

**Politechnika  
Warszawska**

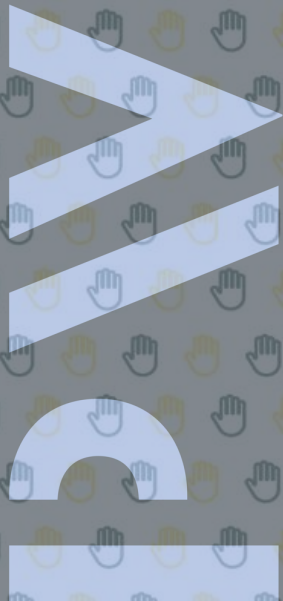
Zakład Podstaw Konstrukcji

# Projektowanie

mgr inż. Grzegorz Kamiński

[grzegorz.kaminski@pw.edu.pl](mailto:grzegorz.kaminski@pw.edu.pl)

18 kwietnia 2023  
Wersja 1.22



# Drgania wałów

Częstość drgań własnych zespołu wału zależy od:

- \* wymiarów i rozmieszczenia mas na wale,
- \* sposobu podparcia wału i jego własności sprężystych.

Wały sprawdza się na drgania w celu wyznaczenia krytycznej prędkości obrotowej, przy której może wystąpić rezonans. Występuje on wówczas, gdy częstotliwość drgań wymuszonych pokrywa się z częstotliwością drgań własnych albo jest ich krotnością.

# Drgania wałów

Dla przypadku drgań giętnych gdy wał jest gładki i pracuje poziomo:

$$n_{kr} \cong \frac{30 \cdot K}{\sqrt{f_Q}} \left[ \frac{\text{obr}}{\text{min}} \right] \quad (1)$$

\*  $K$  – współczynnik zależny od sposobu zamocowania;  $K = 1$ , jeśli wał jest podparty,  $K = 1,3$ , jeśli jest utwierdzony,

\*  $f_Q [m]$  – strzałka statycznego ugięcia wału pod ciężarem  $Q$ .

# Drgania wałów

Krytyczna prędkość kątowa  $\omega_{kr}$  wynosi:

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{C}{m}} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (2)$$

\*  $C$  — sztywność giętna wału  $C = \frac{Q}{f_Q}$ ,

\*  $m$  — masa odkształcająca wał  $m = \frac{Q}{g}$ .

# Drgania wałów

Przybliżona wartość pierwszej prędkości krytycznej układu wielomasowego wynosi:

$$\omega_{1kr} = \sqrt{\frac{g \cdot \sum_{i=1}^n Q_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n Q_i \cdot y_i^2}} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (3)$$

\*  $Q_i$  [N] — ciężary tarcz,

\*  $y_i$  [m] — ugięcie w punktach przyłożenia sił  $Q_i$  (dowolnej płaszczyźnie).

# Drgania wałów

Krytyczna prędkość obrotowa, w przypadku występowania drgań skrętnych:

$$\omega_{kr} = \frac{30}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{c}{\theta}} \left[ \frac{obr}{min} \right] \quad (4)$$

\*  $c$  – sztywność skrętna wału (dla wału kształtowego – sztywność zastępcza)  $c = \frac{J_o \cdot G}{l}$ ,

\*  $\theta$  – momenty bezwładności mas drgających,

\*  $l$  – długość wału (lub jego odcinków),

\*  $J_o$  – biegunowy moment bezwładności przekroju wału (lub przekrojów odcinków wału).

# Drgania wałów

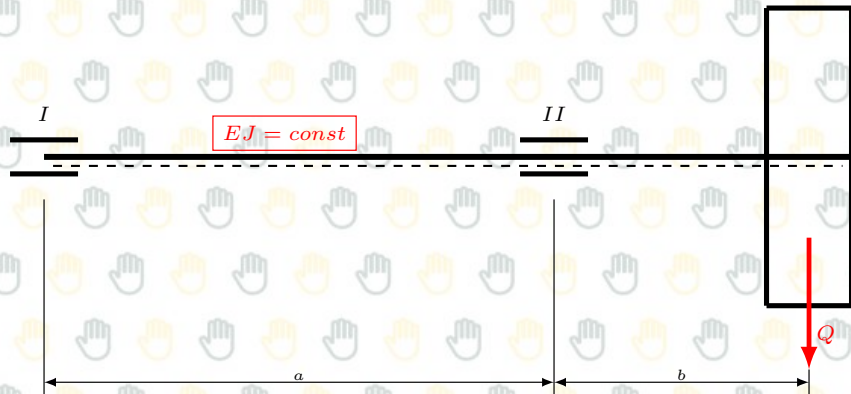
Niebezpieczny zakres prędkości obrotowej wynosi od  $0,85 \cdot n_{kr}$  do  $1,25 \cdot n_{kr}$ .

