**ИН-84**

**ПРАКТИКУМ**

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ:**

**СФЕРЫ И ГРАНИЦЫ ПРИМЕНЕНИЯ**

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

Раздел 1. Теория.

Введение.

Глава 1. Астрономия или движение планет вокруг солнца.

Глава 2. Биология или рост популяции насекомых и другой живности.

Глава 3. География или чему равна длина береговой линии.

Глава 4. Информатика или что может компьютер.

Глава 5. Математика или как посчитать объем.

Глава 6. Физика или уронила Маша мячик.

Глава 7.Химия или периодическая реакция в пробирке.

Глава 8. Экология или волки и зайцы.

Глава 9. Экономика или большие матрицы.

Заключение.

Литература.

Раздел 2. Задачи.

Глава 1. Астрономия или движение планет вокруг солнца.

Глава 2. Биология или рост популяции насекомых и другой живности.

Глава 3. География или чему равна длина береговой линии.

Глава 4. Информатика или что может компьютер.

Глава 5. Математика или как посчитать объем.

Глава 6. Физика или уронила Маша мячик.

Глава 7.Химия или периодическая реакция в пробирке.

Глава 8. Экология или волки и зайцы.

Глава 9. Экономика или большие матрицы.

Раздел 3. Ответы и комментарии.

Глава 1. Астрономия или движение планет вокруг солнца.

Глава 2. Биология или рост популяции насекомых и другой живности.

Глава 3. География или чему равна длина береговой линии.

Глава 4. Информатика или что может компьютер.

Глава 5. Математика или как посчитать объем.

Глава 6. Физика или уронила Маша мячик.

Глава 7.Химия или периодическая реакция в пробирке.

Глава 8. Экология или волки и зайцы.

Глава 9. Экономика или большие матрицы.

Приложение. Листинги программ на языке Паскаль.

**РАЗДЕЛ 1. ТЕОРИЯ.**

**ВВЕДЕНИЕ**

Науки юношей питают,

Отраду старым подают,

В счастливой жизни украшают,

В несчастной случай берегут…

Науки пользуют везде –

Среди народов и в пустыне,

В покое сладки и в труде.

М.В. Ломоносов

*Рассматриваются понятия модели, моделирования, приводится классификация моделей. Особое внимание уделяется математическим моделям и компьютерному моделированию в различных областях знания.*

Под словом «модель» в различных областях человеческой деятельности скрываются весьма разные понятия. Говорят о моделях обуви, одежды, атома, вселенной, мостов, ракет, машин и других технических сооружений. В научных исследованиях термин «модель» употребляется в двух различных значениях: либо в значении некоторой теории, либо в значении того, что некоторая теория описывает, отражает.

Слово «модель» в переводе с латинского языка (modus, modulus) означает мера, образ, способ и т.д. В математических науках словом «модель» принято обозначать теорию, которая обладает структурным подобием по отношению к другой теории. Две такие теории называются изоморфными, и одна из них выступает как модель другой и наоборот. Можно рассмотреть, как пример, декартовые координаты. Их введение в математику позволило алгебраические задачи сводить к геометрическим задачам, а геометрические задачи – к алгебраическим. В таких науках, как физика, химия, биология и других естественных науках термин «модель» употребляется в другом смысле, не для обозначения теории, а для обозначения того, что теория описывает. Здесь со словом «модель» связаны два значения. Во-первых, модель выступает как некоторая идеализация, упрощение действительности. Во вторых, в более узком смысле, термин «модель» применяют для обозначения физической аналогии, как отношение сходства систем, состоящих из элементов разной физической природы, но обладающих одинаковой структурой. Приведенные объяснения термина «модель» наиболее широко используются в научной литературе. Однако, существуют и другие толкования термина «модель». Предположим, что мы исследуем некоторый объект (Солнце, Луну, лягушку, микроба и т.п.). Тогда, модель этого объекта, – это мысленно представимая или материальная система (реализованная в металле, пластмассе, резине и т.д.), которая, отображая какие-либо свойства объекта или воспроизводя сам объект исследования (Солнце, Луну, лягушку, микроба и т.п.), может замещать его таким образом, что ее исследование дает нам новые сведения об этом объекте. Из этого определения следует, что моделирование это такой способ исследования, когда изучение реальной системы заменяется изучением ее модели, а затем полученные с помощью модели результаты распространяются на изучаемую систему. Это хорошо подтверждается историческими фактами, а именно, открытиями позитрона Полем Дираком и нейтрино Энрико Ферми. В начале XX века, исследуя уравнения квантовой механики, П.Дирак обнаружил решение уравнения, которое характеризовало некоторую гипотетическую элементарную частицу. Через несколько лет была экспериментально обнаружена эта гипотетическая частица, названная в последствии позитроном. Аналогичным образом Э.Ферми предсказал существование элементарной частицы нейтрино (в переводе с итальянского языка означает «нейтрончик»), который был экспериментально обнаружен только через 30 лет.

Моделирование основывается на методе аналогии, который позволяет установить отношение изоморфизма (взаимнооднозначного соответствия) между двумя объектами, каждый из которых может быть абстрактным или реально существующим.

Модель и теория по существу отличаются друг от друга. Под теорией понимается совокупность утверждений об общих законах данной предметной области, а под моделью либо конкретный образ изучаемого объекта, либо какой то другой реально существующий объект и сходный с ним в отношении некоторых структурных свойств. Следовательно, модель не теория, а то, что описывается данной теорией своеобразный предмет данной теории. Таким образом, модель специфическая форма познания, качественно отличающаяся от теории, а также от гипотезы и чувственного образа.

В основе классификации лежит материалистическое понимание модели, как средство отображения, воспроизведения той или иной части действительности с целью ее более глубокого познания. Отношение между моделью и оригиналом, которое является отношением отражения или воспроизведения, варьируется в зависимости от способа воспроизведения. Либо от тех средств, при помощи которых строится модель, либо от характера тех объектов, тех областей объективного мира, которые воспроизводятся в моделях.

В зависимости от способа построения моделей, от средств, какими производится моделирование изучаемых объектов, все модели могут быть разделены на 2 класса: материальные (вещественные, реальные) и идеальные (мысленные, воображаемые).

К первому классу относятся модели, которые существуют объективно и воплощены в материальных предметах (дереве, стекле, металле, электрических полях и т.д.). Сюда же относятся и так называемые живые модели, которые отобраны человеком в силу присущих им свойств, позволяющих в упрощенной форме имитировать изучаемый сложный процесс. Например, в опытах используются специально выведенные линии (так в физиологии называются различные породы) крыс: Вистар, Аоки, Окамото и др. Материальные модели в свою очередь могут быть разделены на 3 основные группы: пространственно подобные, физически подобные и математически подобные. Первая группа представляет собой сооружения, создаваемые для воспроизведения или отображения пространственных свойств или отношений объекта. Отношение этих моделей к объекту характеризуется геометрическим подобием как обязательным условием. К этой группе относятся макеты, пространственные модели кристаллов, молекул. Например, пространственная модель ДНК (дезоксирибонуклеиновой кислоты) построенная Ф.Криком и Д.Уотсоном в 1953 г. Вторая группа состоит из моделей созданных для воспроизведения динамики изучаемых процессов, различного рода зависимостей и закономерных связей, структуры и других характеристик изучаемых явлений. Основой модельного отношения здесь является физическое подобие модели и объекта предполагающее одинаковость или сходство их физической природы и тождественность законов движения. Отношение таких материальных моделей к отображаемой системе может быть не более как изменением пространственной или временной шкалы. Например, в кораблестроении, прежде чем строить корабль строят его модель, которую испытывают в бассейне и по ходовым характеристикам модели определяют довольно точно такие величины, как максимально допустимый крен корабля, его скорость при разных режимах и другие характеристики. В генетике в качестве модели для исследования проблем наследственности используют насекомое дрозофилу, ввиду большой скорости ее размножения. К третьей группе относятся системы, не обладающие с объектом одной и той же физической природой и не сохраняющие с ним физического и геометрического подобия. Здесь отношением между моделью и реальным объектом выступает аналогия. Эта аналогия может быть структурной и функциональной, что находит свое выражение в наличии одинакового математического формализма, которым описывается поведение этих систем. Поэтому эти модели называются математическими. К ним относятся аналоговые модели (например, электрические модели механических, биологических и прочих явлений), структурные, цифровые и различные кибернетические функциональные модели.

Материальные модели неразрывно связаны с идеальными, ибо человек прежде чем построить какую либо модель из каких-либо материалов, ее мысленно представляет себе, теоретически обосновывает. Иначе говоря, в конце процесса труда получается результат, который уже в начале этого процесса имелся в представлении человека, т.е. идеально. Это применимо и к характеристике идеальных моделей. Последние, прежде чем превратиться в действительность и стать материальными моделями, существуют первоначально в человеческой голове как некоторые теоретические схемы. В этом смысле их можно назвать идеальными. Эти модели могут быть названы идеальными также и потому, что все преобразования в них, все переходы в другое состояние, все преобразования элементов осуществляются мысленно, т.е. в сознании человека. Особенность идеальных моделей - они не обязательно воплощаются в действительности. Например, герой комедии Н.В. Гоголя «Мертвые души» Манилов сидел на берегу озера и мечтал о мосте через озеро. Однако, этот мост так и не был построен.

Идеальные модели могут быть разделены на 3 группы: образные, знаковые и промежуточные между первой и второй группами. Образные модели характеризуются тем, что, во-первых, элементы, из которых конструируются такие модели, представляют собой образы каких либо реальных, хорошо известных явлений доступных непосредственному наблюдению и, во вторых, некоторые свойства и отношения моделируемых явлений представлены в этих моделях в форме, доступной чувственности. Таким образом, можно сказать, что образные модели являются наглядными образами элементов, структуры и поведения объектов. Эти модели часто фиксируются в виде рисунка, чертежа, схемы. В знаковых моделях элементы, отношения и свойства моделируемых явлений выражены при помощи определенных знаков. Особенность таких моделей, - это полное и принципиальное отсутствие сходства между элементами такой знаковой модели и соответствующими элементами объекта, ибо понятие знака не предполагает сходства между элементами знаковой модели и соответствующими элементами объекта. Таким образом, в отличие от моделей первого рода знаковая модель не обладает наглядностью, в смысле, какого бы то ни было сходства ее элементов с элементами объекта. Но знаковым моделям присущи некоторые элементы наглядности. Например, структурные формулы в химии. Образные и знаковые типы моделей образуют два крайних случая. Чаще в идеальных моделях происходит сочетание первого и второго рода.

Приведенная классификация моделей дает основу для анализа двух основных функций моделей:

1) практической функции в качестве орудия или средства научного эксперимента в его специфической форме, связанной с использованием материальных моделей,

2) теоретической функции в качестве специфического образа действительности, в котором соединяются элементы логического и чувственного, абстрактного и конкретного, общего и единичного, наглядного и ненаглядного.

Рассмотрим, в качестве примера, самое сложное, т.е. явление жизни. Жизнь - сложный, постоянно изменяющийся процесс. Ввиду необычайной сложности биологических объектов, их особенности можно выявить, рассмотрев уровни организации живого и методы их исследования, поскольку новые научные представления всегда возникали в результате создания и использования новых методов исследования. На протяжении всей истории биологии таких методов было создано 4: описательный, сравнительный, исторический и экспериментальный.

Описательный метод был характерен до XVIII века. В этот период в области биологии занимались главным образом еще накоплением и первоначальной систематизацией огромного материала, как ботанического и зоологического, так и анатомического и собственно физиологического. О сравнении форм жизни, об изучении их географического распределения их климатологических и тому подобных условий существования почти еще не могло быть и речи. Здесь только ботаника и зоология достигли приблизительного завершения благодаря Карлу Линнею. Описательный метод широко используется и в наше время, благодаря развитию техники. Например, появились более мощные микроскопы, которые позволяют исследовать субклеточные особенности строения клеток и измерять их.

