9.2.12

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2+x+3x^5}$$

1 сп. $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ $[a; +\infty)$

$\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ – сход $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ – сход

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ – расход $\Rightarrow \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ – расх.

$f(x) = \frac{1}{x^5}$ $\varphi(x) = \frac{1}{2+x+3x^5}$ $\underset{\text{т.к.}}{0 <} f(x) \le \varphi(x)$ $[1; +\infty)$

1) $f(x) = \frac{1}{x^5}$ – расх – ? $\Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{2+x+3x^5}$ – расх.

2) $\int_1^{+\infty} f(x) = \frac{1}{x^5}$ – сход? расх?

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5} = \lim_{b \to +\infty} \left(\int_1^b \frac{dx}{x^5} \right) = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{x^{-5+1}}{-5+1} \right) \Bigg|_1^b =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{x^{-4}}{4} \right) \Bigg|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{4} (b^{-4} - 1^{-4}) \right) = -\frac{1}{4} \lim_{b \to +\infty} (b^{-4} - 1) =$$

$$= -\frac{1}{4} \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{b^4} - 1 \right) = -\frac{1}{4}(0-1) = -\frac{1}{4} \cdot (-1) = \frac{1}{4}$$

т.е. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$ – сход т.к. $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ – сходящийся $\Rightarrow$ не можем применить признак сходимости в 1 способе

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad \varphi(x) = \frac{1}{2+x+3x^5}$ $\quad [1, +\infty)$

$0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$

$\left[\begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{2+x+3x^5} \\ \frac{1}{2+x+3x^5} < \frac{1}{x} \end{array} \right.$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \left[\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad \begin{array}{l} \alpha > 1 \Rightarrow \int \text{ – сход} \\ \alpha \leq 1 \Rightarrow \int \text{ – расх} \end{array} \right] = [\alpha = 1]$ – расх.

Зсп. $f(x) > 0$ $\quad \varphi(x) > 0$ $\quad x \in [a; +\infty)$

$\exists \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k \neq 0$

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ – оба сходящиеся или оба расход.

$f(x) = \frac{1}{2+x+3x^5} = [\text{на } [1; +\infty]] > 0$

$\varphi(x) = \frac{1}{x^5} = [[1; +\infty)] > 0$

Проверим

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{2+x+3x^5}}{\frac{1}{x^5}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^5}{2+x+3x^5} =$

$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^5 \cdot 1}{x^5\left(\frac{2}{x^5} + \frac{1}{x^4} + 3\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{2}{x^5} + \frac{1}{x^4} + 3} =$

$= \frac{1}{0+0+3} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ т.е. 1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ –

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \neq 0$

Тогда $f(x) > 0$

$\varphi(x) > 0$

$\exists \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \neq 0$

Тогда проверим

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5} = [\text{ан. способ } 1] = \frac{1}{4} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \text{сход.}$

Тогда $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2+x+3x^5}$ – сходится

9.2.46 $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \Big[$ при $x=3$ $\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ – имеет разрыв в точке $x=3$

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3-0} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = \\ \lim\limits_{x \to 3+0} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = \left[\begin{array}{l} x \to 3+0 \Leftrightarrow x > 3 \\ \text{т.е. } 9-x^2 < 0 \Rightarrow ?! \end{array}\right] \end{cases}$

Определяем род разрыва $\Rightarrow$ разрыв 2 рода.

$x=3$ – верхний предел интегрирования

$x=b$ – разрыв 2 рода $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\right)$

$\exists \lim \Rightarrow \int$ – сход. ; $\nexists \lim \Rightarrow \int$ – расх. $\Big] =$

$= \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(\int_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}\right) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(\arcsin \frac{x}{3} \Big|_0^{3-\varepsilon} \right) =$

$= \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(\arcsin \frac{3-\varepsilon}{3} - \arcsin \frac{0}{3}\right) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(\arcsin \frac{3-\varepsilon}{3} - 0\right)$

$= \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(\arcsin \frac{3-\varepsilon}{3}\right) = \arcsin \frac{3-0}{3} = \arcsin 1$

$= \frac{\pi}{2}$