



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Politechnika Warszawska

Projektowanie

mgr inż. Grzegorz Kamiński

18 marca 2025

Wprowadzenie

Wałem lub osią nazywamy element maszyny ujęty w łożyskach i służący do podtrzymania innych elementów maszyny, wykonujących ruchy obrotowe lub wahadłowe. **Wały** służą do przenoszenia momentu obrotowego. Dodatkowo mogą być one obciążone momentem zginającym i siłą wzdłużną. Rozróżnia się wały dwu- i wielopodporowe, sztywne, półsztywne i giętkie.

Osie to elementy, które nie przenoszą momentu obrotowego, a są obciążone momentem gnącym. Mogą być one ruchome (mają wówczas kształt podobny do wału) lub nieruchome. Krótkie osie nazywa się **sworzniami** [1] [2].

Dobór materiału

S275JR i E295 — wały maszynowe, korbowe i osie poddane słabym obciążeniom.

C35, C45 i C55 — wały poddane większemu obciążeniu i temperaturze (do 500°C)

34CrMo4, 42CrMo4, 41Cr4 — wały, na które działają silne obciążenia zmienne i udarowe

15Cr2, 18CrMo4 — wały maszyn pracujących z dużymi obciążeniami zmiennymi i wysokimi obrotami.

Obliczenia wytrzymałościowe

Przystępując do projektowania, należy dokładnie ustalić obciążenie zewnętrzne zarówno pod względem ilościowym, jak i jakościowym. Trzeba przy tym wyraźnie wyróżnić zmiany wartości obciążenia zachodzące w czasie pracy i jego kierunek.

Jednowymiarowy stan naprężenia

Obciążenie jedynie momentem
gnącym:

$$\sigma_g = \frac{M_g}{W_x} \leq k_{go}$$

po uwzględnieniu: $W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$

sprawdzany warunek:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_g}{\pi \cdot k_{go}}}$$

Obciążenie jedynie momentem
skręcającym:

$$\tau_s = \frac{M_s}{W_o} \leq k_{sj}$$

po uwzględnieniu: $W_o = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$

sprawdzany warunek:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_s}{\pi \cdot k_{sj}}}$$

Wielowymiarowy stan naprężeń

Zastępcze wartości naprężeń w przypadku przewagi naprężeń normalnych:

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma^2 + (\alpha \cdot \tau)^2}$$

a w przypadku przewagi naprężeń stycznych

$$\tau_z = \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha} \cdot \sigma\right)^2 + \tau^2}$$

Współczynnik redukujący naprężenia

Współczynnik α oblicza się z proporcji naprężeń dopuszczalnych.

Dla tego samego rodzaju cyklu:

$$\alpha = \frac{k_g}{k_s} = \frac{k_{gj}}{k_{sj}} = \frac{k_{go}}{k_{so}} \approx \sqrt{3}$$

dla obrotowego zginania i odzerowo-tętniącego skręcania:

$$\alpha = \frac{k_{gj} \cdot k_{go}}{k_{sj} \cdot k_{gj}} = \frac{k_{go}}{k_{sj}} \approx \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Warunki wytrzymałościowe dla wielowymiarowego stanu naprężeń

Gdy $M_g \geq 2 \cdot M_s$

$$\sigma_z = \frac{\sqrt{M_g^2 + (\frac{\alpha}{2} \cdot M_s)^2}}{W_x} \leq k_{go}$$

po uwzględnieniu:

$$M_z = \sqrt{M_g^2 + (\frac{\alpha}{2} \cdot M_s)^2}$$

sprawdzany warunek:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_z}{\pi \cdot k_{go}}}$$

Gdy $M_g < 2 \cdot M_s$

$$\tau_z = \frac{\sqrt{(\frac{2}{\alpha} \cdot M_g)^2 + M_s^2}}{W_o} \leq k_{sj}$$

po uwzględnieniu:

$$M_z = \sqrt{(\frac{2}{\alpha} \cdot M_g)^2 + M_s^2}$$

sprawdzany warunek:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_z}{\pi \cdot k_{sj}}}$$

Warunki wytrzymałościowe dla wielowymiarowego stanu naprężeń

Jeżeli naprężenia ściskające (lub rozciągające) są na tyle duże to

$$\sigma_z = \sqrt{(\sigma_g + \sigma_r)^2 + (\alpha \cdot \tau_s)^2} = \sqrt{\left(\frac{M_g}{W_x} + n \cdot \frac{P}{F}\right)^2 + \left(\alpha \cdot \frac{M_s}{W_o}\right)^2}$$

Gdzie:

- * P — siła ściskająca wał;
- * F — przekrój poprzeczny wału;
- * n — dla obustronnego zginania i odzerowo-tętniącego rozciągania $n = 0,5$, w przypadku odwrotnym $n = 2$. Jeżeli obliczenia są dokładne, to wartość n należy pomnożyć przez $\frac{k_g}{k_r} = 1,1 \div 1,3$.

Obliczenia dwupodporowych wałów prostych

- * Metoda analityczna;
- * Metoda analityczno-wykreślna;
- * Metoda wykreślna.

Metoda analityczna

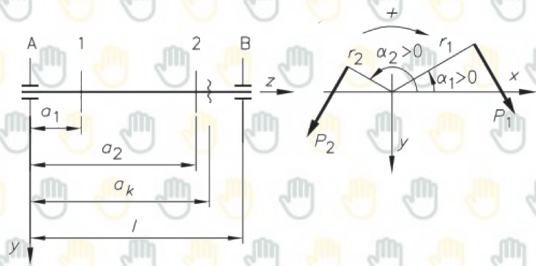
Równanie momentów obrotowych:

$$\sum r_i \cdot P_i = r_1 \cdot P_1 - r_2 \cdot P_2 = 0$$

rzuty sił na kierunki:

$$P_{ix} = P_i \cdot \sin(\alpha_i)$$

$$P_{iy} = P_i \cdot \cos(\alpha_i)$$



Metoda analityczna

Równanie równowagi:

$$R_{Bx} = -\frac{1}{l} \cdot \sum a_i \cdot P_{ix}$$

$$R_{By} = -\frac{1}{l} \cdot \sum a_i \cdot P_{iy}$$

$$R_{Ax} = -R_{Bx} - \sum P_{ix}$$

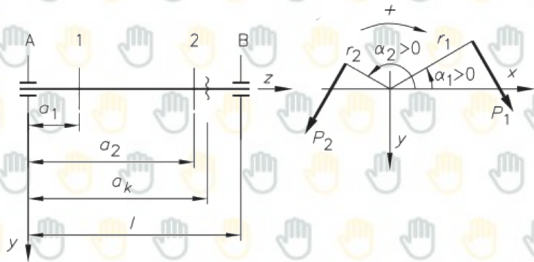
$$R_{Ay} = -R_{By} - \sum P_{iy}$$

$$M_{gxk} = -a_k \cdot R_{Ax} - \sum (a_k - a_i) \cdot P_{ix}$$

$$M_{gyk} = -a_k \cdot R_{Ay} - \sum (a_k - a_i) \cdot P_{iy}$$

Wypadkowe momenty zginające w obliczanym przekroju wynoszą:

$$M_{gk} = \sqrt{M_{gxk}^2 + M_{gyk}^2}$$

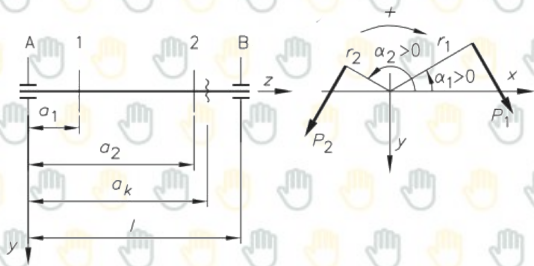


Metoda analityczna

Moment skręcający:

$$M_{sk} = \sum r_i \cdot P_i$$

Wyznaczenie momentu zastępczego
oraz średnic wału

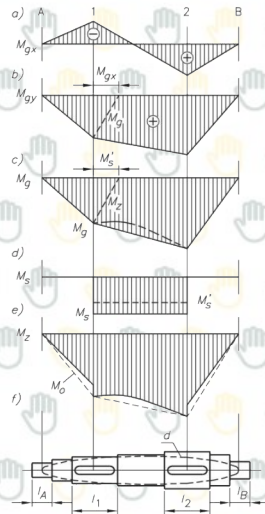


Metoda analityczno-wykreślna

Reakcje podpór i momenty zginające w poszczególnych płaszczyznach są obliczane analitycznie, natomiast sumowanie momentów wykonuje się wykreślnie. Wykresy M_{gx} i M_{gy} buduje się na podstawie obliczeń i sumuje je geometrycznie dzięki wprowadzeniu skali $\kappa_M N/mm$.

