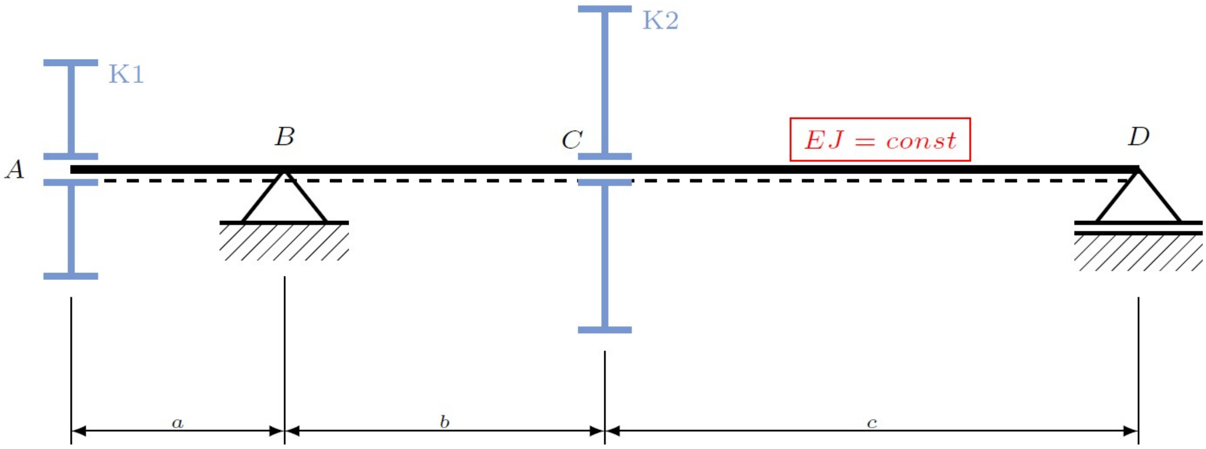
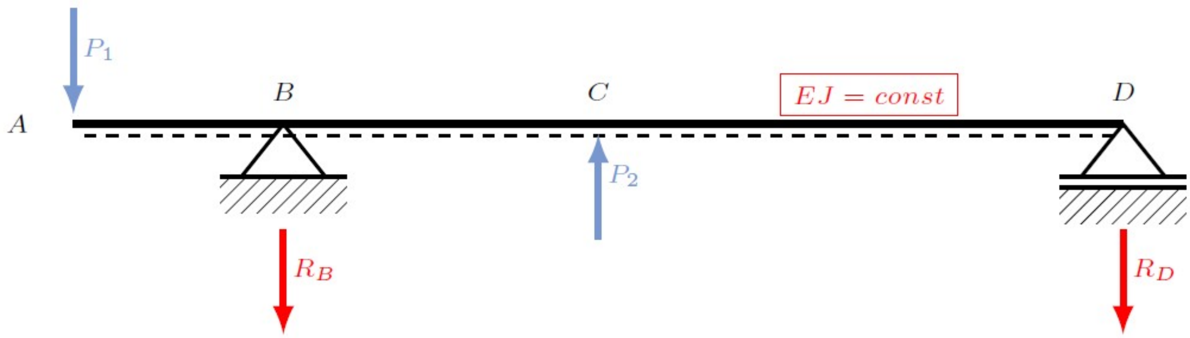
Obliczyć reakcje w łożyskach (Rys. 1) oraz średnicę gladkiej osi (belki) zginanej siłami $P_1 := 1000\ N$, $P_2 := 4000\ N$ przyłożonych do kół bosych K1 i K2. Dane wymiary: $a := 200\ mm$, $b := 300\ mm$, $c := 500\ mm$, $l := b + c$. Naprężenia dopuszczalne materiału osi (stal C35) wynoszą $k_{go} := 64\ MPa$, dopuszczalne strzałka ugięcia wynosi $f := 0.0005 \cdot l$, moduł Younga stali $E := 206\ GPa$.



