замечание. Свойство (L, p) не зависит от порядка, в котором расположены элементы, стоящие на той или иной линии.

5. Для произвольной квадратной n -матрицы $A = \|a_{ij}\|$ через $A^T = \|a_{ij}^T\|$ обозначается матрица, полученная транспонированием последней, т. е.

$$a_{ij}^T = a_{ji}; i, j = \overline{1, n}. \quad (13)$$

1.2.5.1. Предложение. Для натуральных чисел n, p и \bar{p} , удовлетворяющих (2), из того, что A обладает свойством (L, p) , следует, что A^T обладает свойством (L, \bar{p}) , а из того, что A обладает свойством (L, \bar{p}) , следует, что A^T обладает свойством (L, p) .

Доказательство. При транспонировании матрицы строки переходят в столбцы и наоборот. Поэтому по отношению к этим линиям свойство (L) сохраняется. Далее согласно 1.1.3.1. Предложения (q, p) -линии матрицы A переходят в (q, \bar{p}) -линии матрицы A^T с несколько изменённым порядком элементов, входящих в них, что согласно 1.2.4.3. Замечания не влияет на свойство (L, p) .

Поэтому с точностью до порядка входящих элементов каждая (q, \bar{p}) -линия в A^T есть образ некоторой (q, p) -линии из A и следовательно A^T обладает свойством (L, \bar{p}) .

Вторая часть 1.2.5.1. Предложения доказывается аналогичным образом. 1.2.5.1. Предложение доказано.

С учётом доказанного нами 1.2.5.1. Предложения для наших целей в дальнейшем достаточно рассматривать делители p числа n в следующих пределах:

$$1 < p \leq \sqrt{n}. \quad (14)$$

§3. Расширения

Матрицу A из \mathcal{O}_n , обладающую свойством (L, p) , назовём $(L)_{n,p}$ -матрицей. Множество $(L)_{n,p}$ -матриц обозначим через $\mathcal{L}_{n,p}$.

1. Пусть для матриц $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ из \mathcal{O}_n выполнены условия:

$$1.3.1.1. U_A \subset U_B$$

и

$$1.3.1.2. b_{ij} - a_{ij} = \begin{cases} b_{ij}, & \text{при } (i, j) \in U_B \setminus U_A; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

1.3.1.3. Определение. Если матрицы A и B удовлетворяют условиям 1.3.1.1. и 1.3.1.2, то матрицу B назовём *расширением матрицы A* , а матрицу A назовём *сужением матрицы B* .

1.3.1.4. Определение. Матрицу A из \mathcal{O}_n назовём *терминальной*, если имеет место такое соотношение

$$U_A = N_n^2. \quad (15)$$

1.3.1.5. Определение. $(L)_{n,p}$ -матрицу B , являющуюся расширением матрицы A , назовём (L, p) -*расширением* последней и будем писать:

$$A \xleftarrow{p} B.$$

1.3.1.6. Определение $(L)_{n,p}$ -матрицу назовём *тупиковой*, если она не имеет $(L)_{n,p}$ -расширений.

2. Очевидно, всякая терминальная $(L)_{n,p}$ -матрица является тупиковой. Однако не для всех $(L)_{n,p}$ -матриц имеется терминальное $(L)_{n,p}$ -расширение.

Пусть, например, $(L)_{n,p}$ -матрица A имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & \boxed{} & & \boxed{} & & \boxed{} \\ 2 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor & \boxed{(0)} & \cdots & \boxed{(0)} & \cdots & \boxed{(0)} \\ (0)_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, 1} & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (0)_{n-1, 1} & \boxed{(0)} & \cdots & \boxed{(0)} & \cdots & \boxed{(0)} \\ (0)_{n, 1} & (0)_{n, 2} & \cdots & (0)_{n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} & \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 & \cdots & n \end{array} \right), \quad (16)$$

где $n, n > 1$, натуральное число, а $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ и $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ – ближайшие целые для $\frac{n}{2}$ соответственно не большее и не меньшее, чем $\frac{n}{2}$.

Из (16) видно, что при $a_{n,1} \neq 0$ свойство (L, p) , верное для A , нарушается.

3. Задача Судoku

Для данной $(L)_{n,p}$ -матрицы A найти её тупиковое (L, p) -расширение B с наибольшим возможным значением $|U_B|$. (Через $|X|$ мы обозначаем число элементов конечного множества X . *Примеч. автора*).

Из (15) следует, что если $(L)_{n,p}$ -матрица A имеет терминальное (L, p) -расширение, то оно и будет решением задачи Судоку для этой матрицы.

Обозначим через $\mathcal{T}_{n,p}$ множество $(L)_{n,p}$ -матриц, имеющих терминальные (L, p) -расширения. Тогда с учётом (16) мы будем иметь такие строгие включения

$$\mathcal{T}_{n,p} \subset \mathcal{L}_{n,p} \subset \mathcal{O}_n. \quad (17)$$

4. В дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать, что

$$A \in \mathcal{T}_{n,p}. \quad (18)$$

Соотношение (18) должно гарантироваться постановщиками задач Судоку. К сожалению, это происходит не всегда. Так например, в газете «Маарив» (מעריב) № 18 769 приведена такая матрица:

$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Однако, вопреки утверждению авторов $A^* \notin \mathcal{T}_{9,3}$. Поэтому в следующем номере этой газеты приведено решение другой задачи Судоку с матрицей, отличной от A^* . К счастью, такое бывает очень редко.

Глава 2. Принцип однозначности

Давно заняв себя Судоку,
Я всё ж не превратился в доку:
Из белых пятен этот мир,
Задуманный для чёрных дыр.

*(Валерий Хенкин «Экстроекции»,
версификация «Суд оку»)*

§1. Числа и позиции

1. Как и ранее, предполагаем, что n – произвольное составное число, а p – один из его делителей, удовлетворяющий соотношению (14).

2.1.1.1. Предложение. $(L)_{n,p}$ -матрица $A = \|a_{ij}\|$ терминальна тогда и только тогда, когда каждое число из N_n входит в каждую линию этой матрицы ровно один раз.

Доказательство. Линий каждого вида: r , s и (q, p) в матрице A ровно n . Поэтому, если некоторое число из N_n входит в каждую линию матрицы A ровно один раз, то во все линии одного и того же вида оно суммарно войдёт n раз. Суммарное вхождение всех чисел из N_n во все линии одного и того же вида равно n^2 раз, а это как раз равно числу элементов матрицы A . Следовательно, все элементы в A ненулевые и т. о. она терминальна.

Обратно. Поскольку $A - (L)_{n,p}$ -матрица, то согласно 1.2.4.2. Определения каждое число из N_n входит в каждую из её линий не бо-

лее одного раза. Мы предполагаем, с одной стороны, что матрица A терминальна, а с другой, – что нашлись такие число k из N_n и линия X , что в матрице A число k не стоит на линии X . Однако поскольку все элементы матрицы A ненулевые, то какое-либо число из N_n , отличное от k , должно стоять на линии X более, чем в одном месте, а это противоречит свойству (L, p) , верному для A . Противоречие завершает доказательство 2.1.1.1. Предложения.

2. Для произвольной нуль-позиции (i, j) матрицы $A = \|a_{ij}\|$ из \mathcal{O}_n обозначим через $A^{(i,j,k)} = \|a_{st}^{(i,j,k)}\|$ расширение $B = \|b_{st}\|$ матрицы A такое, что

$$U_B \setminus U_A = \{(i, j)\} \text{ и } b_{ij} = k, \quad (19)$$

где $B \in \mathcal{O}_n$

2.1.2.1. Определение. Число k из N_n и нуль-позицию (i, j) матрицы A назовём сопряжёнными относительно A , если $A^{(i,j,k)}$ -расширение матрицы A является (L, p) -расширением последней.

Для произвольной матрицы A и некой её нуль-позиции (i, j) через $F_A(i, j)$ обозначим множество чисел из N_n , сопряженных (i, j) относительно A , а для произвольной пары (k, X) , где $k \in N_n$, а X – некая линия в N_n^2 , через $G_A(k, X)$ обозначим множество нуль-позиций матрицы A , находящихся на линии X и сопряженных k относительно A .

2.1.2.2. Предложение. [Принцип Однозначности = 1. (ПО = 1)].

Пусть матрица A из $\mathcal{T}_{n,p}$ и число k из N_n произвольны и линия X такова, что $G_A(k, X) = \{(i, j)\}$. Тогда в терминальном (L, p) -расширении матрицы A должно быть так: $(k)_{ij}$.

Доказательство. Пусть это не так. И для некой позиции (i', j') , где $(i', j') \neq (i, j)$; в терминальном (L, p) -расширении T матрицы A имеет место $(k)_{i'j'}$. Матрица $A^{(i',j',k)}$, с одной стороны, либо совпадает с T , либо является её сужением и посему должна обладать свойством (L, p) , а с другой – по своему построению матрица $A^{(i',j',k)}$ таким свойством не обладает. Противоречие доказывает справедливость 2.1.2.2. Предложения.

2.1.2.3. Предложение. (Принцип Однозначности = 2). Пусть (i', j') такая нуль-позиция матрицы A из $\mathcal{T}_{n,p}$, для которой $F_A(i', j') = \{k\}$,

где $k \in N_n$. Тогда в терминальном (L, p) -расширении T матрицы $A = \|a_{ij}\|$ должно быть $a_{ij^*} = k$.

Доказательство. Если бы в T было $a_{ij^*} = k^*$, где $k^* \neq k$, то в цепочке

$$A \xleftarrow{p} A^{(i, j^*, k^*)} \xleftarrow{p} T$$

$A^{(i, j^*, k^*)}$ не могла бы быть $(L)_{n, p}$ -матрицей, что противоречит нашему предположению относительно T . Противоречие доказывает 2.1.2.3 Предложение.

3. Собирая вместе Принцип Однозначности = 1 (ПО = 1) и Принцип Однозначности = 2 (ПО = 2), мы будем говорить о Принципе Однозначности (ПО) вообще. (L, p) -расширения матрицы A из $\mathcal{T}_{n, p}$, полученные применением (ПО), назовём (D, p) -расширениями этой матрицы.

Для произвольной $(L)_{n, p}$ -матрицы $A = \|a_{ij}\|$ из $\mathcal{T}_{n, p}$ построим цепочку $(L)_{n, p}$ -матриц:

$$A = B^0 \xleftarrow{p} B^{(1)} \xleftarrow{p} \dots \xleftarrow{p} B^{(t-1)} \xleftarrow{p} B^{(t)} \xleftarrow{p} \dots \xleftarrow{p} B^{(k)}, \quad (20)$$

где для $t = \overline{1, k}$, $B^{(t)}$ является (D, p) -расширением матрицы $B^{(t-1)}$, имеющим вид:

$$B^{(t)} = (B^{(t-1)})^{(i_t, j_t, k_t)}, \quad (21)$$

а $B^{(k)}$ уже не имеет (D, p) -расширений, отличных от самой этой матрицы. Иными словами, $B^{(t)}$ получается из $B^{(t-1)}$ добавлением в нуль-позицию (i_t, j_t) последней на основании (ПО) числа k_t из N_n .

Цепочку (20) будем называть (D, p) -цепочкой матрицы A .

4. Произвольная матрица A из $\mathcal{T}_{n, p}$ может иметь несколько (D, p) -цепочек вида (20). Ниже мы покажем, что последние элементы этих цепочек одинаковы и равны матрице $B^{(k)}$ из (20).

Пусть последовательность $(L)_{n, p}$ -матриц

$$A^{(0)}, A^{(1)}, \dots, A^{(t)}, \dots, A^{(t^*)} \quad (22)$$

такова, что $A^{(0)} = A$; $A^{(t^*)}$ не имеет (D, p) -расширений, а для $t = \overline{1, t^*}$ матрица $A^{(t)}$ есть $(L)_{n, p}$ -расширение матрицы $A^{(t-1)}$ и при этом выполнены условия:

2.1.4.1. Каждый из ненулевых элементов матрицы $A^{(t)}$, стоящий на позициях из $U_{A^{(t)}} \setminus U_{A^{(t-1)}}$, получается применением (ПО) к матрице $A^{(t-1)}$.

2.1.4.2. Если к некой нуль-позиции (i, j) матрицы $A^{(t-1)}$ можно применить (ПО), то (i, j) входит в $U_{A^{(t)}}$.

2.1.4.3. Предложение.

$$A^{(r^*)} = B^{(k)}. \quad (23)$$

Доказательство. Вначале покажем, что

$$B^{(k)} \subseteq A^{(r^*)}. \quad (24)$$

Из нашего построения следует такое равенство:

$$A^{(r^*)} = A^{(0)} + \sum_{t=1}^{r^*} (A^{(t)} \setminus A^{(t-1)}). \quad (25)$$

Каждый элемент из $B^{(k)}$ входит либо в A , либо в некую матрицу из (D, p) -цепочки с началом A как результат применения (ПО) к предыдущей матрице из этой же (D, p) -цепочки. Поэтому он обязательно войдёт в одно из слагаемых правой части (25), а значит и в саму матрицу $A^{(r^*)}$, что и доказывает (24).

Докажем обратное включение:

$$A^{(r^*)} \subseteq B^{(k)}. \quad (25')$$

Пусть это не так и для некоторого k из N_n , имеем

$$(k)_{i,j} \subseteq A^{(r^*)} \setminus B^{(k)}.$$

На каком-то этапе построения $A^{(r^*)}$ этот элемент вошёл не только в $A^{(r^*)}$, но практически и в терминальное (L, p) -расширение T матрицы A .

Матрица $(B^{(k)})^{(i,j,k)}$ с одной стороны есть расширение матрицы $B^{(k)}$, а с другой – сужение $(L)_{n,p}$ -матрицы T и, следовательно, тоже $(L)_{n,p}$ -матрица.

Т. о. матрица $B^{(k)}$ имеет (D, p) -расширение $(B^{(k)})^{(i,j,k)}$, а это противоречит выбору $B^{(k)}$, что и доказывает (25'), а вместе с ним и саму 2.1.4.3. Предложение.

Из 2.1.4.3. Предложения следует, что матрица $B^{(k)}$ по матрице A определяется однозначно.