В XVIII веке в биологии утверждается сравнительный метод, позволяющий изучать организмы путем сравнения их и выявления у них сходств и различий. С помощью этого метода были получены сведения, которые позволили в XVIII веке заложить основы систематики растений и животных (К.Линней), а в XIX веке сформулировать клеточную теорию (Т.Шванн) и учение об основных типах развития (К.Бэр).

В XIX веке, благодаря трудам Ч.Дарвина, в биологию входит исторический метод, который превратил биологию из науки чисто описательной в науку, объединяющую, и который позволяет понять, как произошли и как функционируют различные живые системы. Благодаря этому методу биология стала, как и все естествознание в целом, упорядочивающей наукой, наукой о процессах, о происхождении и развитии этих процессов и о связи соединяющей эти процессы природы в одно великое целое. Этот метод стал фундаментальным, эволюционным принципом, на основе которого стала происходить перестройка биологии на всех уровнях организации живого.

Экспериментальный метод, как принцип естественно научного познания был впервые поставлен английским философом Ф.Бэконом. Можно сказать, что Ф.Бэкон родоначальник всей современной экспериментальной науки. Эксперимент позволяет изучать явления целенаправленно в условиях, которые можно воссоздавать заново. Например, В.Гарвей использовал эксперимент для изучения кровообращения. Позже, благодаря трудам И.М.Сеченова, К.Бернара, И.П.Павлова и других ученых физиология стала экспериментальной наукой. Сейчас экспериментальный метод используется практически во всех областях биологической науки. Этот метод постоянно развивается, благодаря развитию техники, улучшению методик, развитию таких наук как химия, физика и других. Новое качество, заложенное в экспериментальном методе, вызвало качественные изменения в моделировании. В последние годы быстро развивается, как моделирование на уровне организмов, так и на молекулярном и клеточном уровнях. Это определило новые подходы к изучению явлений жизни. Рассматривая методологию изучения природы до ХХ века можно отметить, что разложение природы на ее отдельные части, разделение различных процессов и предметов природы на определенные классы, исследование внутреннего строения органических тел по их многообразным аналитическим формам, все это было основным условием тех огромных успехов, которые были достигнуты в области познания природы за последние четыреста лет.

Однако в подходах к изучению жизни изменения произошли не только по причине развития экспериментального метода. Важная роль здесь принадлежит также повышению уровня теоретического мышления. Было обосновано методологическое направление исследований сложных объектов и явлений в виде системного подхода к ним. В частности, вся доступная нам природа образует некую систему, некую совокупную связь тел, причем мы понимаем здесь под словом тело все материальные реальности, начиная от звезды и кончая атомом. В том обстоятельстве, что эти тела находятся во взаимной связи, уже заключено то, что, они взаимодействуют друг с другом, и это их взаимное воздействие друг на друга и есть именно движение. Уже здесь обнаруживается, что материя немыслима без движения. И если далее материя противостоит нам как нечто данное, как нечто несотворимое и неуничтожимое, то отсюда следует, что и движение несотворимо и неуничтожимо. Этот вывод стал неизбежным, лишь только люди познали вселенную как систему, как взаимную связь тел. В биологии действует важный методологический принцип, получивший название системно - структурного подхода к познанию организации и функции объектов материальной действительности. Сущность этого подхода заключается в расчленении живых систем на уровни организации, изучение этих уровней, а затем интеграция полученных данных с целью синтеза знаний. Таким образом, развитие представлений об уровнях организации живого произошло в результате проникновения научной методологии в исследование явлений жизни, а также развития философских идей о взаимодействии объектов материальной действительности, качественном усложнении исходных объектов и образовании нового качества.

Структурный функциональный подход к изучению явлений жизни позволил расчленить организацию живого на ряд уровней и приступить к их исследованию. Различают следующие уровни организации живого: молекулярный, клеточный, тканевой, органный, организменный, популяционный, видовой, биоценотический и биосферный. Каждому из перечисленных уровней присущи специфические особенности. Между указанными уровнями организации живого существует диалектическое единство. Переход от одного уровня к другому связан с сохранением функциональных механизмов действующих на предшествующих уровнях и сопровождается появлением новых типов структуры и функции, новых взаимодействий (нового качества). Исходя из разделения живого на уровни организации, исследователи строят различные модели.

В биологии широко используются как материальные, так и идеальные модели. Материальные модели в биологии используются в основном в виде живых и кибернетических моделей. При выборе живых моделей обычно исходят из следующих требований:

1) модель должна быть проще оригинала и изучена лучше,

2) в модели изучаемые свойства должны быть более ярко выражены, чем в оригинале,

3) функции модели должны соответствовать функциям оригинала.

Живые модели часто используют как заместители человека в опасных для жизни и здоровья экспериментах. Например, при изучении действия на организм повышенных доз радиации, повышенного давления, при исследовании рака и других тяжелых заболеваний. Живые модели используются с давних времен. Так, Г.Мендель выявил в опытах на горохе генетические закономерности, И.П.Павлов на собаках изучал условные рефлексы. В космос, прежде чем отправить человека, запускали собак.

В последнее время в биологии и других естественных науках (физике, химии, экологии, геологии, географии и др.) широко развивается математическое моделирование. В частности, естествоиспытателям следует больше внимания обращать на построение и исследование математических моделей. Повышение математического образования облегчит построение ими математических моделей. Исследование этих моделей в ряде случаев может помочь в открытии новых явлений и закономерностей, которые трудно, а подчас невозможно обнаружить, пользуясь только традиционными способами. Построение и исследование математических моделей поможет предсказать и объяснить получение новых неизвестных фактов, поможет создать новые стройные теории, обобщающие экспериментальные факты. Математическое моделирование в естествознании имеет ряд преимуществ, а именно, математическая модель позволяет:

1) проанализировать огромное количество различных вариантов,

2) подвергнуть анализу отдельные стороны изучаемого явления, как бы в изолированном виде,

3) произвести анализ таких аспектов опыта, которые вообще не могут быть воспроизведены в реальной обстановке.

В настоящее время построено множество моделей в той или иной степени соответствующих реальности. Так, созданы модели в астрономии, биологии, экологии, химии, экономике, физике и во многих других областях человеческой деятельности.

**ГЛАВА 1. АСТРОНОМИЯ**

**ИЛИ ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕТ ВОКРУГ СОЛНЦА**

Две вещи наполняют душу всегда новым и

все более сильным удивлением и благоговением,

чем чаще и продолжительнее мы размышляем о них, -

это звездное небо надо мной и моральный закон во мне.

И. Кант

*Рассматривается движение планет вокруг солнца и спутников вокруг планет по круговым и эллиптическим орбитам. Рассматриваются возмущения, оказываемые на спутники со стороны внешних сил.*

При изучении астрономии вы познакомились с такими фактами, как вращение Луны вокруг Земли, вращение Земли вокруг Солнца, вращение Солнца вокруг центра Галактики и т.д. Сейчас это общеизвестно и никого не удивляет. Однако, совсем недавно (несколько столетий назад) это было не так, и подобные утверждения считались ересью и людей позволивших себе высказывать подобные мысли сажали в тюрьму или сжигали на кострах (вспомните Галилео Галилея, Джордано Бруно и др.). Для получения этих, казалось бы, очевидных фактов, потребовались столетия собирания и обобщения экспериментальных фактов (Тихо Браге и др.), теоретического осмысления этих фактов (Иоганн Кеплер и др.) и обобщения (Исаак Ньютон и др.).

ДВИЖЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ.

Самым простым движением одного тела относительно другого является движение по окружности. И действительно, планеты солнечной системы движутся по орбитам близким к круговым. Согласно законам физики ускорение *а*, радиус круговой орбиты *r* и скорость тела *v* удовлетворяют соотношению

.

Сила *F*, приложенная к телу массой *m*, связана с ускорением *а* соотношением

Согласно закону всемирного тяготения Ньютона между телами с массами *m* и *M* действует сила притяжения

где *G* – постоянная тяготения (экспериментально установлено, что

*G* = 6,67 10-11 м3/кг с2 ), *r* – расстояние между телами.

Предполагается, что сила притяжения между телами, размеры которых значительно меньше расстояния между ними, направлена по прямой соединяющей эти тела.

Тогда из двух соотношений

получим

Период обращения тела по орбите

,

или, после возведения в квадрат и подстановки v, получим

ДВИЖЕНИЕ ПО ЭЛЛИПСУ.

Согласно закону Ньютона можно записать в векторном виде

,

где

- ускорение,

- сила притяжения между телами с массами *m* и *M, G* – постоянная тяготения.

Или

,

или, проектируя на декартовы оси координат (x, y), получим

,

,

или

,

,

где r = x2 + y2 .

Полученные уравнения можно представить в разностном виде

,

,

где

,

,

- шаг по времени *t* в квадрате.

Окончательно можно переписать

,

.

ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА.

В 1609 г. Иоганн Кеплер сформулировал следующие законы:

1. Орбиты планет – эллипсы, в одном из фокусов которых находится Солнце.

2. Радиус Солнце – планета описывает за одинаковые промежутки времени одинаковые площади.

3. Для планет обращающихся вокруг Солнца величина *Т2/а3* постоянная, где *Т* – период обращения планеты вокруг Солнца*, а* – большая полуось эллипса, по которому движется планета.

ВОЗМУЩЕНИЯ, ОКАЗЫВАЕМЫЕ НА СПУТНИКИ СО СТОРОНЫ ВНЕШНИХ СИЛ.

Предположим, что спутник вращается вокруг Земли и на него действует, кроме притяжения Земли, слабая постоянная сила *F*, направленная параллельно оси x (см. Рис.1.). Эта сила F действительно существует и вызвана «солнечным ветром», т.е. давлением света. Световое давление на твердые тела открыл выдающийся русский ученый П.Н. Лебедев в конце XIX века. Тогда уравнения движения спутника можно переписать в следующем виде

,

,

или в разностном виде

,

,

где

,

,

- шаг по времени t в квадрате.

Можно переписать

,

.

**ГЛАВА 2. БИОЛОГИЯ**

**ИЛИ РОСТ ПОПУЛЯЦИИ НАСЕКОМЫХ И ДРУГОЙ ЖИВНОСТИ**

Подсчитано, что через несколько

поколений одна-единственная инфузория

путем простого деления самой себя и своего

потомства покрыла бы всю Землю.

П. Тейяр де Шарден

*Рассматривается рост популяции саранчи, мух, кроликов и другой живности при различных внешних условиях.*

Известно, что саранча обитает в разных странах и иногда, в благоприятные годы для саранчи, но не для людей, саранча объединяется в целые тучи, которые простираются на десятки километров и уничтожают в считанные часы поля, засеянные полезными злаками, луга и пастбища. Стаи саранчи перелетают с одних полей на другие и во время перелетов закрывают солнце настолько, что становится пасмурно. В древние времена нашествие саранчи было народным бедствием, поскольку полчища саранчи уничтожали всё растительное (поля, луга, пастбища), и народ оставался без средств к существованию (всё, что было посеяно саранча уничтожает в считанные часы, а также уничтожает пастбища для скота и домашним животным нечем питаться). С давних времен люди задумывались над тем, почему в одни годы саранчи много, а в другие ее мало? И вообще, откуда столько саранчи могло взяться? В древние времена считали, что это кара Господня или Аллаха и пр. Но так ли это на самом деле?