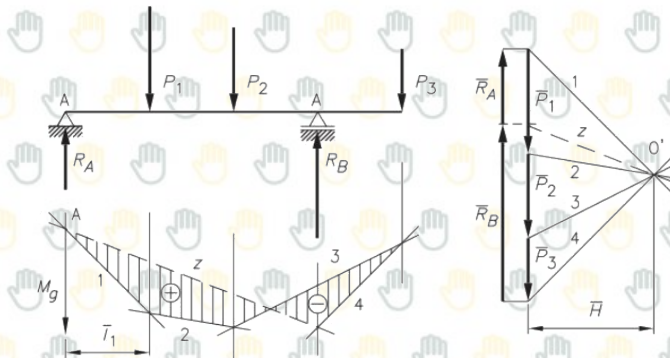
Metoda analityczno-wykreślna

- * geometryczne złożenie M_{gx} i M_{gy} do M_g ,
- * geometryczne złożenie M_g i M_s do M_z ,
- * uproszczenie wykresu do M_o — wyznaczenie średnic,
- * wyznaczenie długości czopów i budowa zarysu rzeczywistego wałka.



Metoda wykreślna

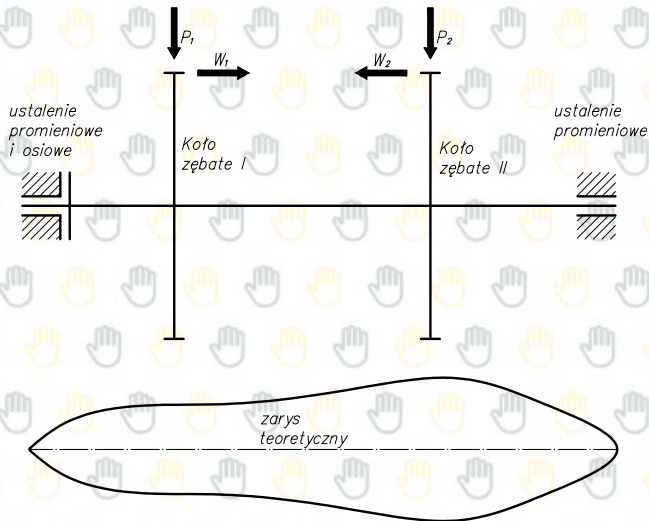
Zamiast rachunkowego
wyznaczania reakcji podpór
oraz momentów M_{gx} i M_{gy}
stosuje się wykreślne
wyznaczanie tych wielkości za
pomocą wieloboków sił
i wieloboków sznurowych.



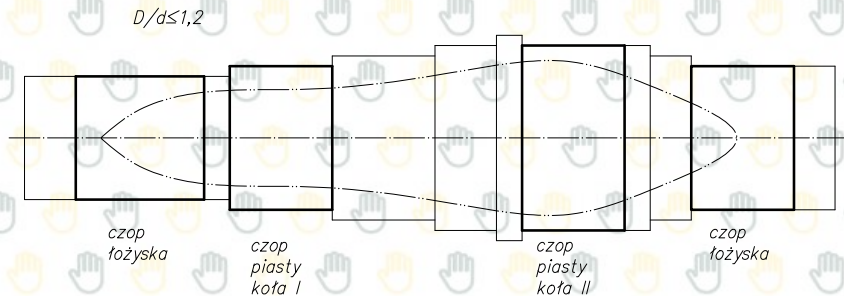
Kształtowanie wałów

- * na podstawie danych funkcjonalnych i wstępnych wymiarów kształtuje się czopy łożyskowe, czopy końcowe, powierzchnie bazowe i oporowe kół, łożysk itp., a następnie kształtuje się powierzchnie swobodne wału,
- * pamiętać o sprzężeniu zwrotnym od pozostałych elementów węzła konstrukcyjnego,
- * zwrócić uwagę na wytrzymałość zmęczeniową.

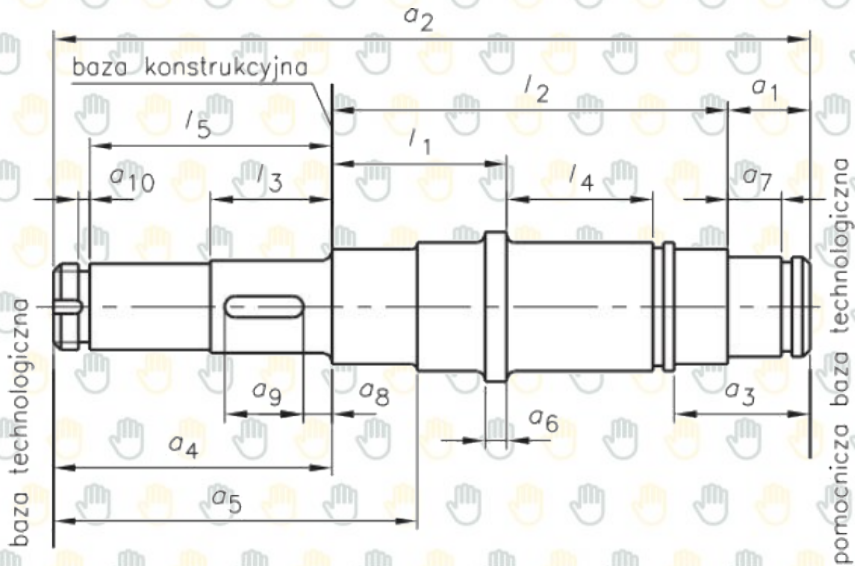
Etapy kształtowania wałka



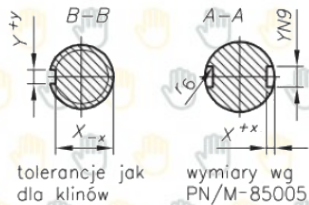
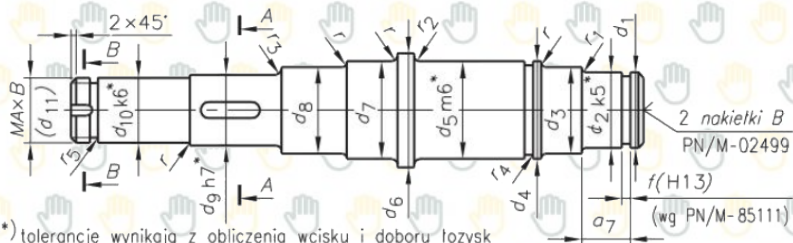
Etapy kształtowania wałka