Rys. 1 Szkic projektowanej belki

Korzystając z Rys. 2 zapisano w sposób jawny równania równowagi



Rys. 2 Schemat obliczeniowy belki

$$-P_1 \cdot (a+b+c) - R_B \cdot (b+c) + P_2 \cdot c = 0$$

$$-P_1 - R_B + P_2 - R_D = 0$$

Równania przekształcono do postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} -(b+c) & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_B \\ R_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \cdot (a+b+c) - P_2 \cdot c \\ P_1 - P_2 \end{bmatrix}$$

by wyznaczyć siły reakcji

$$\begin{bmatrix} R_B \\ R_D \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -(b+c) & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \cdot (a+b+c) - P_2 \cdot c \\ P_1 - P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.75 \end{bmatrix} kN$$

Zakres zmian momentu gnącego przedstawiono w Tab. 1. Poszczególne momenty zapisano :

Tab. 1 Zestawienie przedziałów, wzorów i wartości granicznych momentu gnącego

Przedział	**Wzór**	**Wartość**
$x = 0$		$0\,Nm$
$x \in (0,a)$	$-P_1 \cdot x$	
$x = a$		$-200\,Nm$
$x \in (a,a+b)$	$-P_1 \cdot x - R_B \cdot (x-a)$	
$x = a+b$		$-875\,Nm$
$x \in (a+b,a+b+c)$	$-P_1 \cdot x - R_B \cdot (x-a) + P_2 \cdot (x-a-b)$	
$x = a+b+c$		$0\,Nm$

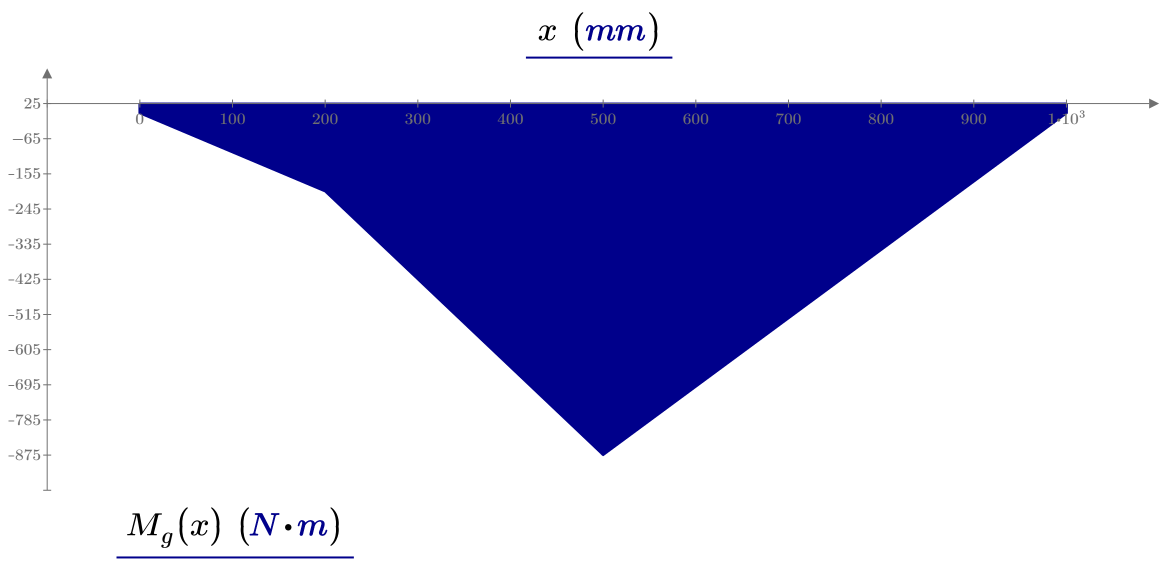
$$M_{g1}(x) := (0 \le x < a) \cdot (-P_1 \cdot x)$$

$$M_{g2}(x) := (a \le x < a+b) \cdot (-P_1 \cdot x - R_B \cdot (x-a))$$

$$M_{g3}(x) := (a+b \le x < a+b+c) \cdot (-P_1 \cdot x - R_B \cdot (x-a) + P_2 \cdot (x-a-b))$$

$$M_g(x) := M_{g1}(x) + M_{g2}(x) + M_{g3}(x)$$

Do sporządzenia przebiegu zmiany wykresu gnącego (Rys. 3) skorzystano z $L := a+b+c$. Wykres sporządzono dla $x := 0, 0.001 \cdot L .. L$