Аналогично люди наблюдали, что в одни годы очень много летом бывает дома мух, а в другие – мало. В некоторых местах мух очень много, а в других – мало. Чем это можно объяснить? Рассмотрим размножение обычной комнатной мухи летом. Предположим, что питание для мух имеется в неограниченном количестве и каждая муха – самка откладывает каждые 2 недели по 100 яичек (чтобы легче было считать), из которых появляются 50 самцов и 50 самок. Поскольку в году 52 недели, а продолжительность лета составляет ¼ года, то на лето приходится 13 недель, и в течение этого срока появятся на свет несколько поколений мух. Для простоты расчетов предполагается, что после откладки яиц мухи умирают.

Таким образом, в итоге получилось 1 560 000 000 000 мух (Табл. 1.). Если считать, что каждая муха имеет длину равную 0,5 см и мысленно их расположить одну за другой, то получим 1 560 000 000 000 х 0,5 см = 780 000 000 000 см = 7 800 000 000 м = 7 800 000 км. Поскольку длина экватора Земли равна 40 000 км, то воображаемую цепочку из мух можно обернуть вокруг Земли 195 раз. Среднее расстояние от Земли до Луны составляет 384 400 км, поэтому, если всех этих мух вытянуть в цепочку, то получим

7 800 000 : 384 400 = 20,3 , т.е. эту цепочку из мух можно протянуть от Земли до Луны и обратно более 20 раз.

Если считать, что на 1 квадратном сантиметре можно расположить 1 муху, то площадь, которую покроют мухи, составит

1560000000000 х1 кв.см.=1560000000000 кв.см.=156000000 кв.м.=156 кв.км.

т.е. это квадрат со стороной равной примерно 12, 5 км. Действительно, такое количество мух может заслонить Солнце. Солнце будет видно, как через сито. Поскольку размеры саранчи больше размеров мухи в несколько раз, то, проведя аналогичные расчеты для саранчи, можно получить, что такое же количество саранчи разместится на квадрате со стороной в 12,5 км не в один слой, а в несколько слоев (3-7 слоев, в зависимости от размеров мух и саранчи). Если бы такое случилось, то Солнце было бы видно, как через густое сито, т.е. стало бы пасмурно.

Если предположить, что все эти мухи образуют рой, плотность которого 1 муха на 1 кубический сантиметр, то тогда объем занимаемый этим роем составил бы 1 560 000 000 000 куб. см = 1 560 000 куб. м, т.е. куб со стороной примерно равной 116 метров, или шар диаметром около 160 метров, что превышает размер футбольного поля.

РАЗМНОЖЕНИЕ КРОЛИКОВ.

В 1202 г. Итальянский математик Фибоначчи написал книгу, в которой содержалась следующая задача: сколько пар кроликов от одной пары рождается за 1 год? Известно, что пара кроликов через месяц производит пару кроликов, и кролики дают потомство со второго месяца после своего рождения.

Что бы решить эту задачу, можно рассуждать следующим образом. Если посмотреть на последовательность чисел 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, то можно заметить, что каждое число (начиная с третьего) равно сумме двух предыдущих, т.е.

An = An-2 + An-1,

где An – n-й член последовательности (n>2).

Такие последовательности называются последовательностями чисел Фибоначчи.

ХЕМОТАКСИС.

В XVII веке голландец Левенгук обтачивал увеличительные стекла и достиг такого мастерства, что смог построить микроскоп, который позволял ему рассматривать мелкие объекты с увеличением в несколько сотен раз. Он через свой микроскоп увидел, что в капельке дождя микроорганизмы и бактерии движутся хаотически. В XIX веке было открыто, что хаотически движущиеся бактерии имеют направленное движение в целом. Направление этого движения в целом определяется внешними факторами, такими как – разность температур, освещенность, перепады концентраций химических веществ и др. Направленное движение микроорганизмов из-за перепада концентраций химических веществ называется хемотаксисом.

Пусть имеется неподвижная жидкость, в которой находятся микроорганизмы. Пусть концентрация микроорганизмов в единице объема жидкости равна *В*. Предполагается, что в этой жидкости растворено также некоторое вещество, которое привлекает эти микроорганизмы и поглощается ими. Такое вещество называется аттрактантом. При этих условиях можно выписать законы сохранения массы микроорганизмов и аттрактанта

или, в разностном виде

где

*S* – концентрация аттрактанта (количество аттрактанта в единице объема жидкости),

*B* – концентрация микроорганизмов (количество микроорганизмов в единице объема жидкости),

*R* – коэффициент, характеризующий скорость рождения микроорганизмов,

*u* – коэффициент, характеризующий скорость поглощения аттрактанта микроорганизмами,

*u0 –* коэффициент, характеризующий скорость образования аттрактанта за счет химических реакций,

- диффузионный поток микроорганизмов,

- диффузионный поток аттрактанта.

**ГЛАВА 3. ГЕОГРАФИЯ**

**ИЛИ ЧЕМУ РАВНА ДЛИНА БЕРЕГОВОЙ ЛИНИИ**

То, что мы знаем, - ограничено.

То, чего не знаем, - безгранично.

# *П. Лаплас*

*Рассматривается понятие фрактала, фрактальные размерности и т.д.*

При изучении географии вы, конечно, помните, что каждая из стран имеет свою площадь территории и длину границы, в частности, если страна омывается каким-либо морем или океаном, то она имеет морскую границу определенной длины. Задумывались ли вы когда-либо, как эту длину границы определяют? В 1977 г. американский математик Бенуа Мандельброт поставил перед собой следующий вопрос: чему равна длина береговой линии Великобритании? Великобритания, как вы помните, расположена на острове в Западной Европе, омываемом с востока Северным морем, с запада – Атлантическим океаном, с Юга – проливом Ла-Манш. (Рис. 1. Карта Великобритании.). В 1988 г. норвежский ученый Енс Федер решил выяснить чему равна длина береговой линии Норвегии (Рис. 2. Карта Норвегии.). Обратите внимание на то, что побережье Норвегии сильно изрезано фиордами. Другие ученые задавали себе аналогичные вопросы о длинах береговых линий побережий Австралии, Южной Африки, Германии, Португалии и других стран.

Б. Мандельброт подошел к решению этой проблемы практически. Он взял циркуль с раствором 100 км и прошел вокруг Великобритании. Он получил некоторое число шагов n1. Тогда длина береговой линии Великобритании L1=n1\*100 км. Естественно, что это он делал дома, сидя за столом с географическими картами. Затем он уменьшил раствор циркуля до 50 км и опять прошел вокруг Великобритании и получил n2 шагов. И посчитал длину береговой линии L2=n2\*50 км. Удивительно, но оказалось, что L1 не равно L2. Тогда он еще раз уменьшил раствор циркуля в 2 раза и посчитал L3=n3\*25 км. Оказалось, что L3 не равно ни L2, ни L1. Доставая более подробные карты, он измерял длину береговой линии Великобритании, уменьшая каждый раз раствор циркуля в 2 раза. В итоге он получал длины L1, L2, L3, L4, L5,….., которые все были разные. Казалось бы, что эта последовательность должна стремиться к постоянному значению. Однако, это оказалось не так. Последовательность L1, L2, L3, L4, L5,….. не стремится к какому-либо конечному пределу! Какую величину из множества L1, L2, L3, L4, L5,….. считать истинной длиной береговой линии Великобритании? Может быть, Великобритания имеет особенное побережье? Аналогичные расчеты были проведены для побережий других стран (Австралии, Южной Африки, Германии, Португалии и др.) и везде получалась подобная картина. В чем причина? Какова все-таки длина морских границ государств? Может быть, не так считали, как надо? Тут же ученые, в частности, норвежский ученый Е. Федер, предложили другой способ измерения длины береговой линии. Карту покрыли квадратной сеткой, ячейки которой имеют размеры x . Видно, что число N() таких ячеек, которые покрывают береговую линию на карте, приближенно равно числу шагов, за которое можно обойти по карте береговую линию циркулем с раствором . Если уменьшать, то число N() будет возрастать. Если бы длина береговой линии Великобритании имела определенную длину L, то число шагов циркуля с раствором (или число квадратных ячеек N(), покрывающих береговую линию на карте) было бы обратно пропорционально, , а величина Ln ()= N() x при уменьшении стремилась бы к постоянной L. К сожалению, расчеты, проведенные многими учеными, показали, что это не совсем так. При уменьшении шага измеренная длина возрастает. Оказалось, что взаимосвязь измеренной длины L() и шага может быть описана приближенным соотношением

L() = a 1-D , , ,

где a и D – некоторые коэффициенты.

Коэффициент D называется фрактальной размерностью. Слово фрактал происходит от латинского слова fractal – дробный, нецелый. Множество называется фрактальным, если оно имеет нецелую размерность. Для Норвегии D 1,52 , а для Великобритании D 1,3. Таким образом, береговая линия Норвегии и Великобритании – фрактал с фрактальной размерностью D. Расчеты были также проведены и для окружности и фрактальная размерность окружности D=1, что и следовало ожидать. Таким образом, фрактальная размерность – обобщение обычной размерности.

Как это понимать и что бы это могло означать? Математики стали вспоминать, было ли что-либо подобное раньше в математике или нет? И вспомнили! Рассмотрим часть некоторой линии АВ на плоскости (рис.3.). Возьмем квадрат с ребром и спросим себя: сколько нужно квадратиков N() с ребром длиной , что бы покрыть линию АВ такими квадратиками? Видно, что N() пропорционально 1/, т.е.

N().

Аналогично, если рассмотреть замкнутую ограниченную область на плоскости (рис.4.) и покрыть ее квадратной сеткой со стороной , то минимальное число квадратиков со стороной покрывающих область будет равно

N().

Если мы рассмотрим замкнутую ограниченную область в трехмерном пространстве и возьмем кубик с ребром , то количество кубиков, покрывающих эту область

N().

Определим фрактальную размерность исходя из выше изложенного в общем случае следующим образом:

N() =.

Возьмем логарифм от левой и правой частей

Переходя к пределу при стремящемуся к нулю (N стремящемуся к бесконечности) получим

. (\*)

Равенство (\*) является определением ёмкостной размерности, которая обозначается dc , где индекс «c» является первой буквой английского словосочетания capacity dimension – ёмкостная размерность.

Существуют и другие определения фрактальной размерности, а именно, поточечная, корреляционная, информационная и т.д. Рассмотрим поточечную фрактальную размерность. Произведем представительную выборку точек на траектории в N-мерном фазовом пространстве. Пусть число этих точек равно N0. Опишем вокруг какой-нибудь точки на траектории куб с ребром r и подсчитаем число выбранных точек N(r), попавших внутрь куба. Вероятность того, что выбранная точка попала внутрь куба, равна

Тогда размерность траектории в точке (-вектор в фазовом пространстве) равна

Поскольку dp обычно зависит от , то усредненная поточечная размерность равна

где M – число случайно выбранных точек, M < N0.

Рассмотрим корреляционную размерность. Как и при определении поточечной размерности, траектория представляется множеством из N0 точек {} в фазовом пространстве. Затем вычисляются расстояния

i, j = 1,…,N0.

Корреляционная функция

х (число пар (i, j) для которых sij < r).

Корреляционная размерность определяется следующим образом

Рассмотрим информационную размерность. Как и в случае ёмкостной размерности, строим покрытие дискретной траектории N-мерными кубами с ребром длиной . Находим число точек Ni в каждой из N1 ячеек покрытия и оцениваем вероятность Pi , найти точку в i-ой ячейке

где N0 – общее число точек на траектории, N0N1.