2.1.4.4. Определение. Матрицу $B^{(k)}$, стоящую в конце некоторой (D, p) -цепочки, начинающейся с $(L)_{n,p}$ -матрицы A , назовём (D, p) -замыканием A и будем писать

$$B^{(k)} = [A]_{D,p}. \quad (26)$$

§2. Контрольные метки (начало)

1. Одной из главных составляющих успеха при решении задач Судоку является умение концентрировать зрительное внимание. («Судоку» можно прочесть как «суд оку» и не только одному).

Напомним, что наша цель – помочь судокукерам в решении задач повышенной трудности, а это напряжение для глаз как минимум часа на три. Поэтому, устраивая каждые 40–50 минут перерывы со специальными упражнениями для глаз, мы застрахуем себя по крайней мере от ошибок, вызванных утомлением.

Для хорошего начального настроения неплохо также применить некий аналог *метода Ботвинника*. Известно, что многократный чемпион мира по шахматам Михаил Ботвинник каждый раз за два часа до начала очередной партии турнира на звание чемпиона мира садился на своё место и смотрел на шахматную доску с расставленными на ней фигурами, как бы вживаясь в поле битвы.

Следуя этой идее, мы возьмем бумагу в клетку и каждый раз будем на ней готовить рабочее поле для решения задачи Судоку, как показано на Фиг. 5.

2. Отличие Фиг. 5 от Фиг. 3 не только в размерности, но и в том, что жирные (или двойные) линии на Фиг. 3 мы заменили просветами, заменив решётку-«Пангею» на n модулей-«материков», раздвинув последние так, чтобы сохранялось визуальное чувство принадлежности ячеек решётки из разных модулей к одной строке или к одному столбцу.

На этом рабочем поле, приведенном на Фиг. 5, мы и будем размещать в соответствующих ячейках ненулевые элементы матрицы A и называть полученную картину *Судоквистской позицией матрицы A* или, сокращенно, – её (Sq) -*позицией*.

Т. о. на Фиг. 5 приведена (Sq) -позиция, как нетрудно заметить $(L)_{9,3}$ -матрицы ${}_oA = \|{}_o a_{ij}\|$, элементы которой являются нулями и которую мы назовём *нуль-матрицей*.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									

Фиг. 5. 1. Рабочее поле для игры в Судоку

2. (S_q) -позиция для (9×9) решётки
 ${}_oE = \langle \langle {}_oA \rangle \rangle$, а ${}_oA = \|(0)_{ij}\|, i, j = \overline{1, 9}$

3. Кроме вышеуказанных в нашем арсенале имеются и другие приёмы, помогающие концентрировать внимание, под общим названием «Средства навигации».

Одним из таких средств являются контрольные метки.

Метка номера шага отделяет юго-восточный угол ячейки, внутри которого проставляется номер шага решения задачи. n -кратное вхождение того или иного числа в матрицу во всех местах его вхождения мы обозначаем метками завершенности.



Фиг. 6. Внутренние контрольные метки первого уровня

4. Для описания меток полноты нам понадобятся понятия полос.

2.2.4.1. Определение. *Горизонтальной p -полосой (Вертикальной \bar{p} -полосой)* назовем горизонтальную цепочку из p -модулей (вертикальную цепочку из \bar{p} -модулей) основного n -квадрата, следующих друг за другом непосредственно.

Отсюда, с учётом **1.2.4.2. Определения** получаем, что в каждую горизонтальную p -полосу каждое число из N_n входит в состав $(L)_{n,p}$ -матрицы не более p раз, а в каждую вертикальную \bar{p} -полосу – не более \bar{p} раз, причём в случае терминальной $(L)_{n,p}$ -матрицы верхние границы достигаются.

Факт достижения верхних границ вхождения данного числа в данную полосу мы и отмечаем метками полноты: горизонтальными, если речь шла о горизонтальной полосе, и вертикальными – в другом случае.

§3. Исходные данные

1. Исходные данные можно задавать в виде матрицы A из $\mathcal{L}_{n,p}$, в виде (Sq) -позиции этой матрицы или соответствующей ей решётки $E = \langle\langle A \rangle\rangle$ (самый распространенный способ задания в популярных изданиях, специальной литературе и интернете. *Примеч. автора*), а также линейно, в виде $(\bar{S}q)$ -позиции, которая получается из (Sq) -позиции матрицы последовательным выписыванием ненулевых элементов последней вдоль линии развёртки (см. Фиг. 4).

2. Пример № 2 (газета «Маарив» №18809).

$(L)_{9,3}$ -матрица $B^{(0)}$ имеет вид:

$$B^{(0)} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 0 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 5 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8								7
2		3			6			4	
3				3		1			
4			8		3		1		
5		1		7		6		3	
6			9		5		6		
7				6		4			
8		7			9			1	
9	1								2

Фиг. 7. Исходная (Sq) -позиция для матрицы $B^{(0)}$ из примера № 2

(\check{Sq})-позиция для примера № 2 будет выглядеть так:
 (\check{Sq}): $\mathbb{I} \Rightarrow (8)_1, (7)_9, (3)_{11}, (6)_{14}, (4)_{17}, (3)_{22}, (1)_{24}, (8)_{30}, (3)_{32}, (1)_{34}, (1)_{38}, (7)_{40},$
 $(6)_{42}, (3)_{44}, (9)_{48}, (5)_{50}, (6)_{52}, (6)_{58}, (4)_{60}, (7)_{65}, (9)_{68}, (1)_{71}, (1)_{73}, (2)_{81} \Leftarrow \mathbb{I}$

§4. (Sq)-нотация

1. На Фиг. 7 в 3-модуле Q_{13} с числом 3 сопряжена единственная позиция, а именно: (1, 7). Положим $A = B^{(0)}$, тогда $A^{(1, 7, 3)}$ есть $(D, 3)$ -расширение матрицы $B^{(0)}$.

Этот факт мы отметим такой записью:

$$1. (3)_{17}. \quad (27)$$

Продолжая процесс применения (ПО = 1), мы получим такую $(D, 3)$ -цепочку для матрицы A :

$$A = B^{(0)} \xleftarrow{3} B^{(1)} \xleftarrow{3} B^{(2)} \xleftarrow{3} \dots \xleftarrow{3} B^{(57)}, \quad (28)$$

которая является конкретизацией (D, p) -цепочки (20).

Что касается соотношения (27), то в нашем случае тройка (i_t, j_t, k_t) на шаге t будет записана так:

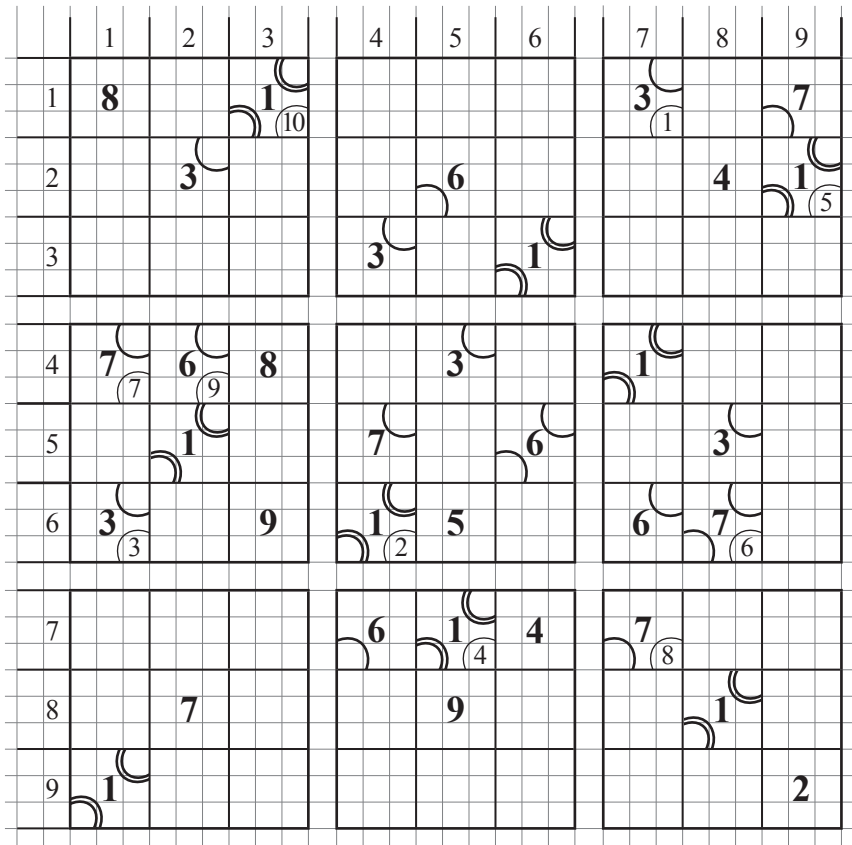
$$t. (k_t)_{i_t j_t}, \quad (27')$$

что обобщает запись (27) на случай общего шага.

Такие записи, сопровождающие решение задачи Судоку, мы назовём *судоквистской нотацией* (*(Sq)-нотацией*).

2. Первые 10 шагов решения примера № 2 приводят к такой (Sq)-нотации:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 1. (3)_{17} & 3. (3)_{61} & 5. (1)_{29} & 7. (7)_{41} & 9. (6)_{42} \\ 2. (1)_{64} & 4. (1)_{75} & 6. (7)_{68} & 8. (7)_{77} & 10. (1)_{13} \end{array}$$



Фиг. 8. (*Sq*)-позиция для примера № 2
после 10 шагов решения

3. Далее имеем

11. (6) ₁₈	21. (4) ₅₃	31. (4) ₃₂	41. (9) ₃₉
12. (6) ₈₉	22. (5) ₅₁	32. (4) ₈₁	42. (5) ₃₈
13. (6) ₉₃	23. (2) ₆₂	33. (4) ₉₇	43. (5) ₁₆
14. (6) ₃₁	24. (4) ₆₉	34. (8) ₂₇	44. (2) ₈₆
15. (3) ₇₉	25. (8) ₆₆	35. (2) ₄₈	45. (5) ₂₃
16. (3) ₈₃	26. (4) ₄₄	36. (2) ₃₇	46. (2) ₇₃
17. (3) ₉₆	27. (9) ₄₆	37. (5) ₈₇	47. (2) ₂₁
18. (7) ₉₅	28. (2) ₅₅	38. (9) ₅₇	48. (9) ₁₂
19. (7) ₂₆	29. (8) ₃₅	39. (5) ₄₉	49. (9) ₇₁
20. (7) ₃₃	30. (4) ₁₅	40. (8) ₅₉	50. (8) ₈₄
			51. (5) ₉₄

52. (5) ₇₂	54. (9) ₉₈	56. (2) ₁₄
53. (8) ₇₈	55. (8) ₉₂	57. (9) ₂₄

Этой (*Sq*)-нотации соответствует следующая (*Sq*)-позиция:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	9	1	2	4	5	3	6	7
2	2	3	5	9	6	7	8	4	1
3	6	4	7	3	8	1	2	5	9
4	7	6	8	4	3	9	1	2	5
5	5	1	4	7	2	6	9	3	8
6	3	2	9	1	5	8	6	7	4
7	9	5	2	6	1	4	7	8	3
8	4	7	3	8	9	2	5	1	6
9	1	8	6	5	7	3	4	9	2

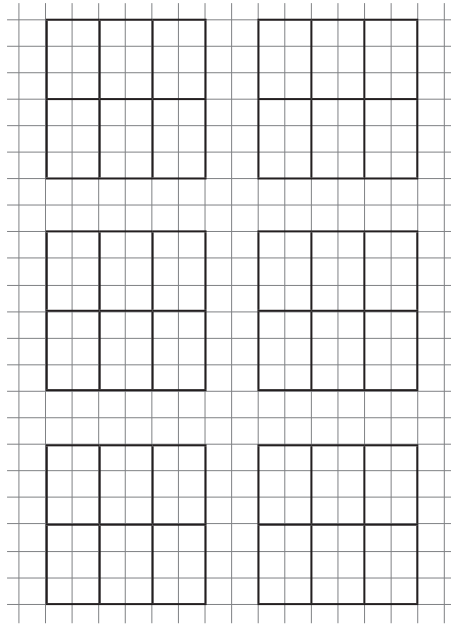
Фиг. 9. (*Sq*)-позиция окончательного решения задачи Судоку для примера № 2 (после 57 шагов)

§5. Минископ

Под минископом мы понимаем устройство или систему, которые позволяют рассмотреть объект в более мелких подробностях. Как правило это достигается увеличением от нескольких раз с помощью обычной лупы до сотен тысяч раз с помощью электронного микроскопа.

1. Присмотревшись к Фиг. 5, мы видим, что каждая ячейка последней есть 3×3 -квадрат из клеточек клетчатой бумаги, которые мы будем называть *миниячейками*.

Тот факт, что мы рассматриваем решётку ${}_oE$ с учётом миниячеек, мы отметим записью $\langle\langle {}_oA \rangle\rangle_9^3$, а в общем случае будем писать $\langle\langle {}_oA \rangle\rangle_n^p$, где p вместе с \bar{p} и n удовлетворяют (2). Мы как бы встраиваем в каждую ячейку из $\langle\langle {}_oA \rangle\rangle$ $(\bar{p} \times p)$ -прямоугольник, состоящий из n миниячеек.



Фиг. 10. Решётка $\langle\langle {}_oA \rangle\rangle_6^2$

На Фиг. 10 приведена (6×6) -решётка ${}_oE$, ${}_oE = \langle\langle {}_oA \rangle\rangle$ под минископом, увеличивающим горизонтальные линейные размеры в 2 раза, а вертикальные – в 3 раза.

В общем случае наш минископ увеличивает горизонтальные линейные размеры в p раз, а вертикальные – в \bar{p} раз, где p и \bar{p} вместе с n удовлетворяют (2).