Etapy kształtowania wałka

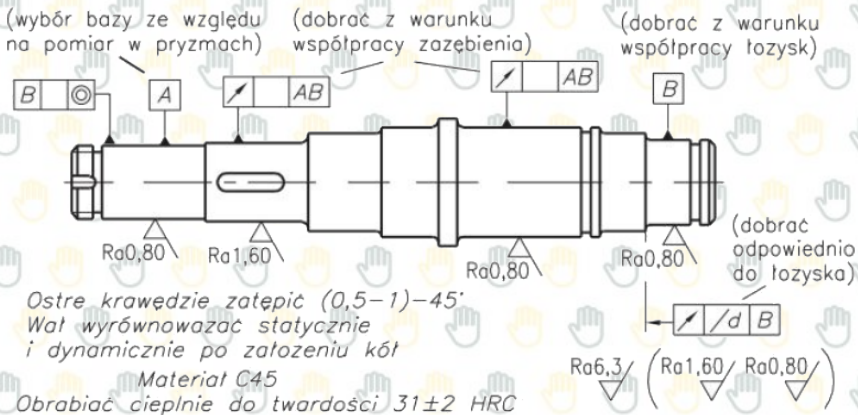


Etapy kształtowania wałka

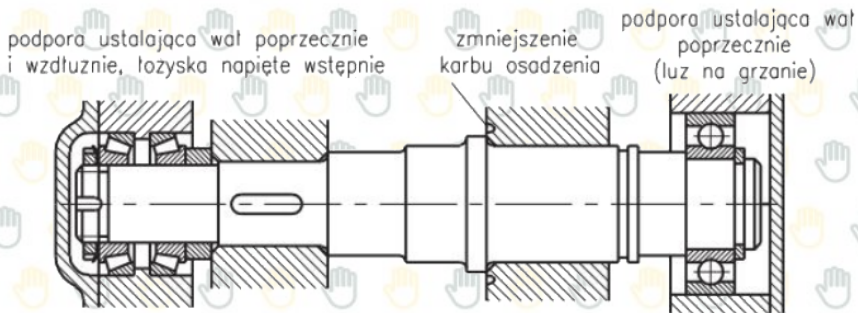


$r_1, r_2, r_3 < R$ łożyska lub piasty
 $r_4 < 0,1 d_5$ r_5 wg PN/M-82063
 $r_6 < \text{od fazy wpustu}$
 $d_4 = d_5 - 0,2$ $d_{11} = d_{10} - 0,1$
 $\frac{d_8}{d_9} = \frac{d_7}{d_8} = \frac{d_6}{d_7}$ $\frac{d_5}{d_3} = \frac{d_3}{d_2}$ $r > \frac{d_7}{d_8}$

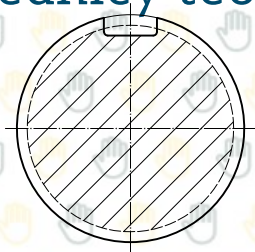
Etapy kształtowania wałka



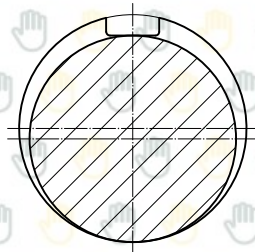
Etapy kształtowania wałka



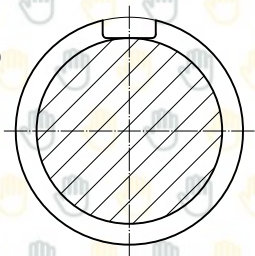
Uwzględnianie rowków wpustowych w średnicy teoretycznej



zbliżony do statycznego
cykl obciążenia



zmienny cykl obciążenia,
 M_s jest niewielki

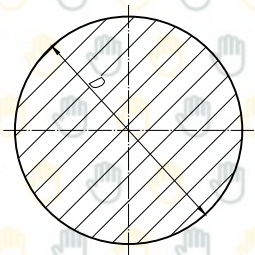


zmienny cykl obciążenia, M_s jest duży

Wskaźniki na zginanie i skręcanie

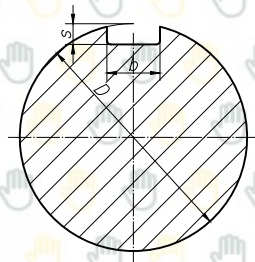
$$W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32},$$

$$W_o = \frac{\pi \cdot D^3}{16}$$



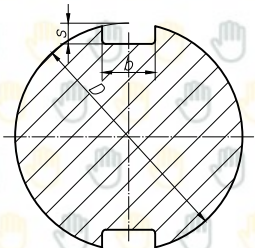
$$W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32} - \frac{b \cdot s \cdot (2D-s)^2}{16 \cdot D},$$

$$W_o = \frac{\pi \cdot D^3}{16} - \frac{b \cdot s \cdot (2D-s)^2}{16 \cdot D}$$



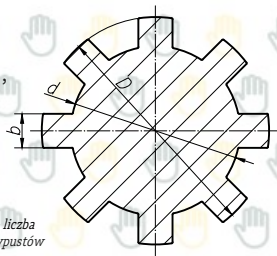
$$W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32} - \frac{b \cdot s \cdot (2D-s)^2}{8 \cdot D},$$

$$W_o = \frac{\pi \cdot D^3}{16} - \frac{b \cdot s \cdot (2D-s)^2}{8 \cdot D}$$



$$W_x = \frac{\pi \cdot D^4 - n \cdot b \cdot (D-d) \cdot (D+d)^2}{32 \cdot D},$$

$$W_o = \frac{\pi \cdot D^4 - n \cdot b \cdot (D-d) \cdot (D+d)^2}{16 \cdot D}$$



n - liczba
wypustów

Sprawdzanie ugięcia i skręcenia

Obliczanie strzałek i kątów ugięcia metodą analityczną (tzn. przez napisanie równania osi ugiętej) w przypadku projektowania wałów maszynowych **nie ma** większego zastosowania.

Stosuje się:

- * superpozycję ugięcia przypadków elementarnych,
- * metodę Mohra.

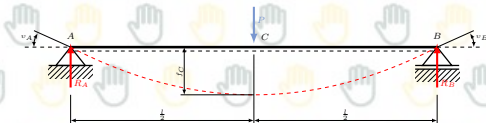
Ugięcie dla przypadków elementarnych

$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$

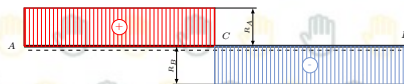
$$M_{max} = \frac{P \cdot l}{4} \text{ dla } x = \frac{l}{2}$$

$$f_{max} = f_C = \frac{P \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J}$$

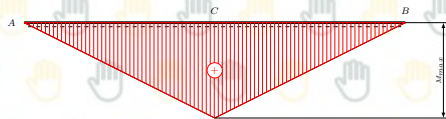
$$v_A = -v_B = -\frac{P \cdot l^2}{16 \cdot E \cdot J}$$



Siła tnąca:



Moment gnący:



Ugięcie dla przypadków elementarnych

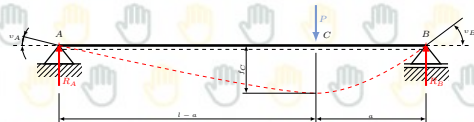
$$R_A = P \cdot \frac{a}{l}, \quad R_B = P \cdot \frac{l-a}{l},$$

$$M_{max} = P \cdot \frac{a \cdot (l-a)}{l} \text{ dla } x = l - a,$$

$$v_A = -\frac{P \cdot a \cdot (l^2 - a^2)}{6 \cdot l \cdot E \cdot J}, \quad v_B = -\frac{P \cdot a \cdot (l-a) \cdot (2 \cdot l - a)}{6 \cdot l \cdot E \cdot J},$$

$$f_C = \frac{P \cdot a^2 \cdot (l-a)^2}{3 \cdot l \cdot E \cdot J} \text{ dla } x \leq \frac{1}{2}l,$$