Drgania skrętne są niebezpieczne, gdy różnica częstości drgań własnych i wymuszonych wynosi mniej niż  $15\% \div 20\%$ .



## Przykład 9.4

Jaka powinna być średnica wału z osadzonym na nim kołem o ciężarze  $Q = 600\text{ N}$ , jeżeli krytyczna prędkość obrotowa ma spełnić warunek  $n_{kr} \leq 2400\text{ obr/min}$ . Wał będzie wykonany ze stali ( $E = 2,06 \cdot 10^6\text{ MPa}$ ).  
Dane wymiary:  $a = 200\text{ mm}$ ,  $b = 100\text{ mm}$





## Przykład 9.4

Statyczna wartość strzałki ugięcia wynosi (przypadek elementarny):

$$f_Q = \frac{Q \cdot b^2}{3 \cdot E \cdot J} \cdot (a + b)$$

Sztywność wału:

$$C = \frac{Q}{f_Q} = \frac{3 \cdot E \cdot J}{b^2 \cdot (a + b)} = \frac{3 \cdot E \cdot \pi \cdot d^4}{64 \cdot b^2 \cdot (a + b)}$$

$$C = 1,01 \cdot 10^{13} \cdot d^4 \left[ \frac{N}{m} \right]$$

Jednocześnie:

$$C = \omega_{kr}^2 \cdot m = \left( \frac{\pi \cdot n_{kr}}{30} \right)^2 \cdot \frac{Q}{g}$$

$$C = 38,6 \cdot 10^5 \left[ \frac{N}{m} \right]$$

## Przykład 9.4

Porównując wyznaczono średnicę

$$38,6 \cdot 10^5 \leq 1,01 \cdot 10^{13} \cdot d^4$$

$$d = 0,0249 \text{ m}$$

Ostatecznie średnica wynosi  $d = 25 \text{ mm}$ .

## Przykład 9.5

Na wałe transmisyjnym o stałej średnicy  $d = 40 \text{ mm}$  osadzono koło pasowe o ciężarze  $Q = 600 \text{ N}$ . Pozostałe wymiary podano na rysunku. Obliczyć krytyczną liczbę obrotów wału oraz zakres obrotów niebezpiecznych. Masę samego wału pominąć. Dane wymiary:  $a = 800 \text{ mm}$ ,  $b = 200 \text{ mm}$



## Przykład 9.5

Krytyczną prędkość obrotową wyznaczono stosując:

$$n_{kr} \cong \frac{30 \cdot K}{\sqrt{f_Q}}$$

Wartość strzałki ugięcia elementarnego układu:

$$f_Q = \frac{Q \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot (a + b) \cdot E \cdot J} = \frac{Q \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot (a + b) \cdot E} \cdot \frac{64}{\pi \cdot d^4}$$

$$f_Q = 1,98 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

## Przykład 9.5

Stąd:

$$n_{kr} = 2132 \frac{\text{obr}}{\text{min}}$$

Zakres niebezpiecznej prędkości obrotowej wynosi:

$$n_{nieb} = (0,8 \div 1,25) \cdot n_{kr}$$

$$n_{nieb} = 1706 \div 2665 \frac{\text{obr}}{\text{min}}$$

# Obliczenia zmęczeniowe

Obliczenia sprowadzają się do określenia wartości rzeczywistego współczynnika bezpieczeństwa  $\delta$ :

$$\delta = \frac{\delta_\sigma \cdot \delta_\tau}{\sqrt{\delta_\sigma^2 + \delta_\tau^2}} \quad (5)$$

- \*  $\delta_\sigma$  — współczynnik bezpieczeństwa dla zginania, obliczany tak jakby wał był obciążony tylko momentem zginającym,
- \*  $\delta_\tau$  — współczynnik bezpieczeństwa dla skręcania, obliczany tak jakby wał był obciążony tylko momentem skręcającym.

