Politechnika Warszawska

Zakład Podstaw Konstrukcji

# Projektowanie

mgr inż. Grzegorz Kamiński

grzegorz.kaminski@pw.edu.pl

18 kwietnia 2023
Wersja 1.22

# Wprowadzenie

Wałem lub osią nazywamy element maszyny ujęty w łożyskach i służący do podtrzymania innych elementów maszyny, wykonujących ruchy obrotowe lub wahadłowe. **Wały** służą do przenoszenia momentu obrotowego. Dodatkowo mogą być one obciążone momentem zginającym i siłą wzdłużną. Rozróżnia się wały dwu- i wielopodporowe, sztywne, półsztywne i giętkie.

**Osie** to elementy, które nie przenoszą momentu obrotowego, a są obciążone momentem gnącym. Mogą być one ruchome (mają wówczas kształt podobny do wału) lub nieruchome. Krótkie osie nazywa się **sworzniami**.

# Dobór materiału

**S275JR** i **E295** — wały maszynowe, korbowe i osie poddane słabym obciążeniom.

**C35**, **C45** i **C55** — wały poddane większemu obciążeniu i temperaturze (do 500°C)

**34CrMo4**, **42CrMo4**, **41Cr4** — wały, na które działają silne obciążenia zmienne i udarowe

**15Cr2**, **18CrMo4** — wały maszyn pracujących z dużymi obciążeniami zmiennymi i wysokimi obrotami.

Politechnika Warszawska

# Obliczenia wytrzymałościowe

Przystępując do projektowania, należy dokładnie ustalić obciążenie zewnętrzne zarówno pod względem ilościowym, jak i jakościowym. Trzeba przy tym wyraźnie wyróżnić zmiany wartości obciążenia zachodzące w czasie pracy i jego kierunek.

# Jednowymiarowy stan naprężenia

Obciążenie jedynie momentem gnącym:

$$\sigma_g = \frac{M_g}{W_x} \leq k_{go}$$

po uwzględnieniu: $W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$

sprawdzany warunek:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_g}{\pi \cdot k_{go}}}$$

Obciążenie jedynie momentem skręcającym:

$$\tau_s = \frac{M_s}{W_o} \leq k_{sj}$$

po uwzględnieniu: $W_o = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$

sprawdzany warunek:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_s}{\pi \cdot k_{sj}}}$$

# Wielowymiarowy stan naprężeń

Zastępcze wartości naprężeń w przypadku przewagi naprężeń normalnych:

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma^2 + (\alpha \cdot \tau)^2}$$

a w przypadku przewagi naprężeń stycznych

$$\tau_z = \sqrt{(\frac{1}{\alpha} \cdot \sigma)^{+} \tau^2}$$

# Współczynnik redukujący naprężenia

Współczynnik $\alpha$ oblicza się z proporcji naprężeń dopuszczalnych. Dla tego samego rodzaju cyklu:

$$\alpha = \frac{k_g}{k_s} = \frac{k_{gj}}{k_{sj}} = \frac{k_{go}}{k_{so}} \cong \sqrt{3}$$

dla obrotowego zginania i odzerowo-tętniącego skręcania:

$$\alpha = \frac{k_{gj} \cdot k_{go}}{k_{sj} \cdot k_{gj}} = \frac{k_{go}}{k_{sj}} \cong \frac{\sqrt{3}}{2}$$

# Warunki wytrzymałościowe dla wielowymiarowego stanu naprężeń

Gdy $M_g \geq 2 \cdot M_s$

$$\sigma_z = \frac{\sqrt{M_g^2 + (\frac{\alpha}{2} \cdot M_s)^2}}{W_x} \leq k_{go}$$

po uwzględnieniu:

$$M_z = \sqrt{M_g^2 + (\frac{\alpha}{2} \cdot M_s)^2}$$

sprawdzany warunek:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_z}{\pi \cdot k_{go}}}$$

Gdy $M_g < 2 \cdot M_s$

$$\tau_z = \frac{\sqrt{(\frac{2}{\alpha} \cdot M_g)^2 + M_s^2}}{W_o} \leq k_{sj}$$

po uwzględnieniu:

$$M_z = \sqrt{(\frac{2}{\alpha} \cdot M_g)^2 + M_s^2}$$

sprawdzany warunek:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_z}{\pi \cdot k_{sj}}}$$

# Warunki wytrzymałościowe dla wielowymiarowego stanu naprężeń

Jeżeli naprężenia ściskające (lub rozciągające) są na tyle duże to

$$\sigma_z = \sqrt{(\sigma_g + \sigma_r)^2 + (\alpha \cdot \tau_s)^2} = \sqrt{(\frac{M_g}{W_x} + n \cdot \frac{P}{F})^2 + (\alpha \cdot \frac{M_s}{W_o})^2}$$

Gdzie:

* $P$ — siła ściskająca wał;
* $F$ — przekrój poprzeczny wału;
* $n$ — dla obustronnego zginania i odzerowo-tętniącego rozciągania $n = 0{,}5$, w przypadku odwrotnym $n = 2$. Jeżeli obliczenia są dokładne, to wartość $n$ należy pomnożyć przez $\frac{k_g}{k_r} = 1{,}1 \div 1{,}3$.

Politechnika Warszawska

# Obliczenia dwupodporowych wałów prostych

* Metoda analityczna;
* Metoda analityczno-wykreślna;
* Metoda wykreślna.

