

ЛОШ ФМЛ информатика, день 3

24 августа 2022

1 Мощности компьютеров

В среднем $2 \cdot 10^8$ простых операций в секунду.

2 Временная асимптотика алгоритмов

`std::sort` $\mathcal{O}(n \log n)$ - оптимальный алгоритм.

`std::reverse` $\mathcal{O}(n)$ - оптимальный алгоритм.

3 Уравнения

Найти решение с относительной погрешностью не более 10^{-3} уравнение $x \ln^2 x = 2 \cdot 10^8$.

Ответ: 1041676.3773265304

Найти решение с относительной погрешностью не более 10^{-3} уравнение $x^{x^x} = 10^{10}$.

Ответ: 2.89424391455593374863

4 `std::vector`

```
#include<vector>
int n = 10; // размер вектора
vector<int> A(n , 1) // 1 - изначально заполняемый элемент
A.push_back(2) // добавить в конец 2
cout << A[4]; // 1
A.resize(100); // дополняет до размера 100 нулями
```

5 Битовые операции

1. побитовый **OR**
2. побитовый **AND**
3. побитовый **XOR**
4. побитовый **NOT**
5. сдвиг влево и сдвиг вправо

6 Задача на кратность

Как проверить делится ли число a на 2^n не используя `%` (остаток от деления)?

Ответ: `(u >> (u << v))` или `(u >> 1) == ((u >> 1) | v)`

7 Представление множеств

Все числа в памяти представлены в двоичной системе исчисления.

Идея: пусть элементы множества это позиции (в 0-нумерации) единичных битов. Тогда каждое число задает свое канальное множество

Пример: $1242 = 10011011010_2$ задает множество $\{1, 3, 4, 6, 7, 10\}$ (позиции единичных битов)

8 Подпоследовательность и подотрезок массива

Подотрезок массива это массив который может получен путем удаление элементов из **начала** и или **конца** исходного массива.

Подпоследовательность массива это массив который может получен путем удаление элементов из **любого** места исходного массива.

9 Задача о количестве объектов

Дан массив A длиной n , нужно найти количество его подпоследовательностей и количество подотрезков.

$\frac{2}{(1+u)^u}$ и u^2 :1.2.1.0

10 Задачи о количестве объектов с заданными характеристиками

Дан массив A , $A_i \leq 10^9$ длиной $n \leq 10^3$, нужно найти количество его подотрезков с четной суммой.

Решите предыдущую задачу при $n \leq 10^5$.

Дан массив A , $A_i \leq 10^9$ длиной $n \leq 20$, нужно найти количество его подпоследовательностей с четной суммой.

(hard)Решите предыдущую задачу при $n \leq 10^5$ и найдите остаток от деления ответа на $10^9 + 7$ или же решите задачу по модулю $10^9 + 7$.

Примечание: $10^9 + 7$ простое число.

11 Модульная арифметика

$$(a + b) \% MOD = (a \% MOD + b \% MOD) \% MOD$$

$$(a \cdot b) \% MOD = (a \% MOD \cdot (b \% MOD)) \% MOD$$

$$(a - b) \% MOD = (a \% MOD - b \% MOD) \% MOD$$

12 Быстрое возведение в степень по модулю

$$a^n = \left(a^{\frac{n}{2}}\right)^2 \text{ если } n \text{ четное.}$$

$$a^n = aa^{(n-1)} \text{ если } n \text{ нечетное.}$$

$$a^n = 1 \text{ если } n = 0.$$

все операции конечно же по модулю

```
int pw(int a, int b, int MOD){
    if(!b) return 1;
    if(b % 2) return (1ll * a * pw(a, b - 1, MOD)) % MOD;
    int x = pw(a, b / 2, MOD);
    return (1ll * x * x) % MOD;
}
```

13 Задача про степень

Даны два натуральных числа a и b такие что $a, b \leq 10^6$, нужно найти a^{2^b} по модулю $10^9 + 7$.

14 Малая теорема Ферма (МТФ)

Если p — простое число и a — целое число, не делящееся на p , то $a^{p-1} - 1$ делится на p .

Более формально: $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Добавим 1 к левой и правой части: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

15 Деление по простому модулю

$b/a \equiv b * a^{-1} \pmod{MOD}$ теперь нам нужно найти a^{-1} , то есть такое число которое при умножении на a дает 1. Вернемся к МТФ: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ и представим $a^{p-1} = aa^{p-2}$ тогда: $aa^{p-2} \equiv 1 \pmod{p}$ следовательно $a^{p-2} \equiv a^{-1} \pmod{p}$ и получаем равенство :

$$b/a \equiv ba^{MOD-2} \pmod{MOD}$$

16 Комбинаторные объекты по модулю

$$\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!} \equiv n!(k!(n-k)!)^{MOD-2} \pmod{MOD}$$

Все факториалы мы можем предподсчитать.