# Obliczenia zmęczeniowe

Dla wahadłowego cyklu obciążenia:

$$\delta_{\sigma} = \frac{Z_{go} \cdot \varepsilon_g}{\beta_g \cdot \sigma_{na}} \quad (6)$$

$$\delta_{\tau} = \frac{Z_{so} \cdot \varepsilon_s}{\beta_s \cdot \tau_{na}} \quad (7)$$

\*  $\beta_{g,s} = f(\alpha_k, \eta_k)$  – współczynniki działania karbu przy zginaniu lub skręcaniu,

\*  $\varepsilon_{g,s} = f(Z_o, d, \alpha_k)$  – współczynniki wielkości przedmiotu przy zginaniu lub skręcaniu,

\*  $\sigma_{na}, \tau_{na}$  – nominalne amplitudy naprężeń,

\*  $\alpha_k$  – współczynnik kształtu karbu,

\*  $\eta_k$  – współczynnik wrażliwości materiału na działanie karbu.



# Obliczenia zmęczeniowe

W przypadku cykli niesymetrycznych sposób obliczania rzeczywistego współczynnika bezpieczeństwa zależy od:

- \* sposobu, w jaki zmienia się wartość naprężeń przy przeciążeniach (przy niezmiennym współczynniku stałości obciążenia  $\kappa$  bądź przy stałej wartości naprężenia średniego  $\sigma_m$ ),
- \* ewentualnego ograniczenia maksymalnych naprężeń rozważanego cyklu granicą plastyczności  $R_{eg}, R_{es}$ .

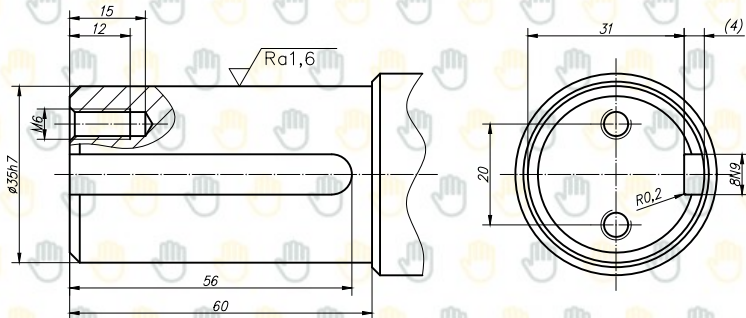
# Obliczenia zmęczeniowe

Zalecane wartości graniczne rzeczywistego współczynnika bezpieczeństwa:

- \*  $\delta = 1,3 \div 1,5$  — w przypadku dokładnych obliczeń, jednorodnego materiału, dokładnego wykonania,
- \*  $\delta = 1,5 \div 1,7$  — dla przeciętnych warunków pracy,
- \*  $\delta = 1,7 \div 2,5$  — przy zmniejszonej dokładności obliczeń, dla przypadków statycznie niewyznaczalnych, niekorzystnych warunków pracy, szczególnie odpowiedzialnych konstrukcji.

## Przykład 9.8

Sprawdzić wartość rzeczywistego współczynnika bezpieczeństwa  $\delta$  w przekroju wału maszynowego, przedstawionego na rysunku. Założyć, że rzeczywisty współczynnik bezpieczeństwa może mieć wartość  $\delta \geq 2,0$ . Wał wykonano ze stali C45, dla której  $Z_{s0} = 183 \text{ MPa}$ ,  $Z_{g0} = 310 \text{ MPa}$ ,  $R_{es} = 200 \text{ MPa}$ ,  $R_m = 700 \text{ MPa}$ .



## Przykład 9.8

Wał maszynowy w przekroju przenosi odzerowo-tętniący moment skręcający.

$$\tau_{na} = \tau_{nm} = \frac{\tau_n}{2} = \frac{M_s \cdot \pi}{64 \cdot d^3}$$

Współczynnik kształtu karbu znaleziono z wykresu dla  $\frac{\rho}{h}$ . W Zadaniu  $\frac{0,2}{4} = 0,05$ , więc  $\alpha_k = 4,1$ . Dla  $\rho = 0,2$  i  $R_m = 700 \text{ MPa}$   $\eta_k = 0,58$ .