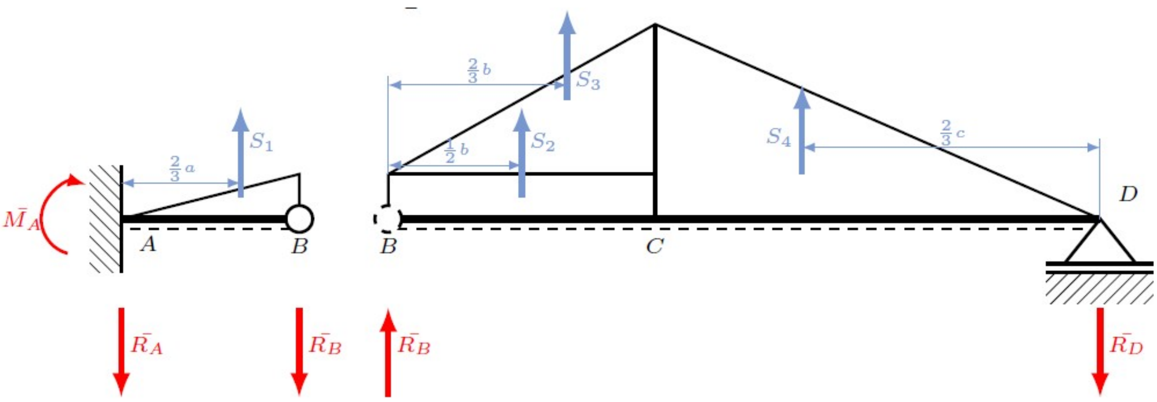


Rys. 3 Wykres momentu gnącego

Największa wartość momentu (Rys. 3) występuje dla $x_{min} := \mathbf{minimize}\left(M_g, a\right)$ i wynosi $M_{gmax} := \left|M_g\left(x_{min}\right)\right| = 875\ N \cdot m$. Na tej podstawie można wyznaczyć średnicę osi wynoszącą:

$$d_{W1} := \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{gmax}}{\pi \cdot k_{go}}} = 51.8\ mm$$

Maksymalną strzałkę ugięcia wyznaczono metodą analityczno-wykreślną. W pierwszym kroku dokonano zamiany belki na fikcyjną oraz zdysketyzowano obciążenie (Rys. 4).



Rys.4 Schemat rozwiązania belki fikcyjnej

Obciążenie rozłożone zostało zamienione na siły skupione działające w środkach ciężkości

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \left| \frac{1}{2} \cdot M_g(a) \cdot a \right| \\ \left| M_g(a) \cdot b \right| \\ \left| \frac{1}{2} \cdot \left(M_g(a+b) - M_g(a) \right) \cdot b \right| \\ \left| \frac{1}{2} \cdot M_g(a+b) \cdot c \right| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 60 \\ 101.25 \\ 218.75 \end{bmatrix} N \cdot m^2$$

Korzystając z Rys. 4 zapisano równania równowagi układu belki fikcyjnej:

$$R_{BF} \cdot (b+c) - S_2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot b + c \right) - S_3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot b + c \right) - S_4 \cdot \frac{2}{3} \cdot c = 0$$

$$-R_{BF} + S_2 + S_3 + S_4 - R_{DF} = 0$$

$$-R_{AF} + S_1 + R_{BF} = 0$$

$$M_{AF} - R_{BF} \cdot a - S_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot a = 0$$