Politechnika Warszawska

# Metoda analityczna

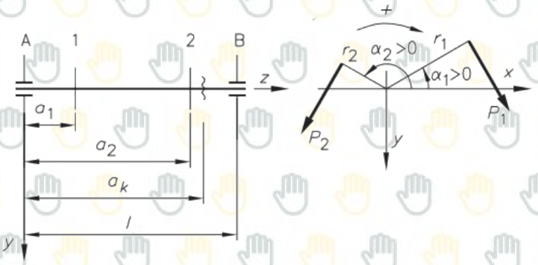
Równanie momentów obrotowych:

$$\sum r_i \cdot P_i = r_1 \cdot P_1 - r_2 \cdot P_2 = 0$$

rzuty sił na kierunki:

$$P_{ix} = P_i \cdot sin(\alpha_i)$$

$$P_{iy} = P_i \cdot cos(\alpha_i)$$




Politechnika Warszawska

# Metoda analityczna

Równanie równowagi:

$$R_{Bx} = -\frac{1}{l} \cdot \sum a_i \cdot P_{ix}$$

$$R_{By} = -\frac{1}{l} \cdot \sum a_i \cdot P_{iy}$$

$$R_{Ax} = -R_{Bx} - \sum P_{ix}$$

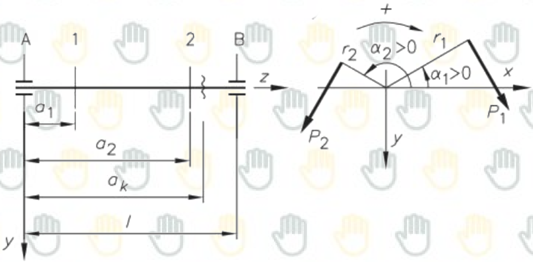
$$R_{Ay} = -R_{By} - \sum P_{iy}$$

$$M_{gxk} = -a_k \cdot R_{Ax} - \sum (a_k - a_i) \cdot P_{ix}$$

$$M_{gyk} = -a_k \cdot R_{Ay} - \sum (a_k - a_i) \cdot P_{iy}$$

Wypadkowe momenty zginające w obliczanym przekroju wynoszą:

$$M_{gk} = \sqrt{M_{gxk}^2 + M_{gyk}^2}$$

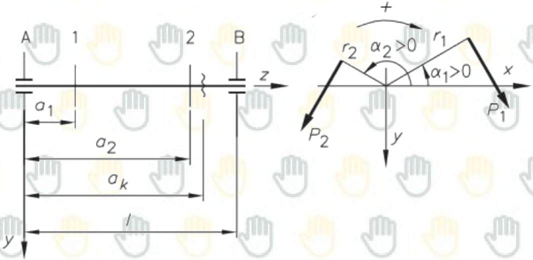


# Metoda analityczna

Moment skręcający:

$$M_{sk} = \sum r_i \cdot P_i$$

Wyznaczenie momentu zastępczego oraz średnic wału

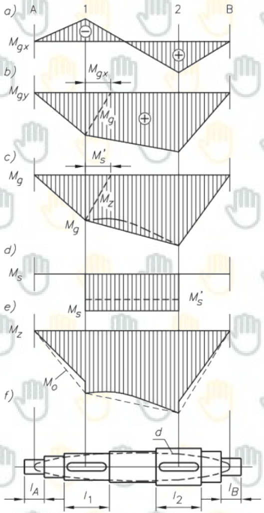


# Metoda analityczno-wykreślna

Reakcje podpór i momenty zginające w poszczególnych płaszczyznach są obliczane analitycznie, natomiast sumowanie momentów wykonuje się wykreślnie. Wykresy $M_{gx}$ i $M_{gy}$ buduje się na podstawie obliczeń i sumuje je geometrycznie dzięki wprowadzeniu skali $\kappa_M$ $N\backslash mm$.

# Metoda analityczno-wykreślna

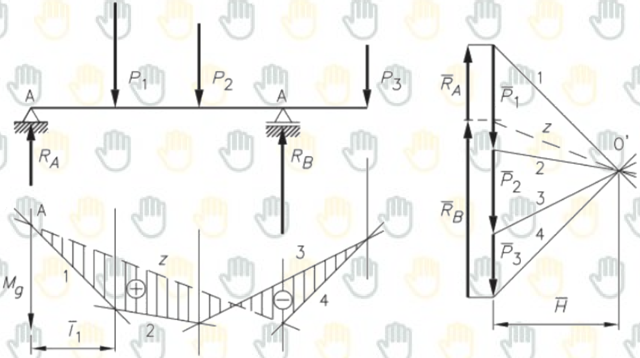
* geometryczne złożenie $M_{gx}$ i $M_{gy}$ do $M_g$,
* geometryczne złożenie $M_g$ i $M_s$ do $M_z$,
* uproszczenie wykresu do $M_o$ — wyznaczenie średnic,
* wyznaczenie długości czopów i budowa zarysu rzeczywistego wałka.




Politechnika Warszawska

# Metoda wykreślna

Zamiast rachunkowego wyznaczania reakcji podpór oraz momentów $M_{gx}$ i $M_{gy}$ stosuje się wykreślne wyznaczanie tych wielkości za pomocą wieloboków sił i wieloboków sznurowych.