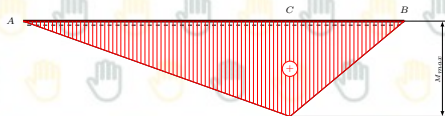
$$f_{max} = \frac{P \cdot a}{3 \cdot l \cdot E \cdot J} \cdot \left(\frac{(l^2 - a^2)}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \text{ dla } x = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot (l^2 - a^2)}$$



Siła tnąca:



Moment gnący:



Ugięcie dla przypadków elementarnych

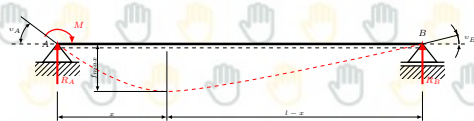
$$R_A = -R_B = -\frac{M}{l},$$

$$M_{max} = M \text{ dla } x = 0,$$

$$v_A = -\frac{M \cdot l}{3 \cdot E \cdot J}, \quad v_B = \frac{M \cdot l}{6 \cdot E \cdot J},$$

$$f = \frac{M \cdot l^2}{16 \cdot E \cdot J} \text{ dla } x = \frac{1}{2}l$$

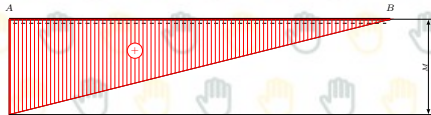
$$f_{max} = \frac{M \cdot l^2}{9 \sqrt{3} \cdot E \cdot J} \text{ dla } x = l \cdot \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$



Siła tnąca:



Moment gnący:



Ugięcie dla przypadków elementarnych

$$R_A = R_B = \frac{M}{l},$$

$$M_{max} = M \cdot \frac{l-a}{l} \text{ dla } a \leq \frac{1}{2}l,$$

$$v_A = \frac{M}{6 \cdot l} \cdot (2l^2 - 6la + 3a^2),$$

$$v_B = -\frac{M}{6 \cdot l} \cdot (l^2 - 3a^2),$$

$$f_C = \frac{M \cdot a}{3 \cdot l} \cdot (l^2 - 3la + 2a^2)$$



Siła tnąca:



Moment gnący:



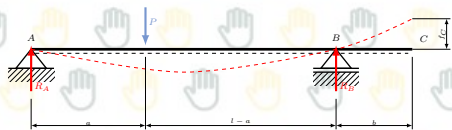
Ugięcie dla przypadków elementarnych

$$v_C = v_B = \frac{P \cdot a \cdot (l^2 - a^2)}{6 \cdot l \cdot E \cdot J},$$

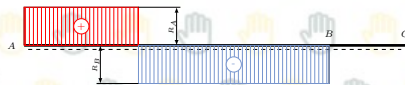
$$f_C = v_B \cdot b = \frac{P \cdot a \cdot b \cdot (l^2 - a^2)}{6 \cdot l \cdot E \cdot J},$$

$$v_B = v_C = \frac{P \cdot l^2}{16 \cdot E \cdot J} \text{ dla } a = \frac{1}{2}a,$$

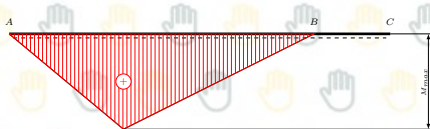
$$f_C = \frac{P \cdot l^2 \cdot b}{16 \cdot E \cdot J} \text{ dla } a = \frac{1}{2}a$$



Siła tnąca:



Moment gnący:



Ugięcie dla przypadków elementarnych

$$R_A = P \cdot \frac{a}{l}, \quad R_B = P \cdot \frac{l+a}{l},$$

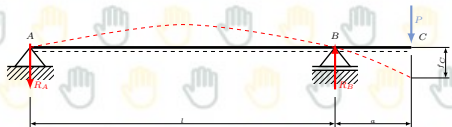
$$M_{max} = P \cdot l \text{ dla } x = l,$$

$$v_A = \frac{P \cdot l \cdot a}{6 \cdot E \cdot J}, \quad v_B = -\frac{P \cdot l \cdot a}{3 \cdot E \cdot J},$$

$$v_C = -\frac{P \cdot a}{6 \cdot E \cdot J} \cdot (2l + 3a),$$

$$f_C = \frac{P \cdot a^2}{3 \cdot E \cdot J} \cdot (l + a),$$

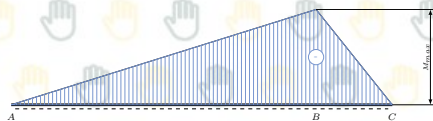
$$f_{max} = -\frac{P \cdot l^2 \cdot a}{9 \sqrt{3} \cdot E \cdot J} \text{ dla } x = \frac{l}{\sqrt{3}}$$



Siła tnąca:



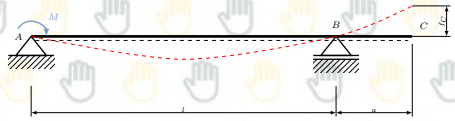
Moment gnący:



Ugięcie dla przypadków elementarnych

$$v_B = v_C = \frac{M \cdot l}{6 \cdot E \cdot J},$$

$$f_C = v_C \cdot a = \frac{M \cdot l \cdot a}{6 \cdot E \cdot J}$$



Ugięcie dla przypadków elementarnych

$$R_A = R_B = \frac{M}{l},$$

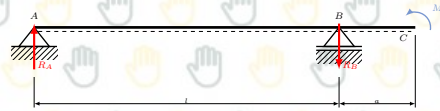
$$M_{max} = M,$$

$$v_A = -\frac{M \cdot l}{6 \cdot E \cdot J}, \quad v_B = \frac{M \cdot l}{3 \cdot E \cdot J},$$

$$v_C = \frac{M}{3 \cdot E \cdot J} \cdot (l + 3a),$$

$$f_C = -\frac{M \cdot a}{6 \cdot E \cdot J} \cdot (2l + 3a),$$

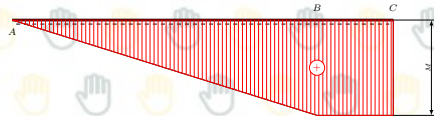
$$f_{max} = -\frac{M \cdot l^2}{9\sqrt{3} \cdot E \cdot J} \text{ dla } x = \frac{l}{\sqrt{3}}$$



Siła tnąca:



Moment gący:


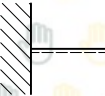










Metoda Mohra

- * wykres momentów gnących traktuje się formalnie jako obciążenie ciągłe nazwane obciążeniem fikcyjnym $q^*(z)$ dla nowej belki,
- * wyznaczenie wykresów siły tnącej $T^*(z)$ i momentów gnących $M_g^*(z)$,
- * wyznaczenie strzałki i kątów ugięcia.

$$f = \frac{M_g^*}{E \cdot J} \quad v = \frac{T_g^*}{E \cdot J}$$

Tworzenie belki fikcyjnej

<i>Układ rzeczywisty</i>	<i>Szkic</i>	<i>Układ fikcyjny</i>	<i>Szkic</i>
<i>Koniec swobodny</i>		<i>Utwierdzenie</i>	
<i>Utwierdzenie</i>		<i>Koniec swobodny</i>	
<i>Podpora przegubowa pośrodkia</i>		<i>Przegub</i>	
<i>Przegub</i>		<i>Podpora przegubowa pośrodkia</i>	
<i>Podpora przegubowa skrajna</i>		<i>Podpora przegubowa skrajna</i>	

Dyskretyzacja obciążenia ciągłego

Zastępowanie poszczególnych pól rzeczywistego wykresu momentów podzielonego przez J , wektorami o równej im wartości umieszczonymi w środkach ciężkości tych pól (S_i).