Важным показателем является информационная энтропия

I() измеряется в битах, если логарифм взять по основанию 2. Информационная размерность определяется следующим образом

В 1983 г. итальянские ученые Grassberger и Proccacia показали, что , причем обычно dP, dG, dI и dC близки по величине. Поэтому, обычно фрактальную размерность вычисляют одним каким-нибудь способом.

Вернемся к нашей исходной задаче. Рассмотрим длину береговой линии:

и сделаем следующие преобразования:

, ,

т.е. пропорционально , т.е.

,

и переходя к пределу, имеем

.

Таким образом, D – ёмкостная размерность, т.е. D = dC. Расчеты показывают, что DНорвегия 1,52, а DВеликобритания1,3. Таким образом, береговые линии Великобритании и Норвегии являются фракталами и имеют фрактальную размерность 1,3 и 1,52 соответственно.

Однако существуют ли в математике множества, которые имеют фрактальную размерность? Да, такие множества были открыты в XIX и XX веках. В 1883 г. немецкий математик Георг Кантор (1845-1918) построил множество, носящее его имя (множество Кантора). Построение множества Кантора осуществляется следующим образом (рис. 5.). Единичный отрезок разбивается на 3 равные части. Средняя часть выбрасывается. Оставшиеся 2 части снова разбиваются, каждая на 3 равные части и средние их части выбрасываются. Получившиеся отрезки снова разбиваются, каждый на 3 равные части, и средние части выбрасываются и т.д. В пределе получается множество Кантора. Спрашивается, чему равна фрактальная размерность множества Кантора? Применим для ее вычисления формулу (\*). Чтобы посчитать по формуле (\*) нужно определить и N(). На первом этапе построения множества Кантора отрезок единичной длины можно покрыть одним отрезком длиной , т.е. =1 и N()=1. На втором этапе мы имеем 2 отрезка, каждый длиной равной 1/3, поэтому для покрытия этих отрезков нужны 2 отрезка длиной 1/3, т.е. =1/3 и N()=2. На третьем этапе имеем 4=22 отрезка, и каждый длиной (1/3)2 . На четвертом этапе имеем 23 отрезков, и каждый длиной (1/3)3, и т.д. На n-ом этапе имеем 2n отрезков, и каждый длиной (1/3)n. Применим формулу (\*) для определения фрактальной размерности множества Кантора

В 1904 г. немецкий математик Хельга фон Кох построила кривую, которая в настоящее время носит ее имя (кривая Кох). Построение начинается с единичного отрезка прямой. Единичный отрезок прямой делится на 3 равные части. Средняя часть удаляется, а на месте средней части строится равносторонний треугольник. В итоге получается ломаная линия, состоящая из 4 отрезков, каждый из которых равен 1/3. Далее, каждый из 4 отрезков снова делится на 3 равные части, на отрезках расположенных в середине строятся равносторонние треугольники, и средние части отрезков удаляются. Эта процедура повторяется еще и еще раз. В итоге линия становится очень изрезанной. Если этот процесс повторять бесконечно долго (т.е. перейти к пределу), то получаем непрерывную, нигде не дифференцируемую кривую и эта непрерывная кривая имеет ненулевую «площадь». Что бы в этом убедиться подсчитаем фрактальную размерность кривой Кох. На первом этапе мы имеем один отрезок длиной 1, который можно покрыть одним отрезком длиной равной 1, т.е. =1 и N()=1. На втором этапе мы имеем 4 отрезка, каждый длиной равной 1/3, поэтому для покрытия этих отрезков нужны 4 отрезка длиной 1/3, т.е. =1/3 и N()=4. На третьем этапе имеем 16=42 отрезков, и каждый длиной (1/3)2 . На четвертом этапе имеем 43 отрезков, и каждый длиной (1/3)3, и т.д. На n-ом этапе имеем 4n отрезков, и каждый длиной (1/3)n. Применив формулу (\*) для определения фрактальной размерности кривой Кох, получим

**ГЛАВА 4. ИНФОРМАТИКА**

**ИЛИ ЧТО МОЖЕТ КОМПЬЮТЕР**

Сейчас немало ученых и философов считают, что уместно

говорить о трех ипостасях существования материи:

вещество, отражающее постоянство материи;

энергия, отражающая движение, изменение материи;

информация, отражающая структуру, организацию материи.

А.П. Ершов

*Рассматриваются возможности компьютера и компьютерного моделирования.*

Информатика сформировалась во второй половине XX века, благодаря развитию средств вычислительной техники, в первую очередь компьютеров. Само слово информатика произошло от французского L’informatique и быстро распространилось по всему миру: Die Informatik (на немецком), La informatica (на испанском), информатика (на русском) и т.д. На английский язык слово информатика переводится как The computer science, что дословно означает компьютерная наука, и само англоязычное название лишний раз подчеркивает важную роль компьютеров в информатике. Практически на всех языках мира эта наука называется либо информатикой (за основу берется французское L’informatique), либо компьютерной наукой (за основу берется английское The computer science). Обычно, говоря об информатике, имеют в виду область науки и техники, связанную со сбором и переработкой больших объемов информации на основе современных средств вычислительной техники и связи. Специалисты, работающие в области информатики, изучают свойства информации, разрабатывают эффективные методы и средства ее получения, хранения, преобразования и применения. Для решения этих проблем используются мощные компьютеры и вычислительные сети. Чтобы их эффективно использовать, нужно хорошо знать аппаратные средства (Hardware), программное обеспечение (Software), алгоритмы и модели (Brainware). Рассмотрим их более подробно.

В последние десятилетия развитие информатики определяется элементной базой, на основе которой строятся аппаратные средства (Hardware). Сначала были лампы, затем транзисторы, интегральные схемы и т.д. Сейчас можно выделить классическое направление развития элементной базы (нанотехнологии) и биокомпьютеры (или квантовые компьютеры на базе ядерного магнитного резонанса). В классическом направлении в последние годы интенсивно развивается, как построение суперкомпьютеров на базе кластеров высокопроизводительных параллельных вычислений, так и специализированных компьютеров, предназначенных для решения узких специфических задач. Начало построения суперкомпьютеров на базе кластеров высокопроизводительных параллельных вычислений можно отнести к 80-90 гг. ХХ века. В частности в начале 90-х гг. была основана норвежская фирма Dolphin (www.dolphinics.com), производящая платы и другое оборудование, позволяющее объединять персональные компьютеры в так называемые кластеры таким образом, что вычислительная задача, решаемая на компьютере, разбивается на части, которые выполняются параллельно. За счет распараллеливания алгоритма решения задачи достигается существенная скорость вычислений. В 2002 г. В Японии компанией NEC был построен кластер Earth Simulator, который достиг скорости вычислений с плавающей точкой равной 35,61 Терафлоп (около 35 триллионов операций с плавающей точкой в секунду). Тестирование кластера Earth Simulator осуществлялось с помощью пакета тестов Linpack, включающего, в частности, программы решения систем линейных алгебраических уравнений над полем вещественных чисел методом Гаусса. Суперкомпьютер Earth Simulator построен на базе 5120 процессоров, которые объединены в 640 отдельных кластеров по 8 процессоров NEC Vector в каждом. Скорость вычислений одного процессора составляет 8 Гигафлоп, а одного отдельного кластера – 62 Гигафлоп ([www.top500.org](http://www.top500.org)). Ожидается, что в ближайшие годы скорость вычислений с плавающей точкой достигнет 100-1000 Терафлоп.

Программное обеспечение (Software) развивается параллельно с развитием элементной базы, на основе которой строятся аппаратные средства. В настоящее время во всем мире производится программное обеспечение (ПО) в огромных количествах и самого разнообразного назначении. Интересно, что в 50-60 гг. ХХ века стоимость ПО составляла 10-20 % от стоимости самого компьютера (Hardware), а в настоящее время эта ситуация изменилась и стоимость компьютера составляет 10-20 % от стоимости ПО. Прослеживается общая тенденция, заключающаяся в том, что относительная стоимость компьютеров убывает, а стоимость ПО увеличивается. В последнее десятилетие получили существенное развитие операционные системы (DOS, Windows, Unix .и др.). Операционные системы очень быстро подвергаются модификации, что можно проследить, например, на развитии операционной системы Windows (Windows 95, Windows 98, Windows 2000, Windows XP и другие). Если для первых ЭВМ программы писали в машинных кодах, на ассемблере, алгоритмических языках высокого уровня (Алголе, Фортране, Бейсике, Паскале и т.д.), то сейчас появились объектно-ориентированные языки (Delphi, VB, Java, VC++ и др.), которые обладают существенными возможностями по сравнению с предшествующими языками. В последние годы было разработано огромное количество прикладных программ, которые позволяют обрабатывать письменную и устную речь, изображения, звук, создавать эффекты анимации и многое другое.

В области разработки алгоритмов и математических моделей (Brainware) также отмечается быстрое развитие. Особенный интерес в последние годы привлекает проблема параллельных алгоритмов. Математические модели строятся в различных областях человеческой деятельности (математике, физике, химии, биологии, экономике, экологии и т.д.).

В последнее время, в связи с развитием Internet и локальных сетей, возникли проблемы связанные непосредственно с сетевыми технологиями (Netware). В первую очередь – проблемы безопасности и защиты информации. Как у нас в стране, так и за рубежом ежегодно проводятся международные конференции, посвященные проблемам безопасности и защиты информации в компьютерных сетях.

Работа в компьютерных сетях с участием большого количества людей, компьютеров, баз данных и т.д. требует необходимости всю эту деятельность каким-то образом организовывать. Поэтому некоторые специалисты считают, что организационные технологии (Orgware) в последние годы требуют более пристального внимания со стороны специалистов. Это связано с тем, что при работе практически любой организации необходимо владеть быстро меняющейся информацией о финансовом, экономическом, кадровом состоянии организации и пр. Кроме того, эта информация должна быть представлена в виде удобном для правильного и быстрого принятия решений руководством организации.

ЧТО МОЖЕТ КОМПЬЮТЕР?

- Естественно все знают, что компьютер может быстро и точно считать. Интересно, что первая задача, которая была рассчитана на первом электронном компьютере ЭНИАК, состояла в вычислении первых двух тысяч знаков числа после запятой. Оказалось, что в прежних расчетах (проводившихся вручную) в промежутке между 700 и 800 знаками после запятой была допущена ошибка и, естественно, дальнейшие расчеты были неверными.

- Визуализировать результаты: строить графики, делать чертежи, рисовать, и имитировать движение (анимировать).

- Управлять заводами, космическими аппаратами (например, космическим аппаратом Буран, который от начала до конца совершил полет без пилота).

- Устанавливать и поддерживать связь между удаленными пунктами на Земле (например, электронная почта, Интернет, ICQ).

- Управлять роботами, которые производят детали станков и машин, а также могут танцевать, делать гимнастику УШУ и многое другое.

- Сочинять музыку, стихи, определять авторство написанного литературного или музыкального произведения.

- Моделировать процессы в космосе (движение и столкновение галактик, эволюцию звезд, движение планет и спутников), в атмосфере (рассчитывать и предсказывать погоду, изменения климата), а также в физике, химии, экологии и других науках.

- Переводить тексты с одного языка на другой (машинный перевод).

- Экзаменовать, тестировать и обучать школьников и студентов.

- Распознавать звуки речи, синтезировать речь (например, недавно создан компьютер, который понимает голос конкретного человека и может членораздельно говорить).

- Распознавать образы (например, создан компьютер, который видит перед собой предметы и может их обходить (компьютер встроен в подвижного робота)).

- Играть в шашки, шахматы (например, недавно компьютер победил чемпиона мира по шахматам).

- Шифровать и дешифровать информацию, представляющую государственную и военную тайну.

- И многое другое.