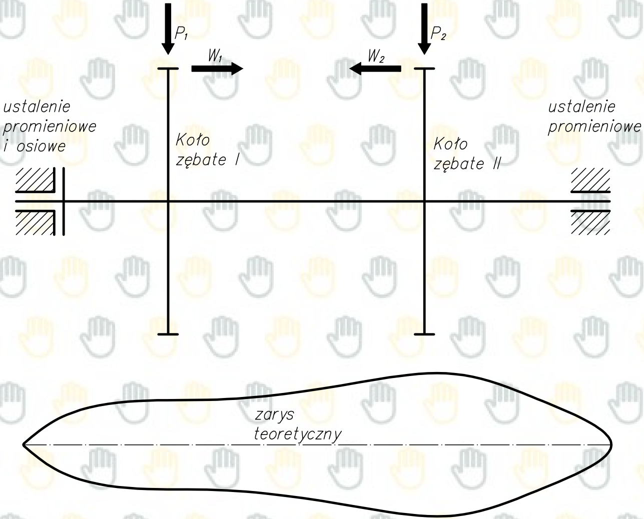



Politechnika Warszawska

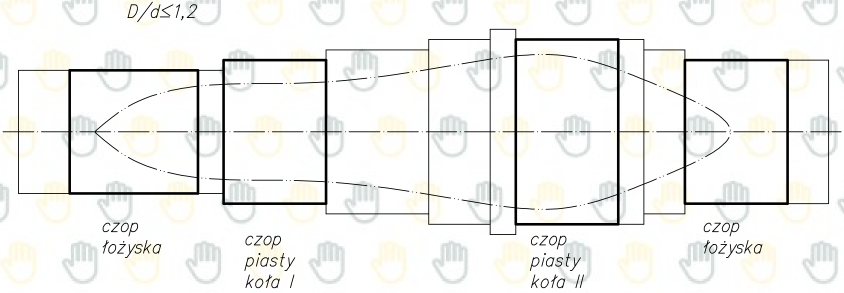
# Kształtowanie wałów

* na podstawie danych funkcjonalnych i wstępnych wymiarów kształtuje się czopy łożyskowe, czopy końcowe, powierzchnie bazowe i oporowe kół, łożysk itp., a następnie kształtuje się powierzchnie swobodne wału,
* pamiętać o sprzężeniu zwrotnym od pozostałych elementów węzła konstrukcyjnego,
* zwrócić uwagę na wytrzymałość zmęczeniową.