Pamiętać że należy:

- * przyjmować zawsze rzeczywiste maksymalne wartości momentów gnących, a nie momenty gnące zastępcze,
- * chcąc określić linię ugięcia z uwzględnieniem jej przestrzennego charakteru, należy dokonać obliczenia dla kierunku x i y osobno, a następnie złożyć w każdym przekroju oddzielnie.

Określenie ugięć dopuszczalnych

- * w budowie przekładni zębatych (przeważnie) $f_{dop} = 0,005 \div 0,001 \cdot m$, gdzie m oznacza moduł koła zębatego,
- * w budowie silników elektrycznych $f_{dop} < 0,001 \cdot \delta$, gdzie δ oznacza wielkość szczeliny między wirnikiem a stojanem,
- * dla wałów innych maszyn $f_{dop} = 2 \div 3 \cdot 10^{-4} \cdot l$, gdzie l oznacza rozstaw między łożyskami.

Dopuszczalne kąty ugięcia

Rodzaj łożysk	Dopuszczalny kąt ugięcia
Kulkowe wahlwe	0,07
Barytkowe jednorzędowe	0,035 ÷ 0,07
Kulkowe zwykłe (pasowanie - K5/h6)	
a) luz poprzeczny normalny	0,0023
b) luz poprzeczny C3	0,0035
c) luz poprzeczny C4	0,0047
Wałeczkowe i stożkowe	
a) łożyska wałeczkowe typu N i NU serii 10, 2, 3, 4	0,00116
b) pozostałe	0,0058
Ślizgowe	
samonastawne	0,001
szttywne	0,0003

Obliczanie kątów skręcenia

Kąt skręcenia wału od znanego momentu skręcającego

$$\varphi = \frac{M_s \cdot l}{G \cdot J_o} [\text{rad}]$$

Do porównania używa się pojęcia jednostkowego kąta skręcenia

$$\varphi' = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_s}{G \cdot J_o} [\text{rad/m}]$$

Wartości graniczne wynoszą:

- * dla obciążeń jednostronnie zmiennych $\varphi' = 0,004 [\text{rad/m}]$
- * obciążeń obustronnie zmiennych $\varphi' = 0,0025 [\text{rad/m}]$

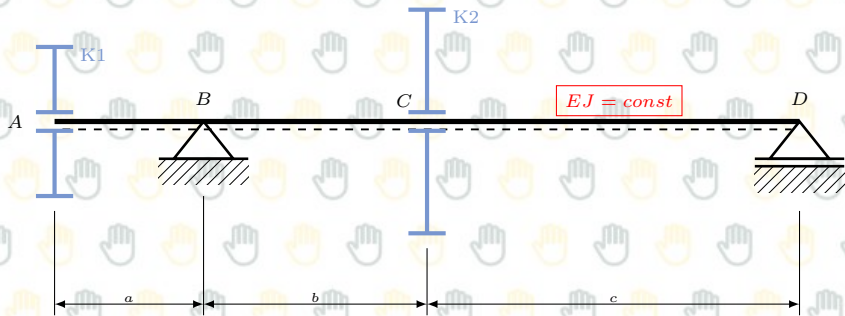
Dla wałów o zmiennej sztywności sprawdza się warunek:

$$\varphi = M_s \cdot \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{G \cdot J_{oi}} = \frac{M_s}{G} \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{J_{oi}} \leq \varphi_{dop}$$

Zadanie 9.1

Obliczyć reakcje łożysk oraz średnicę gładkiej osi (belki) zginanej siłami:

$P_1 = 1000 \text{ N}$, $P_2 = 4000 \text{ N}$ przyłożonych do kół bosych K_1 i K_2 . Naprężenia dopuszczalne materiału osi (stal C35) wynoszą $k_{go} = 64 \text{ MPa}$, a dopuszczalna strzałka ugięcia $f_{dop} = 0,0005 \cdot l$. Dane wymiary: $a = 200 \text{ mm}$, $b = 300 \text{ mm}$, $c = 500 \text{ mm}$, $l = b + c = 800 \text{ mm}$.



Zadanie 9.1

Równania równowagi:

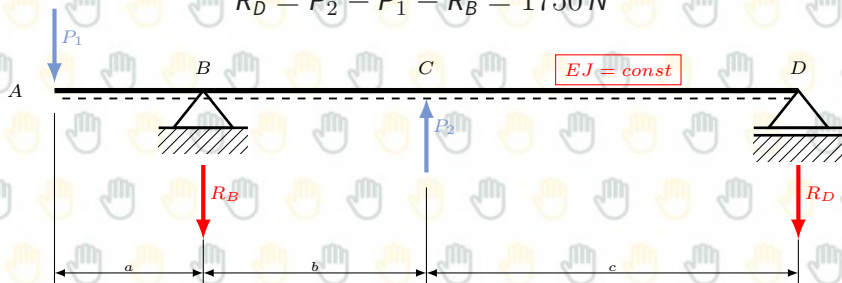
$$M_D : -P_1 \cdot (a + b + c) - R_B \cdot (b + c) + P_2 \cdot c = 0$$

$$\sum P_y : -P_1 - R_B + P_2 - R_D = 0$$

stąd

$$R_B = \frac{P_2 \cdot c - P_1 \cdot (a + b + c)}{(b + c)} = 1250 \text{ N}$$

$$R_D = P_2 - P_1 - R_B = 1750 \text{ N}$$

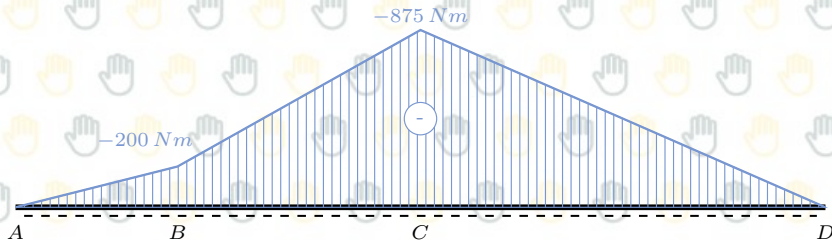


Zadanie 9.1

Momenty gnące wynoszą:

Przedział	Wzór	Wartość
$x = 0$		0 Nm
$x \in (0, a)$	$-P_1 \cdot x$	
$x = a$		-200 Nm
$x \in (a, a + b)$	$-P_1 \cdot x - R_B \cdot (x - a)$	
$x = a + b$		-875 Nm
$x \in (a + b, a + b + c)$	$-P_1 \cdot x - R_B \cdot (x - a) + P_2 \cdot (x - a - b)$	
$x = a + b + c$		0 Nm

Zadanie 9.1



maksymalny moment gnący występuje w punkcie C

$$M_{gmax} = |M_{gC}| = 875 \text{ Nm}$$

warunek wytrzymałościowy osi:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{gmax}}{\pi \cdot k_{go}}} \cong 52 \text{ mm}$$