2. Сделаем свёртку \widehat{N}_n множества N_n , применяя схему на Фиг. 4 в обратном порядке при $m = \bar{p}$ и $n = p$. Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \\ p+1 & p+2 & \dots & 2p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\bar{p}-1)p+1 & (\bar{p}-1)p+2 & \dots & \bar{p} \cdot p \end{pmatrix} = \widehat{N}_n. \quad (29)$$

В нашем случае имеем

$$\widehat{N}_9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

И соответствующая этой матрице (Sq) -позиция имеет вид:

0	1	2	3
1	1	2	3
2	4	5	6
3	7	8	9

Фиг. 11. (Sq) -позиция для матрицы \widehat{N}_9

Ячейки решётки $\langle\langle \widehat{N}_n \rangle\rangle$ в подробных (Sq) -позициях для решаемых нами задач Судoku будут играть роль миниячеек. Каждая такая миниячейка может находиться в одном из трёх состояний: либо быть пустой, либо содержать в себе элемент в виде ромба – *ролемент*, либо содержать элемент в виде жирного квадрата – *квалемент*.

0	1	2	3
1		◊	
2		◊	◊
3	◻		

**Фиг. 12. Общий вид ячейки
подробной (Sq) -позиции некой матрицы.
Квалемент отвечает числу 7,
а ролементы отвечают числам: 2, 5 и 6.**

3. Рассмотрим ещё один пример.

Пример № 3 (газета «Ха-Арец» (יְהוּדִים), 25 декабря 2009 года).

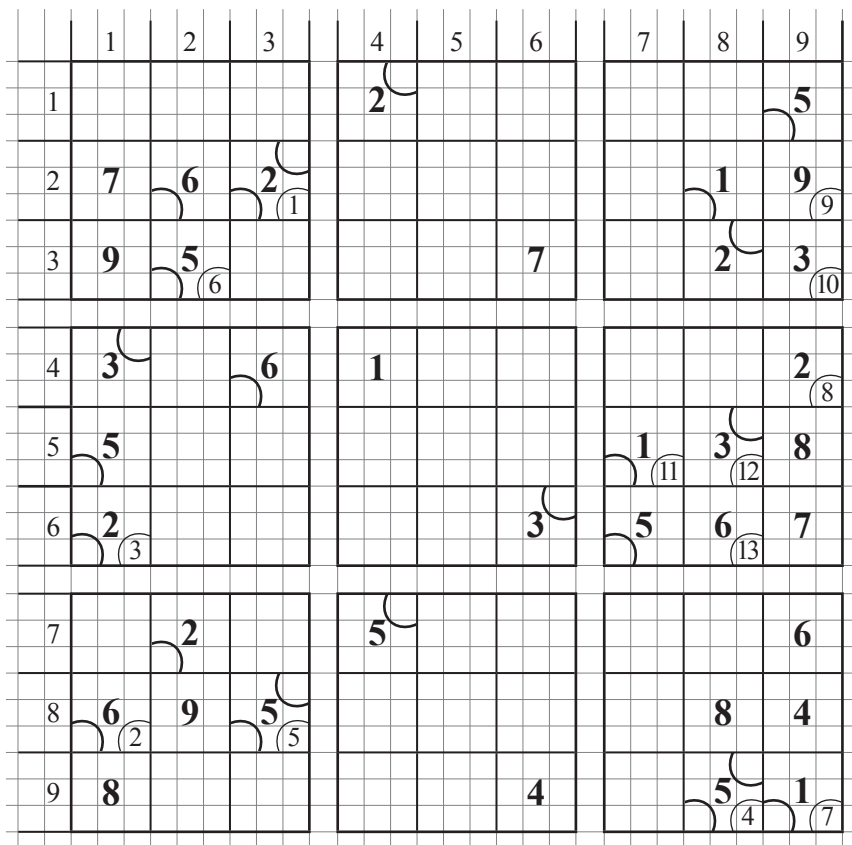
$(\check{S}q): \mathbb{F} \Rightarrow (2)_4, (5)_9, (7)_{10}, (6)_{11}, (1)_{17}, (9)_{19}, (7)_{24}, (2)_{26}, (3)_{28}, (6)_{30}, (1)_{31}, (5)_{37},$
 $(8)_{45}, (3)_{51}, (5)_{52}, (7)_{54}, (2)_{56}, (5)_{58}, (6)_{63}, (9)_{65}, (8)_{71}, (4)_{72}, (8)_{73}, (4)_{78} \Leftarrow \mathbb{F}$

Этой исходной $(\check{S}q)$ -позиции соответствует матрица:

$$B^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

13 шагов применения (ПО = 1) дают такую (Sq)-нотацию:

1. (2) ₂₃	4. (5) ₉₈	7. (1) ₉₉	10. (3) ₃₉	13. (6) ₆₈
2. (6) ₈₁	5. (5) ₈₃	8. (2) ₄₉	11. (1) ₅₇	
3. (2) ₆₁	6. (5) ₃₂	9. (9) ₂₉	12. (3) ₅₈	



Фиг. 13. (Sq)-позиция решения примера № 3
после 13 шагов

4. Соответствующая (Sq) -нотации $(D, 3)$ -цепочка матриц имеет вид:

$$B^{(0)} \overset{3}{\Longleftarrow} B^{(1)} \overset{3}{\Longleftarrow} \dots \overset{3}{\Longleftarrow} B^{(13)}. \quad (32)$$

При этом матрица $B^{(13)}$ выглядит так:

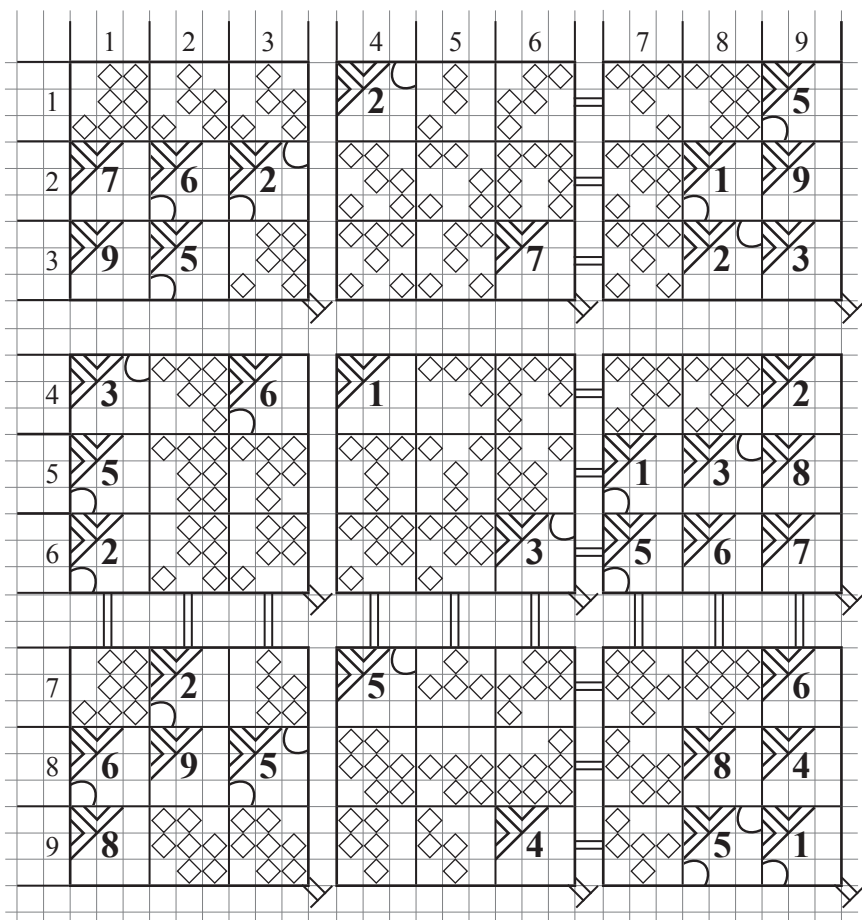
$$B^{(13)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 9 & 5 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 6 & 9 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

и, как нетрудно проверить, с помощью $(\text{ПО} = 1)$ уже не расширяется.

Для проверки применимости $(\text{ПО} = 2)$ мы будем рассматривать уже подробную (Sq) -позицию матрицы $B^{(13)}$, в основе которой уже лежит решётка $\langle\langle B^{(13)} \rangle\rangle_9^3$.

5. Прежде, чем прокомментировать Фиг. 14, мы сформулируем несколько общих положений.

Для произвольных составного числа n и его делителя p , удовлетворяющих (14), обозначим через $A = \|a_{ij}\|$ некую матрицу из $\mathcal{T}_{n,p}$. Через $E_n^p = \langle\langle A \rangle\rangle_n^p$ мы обозначим решётку, составляющую основу подробной (Sq) -позиции матрицы A . Решётка E_n^p содержит n^3 миниячеек. Из них мы будем рассматривать только \tilde{E}_n^p -множество тех, которые входят в нуль-ячейки матрицы A .



Фиг. 14. Подробная (Sq)-позиция матрицы $B^{(13)}$

2.5.5.1. Определение. Две миниячейки из разных ячеек назовём *соответственными*, если при наложении ячеек друг на друга параллельным переносом последних эти миниячейки совпадают.

Отсюда с учётом (29) получаем.

2.5.5.2. Предложение. Соответственные миниячейки отвечают одному и тому же числу.

Пусть теперь некое число “ k ” входит в $N_n(A)$. И пусть число “ k ” входит в матрицу A K раз.

Очевидно, $1 \leq K \leq n$. Обозначим через $k^{(i)}$ – i -е вхождение числа k в матрицу A , где подсчёт вхождений произведён вдоль линии развёртки, и рассмотрим все нуль-ячейки, которые стоят хотя бы на одной линии с ячейкой, содержащей число $k^{(i)}$. Далее в этих ячейках выберем все миниячейки, отвечающие числу $k^{(i)}$, и полученное множество миниячеек обозначим через $S_1(k^{(i)})$.

По построению $S_1(k^{(i)}) \subset \tilde{E}_n^p$.

Положим

$$S_1(k) = \bigcup_{i=1}^K S_1(k^{(i)}) \text{ и } S_1(A) = \bigcup_{k \in N_n(A)} S_1(k), \quad (34)$$

2.5.5.3. Определение. Множество $S_1(A)$, удовлетворяющее соотношениям (34), назовём *окрестностью первого порядка матрицы A* .

6. Очевидно, число k не может находиться в виде квалемента ни в одной из миниячеек из $S_1(k)$ без нарушения свойства (L, p) . Чтобы тем не менее случайно не поставить квалемент, отвечающий числу k , в одну из миниячеек из $S_1(k)$, мы помещаем во все эти миниячейки ролементы, ромбируя таким образом пространство нуль-ячеек матрицы A .

Методы быстрого ромбирования миниячеек могут стать предметом отдельного рассмотрения и даже стать темой состязаний. Однако здесь мы будем следить за точностью ромбирования миниячеек из $S_1(A)$. Для этого мы должны расширить арсенал контрольных меток.

§6. Контрольные метки. Продолжение

1. Вначале установим порядок просмотра и обработки линий произвольной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ из $\mathcal{T}_{n,p}$. Всех линий мы имеем $3n$. Сначала нумеруем (q, p) -линии основного n -квадрата N_n^2 , затем r -линии и, наконец, c -линии. (q, p) -линии мы нумеруем в соот-

ветствии с соотношениями (7) и (8) вдоль линии развёртки матрицы (11). Строки нумеруем сверху вниз, а столбцы – слева направо.

Для каждого числа “ k ”, входящего в ту или иную (q, p) -линию, мы ромбируем все миниячейки этой (q, p) -линии, отвечающие числу k . И когда это будет сделано, то снабжаем число k такой меткой:



Фиг. 15.

Когда же мы переходим к ромбированию строк в A , то получаем такую метку:



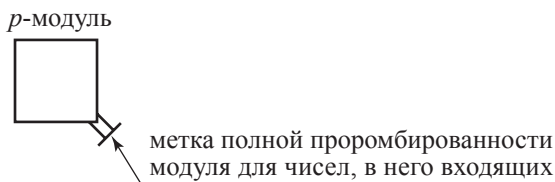
Фиг. 16.

И, наконец, проромбировав все миниячейки, отвечающие числу k в соответствующем столбце, мы окончательно получаем такую метку:



Фиг. 17.

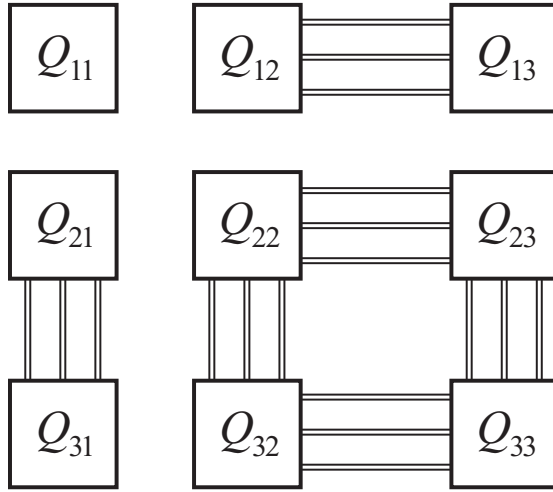
2. Наряду с внутренними контрольными метками, представленными на Фиг. 15-17, мы рассмотрим также внешние контрольные метки, сопровождающие процесс ромбирования.



Фиг. 18.

Внешнюю метку для некоторого p -модуля, приведенную на Фиг. 18, мы ставим тогда, когда все числа, входящие в этот p -модуль уже имеют метки, приведённые на Фиг. 15.

Аналогичным образом мы поступаем с внешними метками для строк и столбцов.



Фиг. 19. Внешние метки для полностью проромбированных строк и столбцов при $n = 9$

3. Возвращаясь к Фиг. 14, мы с одной стороны видим, что на каждой её линии имеются по крайней мере две свободные миниячейки, отвечающие каждому ещё не поставленному на эту линию числу, а с другой – в каждой ячейке тоже не менее двух свободных миниячеек. Последнее не создаёт условий для применения (ПО = 2), а первое – для применения (ПО = 1).

Т. о. матрица $B^{(13)}$ замкнута относительно (D, p) -процесса, и мы можем писать

$$[B^{(0)}]_{(D, p)} = B^{(13)}. \quad (35)$$

В заключение этого параграфа приведём контрольные метки полноты и завершённости для квалементов.



Фиг. 20. Метки для квалементов

$A \ B \ C \ \boxed{D}$
 $\boxed{L} \ M \ N \ O \ P \ Q \ R \dots$
 $E \qquad K$
 $F \qquad J$
 $G \quad I$

Глава 3. \boxed{H} -расширения

«Когда дорога друг,
 То значит путь твой верен.
 Иди вперёд, мой друг,
 И будь в себе уверен!...»