Współczynnik oddziaływania karbu wynosi:

$$\beta_k = 1 + \eta_k \cdot (\alpha_k - 1)$$

$$\beta_k = 2,798$$

## Przykład 9.8

Zakładając, że wał jest starannie wytoczony  $\beta'_p = 1,07$ , więc współczynnik spiętrzenia naprężeń w karku wynosi:

$$\beta = \beta_k + \beta'_k - 1$$

$$\beta = 2,868$$

Współczynnik wielkości określono na podstawie  $d = 35 \text{ mm}$  i  $\alpha_k = 4,1$   
 $\varepsilon = 0,735$ . Współczynnik bezpieczeństwa wynosi:

$$\delta = \frac{Z_{so}}{\frac{\beta}{\varepsilon} \cdot \tau_a + \frac{Z_{so}}{R_e} \cdot \tau_m}$$

$$\delta = 1,63$$

## Przykład 9.8

Wartość uznano za niezadowalającą, gdyż:

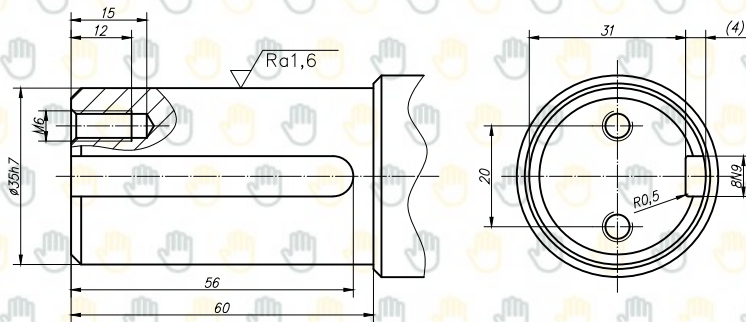
$$\tau_{max} = \frac{\tau_n \cdot \beta}{\epsilon} = 181,9 \text{ MPa}$$

Obniżenie spiętrzenia naprężeń można uzyskać przez:

- \* zwiększenie promienia zaokrąglenia dna rowka wpustowego,
- \* zastosowanie dwóch rowków wpustowych,
- \* wykonanie otworu odciążającego w czopie,
- \* zweryfikowanie założeń w odniesieniu do charakterystyki zmian momentu skręcającego,
- \* zwiększenie średnicy w przekroju wału maszynowego.



## Przykład 9.8



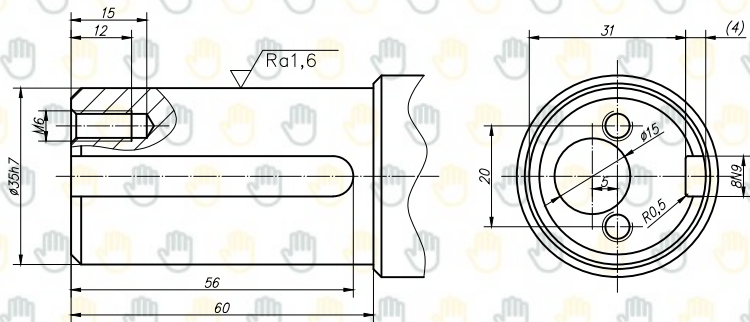
Rozważono zmianę promienia zaokrąglenia rowka wpustowego  $r = \rho = 0,5$  co spowodowało, że  $\alpha_k = 3,4$  dla  $\frac{\rho}{h} = 0,125$ ,  $\eta_k = 0,67$  dla  $\rho = 0,5$  i  $R_m = 700 \text{ MPa}$ . Po tych zmianach  $\beta_k = 2,608$  a  $\beta = 2,678$  ( $\varepsilon = 0,738$ )  
Otrzymano niewielką poprawę współczynnika:

$$\delta = \frac{Z_{so}}{\frac{\beta}{\varepsilon} \cdot \tau_a + \frac{Z_{so}}{R_e} \cdot \tau_m}$$