Zadanie 9.1

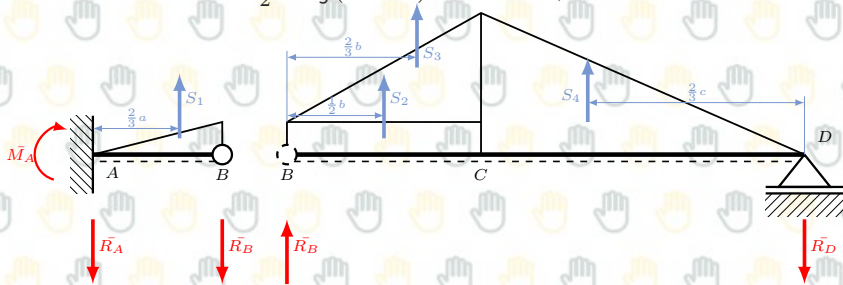
Maksymalną strzałkę ugięcia osi wyznaczono metodą analityczno-wykreślną.
Dokonano dyskretyzacji obciążenia ciągłego:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot M_g(a) \cdot a = 20 \text{ Nm}^2$$

$$S_2 = M_g(a) \cdot b = 60 \text{ Nm}^2$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot (M_g(a+b) - M_g(a)) \cdot b = 101,25 \text{ Nm}^2$$

$$S_4 = \frac{1}{2} \cdot M_g(a+b) \cdot c = 218,75 \text{ Nm}^2$$



Zadanie 9.1

Równania równowagi dla fikcyjnej belki:

$$\sum M_D : \bar{R}_B \cdot (b + c) - S_2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot b + c\right) - S_3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot b + c\right) - S_4 \cdot \frac{2}{3} \cdot c = 0$$

$$\sum F_y : -\bar{R}_B + S_2 + S_3 + S_4 - \bar{R}_D = 0$$

$$\sum F_y : -\bar{R}_A + S_1 + \bar{R}_B = 0$$

$$\sum M_A : \bar{M}_A - \bar{R}_B \cdot a - S_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot a = 0$$

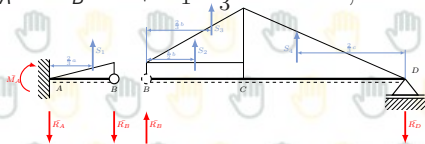
stąd

$$\bar{R}_B = \frac{S_2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot b + c\right) + S_3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot b + c\right) + S_4 \cdot \frac{2}{3} \cdot c}{b + c} = 215,83 \text{ Nm}^2$$

$$\bar{R}_D = -\bar{R}_B + S_2 + S_3 + S_4 = 164,17 \text{ Nm}^2$$

$$\bar{R}_A = S_1 + \bar{R}_B = 235,83 \text{ Nm}^2$$

$$\bar{M}_A = \bar{R}_B \cdot a + S_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot a = 45,83 \text{ Nm}^3$$

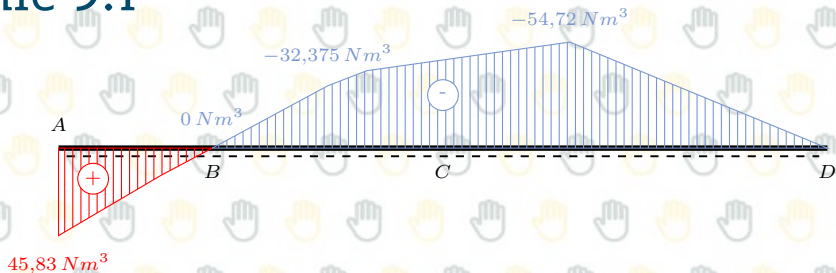


Zadanie 9.1

Momenty gnące dla fikcyjnej belki:

Przedział	Wzór	Wartość
$x = 0$		$45,83 \text{ Nm}^3$
$x \in (0, \frac{2}{3} \cdot a)$	$\bar{M}_A - \bar{R}_A \cdot x$	
$x = \frac{2}{3} \cdot a$		$14,39 \text{ Nm}$
$x \in (\frac{2}{3} \cdot a, a)$	$\bar{M}_A - \bar{R}_A \cdot x + S_1 \cdot (x - \frac{2}{3} \cdot a)$	
$x = a$		0 Nm^3
$x \in (a, a + \frac{1}{2} \cdot b)$	$-\bar{R}_B \cdot (x - a)$	
$x = a + \frac{1}{2} \cdot b$		$-32,375 \text{ Nm}^3$
$x \in (a + \frac{1}{2} \cdot b, a + \frac{2}{3} \cdot b)$	$-\bar{R}_B \cdot (x - a) + S_2 \cdot (x - a - \frac{1}{2} \cdot b)$	
$x = a + \frac{2}{3} \cdot b$		$-40,17 \text{ Nm}^3$
$x \in (a + \frac{2}{3} \cdot b, a + b + \frac{1}{3} \cdot c)$	$-\bar{R}_B \cdot (x - a) + S_2 \cdot (x - a - \frac{1}{2} \cdot b) + S_3 \cdot (x - a - \frac{2}{3} \cdot b)$	
$x = a + b + \frac{1}{3} \cdot c$		$-54,72 \text{ Nm}^3$
$x \in (a + b + \frac{1}{3} \cdot c, a + b + c)$	$-\bar{R}_B \cdot (x - a) + S_2 \cdot (x - a - \frac{1}{2} \cdot b) + S_3 \cdot (x - a - \frac{2}{3} \cdot b) + S_4 \cdot (x - a - b - \frac{1}{3} \cdot c)$	
$x = a + b + c$		0 Nm^3

Zadanie 9.1



Maksymalny moment gnący dla belki fikcyjnej wyznacza największe ugięcie belki ($M_{Amax} = 54,72 \text{ Nm}^3$, $E = 210 \text{ GPa}$):

$$y_A = \frac{M_{Amax}}{E \cdot J} = \frac{64 \cdot M_{Amax}}{E \cdot \pi \cdot d^4} \leq f_{dop}$$

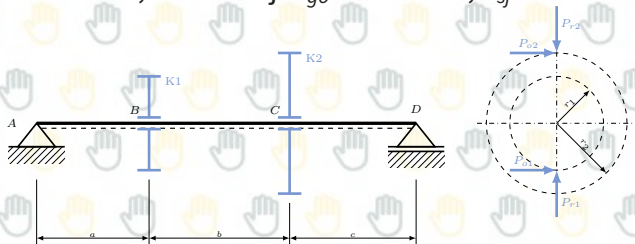
stąd

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{64 \cdot M_{Amax}}{E \cdot \pi \cdot f_{dop}}} = 60,36 \text{ mm}$$

Przyjęto $d = 62 \text{ mm}$.

Zadanie 9.2

Obliczyć średnicę wału w miejscu osadzenia kół zębatach. Wał jest obciążony siłami międzyzębnymi przekładni zębatej walcowej o zębach prostych. Na koło 1 działają siły: obwodowa $P_{o1} = 11950 \text{ N}$ i promieniowa $P_{r1} = 4350 \text{ N}$, na koło 2 odpowiednio: $P_{o2} = 5370 \text{ N}$ i $P_{r2} = 1950 \text{ N}$. Obliczenia należy wykonać dla następujących wymiarów: $r_2 = 160 \text{ mm}$, $a = 80 \text{ mm}$, $b = 100 \text{ mm}$, $c = 90 \text{ mm}$. Wał wykonano ze stali C45, dla której: $k_{go} = 78 \text{ MPa}$, $k_{sj} = 95 \text{ MPa}$.