*(Валерий Хенкин «Экстроекции»,
 версификация «Разные дороги»)*

§1. Сопряжённые множества

1. Пусть X -произвольная линия основного n -квадрата N_n^2 , имеющая вид:

$$X = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)\}. \quad (36)$$

Если при этом X – r -линия, например строка с номером i , $i \in N_n$, то будем иметь $i_1 = i_2 = \dots = i_n = i$, а $j_1 = 1, j_2 = 2, \dots, j_n = n$. Аналогично, если X – c -линия – столбец с номером j , $j \in N_n$ – то будем иметь $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_n = n$, а $j_1 = j_2 = \dots = j_n = j$.

Если же X – (q, p) -линия, например $q_k = \check{Q}_{ij}$ p -модуля Q_{ij} , то для определения значений (i_k, j_k) мы используем формулы (7) и (8).

2. Обозначим через $X(A)$ множество нуль-позиций матрицы A , размещенных на линии X вида (36). Имеем

$$X(A) = X \setminus U_A. \quad (37)$$

Пусть T – произвольное подмножество $X(A)$.

3.1.2.1. Определение. Множество

$$F_A(T) = \bigcup F_A(i, j), \quad (38)$$

$$(i, j) \in T.$$

назовём *сопряженным множеством* T .

3.1.2.2. Предложение. Справедливо неравенство

$$|T| \leq |F_A(T)|, \quad (39)$$

которое превращается в равенство, когда $T = X(A)$.

Доказательство. Предположим, что это не так, и для некоторого T^* , $T^* \subseteq X(A)$, имеет место соотношение

$$|F_A(T^*)| < |T^*|. \quad (40)$$

Так как $A \in \mathcal{T}_{n,p}$, то во всех её терминальных (L, p) -расширениях на её позициях из T^* должно быть размещено $|T^*|$ чисел из N_n без нарушения свойства (L, p) . Но это противоречит тому, что согласно (40) число элементов, сопряжённых T^* , строго меньше $|T^*|$. Противоречие показывает справедливость (39).

Далее заметим, что на линии X стоит $n - |X(A)|$ элементов из A . Откуда $|F_A(X(A))| \leq n - (n - |X(A)|) = |X(A)|$, что вместе с (39) окончательно доказывает 3.1.2.2. Предложение.

3.1.2.3. Предложение (Обобщённый Принцип Однозначности)

Пусть A из $\mathcal{T}_n(D, p)$ – замкнута и нетерминальна и T – такое строгое подмножество $X(A)$, для которого

$$|T| = |F_A(T)|. \quad (41)$$

Тогда каково бы ни было терминальное (L, p) -расширение матрицы A , в нём все элементы из $F_A(T)$ должны стоять **только** на позициях из множества T .

Доказательство. Пусть это не так, и в некотором терминальном (L, p) -расширении G матрицы A число k_0 из $F_A(T)$ стоит на позиции (i_0, j_0) из $X(A) \setminus T$. Сужение $A^{(i_0, j_0, k_0)}$ матрицы G не терминально, т. к. A – замкнута относительно (ПО) и не терминальна.

По построению $A^{(i_0, j_0, k_0)} \in \mathcal{T}_{n, p}$, а с другой стороны, согласно предположения относительно k_0 имеем

$$|F_{A^{(i_0, j_0, k_0)}}(T)| < |T|,$$

что противоречит (39). Противоречие доказывает 3.1.2.3. Предложение.

§2. Окрестности

1. Для произвольной матрицы A из $\mathcal{T}_{n, p}$ мы рассмотрели её окрестность первого порядка $S_1(A)$ (см. 2.5.5.3. Определение).

Возвращаясь к миниячейкам из $\langle\langle A \rangle\rangle_n^p$ заметим, что в каждой нуль-ячейке матрицы A есть миниячейки, не покрытые ромбами, числовые аналоги которых образуют множество $F_A(i, j)$, для нуль-ячейки (i, j) матрицы A . Сами эти миниячейки не покрыты ролементами. Мы будем называть их в дальнейшем *свободными миниячейками* и обозначать их множество, скажем, для нуль-ячейки (i, j) матрицы A через $F_A^{(1)}(i, j)$.

2. Заметим, что в 3.1.2.3. Предложении можно безболезненно условие (41) заменить на условие

$$|T| = |F_A^{(1)}(T)|. \quad (41^*)$$

Предположим теперь, что мы находимся в условиях 3.1.2.3. Предложения и, с одной стороны, для некоторой линии X , найдется строгое подмножество T , множества $X(A)$, для которого выполнено (41^*) , а с другой – имеет место такое соотношение

$$F_A^{(1)}(T) \cap F_A^{(1)}(X(A) \setminus T) \neq \emptyset. \quad (42)$$

Тогда, если свободная миниячейка β входит в левую часть (42), тогда она является свободной в некой нуль-ячейке (i, j) матрицы A . Пусть k числовое значение миниячейки β . А нуль-ячейка (i, j) входит в $X(A) \setminus T$. Тогда согласно 3.1.2.3. Предложения матрица $A^{(i, j, k)}$ не имеет терминальных (L, p) -расширений.

Чтобы не пойти по этому никуда не ведущему пути, мы ромбируем миниячейку β в нуль-ячейке (i, j) , помещая туда ролемент цвета № 2. (Исходный цвет мы считаем цветом № 1).

3. Все проромбированные цветами № 1 и № 2 миниячейки мы включаем в множество $S_2(A)$ – окрестность второго порядка матрицы A .

Если Обобщённый Принцип Однозначности (ОПО) удастся применить и далее, то получают окрестности более высоких порядков $S_3(A)$, $S_4(A)$ и т. д.

Продолжая этот процесс, мы приходим к одному из двух окончаний: 1°. когда уже (ОПО) применить нельзя и 2°. когда появляется возможность применения (ПО). И тогда мы получаем (L, p) -расширение B матрицы A . Но это уже не (D, p) -расширение матрицы A , а её (H, p) -расширение, что мы отметим такой записью

$$A \xrightarrow{p} B. \quad (43)$$

В последнем случае цепочку (20) можно продолжить, полагая

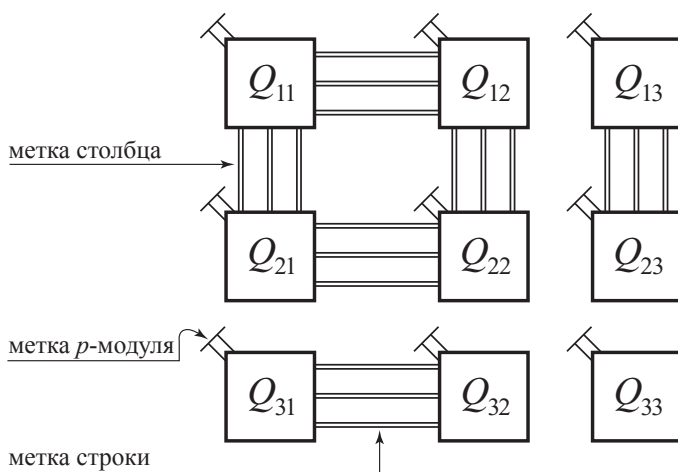
$$B^{(k)} \xrightarrow{p} B^{(k+1)}.$$

Применяя (ПО) вкупе с (ОПО) мы получим уже (H, p) -цепочку, конечным членом которой будет, например, матрица M , которую мы назовём (H, p) -замыканием матрицы $B^{(0)}$ и будем писать

$$M = [B^{(0)}]_{H, p}. \quad (44)$$

§3. Контрольные метки. Окончание

1. Рассматривая (D, p) -замкнутую, нетерминальную матрицу $A = \|a_{i,j}\|$ из \mathcal{T}_n на предмет поиска в ней условий для выполнения Обобщённого Принципа Однозначности (ОПО), мы сохраняем порядок просмотра линий, установленный в 2.6.1 (Глава 2, параграф 6, пункт 1). Просмотренные линии отмечаем таким образом:



Фиг. 21. Метки просмотренных p -модулей строк и столбцов на предмет поиска условий для применения (ОПО)

2. А теперь возвратимся к матрице $B^{(13)}$ вида (33) и её подробной (Sq)-позиции на Фиг. 14 и отметим, что $B^{(13)}$ нетерминальна и $(D, 3)$ -замкнута, поэтому имеет смысл, согласно 3.1.2.3. Предложения, искать условия применения (ОПО). Для каждой линии нашего примера рассмотрим таблицу, описание которой дадим в общем виде.

№ линии	Числа Позиции	1	2	3	...	n
		1	2	3	...	n
-1	0	1	2	3	...	n
	1				...	
	2				...	
					...	
	n				...	

Фиг. 22. Описание таблицы для проверки выполнения (ОПО)

Таблица на Фиг. 22 является частью сводной таблицы. Её квадратные ячейки получены пересечением её вертикальных и горизонтальных граф.

Вертикальные графы: в графе “-1” проставляются натуральные числа из N_{3n} – номера линий. В графе “0” проставлены номера ячеек данной линии – натуральные числа от 1 до n . Графе “ j ”, $j \in N_n$, отвечает соответствующее число j тоже из N_n .

Горизонтальные графы: в графе “0” проставлены натуральные числа от 1 до n . Графе “ i ”, $i \in N_n$, отвечает соответствующее число i – номер ячейки из данной линии.

Каждая ячейка таблицы либо пуста, либо проромбирована (т. е. в ней проставлен ролемент), либо проквадрирована (т. е. в ней проставлен квалемент). Внутри квалемент может стоять другой квалемент меньшего размера. Это вторичный квалемент. Внутри квалемент (как первичного, так и вторичного) может стоять число, которое как бы аннигилирует содержащий его квалемент, и т. о. ячейку, содержащую квалемент, в свою очередь содержащий некое число, можно считать пустой.

3. В ячейку с координатами (i, j) , стоящую на пересечении i -ой горизонтальной и j -ой вертикальной граф, помещаем ролемент в одном из двух случаев.

1°. i -ое место на рассматриваемой нами линии не является нуль-ячейкой.

2°. Число j стоит на этой линии.

В ячейке (i, j) таблицы размещаем квалемент, если это нуль-ячейка нашей матрицы такая, что на всех линиях, на пересечении которых находится эта ячейка, число j не стоит.

Остальные ячейки таблицы мы оставляем пустыми.

В нашем примере 27 линий, из которых линии №№ 6, 19 и 27 не содержат условий для применения (ОПО). Остальные линии расположим по возрастанию номеров и составим такую сводную таблицу:

Сводная таблица для $B^{(13)}$. Часть первая

-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	■	◇		■			◇		◇
	2	■		■	■				■	■
	3	■		■	■				■	■
	4	◇								
	5									
	6									
	7									
	8									
	9	■			■				■	■
2	1	◇								
	2	■		■	■		■		■	■
	3	■	◇				■		■	■
	4		◇		■	■			■	■
	5			■	■	■			■	■
	6			◇		■			■	■
	7			◇		■			■	■
	8	■			■		■		■	■
	9	◇							■	■
3	1	◇			■	■	■	■	■	■
	2	◇			■		■		■	■
	3	◇								
	4	◇			■				■	■
	5	◇								
	6	◇								
	7	◇								
	8	■			■		■		■	■
	9	◇							■	■

-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	1	◇	◇	◇	◇	◇		◇	◇	◇
	2				1			■	■	
	3	◇								
	4	◇								
	5				■			■		
	6				■			■		■
	7									
	8	■			■				■	
	9	■			■				■	■
5	1	◇								
	2	◇			1			■	■	1
	3	◇							■	1
	4	◇						■	■	
	5	◇		■				■		
	6	◇		■				■		
	7	◇							■	■
	8	◇						■	■	
	9	◇							■	■
7	1	■			■					
	2	◇								
	3	■		1	■			1		
	4	◇								
	5	◇								
	6	◇								
	7	◇								
	8			■				■		
	9			■				■		

Первым дополнительным цветом проромбированы
 миниячейки “3” и “7”,
 находящиеся на линии № 7, в ячейке № 3.

Сводная таблица для $B^{(13)}$. Часть вторая

-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	1									
	2	2								
	3	2						2		
	4									
	5									
	6									
	7			1				1		
	8			1				1		
	9									
9	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7			1				1		
	8									
	9									
10	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									
	9									
11	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									
	9									
12	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									
	9									
13	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									
	9									

На линии № 13 первым дополнительным цветом проромбированы:

миниячейка “4” в ячейке № 2,
 миниячейки “4” и “9” в ячейке № 5,
 миниячейка “9” в ячейке № 6.

Сводная таблица для $B^{(13)}$. Часть третья

-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
14	1	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	2	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	3	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	4	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	5	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	6	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	7	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	8	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	9	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
15	1	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	2	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	3	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	4	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	5	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	6	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	7	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	8	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	9	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
16	1	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	2	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	3	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	4	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	5	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	6	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	7	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	8	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	9	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
17	1	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	2	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	3	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	4	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	5	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	6	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	7	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	8	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	9	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
18	1	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	2	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	3	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	4	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	5	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	6	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	7	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	8	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	9	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
20	1	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	2	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	3	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	4	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	5	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	6	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	7	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	8	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	9	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇

На линии № 18 первым дополнительным цветом проромбированы:

в ячейке № 4 – миниячейки “3” и “7”;

в ячейке № 5 – миниячейки “3” и “7”;

в ячейке № 7 – миниячейки “3” и “7”.

Сводная таблица для $B^{(13)}$. Часть четвёртая

-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
21	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7			1				1		
	8									
	9									
22	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									
	9			1				1		
23	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									
	9									
24	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									
	9									
25	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									
	9									
26	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									
	9									

4. Комментарии к обработке сводной таблицы для матрицы $B^{(13)}$.

A1. Рассматривая некую ячейку произвольно взятой линии, найдем число k , $0 \leq k \leq n - 2$, равное числу пустых мест в этой ячейке. А теперь найдем число l , равное числу ячеек данной линии, у которых найдутся квалементы, расположенные в одной и той же вертикальной графе, хотя бы с одним пустым местом рассматриваемой нами ячейки, $0 \leq l \leq n - 1$.