17 Основная теорема арифметики (ОТА)

Любое натуральное число больше единицы может быть разложено в виде простых множителей и это разложение единственно (если не учитывать порядок множителей).

18 Задача на разложение

Дано натуральное число a , $a \leq 10^{12}$ найти разложение числа на простые множители. Оценить максимальное количество множителей.

19 Решето Эратосфена

Оценка временной сложности:

$$\mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor\right) = \mathcal{O}\left(n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}\right) \approx \mathcal{O}\left(n \int_1^n \frac{1}{x} dx\right) = \mathcal{O}(n \ln n) = \mathcal{O}(n \log n)$$

20 Задача о делителях

Найти число которое не больше 10^5 с максимальным количеством делителей.

Найти число которое не больше 10^7 с максимальным количеством делителей.

21 Алгоритм Евклида

```
int gcd(int a, int b) {
    if (b == 0)
        return a;
    return gcd(b, a % b);
}
```

или встроенная функция

```
#include<algorithm>
__gcd(a, b);
```

22 Задача про НОД

Дан массив A , $A_i \leq 10^9$ длиной $n \leq 10^5$ найти НОД (наибольший общий делитель) всех его элементов. Оцените временную сложность вашего алгоритма.

ОТВЕТ: $\mathcal{O}(n + \log(\max A_i))$ а не $\mathcal{O}(n \log(\max A_i))$!!!

23 (hard) Задача про НОД

Дан массив натуральных чисел A , $A_i \leq 10^6$ длиной $n \leq 10^5$ найти максимальный НОД по всем возможным парам элементов, пары из одинаковых индексов не считать.

Подсказка №2: подумайте об $\mathcal{O}(\log C + n)$ или $\mathcal{O}(C + n \vee C)$ или об $\mathcal{O}(C + n \vee C)_*$, где $C = \max A_i$.
Подсказка №1: ограничение на A_i меньше чем обычно.

24 Задача о поиске подотрезка с максимальной суммой

Пусть дан массив целых чисел A , $|A_i| \leq 10^9$ длиной $n \leq 10^2$ найти отрезок с максимальной суммой.
Решите эту же задачу при $n \leq 5 \cdot 10^3$.
Решите эту же задачу при $n \leq 10^6$.

25 Очередная задача про массив

Дан массив целых чисел A , $1 \leq A_i \leq 10^9$ длиной $n < 10^5$ n - нечетно, в котором все элементы парные (встречается дважды), кроме одного, нужно найти этот элемент.

Пример: $A = \{1, 3, 4, 4, 1, 2, 2\}$, ответ: 3.

26 std::set и std::map

```
#include<set>
set<int> A;
A.insert(2); // добавить 2
A.erase(2); // удалить 2
cout << A.count(2); // проверить на существование
```

```
#include<map>
map<int, int> A;
A[785970] = 10;
cout << A[785970]; // 10
cout << A[780]; // 0
```

27 Вычисление числа π

28 (Hard) Для тех кому скучно №1.

Дан массив натуральных чисел A , $A_i \leq 2 \cdot 10^7$ длиной $n \leq 5 \cdot 10^4$ разрешается прибавлять или вычитать из любого элемента по 1, но количество операций не должно превосходить n какой максимальный НОД всех элементов вы сможете получить?

Ограничение: 3 секунды и 2048 мБ.

Подсказка №3: Что там по метеоритам?

Подсказка №2: Если мы знаем какое число находится в оптимальном массиве, как узнать ответ?

Подсказка №1: Сколько элементов изменится не больше чем на 1?

29 (HARD) Для тех кому скучно №2.

Даны три натуральных числа a , b и p такие что $a, b < p$ и p - **простое**. Разрешается делать над a действия трех видов:

1. заменить a на $(a + 1) \bmod p$
2. заменить a на $(a - 1) \bmod p$
3. заменить a на $a^{p-2} \bmod p$

Нужно за 300 операций (можно меньше) превратить a в b . Требуется найти последовательность действий. Если ответов несколько выберите любой.

Для каких ограничений на p вы умеете решать данную задачу с ограничением по времени 3 секунды и по памяти 2048 мБ?

Подсказка №2: Забудьте о ДП, подумайте о днях рождения и о BFS.
Подсказка №1: Вы же написали динамическое программирование?