Zadanie 9.2

Równania równowagi:

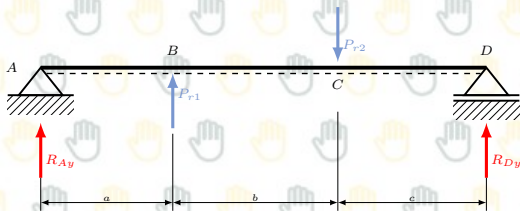
$$\sum F_y : -R_{Ay} - P_{r1} + P_{r2} - R_{Dy} = 0$$

$$\sum M_A : -P_{r1} \cdot a + P_{r2} \cdot (a + b) - R_{Dy} \cdot (a + b + c) = 0$$

stąd

$$R_{Dy} = \frac{-P_{r1} \cdot a + P_{r2} \cdot (a + b)}{a + b + c} = 11,11 \text{ N}$$

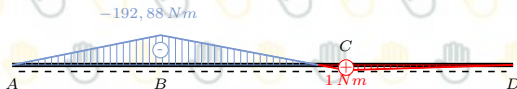
$$R_{Ay} = -P_{r1} + P_{r2} - R_{Dy} = -2411,11 \text{ N}$$



Zadanie 9.2

Momenty gnące w punktach wynoszą:

Przedział	Wzór	Wartość
$x = 0$		0 Nm
$x \in (0, a)$	$R_{Ay} \cdot x$	
$x = a$		$-192,88 \text{ Nm}$
$x \in (a, a + b)$	$R_{Ay} \cdot x + P_{r1} \cdot (x - a)$	
$x = a + b$		$1,0 \text{ Nm}$
$x \in (a + b, a + b + c)$	$R_{Ay} \cdot x + P_{r1} \cdot (x - a) - P_{r2} \cdot (x - a - b)$	
$x = a + b + c$		0 Nm



Zadanie 9.2

Równania równowagi:

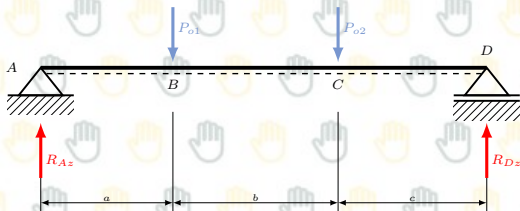
$$\sum F_z : R_{Az} - P_{o1} - P_{o2} + R_{Dz} = 0$$

$$\sum M_A : P_{o1} \cdot a + P_{o2} \cdot (a + b) - R_{Dz} \cdot (a + b + c) = 0$$

stąd

$$R_{Dz} = \frac{P_{o1} \cdot a + P_{o2} \cdot (a + b)}{a + b + c} = 7120,74 \text{ N}$$

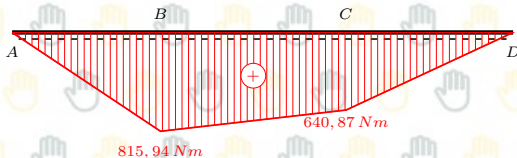
$$R_{Az} = P_{o1} + P_{o2} - R_{Dz} = 10199,26 \text{ N}$$



Zadanie 9.2

Momenty gnące w punktach wynoszą:

Przedział	Wzór	Wartość
$x = 0$		0 Nm
$x \in (0, a)$	$R_{Az} \cdot x$	
$x = a$		815,94 Nm
$x \in (a, a + b)$	$R_{Az} \cdot x - P_{o1} \cdot (x - a)$	
$x = a + b$		640,87 Nm
$x \in (a + b, a + b + c)$	$R_{Az} \cdot x - P_{o1} \cdot (x - a) - P_{o2} \cdot (x - a - b)$	
$x = a + b + c$		0 Nm

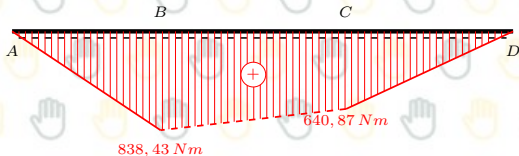


Zadanie 9.2

Momenty gnące wypadkowe w punktach B i C wynoszą:

$$M_{gB} = \sqrt{M_{gyB}^2 + M_{gzB}^2} = 838,43 \text{ Nm}$$

$$M_{gC} = \sqrt{M_{gyC}^2 + M_{gzC}^2} = 640,87 \text{ Nm}$$

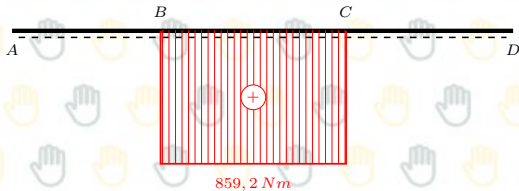


Uproszczono przebieg momentu gnącego między punktami B i C.

Zadanie 9.2

Wał jest skręcany stałym momentem skręcającym na odcinku BC:

$$M_s = P_{o2} \cdot r_2 = 859,2 \text{ Nm}$$



Zadanie 9.2

Ponieważ $M_g < 2 \cdot M_s$

$$M_{zB} = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot k_{sj}}{k_{go}} \cdot M_{gB}\right)^2 + M_s^2} = 2215,7 \text{ N}$$

$$M_{zC} = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot k_{sj}}{k_{go}} \cdot M_{gC}\right)^2 + M_s^2} = 1781,91 \text{ N}$$

Średnica wału w punktach B i C wynosi:

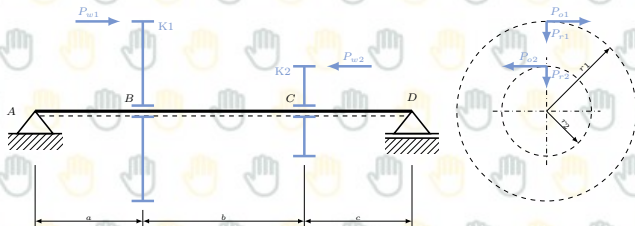
$$d_B \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{zB}}{\pi \cdot k_{sj}}} = 49,16 \text{ mm}$$

$$d_C \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{zC}}{\pi \cdot k_{sj}}} = 45,71 \text{ mm}$$

Przyjęto: $d_B = 50 \text{ mm}$, $d_C = 46 \text{ mm}$

Zadanie 9.3

Na wale dwupodporowym osadzono dwa koła zębate o zębach śrubowych i promieniach toczych $r_1 = 155 \text{ mm}$, $r_2 = 62,5 \text{ mm}$. Na koło 1 działają siły: obwodowa $P_{o1} = 1805 \text{ N}$, promieniowa $P_{r1} = 679 \text{ N}$ i wzdłużna $P_{w1} = 484 \text{ N}$, natomiast na koło 2 odpowiednio: $P_{o2} = 4480 \text{ N}$, $P_{r2} = 1610 \text{ N}$ i $P_{w2} = 790 \text{ N}$. Określić teoretyczny (z warunku wytrzymałościowego) i rzeczywisty zarys wału wykonanego ze stali 15Cr2, dla której: $k_{go} = 80 \text{ MPa}$, $k_{sj} = 85 \text{ MPa}$. Dane wymiary: $a = 80 \text{ mm}$, $b = 120 \text{ mm}$, $c = 80 \text{ mm}$.



Zadanie 9.3

Równania równowagi w płaszczyźnie XY:

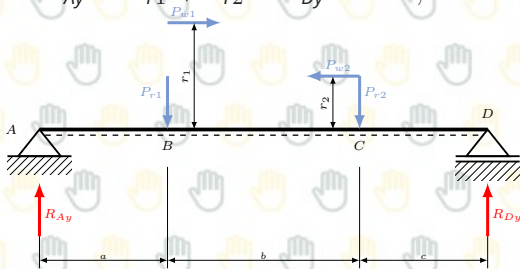
$$\sum F_y : R_{Ay} - P_{r1} - P_{r2} + R_{Dy} = 0$$

$$\sum M_A : r_1 \cdot P_{w1} + a \cdot P_{r1} + (a+b) \cdot P_{r2} - r_2 \cdot P_{w2} - (a+b+c) \cdot R_{Dy} = 0$$

stąd

$$R_{Dy} = \frac{r_1 \cdot P_{w1} + a \cdot P_{r1} + (a+b) \cdot P_{r2} - r_2 \cdot P_{w2}}{a+b+c} = 1435,59 \text{ N}$$

$$R_{Ay} = P_{r1} + P_{r2} - R_{Dy} = 853,41 \text{ N}$$



Zadanie 9.3

Momenty gnące w punktach B i C zmieniają się skokowo, stąd należy w każdym z punktów obliczać dwie wartości momentu M_{gL} i M_{gP} .