Чтобы строить математические модели и писать программы по разделам, которые были перечислены выше и еще большее число, которые не были упомянуты, нужно хорошо знать математику, программирование и моделируемую предметную область.

Таким образом, кроме того, что компьютеры делали всегда (расчеты), сейчас они позволяют визуализировать проделанные расчеты, в частности, в самом простом случае, строить графики различных функций. Визуализация расчетов (графики, гистограммы и пр.) бывает очень полезна при проведении научных исследований и позволяет увидеть (и/или угадать) скрытые закономерности исследуемого объекта или процесса.

**ГЛАВА 5. МАТЕМАТИКА**

**ИЛИ КАК ПОСЧИТАТЬ ОБЪЁМ**

Есть в математике нечто,

вызывающее человеческий восторг.

Ф. Хаусдорф

Без знания математики нельзя понять

ни основ современной техники, ни того,

как ученые изучают природные и

социальные явления.

А.Н. Колмогоров

*Рассматривается вычисление объема n-мерного тела методом Монте-Карло.*

Бывают задачи, когда нужно грубо оценить объём сложных областей в евклидовом пространстве, размерность которого равна 2, 3, 4 и более. Для оценки объёма таких областей обычные методы оказываются трудоёмкими. Пусть А – область, объём которой нужно определить. В математике область А обычно задается набором неравенств. Предположим, что область А является подмножеством n-мерного единичного куба К. Тогда нужно случайным образом выбрать в К большое число точек N, которые равномерно распределены в К, т.е. с одинаковой вероятностью могут находиться в любой части куба К. Далее нужно подсчитать число точек M попавших в область А, т.е. точек, которые удовлетворяют набору неравенств задающих область А. Тогда объём области А можно оценит величиной равной M/N. Этот метод определения объема называется методом Монте-Карло. Эксперименты проведенные с вычислением объёмов показали, что если выборка точек N достаточно велика (10000 и более) и объём области А не слишком мал или слишком велик относительно единичного куба К (т.е. не слишком близок к 1 или 0), то погрешность вычисления составит около 1 %. Такая погрешность обычно бывает достаточна для практических приложений. Для реализации метода Монте-Карло на компьютере нужно создавать большие последовательности (10000 и более) чисел, которые представляли бы собой случайные выборки из равномерного распределения на отрезке [0,1]. В настоящее время разработано большое количество алгоритмов, позволяющих создавать конечные последовательности случайных чисел. Поскольку эти числа создаются согласно конкретному алгоритму, то они, вообще говоря, не случайные и поэтому их более правильно называть псевдослучайными.

Выдающийся математик Джон фон Нейман, который хорошо знал таблицу умножения до 10000, т.е. умел в уме перемножать двухзначные числа, предложил следующий счетчик псевдослучайных чисел. Нужно взять какое-нибудь двухзначное число (например, 87) и возвести его в квадрат (87х87=7569). Взять среднюю часть этого числа, т.е. отбросить первую и четвертую цифры числа. В нашем примере получим 56. Возвести полученное число в квадрат (56х56=3136) и снова взять среднюю часть числа. Получим 13. Возвести в квадрат (13х13=169), взять среднюю часть числа (16), возвести полученное число в квадрат (16х16=256), взять среднюю часть числа (25) и т.д. В итоге получается последовательность псевдослучайных чисел 87, 56, 13, 16, 25 и т.д.

При перемножении двухзначных чисел обычно получаются четырехзначные числа, однако иногда получаются и трехзначные. В последнем случае, трехзначное число можно записать как четырехзначное, добавив ноль перед числом. Этот счетчик псевдослучайных чисел можно использовать, в том случае, когда нужно получить несколько псевдослучайных чисел. Если же нужно значительно большее число псевдослучайных чисел, то лучше использовать другие счетчики.

РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ ЧИСЛА НА ОТРЕЗКЕ [0,1].

Для создания последовательности псевдослучайных чисел обычно используют функцию, отображающую множество целых чисел в себя, например функцию вида xn+1=f(xn), где xn – предыдущее, а xn+1 – последующее значение аргумента.

Рассмотрим функцию вида

f(x)=ax+c (mod m),

где a, c, m, x – целые числа, удовлетворяющие условиям Д.Е. Кнута:

* m = 2t для t-разрядных двоичных чисел,
* a(mod 8)=5,
* m/100<a<m-m1/2,
* c – нечётное число и c/m1/2-31/2/6 0,21132.

Тогда последовательность псевдослучайных чисел x1, x2, x3 и т.д. можно вычислять по формуле

xn+1=axn+c (mod m),

где x0 – произвольное целое число, n = 0, 1, 2,…

A=B(modC) - читается «A равно B по модулю C», означает, что для целых чисел A, B и C остаток от деления нацело числа B на C равен A. Например, 21(mod8)=5.

**ГЛАВА 6. ФИЗИКА**

**ИЛИ УРОНИЛА МАША МЯЧИК**

Физик не может обойтись без математики;

она дает ему единственный язык,

на котором он в состоянии изъясняться.

А. Пуанкаре

*Рассматривается задача падения тел в зависимости от их местоположения на Земле и удаленности от Земли, а также на других планетах.*

В 1609 г. немецкий астроном Иоганн Кеплер сформулировал следующие законы:

1. Орбиты планет – эллипсы, в одном из фокусов которых находится Солнце.

2. Радиус Солнце – планета описывает за одинаковые промежутки времени одинаковые площади.

3. Для планет обращающихся вокруг Солнца величина Т2/а3 постоянная, где Т – период обращения планеты вокруг Солнца, а – большая полуось эллипса, по которому движется планета.

Эти законы Кеплер открыл эмпирически на основе большого экспериментального материала собранного датским астрономом Тихо Браге. В 1680 г. английский физик Исаак Ньютон, опираясь на законы Кеплера, нашёл закон всемирного тяготения

,

где m1 и m2 – массы тел, r – расстояние между телами, F – сила, с которой они притягиваются друг к другу. Сила F направлена по прямой, соединяющей эти тела, и размеры тел малы по сравнению с расстоянием r, G = 6,67 10-11 Н м2 /кг2 – гравитационная постоянная.

Какие соображения мог бы использовать Ньютон при выводе закона всемирного тяготения? Поскольку во времена Ньютона экспериментальные данные Тихо Браге о движении планет и законы Кеплера были уже известны то, можно предположить, что Ньютон мог рассуждать следующим образом. Ньютону было известно, что центростремительная сила

,

где m- масса тела, v-скорость, r- расстояние, - угловая скорость.

Выражение

согласно третьему закону Кеплера является постоянной величиной для всех планет. Таким образом, центростремительная сила (сила притяжения) пропорциональна массе m и обратно пропорциональна квадрату расстояния r2. Такое рассуждение (или подобное рассуждение) привело Ньютона к мысли, что сила притяжения между телами пропорциональна их массам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Справедливость этого утверждения Ньютон подверг экспериментальной проверке на системе Земля – Луна и вычислил величину гравитационной постоянной G.

Из закона всемирного тяготения можно определить массу Земли. Пусть M - масса Земли, R – радиус Земли, m – масса некоторого тела. Тогда если тело массы m находится на Земле, то вес этого тела

и масса Земли

= 5,976 1024 кг

и плотность Земли

= 5520 кг/м3.

Кстати, массу Земли первым вычислил английский ученый Кавендиш.

УСКОРЕНИЕ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ

Земля вращается вокруг своей оси, и точки на экваторе Земли движутся со скоростью

= 463 м/с,

где R- радиус Земли, - угловая скорость вращения Земли.

Ускорение центростремительной силы на экваторе

=0,0337 м/с2.

Если - широта точки на Земле, то радиус, по которому осуществляется вращение этой точки, равен и центростремительное ускорение

=0,0337 м/с2.

Центростремительная сила лежит в плоскости круга широты соответствующей точки и эта сила перпендикулярна оси вращения Земли. Можно разложить вектор центростремительного ускорения на две составляющие: вдоль земной поверхности bx и перпендикулярно к ней by. Для Земли

м/с2

На широте ускорение свободного падения

м/с2,

где gn – ускорение на Земле, которое было бы, если бы Земля не вращалась вокруг своей оси.

На экваторе широта =0 и, следовательно, и

м/с2.

Из последних двух равенств получаем

м/с2,

ДРУГИЕ ПЛАНЕТЫ И СОЛНЦЕ

На широте некоторой планеты (или Солнца) ускорение свободного падения

,

где g0 – ускорение на экваторе планеты, R – радиус, - угловая скорость вращения планеты или Солнца.

Сравнение веса тела P=mg на разных планетах показывает, что величина P зависит от величины ускорения свободного падения g , которая на разных планетах разная.

Рассмотрим ситуацию, когда тело находится не на поверхности планеты, а на некотором удалении от неё. Тогда, возможны два случая:

* Тело находится над поверхностью планеты и жёстко с ней связано, т.е. находится на какой-либо башне, вышке, доме и т.д.
* Тело находится над поверхностью планеты и не жёстко с ней связано, т.е. находится на самолете, воздушном шаре, ракете и т.п.

В первом случае, согласно формуле

ускорение свободного падения

,

где G – гравитационная постоянная, M – масса планеты, R – расстояние от центра планеты.

Вертикальная составляющая вектора центростремительного ускорения

.

Тогда на широте ускорение свободного падения

м/с2,

где gn – ускорение на планете, которое было бы, если бы планета не вращалась вокруг своей оси, R – расстояние от центра планеты, - угловая скорость вращения планеты.

Во втором случае задача более сложная, в частности, нужно ли учитывать влияние атмосферы? Если влиянием атмосферы можно пренебречь, то ускорение свободного падения

,

где G – гравитационная постоянная, M – масса планеты, R – расстояние от центра планеты.

Если же влиянием атмосферы нельзя пренебречь, то тогда нужно учитывать сопротивление, оказываемое атмосферой планеты (состав, плотность и толщину атмосферы, скорость вращения планеты и пр.).

ПЛАНЕТЫ ДРУГИХ ЗВЕЗД.

С 90 гг. XX века во многих обсерваториях мира проводятся исследования, направленные на обнаружение планет у других звёзд. Первая звезда, у которой была обнаружена планета, - это звезда 51 Пегаса, расположенная от нас на расстоянии 15 парсек. В настоящее время обнаружено более 100 планет у нескольких ближайших к нам звёзд. Масса обнаруженных планет составляет 0,1 – 10 и более масс планеты Юпитер. Современная техника не позволяет увидеть непосредственно планеты других звезд из-за удаленности их расположения от Земли и из-за яркости свечения звезды, вокруг которой вращаются планеты. При исследовании планет других звёзд используют различные методы их обнаружения: астрометрический, фотометрический, спектрометрический и другие. Основной метод обнаружения, используемый сейчас при исследовании планет, – это спектрометрический метод, в основе которого лежит эффект Доплера, который в настоящее время позволяет определять с большой точностью (до 40 м/с) приближается планета или удаляется от нас.

Одним из первых, кто проводил в XIX веке подобные определения невидимых тел, вращающихся вокруг звёзд, был немецкий астроном Фридрих Бессель – директор астрономической обсерватории в г. Кёнигсберг (сейчас г. Калининград). По периодическим изменениям яркости звезды Сириус и смещениям её положения на фотографических пластинках он догадался, что вокруг Сириуса вращается тело большой массы, которое не видно в телескоп. Это тело (темную, почти погасшую звезду) он назвал Сириус В. Через полвека, когда появились более мощные телескопы, астрономы увидели Сириус В. В настоящее время Сириус считается двойной звездой (Сириус А (видимая невооруженным глазом) и Сириус В).