# Etapy kształtowania wałka

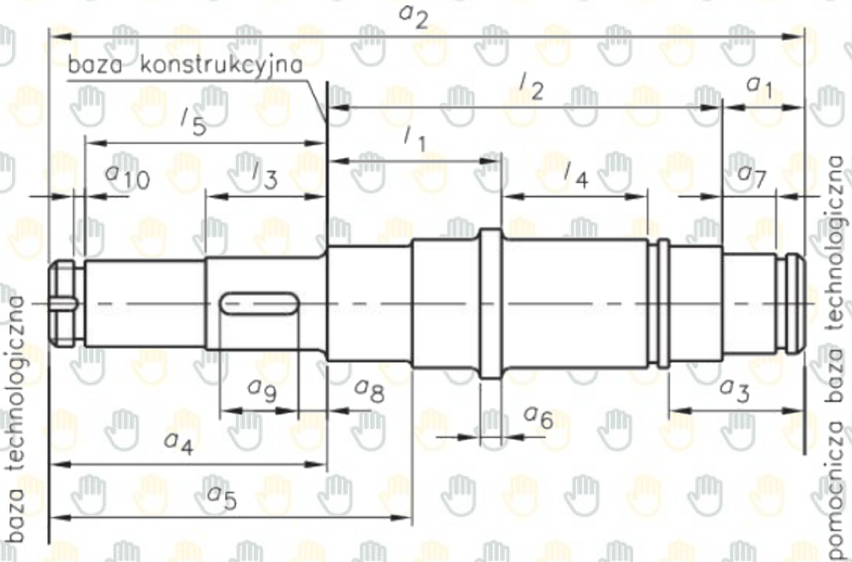


# Etapy kształtowania wałka



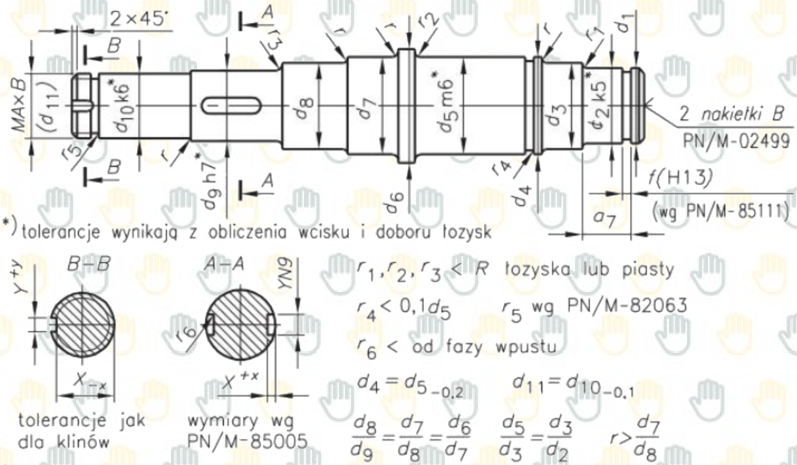

Politechnika
Warszawska

# Etapy kształtowania wałka

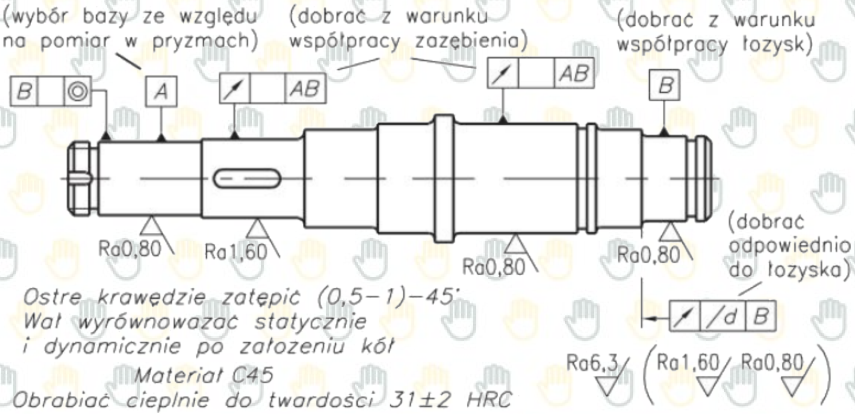



Politechnika Warszawska

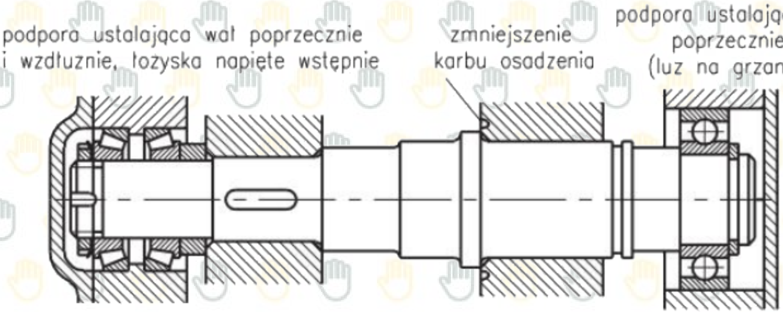
# Etapy kształtowania wałka



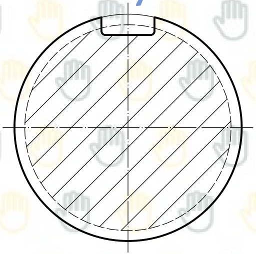
# Etapy kształtowania wałka



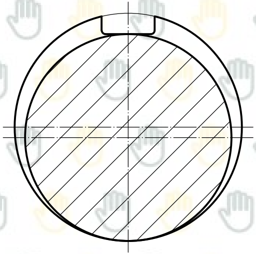
# Etapy kształtowania wałka



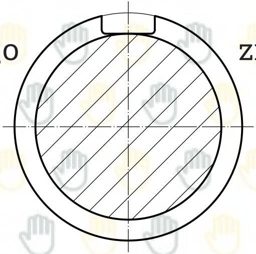
# Uwzględnianie rowków wpustowych w średnicy teoretycznej



zbliżony do statycznego cykl obciążenia



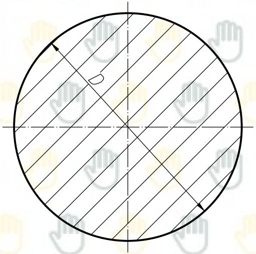
zmienny cykl obciążenia, $M_s$ jest niewielki



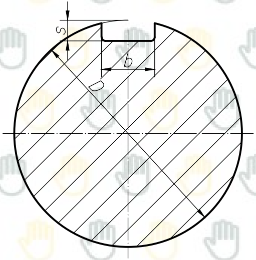
zmienny cykl obciążenia, $M_s$ jest duży

# Wskaźniki na zginanie i skręcanie

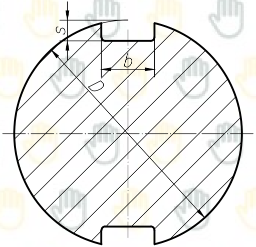
$$W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32},$$
$$W_o = \frac{\pi \cdot D^3}{16}$$



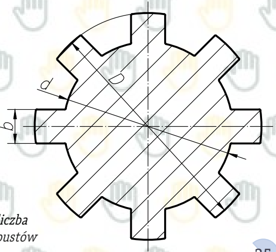

$$W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32} - \frac{b \cdot s \cdot (2D - s)^2}{16 \cdot D},$$
$$W_o = \frac{\pi \cdot D^3}{16} - \frac{b \cdot s \cdot (2D - s)^2}{16 \cdot D}$$




$$W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32} - \frac{b \cdot s \cdot (2D - s)^2}{8 \cdot D},$$
$$W_o = \frac{\pi \cdot D^3}{16} - \frac{b \cdot s \cdot (2D - s)^2}{8 \cdot D}$$




$$W_x = \frac{\pi \cdot D^4 - n \cdot b \cdot (D - d) \cdot (D + d)^2}{32 \cdot D},$$
$$W_o = \frac{\pi \cdot D^4 - n \cdot b \cdot (D - d) \cdot (D + d)^2}{16 \cdot D}$$




*n - liczba wypustów*

Politechnika Warszawska

# Sprawdzanie ugięcia i skręcenia

Obliczanie strzałek i kątów ugięcia metodą analityczną (tzn. przez napisanie równania osi ugiętej) w przypadku projektowania wałów maszynowych **nie ma** większego zastosowania.