A2. Условия для применения (ОПО) возникают при выполнении неравенства

$$l \leq k. \quad (45)$$

В нашем случае условие (45) выполняется для ячеек с №№ 8 и 9 линии № (7), для ячеек с №№ 7 и 8 линии № (13) и ячеек с №№ 2 и 3 линии № (18).

A3. Все квалементы других ячеек, попавшие в одну и ту же вертикальную графу с квалементами из рассматриваемых ячеек, мы снабжаем числом 1 – номером дополнительного цвета (в нашем случае это красный цвет).

Сводная таблица для $B^{(13)}$ состоит из 3-х слоёв. Прodelав операции A1–A3, мы получаем первый слой этой таблицы, который получается из последней, если убрать из неё все вторичные квалементы вместе с их содержимым, а также все числа внутри квалементов, большие, чем 1.

5.

		19	20	21	22	23	24	25	26	27
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	1	1, 1	1, 2	1, 3	2, 1	2, 2	2, 3	3, 1	3, 2	3, 3
11	2	1, 4	1, 5	1, 6	2, 4	2, 5	2, 6	3, 4	3, 5	3, 6
12	3	1, 7	1, 8	1, 9	2, 7	2, 8	2, 9	3, 7	3, 8	3, 9
13	4	4, 1	4, 2	4, 3	5, 1	5, 2	5, 3	6, 1	6, 2	6, 3
14	5	4, 4	4, 5	4, 6	5, 4	5, 5	5, 6	6, 4	6, 5	6, 6
15	6	4, 7	4, 8	4, 9	5, 7	5, 8	5, 9	6, 7	6, 8	6, 9
16	7	7, 1	7, 2	7, 3	8, 1	8, 2	8, 3	9, 1	9, 2	9, 3
17	8	7, 4	7, 5	7, 6	8, 4	8, 5	8, 6	9, 4	9, 5	9, 6
18	9	7, 7	7, 8	7, 9	8, 7	8, 8	8, 9	9, 7	9, 8	9, 9

Фиг. 23. Таблица соответствия ячеек и линий

На Фиг. 23 приведена таблица соответствия ячеек и линий для случая: $n = 9$ и $p = 3$.

Если фиксировать номер линии и номер ячейки в этой линии, то этой паре (линия, ячейка) соответствуют ещё две пары подобного рода. Например, паре (15, 4) соответствуют две такие пары: (5, 7) и (22, 6).

6. В4. Обводим красным цветом линии, соответствующие парам (линия, ячейка), где стоят числа 1 и в соответствующих ячейках

проставляем красным цветом вторичные квалементы, содержащие числа 1, Это будут следующие линии:

- № 4: вторичный квалемент “4” в ячейке № 2.
- № 5: вторичные квалементы “4” и “9” в ячейках с №№ 2 и 3.
- № 8: вторичные квалементы “3” и “7” в ячейках с №№ 7 и 8.
- № 9: вторичные квалементы “3” и “7” в ячейке № 7.
- № 16: вторичные квалементы “3” и “7” в ячейке № 3.
- № 20: вторичный квалемент “4” в ячейке № 4.
- № 21: вторичные квалементы “3” и “7” в ячейке № 7.
- № 22: вторичные квалементы “3” и “7” в ячейке № 9.
- № 23: вторичные квалементы “4” и “9” в ячейке № 4
и “3” и “7” в ячейке № 9.
- № 24: вторичный квалемент “9” в ячейке № 4 и
- № 25: вторичные квалементы “3” и “7” в ячейке № 9.

В5. Проверяем условия для выполнения (ОПО) для всех квалементов, за вычетом тех, где стоят единицы, и находим, что (ОПО) можно применить к ячейкам с №№ 1 и 3 линии № 16, и к ячейкам с №№ 2 и 4 линии № 24. В первом случае речь идет о миниячейках “1” и “3”, а во втором – о миниячейках “5” и “8”. Соответственные миниячейки, но расположенные в других ячейках, мы ромбируем дополнительным цветом 2. (В нашем случае это будет зелёный цвет).

Т. о. мы получаем второй слой сводной таблицы для В⁽¹³⁾, который получается убиением зелёных квалементов вместе с их содержимым.

В6. Расставляем вторичные квалементы зелёного цвета на линиях: № 8 (миниячейки “1” и “8” в ячейках с №№ 2 и 3); № 10 (миниячейка “8” в ячейке № 6); № 2 (миниячейка “8” в ячейке № 3); № 16 (миниячейка “8” в ячейке № 6); № 23 (миниячейка “1” в ячейке № 7); № 24 (миниячейка “1” в ячейке № 7”).

7. Мы получили, наконец все три слоя сводной таблицы для $B^{(13)}$, из которой видно, что миниячейка “9” – единственная свободная миниячейка, как в ячейке 3 линии 8, так и соответствующих ей ячейках 6 линии 16 и 7 линии 24, поскольку все они являются проекциями нуль-ячейки (7, 6) (Sq)-позиции матрицы $B^{(13)}$. И т. о. в $S_3(B^{(13)})$ мы уже можем применить (ПО) и получить (H , 3)-расширение $(B^{(13)})^{(7,6,9)}$ матрицы $B^{(13)}$, которое мы обозначим через $B^{(14)}$. Т. о. мы имеем такой переход

$$B^{(13)} \xrightarrow{3} B^{(14)}, \quad (46)$$

где матрица $B^{(14)}$ имеет вид

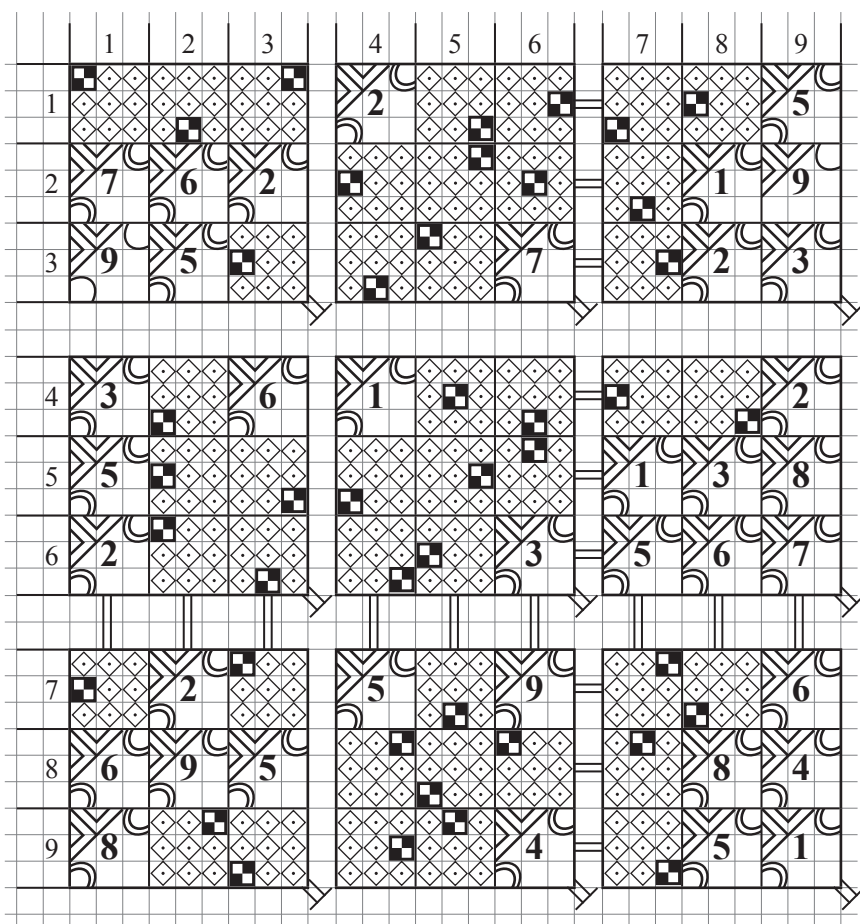
$$B^{(14)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 9 & 5 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & 9 & 0 & 0 & 6 \\ 6 & 9 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

(Sq)-позиция для этой матрицы приведена на Фиг. 24.

(Sq)-нотацию для $B^{(14)}$ начнем с применения (ПО = 2) к позиции (7, 8). Имеем 1. [7]₇₈. Далее

2. [4] ₁₈	8. [4] ₄₇	14. [2] ₅₆	20. [1] ₈₆	26. [9] ₁₅
3. [8] ₂₇	9. [8] ₄₆	15. [4] ₅₂	21. [8] ₇₅	27. [4] ₃₃
4. [5] ₂₆	10. [7] ₄₂	16. [9] ₅₃	22. [1] ₇₃	28. [8] ₃₄
5. [6] ₃₇	11. [1] ₁₁	17. [4] ₇₁	23. [8] ₆₃	29. [1] ₃₅
6. [7] ₁₇	12. [6] ₁₆	18. [3] ₇₇	24. [3] ₁₃	30. [1] ₆₂
7. [9] ₄₈	13. [5] ₄₅	19. [2] ₈₇	25. [8] ₁₂	31. [3] ₉₂

(окончание следует)



Фиг. 24. Окончание решения задачи Судоку для примера № 3

Окончание (*Sg*)-нотации решения задачи Судоку для примера № 3:

32. [7] ₉₃	34. [7] ₅₄	36. [3] ₈₄	38. [3] ₂₅	40. [4] ₆₅	42. [2] ₉₅
33. [6] ₉₄	35. [6] ₅₅	37. [4] ₂₄	39. [9] ₆₄	41. [7] ₈₅	43. [9] ₉₇

Матрицу, подробная (Sq)-позиция которой приведена на Фиг. 24, обозначим через T . Тогда имеем

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 & 2 & 9 & 6 & 7 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 2 & 4 & 3 & 5 & 8 & 1 & 9 \\ 9 & 5 & 4 & 8 & 1 & 7 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 6 & 1 & 5 & 8 & 4 & 9 & 2 \\ 5 & 4 & 9 & 7 & 6 & 2 & 1 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 8 & 9 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 8 & 9 & 3 & 7 & 6 \\ 6 & 9 & 5 & 2 & 7 & 1 & 2 & 8 & 4 \\ 8 & 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 9 & 5 & 1 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

От исходной с $(L)_{9,3}$ матрицы $B^{(0)}$ вида (31) для примера № 3 к терминальной $(L)_{9,3}$ матрице вида (48) ведет цепочка $(L, 3)$ -расширений, где все такие расширения есть $(D, 3)$ -расширения, за исключением одного, а именно $(H, 3)$ -расширения $B^{(13)}$. Поэтому матрица T будет уже (H, p) -замыканием $B^{(0)}$.

Глава 4. Категории сложности

Передавая эстафету
Тем, кто продолжит наше дело,;
«Друзья! Последуйте совету
И в каждый бой идите смело!»

*(Валерий Хенкин «Экстроекции»,
версификация «Эстафета»)*

§1. Судoku как математическая задача

Пример (16), построенный для любых: составного числа n и его произвольного делителя p , удовлетворяющего вместе с n соотношению (14), с одной стороны, показывает, что для таких n и p множество $\mathcal{L}_{n,p}$ непусто, а с другой, что для них имеет место соотношение (17).

Далее можно провести экстраполяцию (17), вводя классы матриц $\mathcal{Q}_{n,p}$ и $\mathcal{K}_{n,p}$, где $\mathcal{Q}_{n,p}$ состоит из n -матриц, имеющих терминальные (D, p) -замыкания, как в примере № 2, а $\mathcal{K}_{n,p}$ состоит из n -матриц, имеющих терминальные (H, p) -замыкания, как в примере № 3.

Одна из ближайших задач Судоквики – доказательство таких соотношений:

$$\emptyset \subset \mathcal{Q}_{n,p} \subset \mathcal{K}_{n,p} \subset \mathcal{T}_{n,p} \subset \mathcal{L}_{n,p} \subset \mathcal{A}_n. \quad (49)$$

В данной работе мы докажем (49) для случая: $n = 9, p = 3$.

Из примеров №№ 2 и 3 имеем

$$\emptyset \subset \mathcal{Q}_{9,3} \subset \mathcal{K}_{9,3} \subseteq \mathcal{T}_{9,3}.$$

Доказательство (49) будет завершено в этом случае, если мы най-

дём пример $(L)_{9,3}$ -матрицы из $\mathcal{T}_{9,3}$, для которой не существует ни терминальных $(D, 3)$ -замыканий, ни терминальных $(H, 3)$ -замыканий.

1. Например, такой: пример № 4.

$(\check{S}q)$: $\models \Rightarrow (4)_{11}, (1)_{12}, (7)_{13}, (3)_{15}, (9)_{18}, (7)_{113}, (6)_{115}, (2)_{120}, (9)_{124}, (8)_{128}, (9)_{129}, (2)_{130}, (6)_{132}, (3)_{134}, (7)_{135}, (1)_{136}, (9)_{141}, (3)_{142}, (3)_{146}, (4)_{147}, (5)_{148}, (7)_{150}, (6)_{153}, (9)_{154}, (6)_{158}, (9)_{161}, (2)_{162}, (8)_{163}, (2)_{164}, (5)_{165}, (9)_{167}, (8)_{169}, (3)_{171}, (3)_{176}, (2)_{177}, (7)_{178}, (1)_{179}, (5)_{180}, (4)_{181} \Leftarrow \models$

Соответствующая этому примеру матрица T выглядит так:

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & 0 & 3 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 2 & 0 & 6 & 0 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 7 & 0 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 9 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & 0 & 9 & 0 & 8 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 7 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Легко видеть, что $T - (L)_{9,3}$ -матрица (нетерминальная).

Составим её подробную (Sq) -позицию (см. Фиг. 25). После проверки убеждаемся, что матрица T является $(D, 3)$ -замкнутой, и составляем для неё сводную таблицу.

Прежде, чем составлять сводную таблицу для матрицы T на предмет применимости к ней (ОПО), заметим, что на линиях с №№ 4, 8, 9, 13, 15, 18 и 26 (ОПО) не применим. Исследование применимости (ОПО) для других линий, отражённое в нижеследующей сводной таблице для матрицы T , проведённое таким же способом, как и предыдущее, отражённое в сводной таблице для матрицы $B^{(13)}$, показывает, что и для остальных линий это не так. Т. о. матрица T не только $(D, 3)$ -замкнута, но также и $(H, 3)$ -замкнута и нетерминальна.