**ГЛАВА 7.ХИМИЯ**

**ИЛИ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ РЕАКЦИЯ В ПРОБИРКЕ**

Кто не понимает ничего, кроме химии,

тот и её понимает недостаточно.

Г. Лихтенберг

*Рассматривается периодическая реакция в пробирке (реакция Белоусова-Жаботинского).*

Однажды в середине пятидесятых годов XX века в редакцию одного из крупных столичных химических журналов поступила статья, в которой автор утверждал, что если сделать растворы определенных веществ и слить их в обычную пробирку, то реакция между компонентами произойдет не сразу, как обычно, а будет продолжаться в течении получаса, причем цвет раствора в пробирке будет меняться с бледно жёлтого на бесцветный с периодом в несколько минут. Редактор журнала передал эту статью рецензенту, крупному специалисту в своей узкой области. Рецензент посмотрел статью, фамилия автора статьи ему ни о чём не говорила. Рецензент подумал, что автор статьи не знает основ химии, поскольку каждому известно ещё со школьной скамьи, что при слиянии растворов в одной пробирке реакция протекает очень быстро и в пробирке наступает новое стабильное состояние, когда ничего уже не изменяется. Для того, чтобы происходили какие либо изменения в пробирке в течении длительного времени (около получаса, как пишет автор) нужен приток веществ или энергии. Но автор об этом ничего не пишет. Автор утверждает, что периодическая реакция может протекать в пробирке без притока или оттока веществ в течении получаса. Это кажется абсурдом, противоречащим здравому смыслу и всей истории химии. Можно конечно, рассуждал рецензент, дать задание моему аспиранту, что бы он повторил опыт, описанный в статье. Но зачем отвлекать молодого человека от серьезных занятий, если и так ясно из общих соображений, что такого не может быть в природе. Подумав ещё немного, рецензент написал отрицательный отзыв на статью и отослал его в редакцию журнала. Примерно так можно представить себе, почему выдающиеся результаты автора не были опубликованы сразу же после получения статьи. Однако автор был уверен в своей правоте и послал статью во второй журнал, а затем в третий и т.д. Но результат был один и тот же – ни один журнал не печатал полученные им результаты. И только в 1959 г. ему удалось напечатать тезисы в сборнике трудов одной научной конференции. Имя автора этого выдающегося открытия – Б.П. Белоусов.

Прошло ещё много лет, прежде чем признали, что наряду с обычными, привычными реакциями бывают и реакции отличные от обычных реакций. В настоящее время исследованием периодических реакций занимается много лабораторий во всём мире, получены важные результаты, построены модели таких реакций. Исследования в этом направлении продолжаются и у нас в стране учениками Б.П. Белоусова и учениками его учеников, в частности большой вклад в исследование периодических реакций внес А.М. Жаботинский – ученик Б.П. Белоусова. Поэтому реакция, которую мы рассмотрим далее, называется реакцией Белоусова-Жаботинского.

Закон сохранения массы в химических реакциях был открыт М.В. Ломоносовым в 1748 г. и несколько позднее французским ученым А. Лавуазье. Этот закон является важным ограничением при составлении уравнений химических реакций. Например, рассмотрим реакции

HCl+NaOH=H2O+NaCl,

Cu+2AgNO3=Cu (NO3)2+2Ag.

Обратите внимание на то, что количество H, Cl, Na, O, Cu, Ag, N слева и справа от равенств одинаково. Коэффициенты, стоящие перед формулами веществ называются стехиометрическими коэффициентами. После определения стехиометрических коэффициентов в уравнении реакции, можно рассмотреть изменения концентраций реагентов и продуктов реакции во времени. В химии важной характеристикой является скорость реакции Vi , т.е. изменение числа частиц вещества i за единицу времени в единице объема V, т.е.

. (знак «+», если количество вещества увеличивается и знак «-», если количество вещества уменьшается).

Если перейти к пределу при , то можно написать

.

Если объем реакционной смеси постоянен, т.е. V – постоянная величина, то можно написать

,

где Сi – концентрация вещества i.

Это соотношение можно переписать в разностном виде

Если имеется зависимость С=f(t) концентрации С некоторого вещества i от времени t, то скорость изменения концентрации вещества i в некоторый момент времени t\* может быть определена следующим образом. В точке с координатами (t\*, f(t\*)) нужно построить касательную к кривой С=f(t). Тангенс угла наклона этой кривой в точке с координатами (t\*, f(t\*)) равен скорости изменения концентрации вещества i в точке (t\*, f(t\*)). Скорость изменения концентрации вещества может как зависеть от t (кривые1, 3), так и не зависеть (кривая 2) (рис. ).

Связь между скоростью элементарной химической реакции и концентрациями веществ обнаружил выдающийся голландский химик Якоб Вант-Гофф в восьмидесятых годах XIX века. В настоящее время эта связь называется кинетическим законом действующих масс: «скорость элементарной химической реакции в каждый момент времени пропорциональна произведению текущих концентраций реагирующих веществ, взятых в степенях равных стехиометрическим коэффициентам». Кинетический закон действующих масс устанавливает однозначную связь между типом химической реакции и математической моделью её имитирующей.

Рассмотрим гипотетический механизм превращения веществ А и В в вещество С. Возможны разнообразные варианты, некоторые из которых представлены в таблице 1. В таблице 1. используются обозначения: t – время, ki  (i = 1,…,9) – константа скорости реакции, размерность которой зависит от вида реакции, CA, CB, CC – концентрации веществ A, B, и C соответственно.

Аналогичным образом, как показано в таблице 1., можно выписать математические модели других подобных реакций.

Считается, что константа скорости ki элементарной химической реакции i – скорость реакции при концентрациях реагирующих веществ равных единице (в молях). Видно, что скорость элементарной реакции зависит от концентраций только реагентов этой реакции и не зависит от концентрации конечных ее продуктов.

При построении математической модели химической реакции важно учитывать, что скорость элементарной химической реакции, тип элементарной химической реакции, скорость изменения концентрации исходных веществ и конечных продуктов реакции,– взаимосвязаны. Например, для химической реакции

, (1)

где , , , - стехиометрические коэффициенты,

уравнения сохранения веществ A, B, C, D имеют вид

,

(2)

при начальных условиях

,

, (3)

,

,

или в разностном виде

,

или

,

(4)

при начальных условиях

при t=t0,

при t=t0,(5)

при t=t0,

при t=t0,

Система уравнений (2) (или (4)) с начальными условиями (3) (или (5))– математическая модель химической реакции (1). Система уравнений (2) - это система нелинейных дифференциальных уравнений. Это задача Коши, т.е. задача решения системы дифференциальных уравнений при определенных начальных условиях (3).

При рассмотрении многостадийных химических реакций обычно используется предположение о том, что элементарные химические реакции протекают независимо, т.е. закон действующих масс применим к каждой элементарной химической реакции независимо от других элементарных реакций.

БРЮССЕЛЯТОР.

Рассмотрим гипотетическую систему реакций (эта система реакций называется брюсселятором в честь научной школы нобелевского лауреата Ильи Пригожина в г. Брюсселе**):**

(6)

где ki – константы скорости реакций (i = 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4).

Предполагается, что ki – постоянные, концентрации веществ A, B, D, E – постоянные, промежуточными реагентами являются X и Y.

Пусть k-1=k-2=k-3=k-4=0. Тогда, применяя закон действующих масс, можно записать

(7)

или в разностном виде

(8)

или

Введем безразмерные переменные

,

,

, (9)

,

,

тогда система уравнений (7) примет вид

, (10)

или

,

или

,

Рассмотрим точки равновесия для системы уравнений (10), т.е.

,

,

или

,

,

или

,

.

Таким образом, точка - единственная точка равновесия.

Рассмотрим другой случай брюсселятора, а именно, предположим, что концентрации веществ А и В – не постоянные, а зависят от времени t, т.е.

(11)

или в разностном виде

(11)

или

РЕАКЦИЯ БЕЛОУСОВА-ЖАБОТИНСКОГО.

Для того, чтобы провести успешное наблюдение реакции Белоусова-Жаботинского нужны следующие реагенты:

H2SO4 (серная кислота),

CH2(COOH)2 (малоновая кислота),

NaBrO3 (бромат натрия),

Ce2(SO4)3 (сульфат церия),

ферроин.

Нужно водные растворы реагентов смешать в пробирке и тогда возникнут колебания, которые хорошо видно благодаря изменению окраски. Если в качестве катализатора выбрать ферроин, то окраска раствора будет изменяться от красной до синей и обратно с периодичностью в несколько минут. В таблице 2. приведены названия реагентов и их концентрации, которые нужно взять для успешного протекания реакции. Можно взять и другие реагенты для наблюдения реакции Белоусова-Жаботинского. В настоящее время открыто несколько наборов компонент, которые приводят к периодическим реакциям в пробирке. Один из механизмов, объясняющих реакцию Белоусова-Жаботинского, был предложен в 1972 г. Филдом, Кёрёсом и Нойесом (ФКН-механизм) и он имеет вид:

Как видно ФКН-механизм реакции Белоусова-Жаботинского довольно сложен (включает 13 реакций и 14 компонент). Поэтому при построении математической модели реакции Белоусова-Жаботинского рассматривают упрощенный подход, суть которого состоит в том, что часть компонент опускают. А именно, в частности, если ввести обозначения

то тогда упрощенная модель реакции БЖ будет иметь вид

Тогда система кинетических уравнений имеет вид

или в разностном виде

(12)

Если взять подходящие значения параметров модели, то могут существовать незатухающие периодические колебания типа предельного цикла.

**ГЛАВА 8. ЭКОЛОГИЯ**

**ИЛИ ВОЛКИ И ЗАЙЦЫ**

Ты виноват лишь в том,

Что хочется мне кушать.

И.А. Крылов

*Рассматриваются уравнения Лотки - Вольтерры «хищник-жертва» и Вольтерры – Лотки – Гаузе «конкуренты».*

В двадцатых годах XX века исследователи А. Лотка и В. Вольтерра независимо друг от друга предложили математические модели, которые имитируют изменение численности хищников (например, волков) и жертв (например, зайцев) с течением времени. Оказалось, что при некоторых значениях параметров модели, характеризующих плотности популяций хищников и жертв, изменения численности хищников и жертв имеют колебательный характер.

В самом простом случае, предположим, что в некотором лесу обитают волки и зайцы, территория леса ограничена и имеет площадь S квадратных километров, M1 – число зайцев и M2 – число волков в этом лесу, питание для зайцев (трава, кусты, кора и т.д.) – не ограничено. Тогда плотность популяции зайцев N1 = M1/S, а плотность популяции волков N2 = M2/S. Если бы волков в лесу не было, то плотность популяции зайцев, ввиду их быстрого размножения (зайцы размножаются каждые 2-3 месяца), резко увеличилась бы за короткое время. Математически это можно записать следующим образом

, (1)

где t – время, a – постоянный коэффициент, - скорость изменения плотности популяции зайцев N1.

Поскольку в лесу обитают волки, которые питаются зайцами, то этот рост ограничивается некоторой величиной, которая пропорциональна частоте встречи волков и зайцев (чем чаще встречаются, тем меньше зайцев) или, другими словами, пропорциональна произведению плотностей популяций волков и зайцев. Поэтому вместо уравнения (1) можем написать

, (2)

где b – постоянный коэффициент.

Что касается волков, то изменение плотности их популяции во времени равно некоторой величине, которая пропорциональна частоте встречи волка и зайца (чем чаще встречаются, тем больше волков – хорошее питание способствует увеличению численности) или, другими словами, пропорциональна произведению плотностей популяций волков и зайцев. Кроме того, волки иногда болеют и умирают. Поэтому уравнение для волков можно записать в виде

, (3)

где c и d - постоянные коэффициенты.