Stosuje się:

* superpozycję ugięcia przypadków elementarnych,
* metodę Mohra.

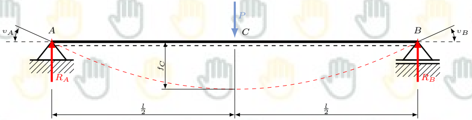
# Ugięcie dla przypadków elementarnych

$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$

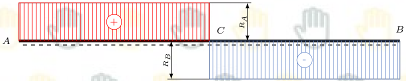
$$M_{max} = \frac{P \cdot l}{4} \text{ dla } x = \frac{l}{2}$$

$$f_{max} = f_C = \frac{P \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J}$$

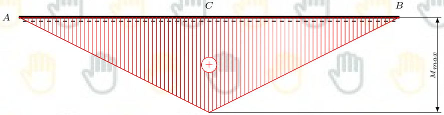
$$\upsilon_A = -\upsilon_B = -\frac{P \cdot l^2}{16 \cdot E \cdot J}$$




Siła tnąca:




Moment gnący:



# Ugięcie dla przypadków elementarnych

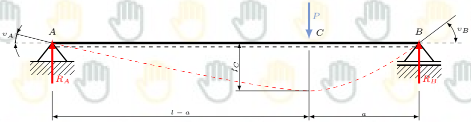
$$R_A = P \cdot \frac{a}{l}, \quad R_B = P \cdot \frac{l-a}{l},$$

$$M_{max} = P \cdot \frac{a \cdot (l-a)}{l} \text{ dla } x = l - a,$$

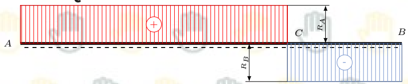
$$\upsilon_A = -\frac{P \cdot a \cdot (l^2 - a^2)}{6 \cdot l \cdot E \cdot J}, \quad \upsilon_B = -\frac{P \cdot a \cdot (l-a) \cdot (2 \cdot l - a)}{6 \cdot l \cdot E \cdot J},$$

$$f_C = \frac{P \cdot a^2 \cdot (l-a)^2}{3 \cdot l \cdot E \cdot J} \text{ dla } x \leq \frac{1}{2} l,$$

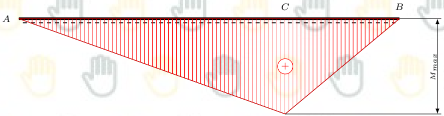
$$f_{max} = \frac{P \cdot a}{3 \cdot l \cdot E \cdot J} \cdot \left(\frac{(l^2 - a^2)}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ dla } x = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot (l^2 - a^2)}$$




Siła tnąca:




Moment gnący:



# Ugięcie dla przypadków elementarnych

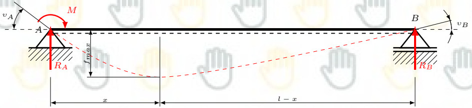
$$R_A = -R_B = -\frac{M}{l},$$

$$M_{max} = M \text{ dla } x = 0,$$

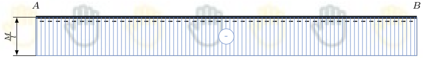
$$\upsilon_A = -\frac{M \cdot l}{3 \cdot E \cdot J}, \qquad \upsilon_B = \frac{M \cdot l}{6 \cdot E \cdot J},$$

$$f = \frac{M \cdot l^2}{16 \cdot E \cdot J} \text{ dla } x = \frac{1}{2} l$$

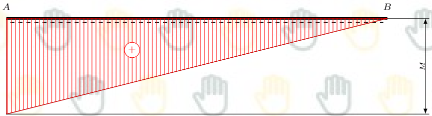
$$f_{max} = \frac{M \cdot l^2}{9\sqrt{3} \cdot E \cdot J} \text{ dla } x = l \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$




Siła tnąca:




Moment gnący:



# Ugięcie dla przypadków elementarnych

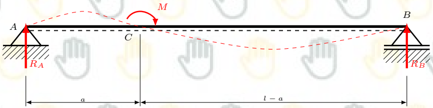
$$R_A = R_B = \frac{M}{l},$$

$$M_{max} = M \cdot \frac{l-a}{l} \text{ dla } a \leq \frac{1}{2}l,$$

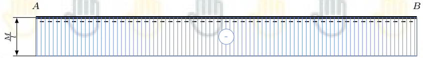
$$\upsilon_A = \frac{M}{6 \cdot l} \cdot (2l^2 - 6la + 3a^2),$$

$$\upsilon_B = -\frac{M}{6 \cdot l} \cdot (l^2 - 3a^2),$$

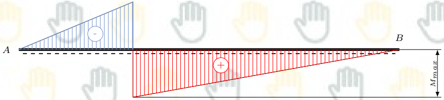
$$f_C = \frac{M \cdot a}{3 \cdot l} \cdot (l^2 - 3la + 2a^2)$$




Siła tnąca:




Moment gnący:



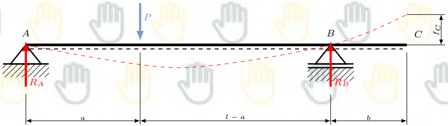
# Ugięcie dla przypadków elementarnych

$$v_C = v_B = \frac{P \cdot a \cdot (l^2 - a^2)}{6 \cdot l \cdot E \cdot J},$$

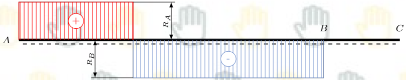
$$f_C = v_B \cdot b = \frac{P \cdot a \cdot b \cdot (l^2 - a^2)}{6 \cdot l \cdot E \cdot J},$$

$$v_B = v_C = \frac{P \cdot l^2}{16 \cdot E \cdot J} \text{ dla } a = \frac{1}{2}a,$$

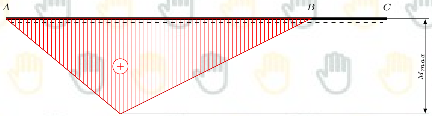
$$f_C = \frac{P \cdot l^2 \cdot b}{16 \cdot E \cdot J} \text{ dla } a = \frac{1}{2}a$$




Siła tnąca:




Moment gnący:



# Ugięcie dla przypadków elementarnych

$$R_A = P \cdot \frac{a}{l}, \quad R_B = P \cdot \frac{l+a}{l},$$

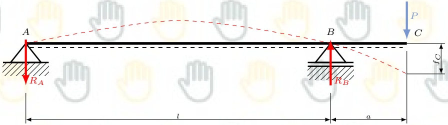
$$M_{max} = P \cdot l \text{ dla } x = l,$$

$$\upsilon_A = \frac{P \cdot l \cdot a}{6 \cdot E \cdot J}, \quad \upsilon_B = -\frac{P \cdot l \cdot a}{3 \cdot E \cdot J},$$

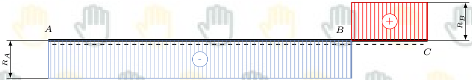
$$\upsilon_C = -\frac{P \cdot a}{6 \cdot E \cdot J} \cdot (2l + 3a),$$

$$f_C = \frac{P \cdot a^2}{3 \cdot E \cdot J} \cdot (l + a),$$

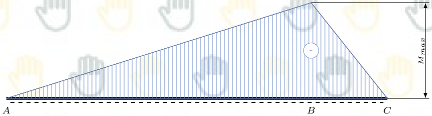
$$f_{max} = -\frac{P \cdot l^2 \cdot a}{9\sqrt{3} \cdot E \cdot J} \text{ dla } x = \frac{l}{\sqrt{3}}$$




Siła tnąca:



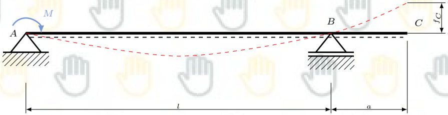

Moment gnący:



# Ugięcie dla przypadków elementarnych

$$\upsilon_B = \upsilon_C = \frac{M \cdot l}{6 \cdot E \cdot J},$$

$$f_C = \upsilon_C \cdot a = \frac{M \cdot l \cdot a}{6 \cdot E \cdot J}$$




Politechnika Warszawska

# Ugięcie dla przypadków elementarnych

$$R_A = R_B = \frac{M}{l},$$

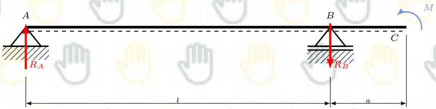
$$M_{max} = M,$$

$$\upsilon_A = -\frac{M \cdot l}{6 \cdot E \cdot J}, \quad \upsilon_B = \frac{M \cdot l}{3 \cdot E \cdot J},$$

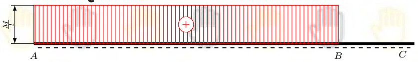
$$\upsilon_C = \frac{M}{3 \cdot E \cdot J} \cdot (l + 3a),$$

$$f_C = -\frac{M \cdot a}{6 \cdot E \cdot J} \cdot (2l + 3a),$$

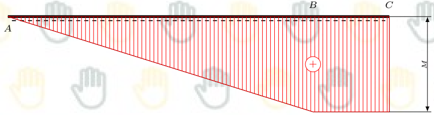
$$f_{max} = -\frac{M \cdot l^2}{9\sqrt{3} \cdot E \cdot J} \text{ dla } x = \frac{l}{\sqrt{3}}$$




Siła tnąca:




Moment gnący:

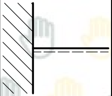
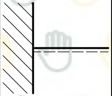
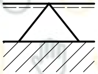
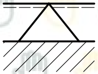
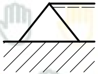
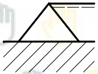


# Metoda Mohra

* wykres momentów gnących traktuje się formalnie jako obciążenie ciągłe nazwane obciążeniem fikcyjnym $q^*(z)$ dla nowej belki,
* wyznaczenie wykresów siły tnącej $T^*(z)$ i momentów gnących $M_g^*(z)$,
* wyznaczenie strzałki i kątów ugięcia.

$$f = \frac{M_g^*}{E \cdot J} \qquad \upsilon = \frac{T_g^*}{E \cdot J}$$

# Tworzenie belki fikcyjnej

| *Układ rzeczywisty* | *Szkic* | *Układ fikcyjny* | *Szkic* |
|---|---|---|---|
| *Koniec swobodny* |  | *Utwierdzenie* |  |
| *Utwierdzenie* |  | *Koniec swobodny* |  |
| *Podpora przegubowa pośrednia* |  | *Przegub* |  |
| *Przegub* |  | *Podpora przegubowa pośrednia* |  |
| *Podpora przegubowa skrajna* |  | *Podpora przegubowa skrajna* |  |