Сводная таблица для матрицы T . Часть первая

-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									
	9									
3	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									
	9									
5	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									
	9									

-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									
	9									
7	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									
	9									
10	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									
	9									

Сводная таблица для матрицы *T*. Часть вторая

-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									
	9									
12	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									
	9									
14	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									
	9									
11	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									
	9									
17	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									
	9									
19	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									
	9									

Сводная таблица для матрицы T . Часть третья

-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	1	□	□				□	□		
	2		□	□				□		
	3	□		□	□					
	4	□								
	5	□			□	□				
	6	□			□	□				
	7									
	8									
	9									
(21)	1									
	2			□					□	□
	3			□					□	
	4									
	5	□					□			
	6									
	7	□		□	□					
	8	□			□		1			
	9						□		□	□
(22)	1		□			□			□	□
	2									
	3	□				□	□		□	
	4				□	□				
	5	1			1	1			□	
	6	□	□						□	
	7									
	8									
	9									

-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	1									
	2			□					□	
	3									
	4									
	5						□	□		
	6									
	7			□				□		
	8									
	9						□		□	
24	1		□			□				
	2									
	3									
	4				□	□				
	5									
	6	□	□							
	7	□			□	□				
	8									
	9									
25	1		□			□				
	2		□			□				
	3				□	□	□	□	□	
	4									
	5		□		□	□				□
	6		□							□
	7									
	8						□	□		
	9									

Сводная таблица для матрицы T . Часть четвёртая

-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23	1	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	2	■	◇	◇	■	■	◇	◇	■	◇
	3	■	◇	◇	■	■	◇	◇	■	◇
	4	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	5	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	6	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	7	■	◇	◇	■	■	◇	◇	◇	◇
	8	■	◇	◇	■	◇	◇	◇	◇	◇
	9	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇

-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
27	1	◇	■	◇	◇	■	■	◇	◇	◇
	2	◇	■	■	◇	■	◇	◇	◇	◇
	3	◇	◇	■	◇	■	■	■	◇	◇
	4	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	5	◇	■	◇	◇	■	◇	◇	◇	◇
	6	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	7	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
	8	◇	◇	◇	◇	◇	■	■	◇	◇
	9	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇

2. С этого момента становится очевидным, что без перебора различных вариантов $(L, 3)$ -расширений матрицы T решить задачу Судoku для этой матрицы невозможно. И здесь мы выходим на одну из математических задач Дискретного программирования, описанных в работе [1].

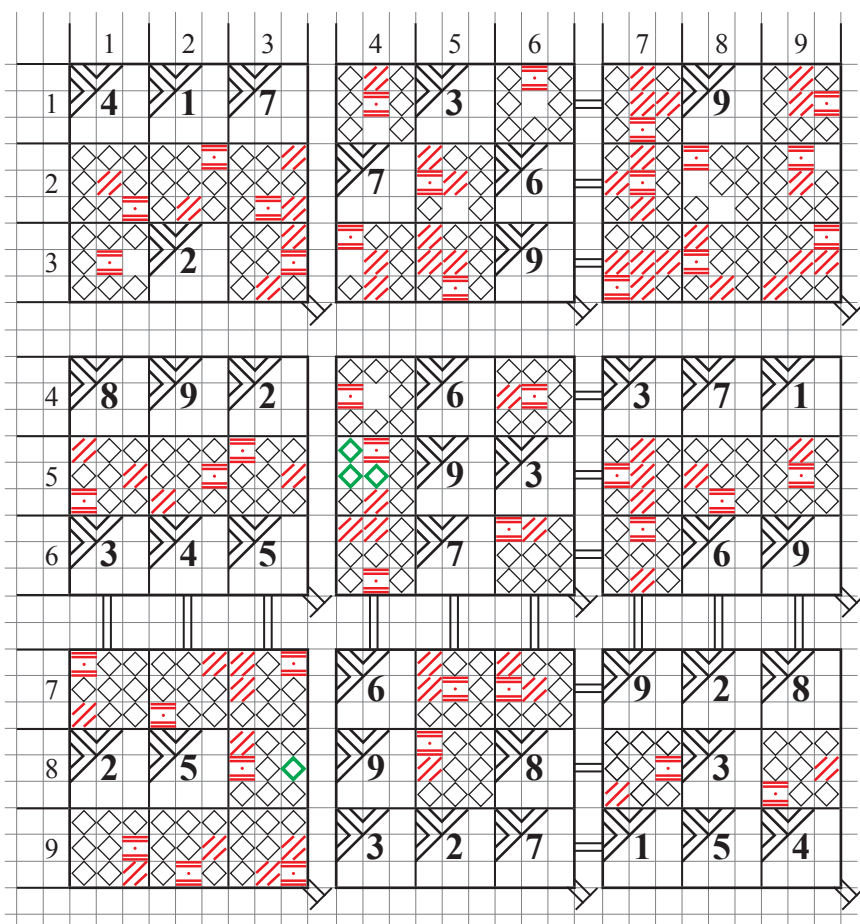
Однако для примера № 4 мы сейчас не будем искать эффективных алгоритмов решения задачи, а ограничимся полным перебором вариантов решения.

§2. Окончание решения задачи Судoku для примера № 4

1. Подробную (Sq) -позицию для матрицы T мы будем рассматривать с добавлением ролементов зелёного цвета. При этом мы будем рассматривать всевозможные (i, j, k) -цепочки для T , т. е. такие $(D, 3)$ -цепочки последней, которые начинаются с элемента “ k ” в ячейке с координатами (i, j) .

(i, j, k) -цепочки могут иметь разные окончания:

- 1°. Оканчиваться тоже $(D, 3)$ -замкнутой матрицей;
- 2°. Оканчиваться матрицей, не обладающей свойством (L) .
- 3°. Оканчиваться терминальной $(L, 3)$ -матрицей.



Фиг. 25. Подробная (Sq)-позиция для матрицы T с дополнительным (зелёным) ромбированием миниячеек согласно сводной таблице для этой матрицы. Красным цветом приведено виртуальное продолжение решения, начинающегося с тройки (1, 6, 2).

Случай 3° нас устроил бы лучше всего. Случай 2° тоже даёт какое-то продвижение: чтобы его запретить, мы помещаем ролемент в миниячку k из ячейки (i, j) и т. о. уменьшаем свободу выбора,

что так или иначе приближает нас к решению задачи. И, наконец, случай 1° не увеличивает определённости в решении задачи Судоку, и мы переходим к следующей (i, j, k) -цепочке.

2. Для внесения определённости мы устанавливаем такой порядок начал (i, j, k) -цепочек. В соответствии с линией развёртки (см. Фиг. 4) мы устанавливаем порядок (i, j) -ячеек $B\langle\langle T \rangle\rangle_9^3$, а затем – миниячеек от меньшей к большей.

А теперь возьмем первую тройку (i, j, k) из нуль-ячейки матрицы T , содержащую две свободные миниячейки. Как видно из Фиг. 25, это будет тройка: $(1, 6, 2)$.

Отправляясь от этой тройки, мы начинаем процесс виртуального ромбирования и виртуального продвижения в решении задачи Судоку. Свободные миниячейки мы будем заполнять виртуальными ролементами вида: \diagup или виртуальными квалементами вида: \equiv .

В (Sq) -нотациях виртуальные квалемента в отличие от реальных, заключаемых в квадратные скобки, мы будем заключать в фигурные скобки. Кроме того, идентифицировать записи мы будем тремя числами: <номер этапа>, <номер варианта>, <номер нотационной записи>.

3. (Sq) -нотация виртуального продолжения решения задачи Судоку: (Номер этапа = 1. и Номер варианта = 1. мы здесь опускаем).

1. $\{2\}_{16}$	10. $\{4\}_{83}$	18. $\{9\}_{21}$	26. $\{8\}_{64}$	34. $\{1\}_{53}$
2. $\{1\}_{66}$	11. $\{5\}_{14}$	19. $\{2\}_{29}$	27. $\{7\}_{89}$	35. $\{7\}_{51}$
3. $\{1\}_{34}$	12. $\{6\}_{19}$	20. $\{4\}_{25}$	28. $\{3\}_{39}$	36. $\{6\}_{52}$
4. $\{1\}_{28}$	13. $\{8\}_{17}$	21. $\{8\}_{35}$	29. $\{6\}_{33}$	37. $\{1\}_{71}$
5. $\{4\}_{44}$	14. $\{2\}_{67}$	22. $\{5\}_{31}$	30. $\{6\}_{91}$	38. $\{7\}_{72}$
6. $\{5\}_{46}$	15. $\{5\}_{59}$	23. $\{4\}_{38}$	31. $\{8\}_{92}$	39. $\{3\}_{73}$
7. $\{4\}_{76}$	16. $\{4\}_{57}$	24. $\{8\}_{58}$	32. $\{3\}_{22}$	40. $\{6\}_{87}$
8. $\{1\}_{85}$	17. $\{5\}_{27}$	25. $\{2\}_{54}$	33. $\{8\}_{23}$	41. $\{9\}_{93}$
9. $\{5\}_{75}$				

На Фиг. 25 решение этой задачи представлено кроме чисел, и чёрных, и зелёных ролементов, также красными виртуальными квалементами и ролементами. Выпишем получившуюся $(L)_{9,3}$ -матрицу \tilde{T} :

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & 5 & 3 & 2 & 8 & 9 & 6 \\ 9 & 3 & 8 & 7 & 4 & 6 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 8 & 9 & 7 & 4 & 3 \\ 8 & 9 & 2 & 4 & 6 & 5 & 3 & 7 & 1 \\ 7 & 6 & 1 & 2 & 9 & 3 & 4 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 1 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 7 & 3 & 6 & 5 & 4 & 9 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 9 & 1 & 8 & 6 & 3 & 7 \\ 6 & 8 & 9 & 3 & 2 & 7 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}. \quad (51)$$

4. По построению матрица \tilde{T} является $(L, 3)$ -расширением $(L)_{9,3}$ -матрицы T вида (50) и она терминальна. Т. о. пример № 4 и есть тот самый пример, который завершает доказательство (49) для случая: $n = 9$; $p = 3$.

§3. Классификация $(L)_{n,p}$ -матриц

Матрицы первой категории

1. Соотношения (49) приводят к такой классификации матриц из $(L)_{n,p}$ по категориям сложности:

4.3.1.1. Определение

- Матрицы $\mathcal{S}_{n,p}$ назовём матрицами I-ой категории;
- Матрицы $\mathcal{H}_{n,p} \setminus \mathcal{S}_{n,p}$ назовём матрицами II-ой категории;
- Матрицы $\mathcal{I}_{n,p} \setminus \mathcal{H}_{n,p}$ назовём матрицами III-ой категории;
- Матрицы $\mathcal{L}_{n,p} \setminus \mathcal{I}_{n,p}$ назовём матрицами IV-ой категории.

2. Делая реверанс в сторону начинающих судокукеров, рассмотрим более подробно матрицы I-ой категории.

Класс матриц $\mathcal{Z}_{n,p}$ состоит из $(D)_{n,p}$ -матриц, терминальные (L, p) -расширения которых можно получить с помощью Принципа Однозначности = 1, применённого только к (q, p) -линиям, а также с помощью Метода Округления (МО), применённого ко всем линиям.

Суть (МО) формально состоит из округления дроби $\frac{n-1}{n}$ до единицы, т. е. до $\frac{n}{n}$.

В нашем случае, если некая линия X заполнена на $\frac{n-1}{n}$ своих частей, то её можно заполнить на все $\frac{n}{n}$ частей, поставив на единственное свободное место этой линии единственное число из N_n , не стоящее на ней.

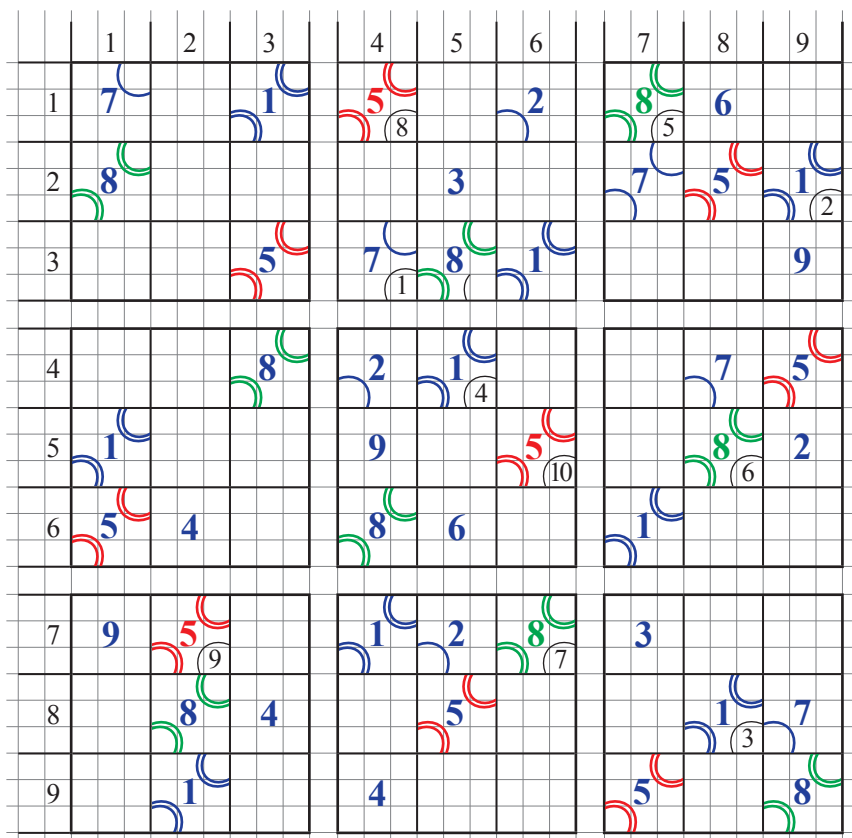
Класс матриц $\mathcal{L}_{n,p}$ состоит из $(D)_{n,p}$ -матриц, терминальные (L, p) -расширения которых можно получить, не прибегая к минископу, как например, матрица $B^{(0)}$ из примера № 2.