Итак, окончательно имеем систему уравнений

(4)

или в разностном виде

(5)

,

где - приращение N1, - приращение N2, - приращение t.

В этой системе уравнений предполагается, что плотность популяции волков зависит от плотности популяции зайцев и наоборот, и, кроме того, корм для зайцев ни чем не ограничен.

Если предположить, что плотность популяции зайцев с течением времени не меняется, т.е. N1 – постоянная величина, то

и отсюда имеем

,

т.е. плотность популяции волков равна a/b.

Обратно, если плотность популяции волков N2 постоянна и

,

то

и

N1 = const,

т.е. плотность популяции зайцев постоянна.

Аналогично, если предположить, что плотность популяции волков с течением времени не меняется, т.е. N2 – постоянная величина, то

и отсюда имеем

,

т.е. плотность популяции зайцев равна d/c.

Обратно, если плотность популяции зайцев N1 постоянна и

то

и

N2 = const,

т.е. плотность популяции волков постоянна.

Если в координатах (N1, N2) нарисовать прямые и (Рис. 1), то видно (после проведения расчетов на компьютере), что N2 убывает при и N2 возрастает при , и также, что N1 убывает при и N1 возрастает при . Это означает, что если взять в качестве начальных значений (N1, N2), такие, что и , то получим периодические изменения плотностей популяций зайцев N1 и волков N2. На рис. 1. они могут быть изображены в виде замкнутых кривых, расположенных вокруг точки пересечения прямых и .

Если же нарисовать зависимости N1 и N2 от времени t, то получим периодические кривые, имеющие вид, как изображенные на рис.2.

Известны различные модификации рассмотренной модели «хищник-жертва», в частности, рассмотрим модель двух сосуществующих видов

где B1 иB2 – плотности «хищников» и «жертв». Например, если хищниками являются волки, а жертвами зайцы, то плотность – это среднее количество волков (зайцев) на 1 км2 территории их обитания, E1 , E2 – скорости естественного роста популяции «хищников» и «жертв», G1 и G2 – коэффициенты, характеризующие ускорение и замедление роста популяций «хищников» и «жертв» в результате их «взаимодействия» (например, волки питаются зайцами и в результате такого «взаимодействия» количество зайцев уменьшается, а количество волков увеличивается), D1 и D2 - коэффициенты самодиффузии, d1 и d2 – коэффициенты, характеризующие скорость погони за «жертвой» и скорость убегания от «хищника».

Эта модель может быть модифицирована путем введения дополнительной информации, например, о питании зайцев растительностью (трава, кустарник и т.д.), об охотниках на волков и зайцев, о более точном учете скорости естественного роста волков и зайцев и т.д. Известны случаи применения подобных моделей при изучении экологии океана, в задачах о распространении эпидемий и т.д. Задачу «хищник-жертва» можно усложнять путем введения новых переменных в зависимости от проблемы, которую нужно решить.

Можно несколько видоизменить уравнения и выписать уравнения конкуренции, которые так же первыми рассмотрели В. Вольтерра и А. Лотка независимо друг от друга в двадцатых годах ХХ века. В тридцатых годах ХХ века Г.Ф. Гаузе немного модифицировал уравнения Вольтерры-Лотки. Поэтому эти уравнения сейчас называют уравнениями Вольтерры – Лотки – Гаузе.

Конкуренция – это взаимодействие нескольких организмов. Эти организмы могут быть как одного вида, так и разных видов. Это взаимодействие возникает тогда, когда этим организмам нужен один и тот же ресурс (пища, кислород, освещенность, вода и пр.), но, однако, этого ресурса на всех не хватает. Предположим, что на одной и той же территории обитают два вида различных животных, которые питаются одним и тем же, например, овцы и кролики, которые питаются травой (нечто подобное было в Австралии, когда туда завезли кроликов). Тогда, скорость изменения плотности популяции первого вида

,

а скорость изменения плотности популяции второго вида

,

где N1 и N2 – плотности популяций первого и второго видов; E1 и E2 – постоянные коэффициенты; E1N1 и E2N2 – члены, характеризующие рост соответствующих популяций, при неограниченных запасах пищи; F(N1,N2) – функция, характеризующая ограничение роста популяций первого и второго видов, вызванного увеличением численности (и плотности), животных первого и второго видов; G1 и G2 – постоянные коэффициенты, характеризующие интенсивность процесса, приводящего к ограничению роста популяции; G1F(N1,N2)N1 и G2F(N1,N2)N2 – показатели, характеризующие ограничение роста популяции из-за недостатка пищи для первого и второго видов. В разностном виде эти уравнения имеют вид

Уравнения Вольтерры – Лотки – Гаузе имеют вид

или

где R1, R2, K1, K2, A1, A2 – постоянные коэффициенты.

Если N1 и N2 малы, т.е. и , то эти уравнения будут иметь вид

,

.

Решения этих уравнений

N1 = eR1t,

N2 = eR2t,

т.е. при малых значениях плотностей популяций первого и второго видов численность обоих видов растет экспоненциально с показателями R1 и R2 соответственно.

Если у первого вида нет конкурентов и у второго вида нет конкурентов, то коэффициенты A1=0 и A2=0 и уравнения будут иметь вид

При N1 = K1 и N2 = K2 правые части уравнений обращаются в нуль, т.е. скорости изменения N1 и N2 равны нулю, т.е. N1 и N2 являются постоянными. Поскольку при малых значениях N1 и N2 они растут экспоненциально, то постоянство N1 и N2 при N1 = K1 и N2 = K2 означает, что N1 = K1 и N2 = K2 являются асимптотами, к которым стремятся N1 и N2 при увеличении времени. Проверьте это расчетами на компьютере. Коэффициенты A1 и A2 характеризуют воздействие второго вида на первый и первого вида на второй соответственно. Это воздействие проявляется в уменьшении скорости изменения плотности популяций N1 и N2.

**ГЛАВА 9. ЭКОНОМИКА**

**ИЛИ БОЛЬШИЕ МАТРИЦЫ**

И был глубокий эконом,

То есть умел судить о том,

Как государство богатеет,

И чем живет, и почему

Не нужно золота ему,

Когда простой продукт имеет.

А.С. Пушкин

*Рассматривается модель В.В. Леонтьева межотраслевого баланса и др.*

В настоящее время экономика любого предприятия, отрасли промышленности, города, региона или государства представляет очень сложную систему, которая очень трудно поддается математической формализации. При рассмотрении функционирования национального хозяйства какой-либо страны огромную роль играют межотраслевые связи, разобраться в которых не просто, а тем более принимать правильные решения при управлении экономикой страны. Это подтверждают экономические кризисы, которые происходят, время от времени во всех странах мира. К наиболее мощным экономическим кризисам можно отнести, например, кризисы в США в тридцатые годы и в России в девяностые годы XX века. В качестве примера можно рассмотреть такую отрасль, как производство автомобилей. Ее развитие зависит от развития металлургии (мотор, корпус и все металлические части машины), резиновой промышленности (шины, шланги и пр.), стекольной промышленности (стекла, фары и пр.), электроники (радиоприемники, кондиционеры, автомобильные компьютеры и пр.) и др. В свою очередь, каждая из перечисленных промышленностей зависит от развития науки и других промышленностей, например, производство стекла, резины и выплавка металла зависят от развития химии, электроника зависит от развития физики и пр. Таким образом, задача согласования производства автомобилей очень сложная. Много экономистов во всем мире в течение XX века пробовали решить эту задачу. Однако, одним из наиболее эффективных подходов оказался метод межотраслевого анализа предложенный нобелевским лауреатом в области экономики Василием Васильевичем Леонтьевым. Предложенный им метод отличается простотой, ясностью и возможностью его реализации на компьютере.

РАВНОВЕСНЫЙ МЕТОД

Обычно в экономике строят прямую схему: «Средство → Цель». Под средством обычно понимают производство, с помощью которого достигают поставленной цели, т.е. произведенные на производстве продукты, которые потребляются другими производствами (например, шины в автомобильной промышленности) или потребителями (например, легковые автомобили).

В.В. Леонтьев предложил при анализе межотраслевых связей рассматривать обратную схему, т.е. «Цель → Средство». Этот подход позволяет с точки зрения математики, представить межотраслевую зависимость при анализе экономики в виде системы линейных алгебраических уравнений.

В основе этого подхода лежит предположение, что «Выпуск конкретного вида продукции = Промежуточный спрос этого вида продукции + Конечный спрос этого вида продукции».

Это можно записать в виде соотношения

, i = 1, 2, …, n, (1)

где - выпуск i-го вида продукции, - промежуточный спрос (т.е., это часть общего спроса) – закупки i-го вида продукции отраслями 1, 2, 3, …,j,…,n в качестве исходных материалов (т.е. промежуточных продуктов), - конечный спрос (это часть общего спроса) – закупка конечных продуктов. Запишем

, j = 1, 2,…,n,

где - расходы j-ой отрасли, - промежуточные затраты (т.е., исходные материалы, закупаемые отраслью j у отраслей 1, 2, …, i, …, n), - добавленная стоимость (т.е., это факторные затраты отрасли), т.е. вновь созданная стоимость, которая распадается на зарплату (доход работающих по найму) и прибыль (предпринимательский доход).

Это соотношение можно выразить словами: «Расходы отрасли = Промежуточные затраты + Добавленная стоимость». Отрасль выпускает один продукт – важное предположение (однако, легко рассмотреть тот случай, когда отрасль выпускает несколько продуктов).

Рассмотрим центральный вопрос межотраслевого анализа. Пусть коэффициент прямых затрат aij фиксирован. Пусть конечный спрос изменился на , т.е. . Как изменится объём выпуска отрасли ?

В модели предполагается, что

1) Выпуск отрасли = Расходы отрасли

2) Общая сумма конечного спроса = Общая сумма добавленной стоимости.

Математически это можно записать в виде:

, i = 1, 2,…, n,

.

Построим таблицы (матрицы) коэффициентов прямых затрат и полных затрат.

- коэффициенты прямых затрат (i, j = 1, 2, …, n), т.е. объём ресурса i, необходимый для производства единицы продукта j.

Можем записать

, i, j = 1, 2, …, n.

Подставим в (1)

, i, j = 1, 2,…, n.

Таким образом, имеем систему линейных уравнений

, i = 1, 2,…, n.

Ищем решение (X1, X2, …, Xn).

Запишем систему уравнений в матричном виде

X = A X + F, (2)

где

, , .

Формула (2) называется моделью межотраслевого баланса В.В. Леонтьева.

A – матрица коэффициентов прямых затрат, F – вектор конечного спроса.

Решим уравнение (2):

X = A X + F

Перепишем это уравнение в виде

I X = A X + F ,

где

– единичная матрица размерности n, т.е. матрица, у которой количество строк равно количеству столбцов и равно n, по диагонали из левого верхнего угла в правый нижний стоят единицы, а в других местах - нули

Перенесём A X в левую часть

(I - A) X = F

Умножим левую и правую части уравнения на (I - A)-1

(I - A)-1 (I - A) X = (I - A)-1 F,

и получим

X = (I - A)-1 F.

Это и есть решение уравнения (2). Матрица B = (I - A)-1 F – называется обратной матрицей В.В. Леонтьева.

Экономический смысл элементов матрицы B (bij): B – матрица коэффициентов полных затрат. Коэффициент bij показывает потребность в валовом выпуске продукции отрасли i для производства единицы конечной продукции отрасли j. Таким образом, bij – коэффициент, показывающий эффект распространения спроса, первоначальным источником которого является спрос на конечную продукцию.

