Основные алгоритмы и методы, используемые при решении задач по теме «Производные».

1. Поиск производной

Если необходимо найти производную от простой функции можно воспользоваться таблицей производных (рис. 1).

1. $c' = 0,\ c = \mathrm{const}$;
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$;
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$;
4. $\left(e^x\right)' = e^x$;
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
7. $(\sin x)' = \cos x$;
8. $(\cos x)' = -\sin x$;
9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;
10. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
11. $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
14. $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
15. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;
16. $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$;
17. $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$;
18. $(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$;
19. $(\mathrm{cth}\, x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$;

Рис. 1

или применить общую формулу (рис. 2).

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Рис. 2

Производная сложной функции сводится к простой путем замены сложной функции на переменную, но при этом получившуюся функцию нужно умножить на производную замененной сложной функции. Пример таблицы сложных функций рисунок 3.

$$
\begin{array}{ll}
(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' & (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u' \\
(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' & (e^u)' = e^u \cdot u' \\
(\sin u)' = \cos u \cdot u' & (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u' \\
(\cos u)' = -\sin u \cdot u' & (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \\
(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' & (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \\
(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u' & (arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u' \\
(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' & (arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'
\end{array}
$$

Рис. 3

Также полезно помнить об основных правилах дифференцирования (рис. 4).

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности, $(cu)' = c \cdot u'$;

3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$.

Рис. 4

Уравнение касательной к графику функций:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Производную также можно вычислить, используя логарифм, тогда на рисунке 5 можно увидеть следующее соотношение:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}$$

Рис. 5

Поиск дифференциала: пусть функция y = f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0.Тогда если существует такое число А, что приращение Δy этой функции в точке x_0, соответствующее приращению Δx аргумента, представимо в виде:

$$\Delta y = A * \Delta x + \alpha(\Delta x) * \Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, то функция f(x) называется дифференцируемой в точке x_0. При этом главная, линейная относительно Δx, часть этого приращения, т.е. А* Δx, называется дифференциалом функции в точке x_0 и обозначается dy или $df(x_0)$.

Тогда для дифференциалов высших порядков справедливо: в общем случае дифференциалом n-го порядка от функции $f(x)$ в точке х называется дифференциал от дифференциала (n-1)-го порядка функции $f(x)$ в этой точке:

$$d^n y = d(d^{n-1} y).$$

Пример вычисления дифференциала (рис. 6):

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — некоторые функции, дифференцируемые в точке x. Тогда:

1. $dC = 0$, где C — константа.
2. $d(\alpha u) = \alpha \cdot du$, где α — константа.
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
4. $d(u \cdot v) = udv + vdu$.
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, где $v(x) \neq 0$.

6. *Инвариантность формы дифференциала.* Если $y = f(u(x))$ — сложная функция, то

$$df(u) = f'(u)\,du, \quad \text{или} \quad dy = y'_u \cdot du,$$

т. е. форма дифференциала не меняется (инвариантна) независимо от того, рассматривается y как функция независимой переменной x или зависимой переменной u.

Рис. 6

Первое правило Лопиталя: если предел функции f(x) и если предел функции g(x) равны 0 и имеют неопределенность вида 0/0 и существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, тогда существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем они равны.

Второе правило Лопиталя: если предел функции f(x) и если предел функции g(x) равны 0 и имеют неопределенность вида ∞/ ∞ и существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, тогда существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем они равны.

Формула Тейлора можно применять при разложении элементарных функций в ряд (рис. 7).

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\big((x - x_0)^n\big) \text{ при } x \to x_0.$$

Рис. 7