$$\delta = 1,729$$



## Przykład 9.8

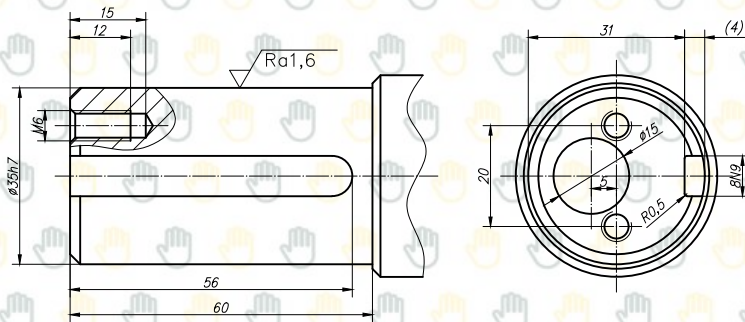


Rozważano wykonanie otworu odciażającego w czopie co spowodowało, że  $\alpha_k = 2,0$ . Po tych zmianach  $\beta_k = 1,678$  a  $\beta = 1,74$  ( $\varepsilon = 0,757$ )  
Zmianie uległy naprężenia nominalne:

$$\tau_n = \tau_n = \frac{M_s}{0,17 \cdot d^3} = 54,9 \text{ MPa}$$

$$\tau_{na} = \frac{\tau_n}{2} = 27,45 \text{ MPa}$$

## Przykład 9.8



Współczynnik bezpieczeństwa wynosi:

$$\delta = \frac{Z_{so}}{\frac{\beta}{\epsilon} \cdot \tau_a + \frac{Z_{so}}{R_e} \cdot \tau_m}$$

$$\delta = 2,075$$

Spełniono warunek bezpieczeństwa.

# Bibliografia



A. Dziurski, E. Mazanek, and L. Kania. *Przykłady obliczeń z podstaw konstrukcji maszyn: Łożyska, sprzęgła i hamulce, przekładnie mechaniczne. tom 2.* WNT, 2015. isbn: 9788393491360.



L. W. Kurmaz and O. L. Kurmaz. *Podstawy konstruowania węzłów i części maszyn: podręcznik konstruowania.* Samodzielna Sekcja "Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej", 2011. isbn: 9788388906343.



E. Mazanek, A. Dziurski, and L. Kania. *Przykłady obliczeń z podstaw konstrukcji maszyn: Połączenia, sprężyny, zawory, wały maszynowe. tom 1.* WNT, 2005. isbn: 9788320435528.



W. Starego. *Poradnik konstruktora przekładni pasowych.*

**GRACIAS**  
**ARIGATO**  
**SHUKURIA**  
**JUSPAXAR**  
**DANKSCHEEN**  
**TASHAKKUR ATU**  
**YAQHANYELAY**  
**SUKSAMA**  
**EKHMET**  
**GRAZIE**  
**MEHRBANI**  
**PALDIES**  
**YOU**  
**BOLŽIN**  
**MERCI**  
**THANK**  
**BI'YAN**  
**SHUKRIA**  
**TINGKI**  
**SPASIBO**  
**SNACHALMUYA**  
**MURUM**  
**CHALTU**  
**WABEELA**  
**MAYTEKA**  
**YUSPISAGATAN**  
**HUI**  
**UNALCHEEN**  
**NATUR**  
**GUR**  
**EXOU**  
**SHOMO**  
**MAKETU**  
**MEMONK HAR**  
**GAETIHO**  
**GOZAIMASHITA**  
**EFCHARISTO**  
**ACAYE**  
**FAKAAUE**  
**KOMAPSUMNIDA**  
**MAAKE**  
**LAH**  
**ATTO**  
**MAHETU**  
**BAKKA**  
**TAVYAPUCH**  
**MEDAWAGSE**  
**UNALCHEEN**  
**SPASIBO**  
**DEHNAUJA**  
**MEHACHALNYA**  
**UNALCHEEN**  
**MAKETU**  
**MEMONK HAR**  
**GAETIHO**  
**GOZAIMASHITA**  
**EFCHARISTO**  
**ACAYE**  
**FAKAAUE**  
**KOMAPSUMNIDA**  
**MAAKE**  
**LAH**  
**ATTO**  
**MAHETU**  
**BAKKA**  
**TAVYAPUCH**  
**MEDAWAGSE**