Przedział	Wzór	Wartość
$x = 0$		0 Nm
$x \in (0, a)$	$R_{Ay} \cdot x$	
$x_L = a$		68,27 Nm
$x_P = a$		143,29 Nm
$x \in (a, a + b)$	$R_{Ay} \cdot x + P_{w1} \cdot r_1 - P_{r1} \cdot (x - a)$	
$x_L = a + b$		164,22 Nm
$x_P = a + b$		114,85 Nm
$x \in (a + b, a + b + c)$	$R_{Ay} \cdot x + P_{w1} \cdot r_1 - P_{r1} \cdot (x - a) - P_{w2} \cdot r_2 - P_{r2} \cdot (x - a - b)$	
$x = a + b + c$		0 Nm



Zadanie 9.3

Równania równowagi w płaszczyźnie XZ:

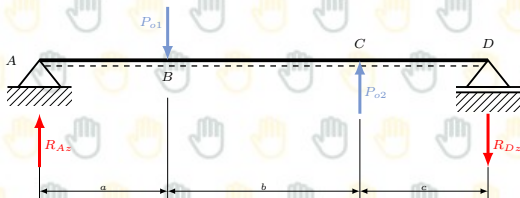
$$\sum F_z : R_{Az} - P_{o1} + P_{o2} - R_{Dz} = 0$$

$$\sum M_A : a \cdot P_{o1} - (a + b) \cdot P_{o2} + (a + b + c) \cdot R_{Dz} = 0$$

stąd

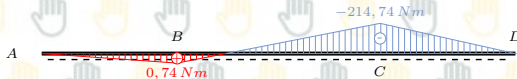
$$R_{Dz} = \frac{-a \cdot P_{o1} + (a + b) \cdot P_{o2}}{a + b + c} = 2684,29 \text{ N}$$

$$R_{Az} = P_{o1} - P_{o2} + R_{Dz} = 9,29 \text{ N}$$



Zadanie 9.3

Przedział	Wzór	Wartość
$x = 0$		0 Nm
$x \in (0, a)$	$R_{Az} \cdot x$	
$x = a$		$0,74 \text{ Nm}$
$x \in (a, a + b)$	$R_{Az} \cdot x - P_{o1} \cdot (x - a)$	
$x = a + b$		$-214,74 \text{ Nm}$
$x \in (a + b, a + b + c)$	$R_{Az} \cdot x - P_{o1} \cdot (x - a) + P_{o2} \cdot (x - a - b)$	
$x = a + b + c$		0 Nm



Zadanie 9.3

Momenty gące wypadkowe w punktach B i C wynoszą:

$$M_{gBL} = \sqrt{M_{gyBL}^2 + M_{gzB}^2} = 68,28 \text{ Nm}$$

$$M_{gBP} = \sqrt{M_{gyBP}^2 + M_{gzB}^2} = 143,29 \text{ Nm}$$

$$M_{gCL} = \sqrt{M_{gyCL}^2 + M_{gzC}^2} = 270,34 \text{ Nm}$$

$$M_{gCP} = \sqrt{M_{gyCP}^2 + M_{gzC}^2} = 243,52 \text{ Nm}$$



Zadanie 9.3

Wał jest skręcany stałym momentem skręcającym na odcinku BC:

$$M_s = P_{o1} \cdot r_1 = 279,8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

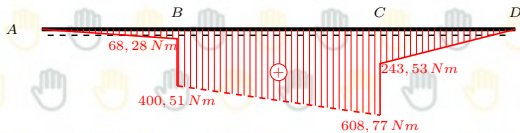


Zadanie 9.3

Ponieważ $M_g < 2 \cdot M_s$

$$M_{zBP} = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot k_{sj}}{k_{go}} \cdot M_{gBP}\right)^2 + M_s^2} = 413,52 \text{ N}$$

$$M_{zCL} = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot k_{sj}}{k_{go}} \cdot M_{gCL}\right)^2 + M_s^2} = 638,98 \text{ N}$$



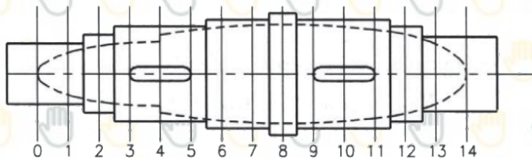
Zadanie 9.3

W punktach 1, 2, 3, 4L, 10P, 11, 12, 13 wał jest zginany, zatem

$$M_{zi} = M_{gi}$$
$$d_i \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{zi}}{\pi \cdot k_{go}}}$$

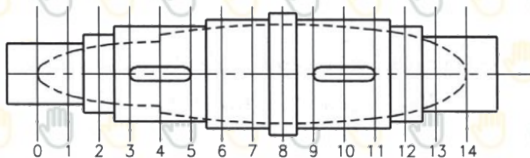
W punktach 4P, 5, 6, 7, 8, 9, 10L wał jest zginany i skręcany, zatem

$$M_{zi} = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot k_{sj}}{k_{go}} \cdot M_{gi}\right)^2 + M_s^2}$$
$$d_i \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{zi}}{\pi \cdot k_{sj}}}$$



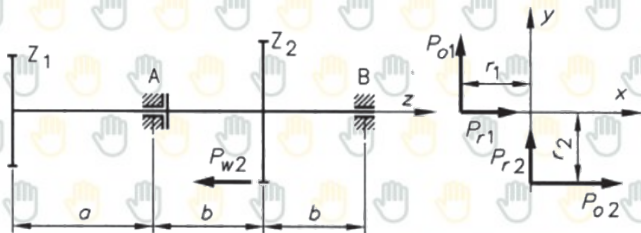
Zadanie 9.3

Nr przekroju	Współrzędna x	M _z	d _i	d
0	0	0	0	20
1	20	17,07	12,95	25
2	40	34,14	16,32	
3	60	51,21	18,68	
4L	80	68,28	20,56	
4P	80	413,52	29,15	30
5	100	425,62	29,43	
6	120	450,62	30	
7	140	486,55	30,78	
8	160	531,19	31,69	35
9	180	582,53	32,68	
10L	200	638,98	33,7	
10P	200	243,52	31,42	
11	220	182,64	28,54	30
12	240	121,76	24,94	
13	260	60,88	19,79	25
14	280	0	0	



Zadanie 9.6

Określić z warunku wytrzymałościowego teoretyczny zarys wału, oraz na jego podstawie ustalić rzeczywisty zarys wału. Na wale są osadzone dwa koła zębate. Na koło 1 działają siły: $P_{o1} = 5000 \text{ N}$ i $P_{r1} = 2800 \text{ N}$, na koło 2 o promieniu $r_2 = 0,05 \text{ m}$ działają siły: $P_{o2} = 8000 \text{ N}$, $P_{r2} = 3800 \text{ N}$ i $P_{w2} = 2400 \text{ N}$. Naprężenia dopuszczalne dla materiału wału (stal C45) wynoszą: $k_{go} = 78 \text{ MPa}$, $k_{sj} = 95 \text{ MPa}$. Długości wału: $a = 0,08 \text{ m}$, $b = 0,06 \text{ m}$.



Bibliografia

- [1] E. MAZANEK, A. DZIURSKI, AND L. KANIA. *Przykłady obliczeń z podstaw konstrukcji maszyn: Połączenia, sprężyny, zawory, wały maszynowe. tom 1.* WNT, 2005. ISBN: 9788320435528.
- [2] A. DZIURSKI, E. MAZANEK, AND L. KANIA. *Przykłady obliczeń z podstaw konstrukcji maszyn: Łożyska, sprzęgła i hamulce, przekładnie mechaniczne. tom 2.* WNT, 2015. ISBN: 9788393491360.



Dziękuję
za uwagę

grzegorz.kaminski@pw.edu.pl