Можно доказать, что

I + A + A2 + … + AK +… = (I - A)-1.

Действительно, умножим левую и правую части на (I - A)

(I + A + A2 + … + AK +… ) (I - A) = (I - A)-1 (I - A).

Тогда левая часть

(I + A + A2 + … + AK +… ) (I - A) = I - A + A – A2 + A2 – A3 + A3 -… = I.

Правая часть

(I - A)-1 (I - A) = I.

Таким образом, I = I.

Итак, повторяя проделанные операции в обратном порядке

I = I,

(I - A)-1 (I - A) = I,

(I + A + A2 + … + AK +… ) (I - A) = I - A + A – A2 + A2 – A3 + A3 -… = I,

получим

I + A + A2 + … + AK +… = (I - A)-1

Таким образом,

X = (I-A)-1F = (I + A + A2 + … + AK +… ) F,

и решение уравнения (2) может быть получено итеративно

X(k+1) = X(k) + F. (3)

Подставив в (3) в качестве исходного значения X(0) = F можно рассчитать результат, порождаемый конечным спросом. Подставив другое значение, например, , получим другое значение. Таким образом, можно ответить на центральный вопрос межотраслевого анализа.

Использование в межотраслевом анализе итеративных методов имеет следующие преимущества:

* Они удобны для расчета результата,
* Они не предполагают алгебраических знаний, необходимых для вычисления обратных матриц.

Рассмотрим определение равновесного выпуска прямым методом. Рассмотрим уравнение (2)

X = A X + F.

Тогда можно переписать

I X = A X + F,

(I - A) X = F.

Обозначая B = I – A, перепишем B X = F.

Применяя метод Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений, найдем X.

Итеративный и прямой методы могут быть реализованы на компьютере.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Несомненный признак истинной науки –

сознание ничтожности того, что знаешь,

в сравнении с тем, что раскрывается.

Л.Н. Толстой

*Рассматриваются перспективы компьютерного моделирования в различных областях знания.*

Во все области человеческой деятельности проникает компьютер и связанное с ним математическое моделирование процессов и явлений. Продолжают развиваться моделирование в традиционных областях таких, как математика, физика, химия, биология, экология, экономика и др. В последние годы предпринимаются попытки строить математические модели объектов и явлений, которые трудно реализовать в реальности или даже невозможно, например, в психологии, социологии, истории и др.

В астрономии построены модели развития Вселенной (было несколько моделей – расширяющаяся, сжимающаяся, периодическая, см., например, Хокинг «От Большого взрыва до черных дыр (краткая история времени)»), модели движения галактик (это важная проблема движения n тел в гравитационном поле; телескоп Хаббла (Hubble) обнаружил недавно столкновение галактик, что теоретически считалось возможным). Важно моделировать необычные явления во Вселенной (черные и белые дыры, гравитационные линзы и пр.), процессы, происходящие внутри звезд (например, экспериментальные данные, полученные академиком Северным (колебания диаметра Солнца) не укладываются в существующие теории процессов происходящих внутри Солнца) и др.

В биологии проводится моделирование развития жизни на Земле, как из неорганических веществ образовались клетки, как из клеток образуются определенной формы организмы, как ведут сообщества организмов. Моделирование в генетике (сейчас определили генетический состав человека, а теперь важно определить, как работают гены, их (вариантов) очень много и в этом может помочь компьютер), физиологии (кровообращение, дыхание и т.п.) и многих других разделах биологии.

В географии развиваются модели подвижности материков (интересно, что было раньше и что будет потом), модели предсказания землетрясений, наводнений, стихийных бедствий, предсказания погоды и изменений климата. Методы развитые в области географии могут быть с успехом применены при исследовании других планет (эта наука называется планетология), на которых, как и на Земле существует климат, планетотрясения, ураганы, грозы и прочие катаклизмы. Важны модели образования Земли, ее развития и гибели.

В информатике важно кодирование и декодирование информации, защита информации, проблемы распознавания образов и многое другое.

В математике можно различить чисто математические проблемы (см. например, Проблемы Гильберта, которые он огласил на международном конгрессе математиков в 1900 г., и которые до сих пор не все ещё решены) и прикладные проблемы (разработка новых численных методов, позволяющих проводить расчеты с большой точностью и скоростью на современных компьютерах, алгоритмы параллельных вычислений и др). Важное направление - формулировки теорем и их доказывание компьютером (например, новосибирский математик Матросов разработал алгоритмы, с помощью которых компьютер формулирует математические теоремы и доказывает их).

В физике созданы модели строения вещества (кварки, и пр.), осуществляются попытки создать единую теорию поля (существует 4 основных взаимодействия – электромагнитное, гравитационное, сильное и слабое), которая объединила бы эти 4 взаимодействия. Важны проблемы энергетики, в частности, как извлечь энергию из вещества, которая превышала бы атомную или водородную бомбу и которую можно было бы получать постепенно по мере надобности (например, термоядерный синтез и пр.)

В химии сейчас известно уже более 13 млн. химических веществ и каждый год в лабораториях мира синтезируют сотни новых веществ (см., например, ALDRICH – ежегодный каталог химических веществ). Строят модели новых веществ с заранее заданными свойствами, моделируют реакции между веществами, и т.д.

В экологии строят модели обитания животных на ограниченных пространствах, рассчитывают влияние антропогенного фактора на экологическую ситуацию в городах, странах и на всей Земле в целом и многое другое.

В экономике строят математические модели развития экономики отдельного предприятия, страны, модели развития всемирной экономики и т.д.

Кроме того:

В медицине и физиологии человека и животных строят модели кровообращения, дыхания, роста органов и тканей, зрения, слуха и пр. Строят модели влияния лекарственных препаратов на организмы. В психологии строят модели личности, поведения в коллективе и пр. В социологии строят модели развития общества, и пр. В литературе определяют с помощью компьютера авторство на основе анализа стиля письма. Компьютеры могут сочинять стихи и прозу, осуществлять перевод (устный и письменный) с одного языка на другой и др. В музыке компьютеры сочиняют музыкальные произведения, специалисты строят модели и разрабатывают музыкальные синтезаторы В области истории моделируют исторические события, просчитывают на компьютере различные варианты развития исторических событий и пр. В археологии моделируют быт и события давно прошедших эпох и многое другое.

Таким образом, математика и компьютеры проникает во все сферы человеческой деятельности и исторический опыт показывает, что в настоящее время компьютерное моделирование успешно продолжает развиваться как в классических естественнонаучных областях (астрономии, математике, физике, химии, биологии, экологии и др.), так и в относительно новых (географии, литературе, языкознании, музыке, социологии, психологии, истории и др.). Это говорит о том, что компьютерное моделирование в настоящее время прочно завоевывает позиции во всех областях человеческой деятельности и с учетом темпов развития компьютерной техники следует ожидать в ближайшем будущем существенных научных и практически важных открытий.

**ЛИТЕРАТУРА.**

Приводится список литературы, который может быть полезен тем, кто заинтересовался изложенными вопросами и хотел бы более подробно и глубже познакомиться с затронутыми научными проблемами.

К Введению:

1. Ананьев Б.Г. Человек как предмет познания - Л.: Изд-во ЛГУ, 1969.
2. История биологии (под. Ред. Л.Я. Бляхера) – М.: Наука, 1975.
3. Клайн М. Математика. Поиск истины – М.: Мир, 1988.
4. Колмогоров А.Н. Алгоритм, информация, сложность - М.: Знание ,1991
5. Липаев В.В. Качество программного обеспечения - М: Финансы и статистика, 1983.
6. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного - М.: Мир, 1990
7. Петров А.А. Математическое моделирование экономического развития - М: Знание, 1984.
8. Петушкова Е.В. Отражение в живой природе (динамика теоретических моделей) – Л.: Наука, 1983.
9. Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1990.

10.Штофф В.А. Моделирование и философия – М.: Наука, 1966.

К 1 главе:

1.Бурсиан Э. В. Физика 100 задач для решения на компьютере. СПБ: Издательский дом «МиМ», 1997.

2.Гулд Х., Тобочник Я.. Компьютерное моделирование в физике. М: Мир, 1990.

3.Извозчиков В.А., Слуцкий А.М.. Решение задач по физике на компьютере. М: Просвещение, 1999

К 2 главе:

1. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. М: Наука, 1969, 112 стр.

2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М: Наука, 1981.

К 3 главе:

1.Берже П., Помо И, Видаль К. Порядок в хаосе. М: Мир. 1991.

2.Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. М: Мир. 1990.

3.Мари Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. М: Мир. 1983.

4.Мун Ф.. Хаотические колебания. М: Мир. 1990.

5.Федер Е. Фракталы. М: Мир. 1991.

К 4 главе:

1.Дороднов А.М., Острецов И.Н., Петросов В.А., Приходов В.Ю., Сафонов И.Б. Графики функций. М: Высшая школа, 1972.

2.Егерев В.К., Радунский Б.А., Тальский Д.А.. Методика построения графиков функций. М: Высшая школа, 1970.

3.Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Кириллов А.А. Метод координат. М: Наука, 1971.

4.Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Шноль Э.Э. Функции и графики. М: Наука, 1971.

5.Моль А. Теория информации и эстетическое восприятие. М: Мир, 1966.

6.Юсупов Р.М., Заболотский В.П. Научно-методологические основы информатизации. СПБ: Наука, 2000.

7.Капица П.Л.. Эксперимент, теория практика. М: Наука, 1981.

К 5 главе:

1. Кнут Д.Е. Искусство программирования. М.: Мир, 1977.

2. Яглом И., Яглом А.. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. М: Наука, 1953.

К 6 главе:

1.Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. М: Мир, 1990.

2.Новейший справочник необходимых знаний. М: РИПОЛ КЛАССИК, 2000.

К 7 главе:

1. Мари Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М: Мир, 1983.

2. Николис Г., Пригожин И. Познание сложности. М: Мир, 1990.

К 8 главе:

1.Вольтерра В.. Математическая теория борьбы за существование. М: Наука, 1976, 286 с.

2.Мари Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М: Мир, 1983.

К 9 главе:

1. Дьяконов В.П. Компьютерная математика. М: Нолидж, 2001.

2. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ. М: Наука, 1987.

К Заключению:

1.Проблемы Гильберта. М: Наука, 1979.

2.Хокинг «От Большого взрыва до черных дыр (краткая история времени). М: Наука, 1990.

Щщщщщщщщщщщщщщщщщщщщщщщщщщщщщщщщщщщщщщщщ

В последние годы было разработано огромное количество прикладных программ, которые позволяют обрабатывать письменную и устную речь (), изображения (), звук (), создавать эффект анимации (), и т.д.

В области развития алгоритмов и математических моделей также постоянно происходит развитие. Особенный интерес в последние годы привлекает проблема параллельных алгоритмов. Математические модели строятся в различных областях человеческой деятельности (математике, физике, химии, биологии, экономике и т.д.).

В последнее время, в связи с развитием Internet и локальных сетей, возникли проблемы связанные непосредственно с сетевыми технологиями. В первую очередь – проблемы безопасности.

Работа в компьютерных сетях с участием большого количества людей, компьютеров, баз данных и т.д. требует необходимости всю эту деятельность каким-то образом организовывать.

Возможности компьютера ограничиваются элементной базой, на основе которой построен компьютер. Элементная база, в первую очередь, ограничивает скорость расчетов и объем памяти, с помощью которой можно проводить операции. Из истории известно, что раньше были механические вычислительные устройства, затем ламповые, на транзисторах, БИС и т.д. Сейчас ведутся разработки биокомпьютеров. В последние годы наметилась тенденция разработки специализированных компьютера (бортовых компьютеров), предназначенных для выполнения конкретных задач.