4.3.2.1. Определение. Матрицы из $\mathcal{Z}_{n,p}$ – назовём матрицами 1-го уровня; матрицы из $\mathcal{L}_{n,p} \setminus \mathcal{Z}_{n,p}$ – матрицами 2-го уровня и матрицы из $\mathcal{S}_{n,p} \setminus \mathcal{L}_{n,p}$ – матрицами 3-го уровня (сложности).

3. Пример № 5 (тоже из газеты «МИГ»).

Матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 8 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$



Фиг. 26. (Sq) -позиция для матрицы A из примера № 5 после 10 шагов решения задачи Судоку

Первые 10 шагов решения задачи Судоку для матрицы A примера № 5 приводят к такой (Sq) -нотации:

$$\begin{array}{l}
 1. (7)_{34}^1 \quad 3. (1)_{88}^1 \quad 5. (8)_{17}^1 \quad 7. (8)_{76}^0 \quad 9. (5)_{72}^1 \\
 2. (1)_{29}^1 \quad 4. (1)_{45}^0 \quad 6. (8)_{58}^1 \quad 8. (5)_{14}^1 \quad 10. (5)_{56}^0
 \end{array}$$

4. На Фиг. 26 исходные данные примера № 5 размещены в ячейках, где номер шага не обозначен. Таковыми являются, например, $(7)_{11}$ и $(7)_{27}$.

Рассматривая q -линию Q_{12} , мы видим, что единственной сопряжённой числу 7 позицией на ней является позиция (3, 4). Отсюда согласно (ПО = 1) мы можем начать (Sq) -нотацию записью 1. $(7)_{34}$. А тот факт, что мы применили (ПО = 1), отметим числом 1 в позиции показателя степени. Окончательно имеем для начала (Sq) -нотации решения задачи Судоку для примера № 5 такую запись: $"1.(7)_{34}^1"$.

Этой записи на Фиг. 26 соответствует в позиции (3, 4) число 7 с номером шага = 1.

5. Далее мы видим, что на q -линии \check{Q}_{13} для числа 1 есть только одна, сопряжённая ему позиция, а именно: (2, 9). Отсюда имеем: 2. $(1)_{29}^1$.

Заметим, что в вертикальной полосе, содержащей ячейку (2, 9) сейчас появилась возможность для применения (ПО = 1), а именно на на линии \check{Q}_{33} , где для числа 1 мы имеем одну-единственную сопряжённую позицию: (8, 8). Т. о. 3. $(1)_{88}^1$.

Здесь мы столкнулись с ситуацией, когда продвижение в решении задачи Судоку для некоторого числа приводит к возможности нового продвижения для этого же числа. По аналогии с машиной на гусеничном ходу, где продвижения колёс приводят к продвижению гусеничной ленты, по которой продвигаются колеса и т. д., мы назовём этот метод «Методом Гусеницы».

6. После трёх шагов решения задачи в (Sq) -позиции уже размещено восемь чисел, равных единице. Можно показать, что для произвольного составного числа n , если уже размещено $n - 1$ чисел равных k , то есть возможность с помощью (ПО = 1) разместить и n -ое число, равное k .

Действительно, если все числа " k " размещены (L) -допустимым образом, тогда в каждом p -модуле, кроме одного, присутствует един-

ственное число, равное “ k ”. В горизонтальной (в вертикальной) полосе, содержащей этот p -модуль, находятся в разных строках (в разных столбцах) $(p - 1)$ число, равное “ k ” ($(\bar{p} - 1)$ число, равное “ k ”). И в эти единственные строку и столбец, свободные от числа “ k ”, а точнее в место их пересечения и можно поставить число “ k ” без нарушения свойства (L) .

В нашем случае это будет позиция $(4, 5)$ для числа 1. И мы пишем 4. $(1)_{45}^0$ в (Sq) -нотации, где число 0 сверху показывает, что эту запись мы получили Методом Округления (МО).

По ходу решения мы снабжаем числа метками горизонтальной и вертикальной полноты, а число 1 после четвёртого шага решения задачи мы уже можем снабдить метками завершённости.

7. Второе применение Метода Гусеницы мы отмечаем зелёным цветом:

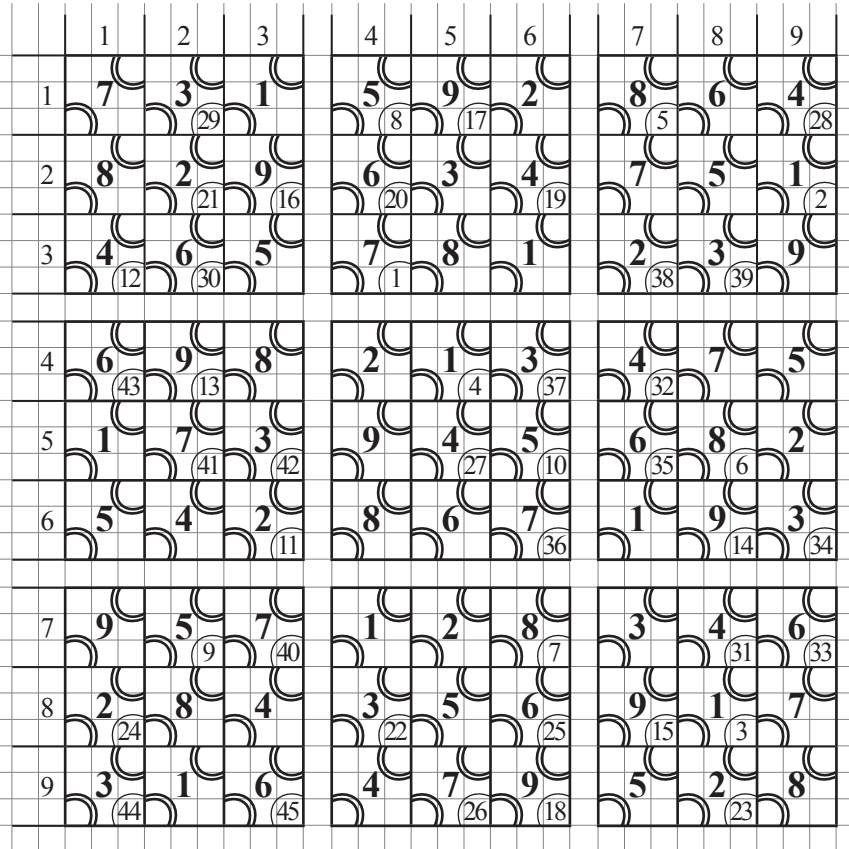
$$5. (8)_{17}^1 \mid 6. (8)_{58}^1 \mid 7. (8)_{76}^0$$

А третье применение Метода Гусеницы мы отмечаем уже красным цветом:

$$8. (5)_{14}^1 \mid 9. (5)_{72}^1 \mid 10. (5)_{56}^0$$

Продолжаем (чёрным цветом) решение задачи.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 11. (2)_{63}^1 & 19. (4)_{26}^1 & 27. (4)_{55}^0 & 35. (6)_{57}^0 & 42. (3)_{53}^0 \\ 12. (4)_{31}^1 & 20. (6)_{24}^0 & 28. (4)_{19}^1 & 36. (7)_{66}^0 & 43. (6)_{41}^0 \\ 13. (9)_{42}^1 & 21. (2)_{22}^0 & 29. (3)_{12}^0 & 37. (3)_{46}^0 & 44. (3)_{91}^0 \\ 14. (9)_{68}^1 & 22. (3)_{84}^0 & 30. (6)_{32}^0 & 38. (2)_{37}^0 & 45. (6)_{93}^0 \\ 15. (9)_{87}^1 & 23. (2)_{98}^1 & 31. (4)_{78}^1 & 39. (3)_{38}^0 & \\ 16. (9)_{23}^1 & 24. (2)_{81}^1 & 32. (4)_{47}^0 & 40. (7)_{40}^0 & \\ 17. (9)_{15}^1 & 25. (6)_{86}^0 & 33. (6)_{79}^0 & 41. (7)_{52}^0 & \\ 18. (9)_{96}^0 & 26. (7)_{95}^0 & 34. (3)_{69}^0 & & \end{array}$$



Фиг. 27. Решение задачи Судоку
для примера № 5

В заключение отметим, что наряду с методами и подходами, предложенными в этой работе, основной акцент был сделан нами на борьбу с невнимательностью. Однако следует заметить, что упор на разработку средств навигации всё равно не приводит к 100% результату и часто приходится ловить себя на победных реляциях в случаях, когда желаемое выдаётся за действительное.

В этом смысле занятия Судоку сродни рыбной ловле: проморгалась клёв – лишишься рыбки. Только в случае Судоку задачу просто не решишь.

Кроме того здесь мы предложили классификацию второй ступени задач Судоку по трудности их решения из той бесконечной лестницы классификаций, по которой, как мы надеемся, пойдут наши последователи.

Приложение

О непустоте множеств, входящих в одно семейство терминальных матриц

«... Математика начинается там, где уже
есть однородность и однозначность».

(Из журнала «Знание – сила»)

Пусть n – произвольное составное (натуральное) число и p – один из его делителей такой, что

$$1 < p < \sqrt{n}. \quad (\text{п.1})$$

Для этих n и p мы здесь покажем, что множество терминальных $(L)_{n,p}$ -матриц непусто.

§1. Латинские квадраты

1. Определения и обозначения:

п. 1.1.1. $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ – натуральный ряд чисел.

п. 1.1.2. $N_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $n \in N_n$, – отрезок натурального ряда.

п. 1.1.3. $N'_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

п. 1.1.4. $N_n^2 = \{(x, y) : x, y \in N_n\}$ – *основной n -квадрат*, где пары (x, y) – *позиции* этого квадрата.

п. 1.1.5. Определение. Квадратную n -матрицу с элементами из N_n назовём терминальной.

п. 1.1.6. Определение. Скажем, что квадратная n -матрица с элементами из N_n' обладает свойством (Ls) , если один и тот же ненулевой элемент из N_n встречается в каждой её строке (в каждом её столбце) не более одного раза. В дальнейшем n -матрицу, обладающую свойством (Ls) , мы будем называть $(Ls)_n$ -матрицей.

п. 1.1.7. Определение. Терминальную $(Ls)_n$ -матрицу назовём латинским n -квадратом [3], а её $(m \times n)$ -подматрицу, где $m < n$, латинским (m, n) -прямоугольником.

2. Множество n -подстановок α вида

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad (\text{п.2})$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in N_n$ образует симметрическую группу S_n .

п. 1.2.1. Определение. Подстановку α вида (п. 2) назовём транзитивной, если она удовлетворяет соотношению:

$$\prod_{i=1}^n (i - \alpha_i) \neq 0. \quad (\text{п.3})$$

§2. Формальные произведения подстановок

С легкой руки нашего Учителя, светлой памяти Алексея Андреевича Ляпунова, члена-корреспондента Академии Наук СССР, мы впервые применили понятие формального произведения подстановок в работе [4], что позволило вдвое сократить первоначальный объём статьи.

1. Говоря о подстановках, мы будем различать произведение подстановок (т. е. тоже подстановку) и формальную запись произведения подстановок, рассматриваемую просто как некий символ.

Формальную запись произведения подстановок будем писать в кавычках. Если $T = "R"$, то R назовём значением формального

произведения T и будем писать $R = \langle T \rangle$; операцию формального произведения будем считать ассоциативной.

Пусть

$$T = \prod_{s=1}^n {}^{(s)}\alpha,$$

где n – натуральное число, – формальное произведение подстановок. Его (i, j) -сегментом $T^{(i,j)}$ назовём формальное произведение подстановок, имеющее вид:

$$T^{(i,j)} = \prod_{s=i}^j {}^{(s)}\alpha, \text{ где } i, j \in N_n, i \leq j.$$

Введем сокращение: $T^{(j)} = T^{(1,j)}$ и отметим, что $T^{(i,i)}$ обозначает i -ый сомножитель формального произведения подстановок T . ($i \in N_n$).

2. Пусть $n \in N$ и

$$T = \prod_{s=1}^{n-1} {}^{(s)}\alpha. \quad (\text{п.4})$$

Из наших определений имеем

$$\begin{aligned} T^{(s,s)} &= \langle T^{(s,s)} \rangle = {}^{(s)}\alpha = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ {}^{(s)}\alpha_1 & {}^{(s)}\alpha_2 & \dots & {}^{(s)}\alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \langle T^{(s,s)} \rangle_1 & \langle T^{(s,s)} \rangle_2 & \dots & \langle T^{(s,s)} \rangle_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{п.5})$$

Квадратная n -матрица

$$((T)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \langle T^{(1)} \rangle_1 & \langle T^{(1)} \rangle_2 & \dots & \langle T^{(1)} \rangle_n \\ \langle T^{(2)} \rangle_1 & \langle T^{(2)} \rangle_2 & \dots & \langle T^{(2)} \rangle_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle T^{(n-1)} \rangle_1 & \langle T^{(n-1)} \rangle_2 & \dots & \langle T^{(n-1)} \rangle_n \end{pmatrix}, \quad (\text{п.6})$$

$(i+1)$ -ая строка которой образует с её первой строкой подстановку

$$\langle T^{(i)} \rangle = \prod_{s=1}^i {}^{(s)}\alpha, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (\text{п.7})$$

однозначно строится по формальному произведению подстановок T вида (п. 4).

3. В качестве примера рассмотрим формальное произведение подстановок

$$T = "a_{4,2} b_{4,2} a_{4,2}" , \quad (\text{п.8})$$

$$\text{где } a_{4,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ а } b_{4,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $((T_{4,2}))$ будет иметь такой вид:

$$((T_{4,2})) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{п.9})$$

§3. Циклические группы

В этом параграфе мы покажем, что для любого составного натурального числа n множество латинских n -квадратов непусто.

1. Пусть n – произвольное составное число и его делитель p вместе с ним удовлетворяет (п.1).

Положим

$$\bar{p} = \frac{n}{p} \quad (\text{п.10})$$

и введем следующие обозначения:

$$\text{п. 3.1.1. } I_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} - \text{тождественная } n\text{-подстановка.}$$

$$\text{п. 3.1.2. } s_n = (1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} - n\text{-цикл.}$$

$$\text{п. 3.1.3. } a_{n,p} = s_n^{\bar{p}}; b_{n,p} = s_n^{\bar{p}-1}. \quad (\text{п.11})$$

2. А теперь рассмотрим такое формальное произведение подстановок:

$$T_{n,p} = "(a_{n,p}^{p-1} b_{n,p})^{\bar{p}-1} \cdot a_{n,p}^{p-1}" \quad (\text{п.12})$$

Нашей ближайшей целью является установление того факта, что матрица $((T_{n,p}))$ является латинским n -квадратом.