# Dyskretyzacja obciążenia ciągłego

Zastępowanie poszczególnych pól rzeczywistego wykresu momentów podzielonego przez $J$, wektorami o równej im wartości umieszczonymi w środkach ciężkości tych pól ($S_i$).
Pamiętać że należy:

* przyjmować zawsze rzeczywiste maksymalne wartości momentów gnących, a nie momenty gnące zastępcze,
* chcąc określić linię ugięcia z uwzględnieniem jej przestrzennego charakteru, należy dokonać obliczenia dla kierunku x i y osobno, a następnie złożyć w każdym przekroju oddzielnie.

# Określenie ugięć dopuszczalnych

* w budowie przekładni zębatych (przeważnie) $f_{dop} = 0{,}005 \div 0{,}001 \cdot m$, gdzie $m$ oznacza moduł koła zębatego,
* w budowie silników elektrycznych $f_{dop} < 0{,}001 \cdot \delta$, gdzie $\delta$ oznacza wielkość szczeliny między wirnikiem a stojanem,
* dla wałów innych maszyn $f_{dop} = 2 \div 3 \cdot 10^{-4} \cdot l$, gdzie $l$ oznacza rozstaw między łożyskami.

Politechnika Warszawska

# Dopuszczalne kąty ugięcia

| **Rodzaj łożysk** | **Dopuszczalny kąt ugięcia** |
|---|---|
| Kulkowe wahliwe | 0,07 |
| Baryłkowe jednorzędowe | 0,035 ÷ 0,07 |
| Kulkowe zwykłe (pasowanie - K5/h6) | |
| a) luz poprzeczny normalny | 0,0023 |
| b) luz poprzeczny C3 | 0,0035 |
| c) luz poprzeczny C4 | 0,0047 |
| Wałeczkowe i stożkowe | |
| a) łożyska wałeczkowe typu N i NU serii 10, 2, 3, 4 | 0,00116 |
| b) pozostałe | 0,0058 |
| Ślizgowe | |
| samonastawne | 0,001 |
| sztywne | 0,0003 |

# Obliczanie kątów skręcenia

Kąt skręcenia wału od znanego momentu skręcającego

$$\varphi = \frac{M_s \cdot l}{G \cdot J_o} \; [rad]$$

Do porównania używa się pojęcia jednostkowego kąta skręcenia

$$\varphi' = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_s}{G \cdot J_o} \; [rad/m]$$

Wartości graniczne wynoszą:

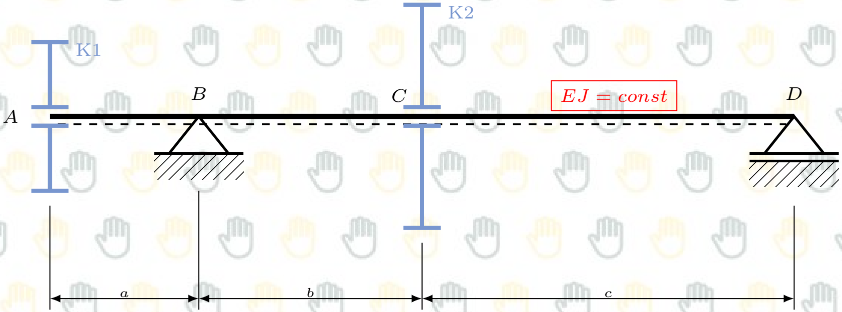
* dla obciążeń jednostronnie zmiennych $\varphi' = 0{,}004 \; [rad/m]$
* obciążeń obustronnie zmiennych $\varphi' = 0{,}0025 \; [rad/m]$

Dla wałów o zmiennej sztywności sprawdza się warunek:

$$\varphi = M_s \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{G \cdot J_{oi}} = \frac{M_s}{G} \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{J_{oi}} \leq \varphi_{dop}$$

# Zadanie 9.1

Obliczyć reakcje łożysk oraz średnicę gładkiej osi (belki) zginanej siłami: $P_1 = 1000\,N, P_2 = 4000\,N$ przyłożonych do kół bosych $K_1$ i $K_2$. Naprężenia dopuszczalne materiału osi (stal C35) wynoszą $k_{go} = 64\,MPa$, a dopuszczalna strzałka ugięcia $f_{dop} = 0{,}0005 \cdot l$. Dane wymiary: $a = 200\,mm, b = 300\,mm, c = 500\,mm, l = b + c = 800\,mm$.