Przekształcając powyższe równania do postaci macierzonej

$$\begin{bmatrix} (b+c) & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_{BF} \\ R_{DF} \\ R_{AF} \\ M_{AF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot b + c \right) + S_3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot b + c \right) + S_4 \cdot \frac{2}{3} \cdot c \\ -S_2 - S_3 - S_4 \\ -S_1 \\ S_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot a \end{bmatrix}$$

stąd (aby zachować zgodność jednostek w obliczeniach podzielono przez $1\ mm$ a następnie wynik $M_{AF'}$ pomnożono przez $1\ mm$):

$$\begin{bmatrix} R_{BF} \\ R_{DF} \\ R_{AF} \\ M_{AF'} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \dfrac{(b+c)}{mm} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ \dfrac{-a}{mm} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{S_2 \cdot \left(\dfrac{1}{2} \cdot b + c\right) + S_3 \cdot \left(\dfrac{1}{3} \cdot b + c\right) + S_4 \cdot \dfrac{2}{3} \cdot c}{mm} \\ -S_2 - S_3 - S_4 \\ -S_1 \\ \dfrac{S_1 \cdot \dfrac{2}{3} \cdot a}{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 215.833 \\ 164.167 \\ 235.833 \\ 4.583 \cdot 10^4 \end{bmatrix} N \cdot m^2$$

$$M_{AF} := M_{AF'} \cdot 1\ mm = 45.833\ N \cdot m^3$$

Momenty gnące belki fikcyjnej zapisano w formie tabeli (Tab. 2):

Tab. 2 Zestawienie przedziałów, wzorów i wartości granicznych momentu gnącego belki fikcyjnej

Przedział	Wzór	Wartość
$x = 0$		$45{,}83\ Nm^3$
$x \in (0, \frac{2}{3} \cdot a)$	$\bar{M_A} - \bar{R_A} \cdot x$	
$x = \frac{2}{3} \cdot a$		$14{,}39\ Nm$
$x \in (\frac{2}{3} \cdot a, a)$	$\bar{M_A} - \bar{R_A} \cdot x + S_1 \cdot (x - \frac{2}{3} \cdot a)$	
$x = a$		$0\ Nm^3$
$x \in (a, a + \frac{1}{2} \cdot b)$	$-\bar{R_B} \cdot (x - a)$	
$x = a + \frac{1}{2} \cdot b$		$-32{,}375\ Nm^3$
$x \in (a + \frac{1}{2} \cdot b, a + \frac{2}{3} \cdot b)$	$-\bar{R_B} \cdot (x - a) + S_2 \cdot (x - a - \frac{1}{2} \cdot b)$	
$x = a + \frac{2}{3} \cdot b$		$-40{,}17\ Nm^3$
$x \in (a + \frac{2}{3} \cdot b, a + b + \frac{1}{3} \cdot c)$	$-\bar{R_B} \cdot (x - a) + S_2 \cdot (x - a - \frac{1}{2} \cdot b) + S_3 \cdot (x - a - \frac{2}{3} \cdot b)$	
$x = a + b + \frac{1}{3} \cdot c$		$-54{,}72\ Nm^3$
$x \in (a + b + \frac{1}{3} \cdot c, a + b + c)$	$-\bar{R_B} \cdot (x - a) + S_2 \cdot (x - a - \frac{1}{2} \cdot b) + S_3 \cdot (x - a - \frac{2}{3} \cdot b) + S_4 \cdot (x - a - b - \frac{1}{3} \cdot c)$	
$x = a + b + c$		$0\ Nm^3$

a następnie zapisano w postaci:

$$M_{gF1}(x) := \left(0 \le x < \frac{2}{3} \cdot a\right) \cdot (M_{AF} - R_{AF} \cdot x)$$

$$M_{gF2}(x) := \left(\frac{2}{3} \cdot a \le x < a\right) \cdot \left(M_{AF} - R_{AF} \cdot x + S_1 \cdot \left(x - \frac{2}{3} \cdot a\right)\right)$$

$$M_{gF3}(x) := \left(a \le x < a + \frac{1}{2} \cdot b\right) \cdot (-R_{BF} \cdot (x - a))$$