Вначале заметим, что в $T_{n,p}$ входит $n - 1$ сомножитель. В самом деле, имеем

$$|T_{n,p}| = p(\bar{p} - 1) + p - 1 = n - p + p - 1 = n - 1. \quad (\text{п.13})$$

Из (п.13) следует, что $((T_{n,p}))$ – квадратная n -матрица.

п. 3.2.1. Предложение. Пусть i, j – произвольные числа из N_{n-1} , $i \leq j$. Имеем, что $\langle T_{n,p}^{(i,j)} \rangle$ либо n -цикл, либо тождественная n -подстановка.

Доказательство. Напомним, что n -цикл – это n -подстановка, разложение которой на циклы состоит только из одного цикла. Например, 5-подстановка

$$d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

не является 5-циклом, поскольку разлагается на два цикла: $d = (1 \ 3 \ 2)(4 \ 5)$.

Из теории групп [2] известно, что произвольный n -цикл r_n образует циклическую подгруппу $\tilde{C}_n^{(r)}$ симметрической группы S_n степени n , где

$$\tilde{C}_n^{(r)} = \{r_n, r_n^2, r_n^3, \dots, r_n^{n-1}, r_n^n\}.$$

В случае нашего n -цикла s_n имеем

$$\tilde{C}_n^{(s)} = \{s_n, s_n^2, \dots, s_n^{n-1}, s_n^n\}, \quad (\text{п.14})$$

где все элементы попарно различны и при этом $s_n^n = I_n$, откуда следует, что порядок s_n равен n . С учётом (п.11) и (п.12) это доказывает справедливость п.3.2.1 Предложения.

3. Некое число j из N_{n-1} представим так:

$$j = tp + r, \quad (\text{п.15})$$

где $t \in N'_{\bar{p}-1}$, а r удовлетворяет соотношению

$$0 \leq r < p. \quad (\text{п.16})$$

п. 3.3.1. Предложение. Для j , удовлетворяющего соотношениям (п.15) и (п.16), имеет место формула:

$$\langle T_{n,p}^{(j)} \rangle = \begin{cases} s_n^{n-t}, & \text{при } r = 0; \\ s_n^{r\bar{p}-t}, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (\text{п.17})$$

Доказательство. С учётом (п.12) для j , удовлетворяющего (п.15) и (п.16), имеем

$$T_{n,p}^{(j)} = (a_{n,p}^{p-1} \cdot b_{n,p})^t \cdot a^r, \quad (\text{п.18})$$

где по определению полагаем $(a_{n,p}^{p-1} \cdot b_{n,p})^0 = I_n$. (п.19)

Далее имеем $a_{n,p}^{p-1} b_{n,p} = s^{-1}$. (п.20)

Действительно, как следует из (п.11),

$$a_{n,p}^{p-1} \cdot b_{n,p} = s_n^{\bar{p}(p-1)} \cdot s_n^{\bar{p}-1} = s_n^{\bar{p}p - \bar{p} + \bar{p} - 1} = s_n^{\bar{p}p-1},$$

откуда с учётом (п.10) получаем: $a_{n,p}^{p-1} b_{n,p} = s_n^{n-1}$.

Но так, как порядок s_n равен n , то (п.20) верно.

4. Пусть теперь в (п.15) $r = 0$. Тогда, если и $t = 0$, то $j = 0$ и $\langle T_{n,p}^{(0)} \rangle = I_n = s_n^n$, что соответствует (п.17) при этих параметрах.

При $t > 0$, совершая t раз домножение на s_n^{-1} согласно (п.20), мы получаем для случая $r = 0$, что (п.17) верно.

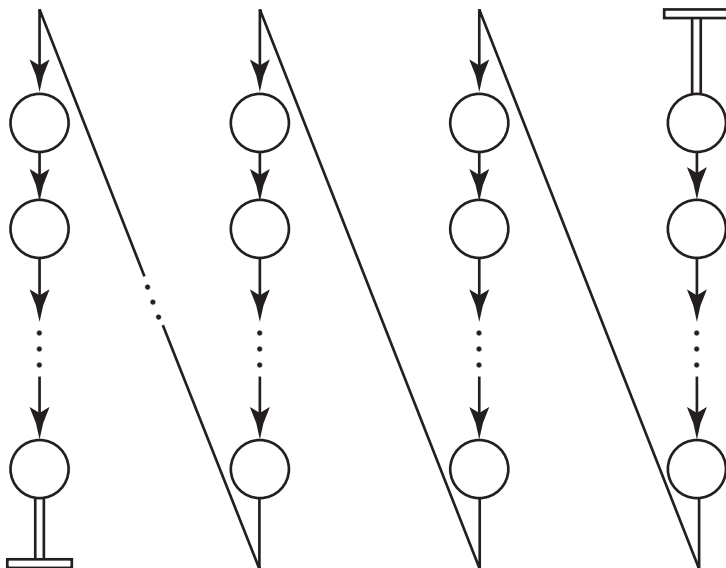
Если же $r > 0$, то в этом случае мы получаем, что (п.17) тоже верно, как это следует из (п.18) с учётом (п.11) и (п.20), что и завершает доказательство п.3.3.1. Предложения.

п. 3.4.1. Лемма. Для формального произведения подстановок $T_{n,p}$ вида (12) матрица $((T_{n,p}))$ является латинским n -квадратом.

Доказательство. Пусть $\tilde{T}_{n,p}$ имеет вид

$$\tilde{T}_{n,p} = "T_{n,p} \cdot b_{n,p}" . \quad (\text{п.21})$$

Свернём значения всех j -сегментов формального произведения $\tilde{T}_{n,p}$ в $(p \times \bar{p})$ – матрицу $\widehat{\tilde{T}_{n,p}}$ по линии развёртки, которая получается из схемы, приведенной на Фиг. 4 поворотом на 90° по часовой стрелке. Тогда будем иметь:



Фиг. п. 1. Видоизменённая линия развёртки

Согласно формуле (п.17) элементы матрицы $\widehat{\tilde{T}_{n,p}}$ будут степенями цикла s_n . Матрица $\bar{\bar{M}}$, составленная из показателей этих степеней, будет выглядеть так:

$$\overline{\overline{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \bar{p} - 1 & \bar{p} \\ \bar{p} + 1 & \bar{p} + 2 & \bar{p} + 3 & \cdots & 2\bar{p} - 1 & 2\bar{p} \\ 2\bar{p} + 1 & 2\bar{p} + 2 & 2\bar{p} + 3 & \cdots & 3\bar{p} - 1 & 3\bar{p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (p-2)\bar{p} + 1 & (p-2)\bar{p} + 2 & (p-2)\bar{p} + 3 & \cdots & (p-1)\bar{p} - 1 & (p-1)\bar{p} \\ (p-1)\bar{p} & (p-1)\bar{p} + 1 & (p-1)\bar{p} + 2 & \cdots & p\bar{p} - 2 & p\bar{p} - 1 \end{pmatrix} \quad (\text{п.22})$$

Если к последней строке матрицы $\overline{\overline{M}}$ прибавить единицу, то получим матрицу $\overline{\overline{M}}'$ такую, что

$$\overline{\overline{M}}' = \widehat{N_n}.$$

Т. о. в матрице только два элемента и совпадают: один с координатами $(p-1, \bar{p})$, а другой – с координатами $(p, 1)$, который согласно линии развёртки на Фиг. п. 1. в матрице $\overline{\overline{M}}$ написан последним. Остальные элементы матрицы $\overline{\overline{M}}$, которые являются показателями степеней цикла S_n , попарно различны между собой.

Отсюда следует, что значения всех j -сегментов формального произведения подстановок $T_{n,p}$ попарно различны между собой, где $j \in N_{n-1}$, и каждое такое значение суть транзитивная n -подстановка. Т. о. $((T_{n,p}))$ есть латинский квадрат, ч. и т. д.

§4. Основная теорема

В этом параграфе мы покажем, что для любых составного числа n и его делителя p , удовлетворяющего (п.1), матрица $((T_{n,p}))$ является терминальной $(L)_{n,p}$ – матрицей.

1. Пусть формальное произведение подстановок $A_{n,p}$ имеет вид

$$A_{n,p} = "a_{n,p}^{p-1}", \quad (\text{п.23})$$

где $a_{n,p}$ имеет вид (п.11), n -произвольное составное число, а p – один из делителей последнего, удовлетворяющий (п.1).

Тогда из наших обозначений с учётом (п.12) имеем

$$T_{n,p} = (A_{n,p})_1 "b_{n,p}" (A_{n,p})_2 "b_{n,p}" \dots (A_{n,p})_{\bar{p}-1} "b_{n,p}" (A_{n,p})_{\bar{p}}. \quad (\text{п.24})$$

Отсюда следует, что матрица $((T_{n,p}))$ состоит из \bar{p} горизонтальных p -полос вида $((A_{n,p}))$ «сшитых» с помощью подстановок $b_{n,p}$.

п. 4.1.1. Теорема. Для любых составного натурального числа n и его делителя p , удовлетворяющего (п.1), матрица $((T_{n,p}))$ является терминальной $(L)_{n,p}$ -матрицей.

Доказательство. С учётом (п. 24) и леммы п.3.4.1. эта теорема будет доказана, если мы покажем, что матрица $((A_{n,p}))$ состоит из p -модулей, являющихся латинскими $(p \times \bar{p})$ -прямоугольниками.

2. Множество N_n разобьём на сегменты M_k , $k = \overline{1, p}$, полагая

$$M_k = N_n^{((k-1)\bar{p}+1, k\bar{p})}, \quad (\text{п.25})$$

где (i, j) -сегмент $N_n^{(i,j)}$ множества N_n имеет вид

$$i, i+1, \dots, j. \quad (\text{п.26})$$

Рассмотрим матрицу M , полагая

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & \dots & M_{p-1} & M_p \\ M_2 & M_3 & M_4 & \dots & M_p & M_1 \\ M_3 & M_4 & M_5 & \dots & M_1 & M_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_p & M_1 & M_2 & \dots & M_{p-2} & M_{p-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{п.27})$$

Заметим, что если в матрицу M вместо каждого элемента M_k подставить его выражение из правой части (п.25), то мы получим горизонтальную p -полосу $((A_{n,p}))$.

С другой стороны, индексы элементов матрицы M можно записать в виде такого формального произведения p -подстановок:

$$B_p = "s_p^{p-1}", \quad (\text{п. 28})$$

где p -цикл s_p имеет вид:

$$s_p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & p-1 & p \\ 2 & 3 & 4 & \dots & p & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{п. 29})$$

Далее заметим, что первому столбцу в матрице M при подстановке вместо M_k его значения из (п.25) соответствует $(p \times \bar{p})$ -свёртка $\widehat{N_n}$ множества N_n , которая образует первый p -модуль p -полосы $((A_{n,p}))$. Остальные столбцы матрицы M можно тоже получить с помощью формального произведения подстановок B_p вида (п.28).

Во всех случаях p -модули p -полосы $((A_{n,p}))$ являются латинскими $(p \times \bar{p})$ -прямоугольниками, что и доказывает п.4.1.1 Теорему.

3. Из п.4.1.1. Теоремы следует, что для любой пары (n, p) , где n – составное натуральное число, а p – один из его делителей, удовлетворяющий (п. 1), $(L)_{n,p}$ -матрица ${}_0A = \|(0)_{i,j}\|$ всегда имеет терминальное (L, p) -расширение и т. о. класс $\mathcal{T}_{n,p}$ непуст.

Далее заметим, что для матрицы A вида (16) $|U_A| = n$.

п. 4.3.1. Определение. $(L)_{n,p}$ -матрицу A назовём *разбавленной*, если выполнено неравенство

$$|U_A| < n. \quad (\text{п.30})$$

п. 4.3.2. Гипотеза. Для любой пары (n, p) , где n – составное число, а p – один из его делителей, удовлетворяющий (п.1), если A – разбавленная матрица, то она имеет I-ую категорию сложности, т.е. $A \in \mathcal{T}_{n,p}$.

п. 4.3.3. Гипотеза. Пусть p_1 и p_2 – два взаимно простых делителя некоего составного числа n , удовлетворяющие (п. 1). Тогда для любой матрицы A из $\mathcal{O}_{n,p}$ множества её терминальных (L, p_1) -расширений и её терминальных (L, p_2) -расширений не пересекаются.

Литература

[1] Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю. *Дискретное программирование*, М., 1969.

[2] Курош А. Г. *Курс высшей алгебры*, 11 изд., М., 1975, с. 398-401.

[3] Рыбников К. А, *Введение в комбинаторный анализ*, изд-во Московского ун-та, 1972, с. 17.

[4] Хенкин В. Э. *О некоторых последовательностях перестановок, возникающих в теории расписаний*, Проблемы кибернетики, вып. 20, М., 1968, с. 231-240.

Содержание

Глава 1. Постановка задачи	5
§1. Решётки и матрицы.....	5
§2. Подмножества	8
§3. Расширения	12
Глава 2. Принцип однозначности	15
§1. Числа и позиции.....	15
§2. Контрольные метки (начало)	19
§3. Исходные данные.....	21
§4. (Sq) -нотация.....	23
§5. Минископ.....	26
§6. Контрольные метки. Продолжение	33
Глава 3. H -расширения	37
§1. Сопряжённые множества	37
§2. Окрестности	39
§3. Контрольные метки. Окончание.....	40
Глава 4. Категории сложности	53
§1. Судоку как математическая задача.....	53
§2. Окончание решения задачи Судоку для примера № 4.....	58
§3. Классификация $(L)_{n,p}$ -матриц.....	61
Приложение	
О непустоте множеств, входящих в одно семейство	
терминальных матриц.....	68
§1. Латинские квадраты.....	68
§2. Формальные произведения подстановок.....	69
§3. Циклические группы	71
§4. Основная теорема.....	75
Литература	78