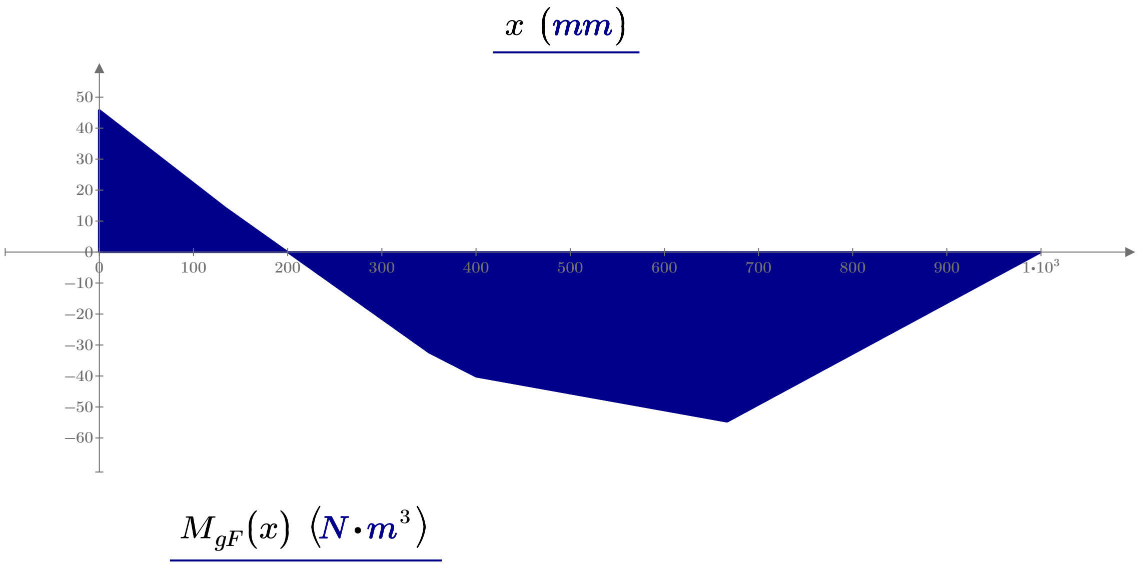
$$M_{gF4}(x) := \left(a + \frac{1}{2} \cdot b \le x < a + \frac{2}{3} \cdot b\right) \cdot \left(-R_{BF} \cdot (x - a) + S_2 \cdot \left(x - a - \frac{1}{2} \cdot b\right)\right)$$

$$M_{gF5}(x) := \left(a + \frac{2}{3} \cdot b \le x < a + b + \frac{1}{3} \cdot c\right) \cdot \left(-R_{BF} \cdot (x - a) + S_2 \cdot \left(x - a - \frac{1}{2} \cdot b\right) + S_3 \cdot \left(x - a - \frac{2}{3} \cdot b\right)\right)$$

$$M_{gF6}(x) := \left(a + b + \frac{1}{3} \cdot c \le x < a + b + c\right) \cdot \left(-R_{BF} \cdot (x - a) + S_2 \cdot \left(x - a - \frac{1}{2} \cdot b\right) + S_3 \cdot \left(x - a - \frac{2}{3} \cdot b\right) + S_4 \cdot \left(x - a - b - \frac{1}{3} \cdot c\right)\right)$$

$$M_{gF}(x) := M_{gF1}(x) + M_{gF2}(x) + M_{gF3}(x) + M_{gF4}(x) + M_{gF5}(x) + M_{gF6}(x)$$

Pozwoliło to sporządzić wykres momentu gnącego belki fikcyjnej (Rys. 5).



Rys. 5 Wykres momentu gnącego belki fikcyjnej

Największa wartość momentu występuje dla $x_{Fmin} := \mathbf{minimize}\,(M_{gF}, L)$ i wynosi $M_{gFmax} := |M_{gF}(x_{Fmin})| = 54.72\ N \cdot m^3$. Na tej podstawie można wyznaczyć średnicę osi wynoszącą

$$d_{W2} := \sqrt[4]{\frac{64 \cdot M_{gFmax}}{E \cdot \pi \cdot f}} = 60.6\ mm$$

Na podstawie wyznaczonych średnic z warunku wytrzymalości doraźnej $d_{W1} = 51.8\ mm$ oraz warunku ugięcia $d_{W2} = 60.6\ mm$ wybrano minimalną średnicę wałka równą D.

$$d := \max(d_{W1}, d_{W2}) = 60.648\ mm$$

$$D := \left(\mathrm{floor}\left(\frac{d}{mm}\right) + 2\right) mm = 62\ mm$$