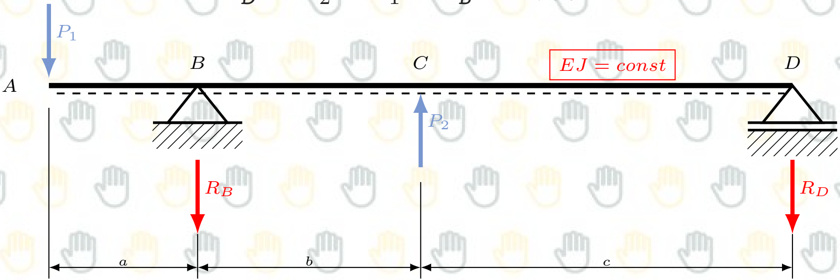
# Zadanie 9.1

Równania równowagi:

$$M_D : -P_1 \cdot (a+b+c) - R_B \cdot (b+c) + P_2 \cdot c = 0$$
$$\sum P_y : -P_1 - R_B + P_2 - R_D = 0$$

stąd

$$R_B = \frac{P_2 \cdot c - P_1 \cdot (a+b+c)}{(b+c)} = 1250\,N$$
$$R_D = P_2 - P_1 - R_B = 1750\,N$$

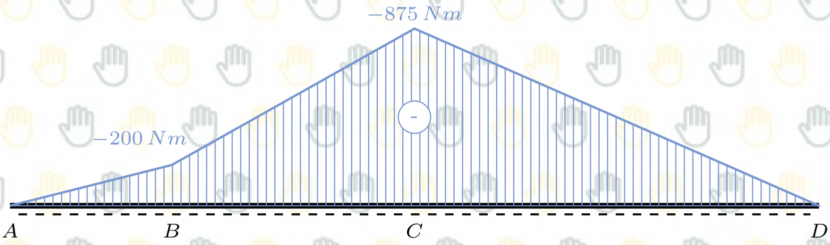


# Zadanie 9.1

Momenty gnące wynoszą:

| Przedział | Wzór | Wartość |
|---|---|---|
| $x = 0$ | | $0\,Nm$ |
| $x \in (0,a)$ | $-P_1 \cdot x$ | |
| $x = a$ | | $-200\,Nm$ |
| $x \in (a,a+b)$ | $-P_1 \cdot x - R_B \cdot (x-a)$ | |
| $x = a+b$ | | $-875\,Nm$ |
| $x \in (a+b,a+b+c)$ | $-P_1 \cdot x - R_B \cdot (x-a) + P_2 \cdot (x-a-b)$ | |
| $x = a+b+c$ | | $0\,Nm$ |

# Zadanie 9.1




maksymalny moment gnący występuje w punkcie C

$$M_{gmax} = |M_{gC}| = 875\,Nm$$

warunek wytrzymałościowy osi:

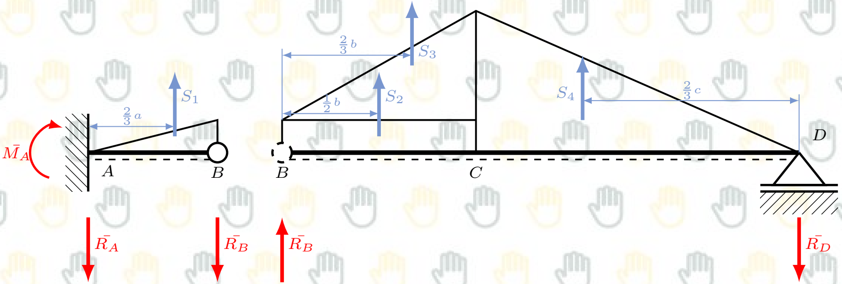
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{gmax}}{\pi \cdot k_{go}}} \cong 52\,mm$$

Politechnika Warszawska

# Zadanie 9.1

Maksymalną strzałkę ugięcia osi wyznaczono metodą analityczno-wykreślną. Dokonano dyskretyzacji obciążenia ciągłego:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot M_g(a) \cdot a = 20\,Nm^2$$
$$S_2 = M_g(a) \cdot b = 60\,Nm^2$$
$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot (M_g(a+b) - M_g(a)) \cdot b = 101{,}25\,Nm^2$$
$$S_4 = \frac{1}{2} \cdot M_g(a+b) \cdot c = 218{,}75\,Nm^2$$




Politechnika Warszawska

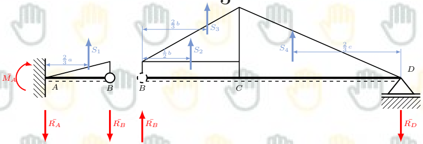
# Zadanie 9.1

Równania równowagi dla fikcyjnej belki:

$$\sum M_D : \bar{R}_B \cdot (b+c) - S_2 \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot b + c) - S_3 \cdot (\tfrac{1}{3} \cdot b + c) - S_4 \cdot \tfrac{2}{3} \cdot c = 0$$
$$\sum F_y : -\bar{R}_B + S_2 + S_3 + S_4 - \bar{R}_D = 0$$
$$\sum F_y : -\bar{R}_A + S_1 + \bar{R}_B = 0$$
$$\sum M_A : \bar{M}_A - \bar{R}_B \cdot a - S_1 \cdot \tfrac{2}{3} \cdot a = 0$$

stąd

$$\bar{R}_B = \frac{S_2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot b + c) + S_3 \cdot (\frac{1}{3} \cdot b + c) + S_4 \cdot \frac{2}{3} \cdot c}{b+c} = 215{,}83\,Nm^2$$
$$\bar{R}_D = -\bar{R}_B + S_2 + S_3 + S_4 = 164{,}17\,Nm^2$$
$$\bar{R}_A = S_1 + \bar{R}_B = 235{,}83\,Nm^2$$
$$\bar{M}_A = \bar{R}_B \cdot a + S_1 \cdot \tfrac{2}{3} \cdot a = 45{,}83\,Nm^3$$

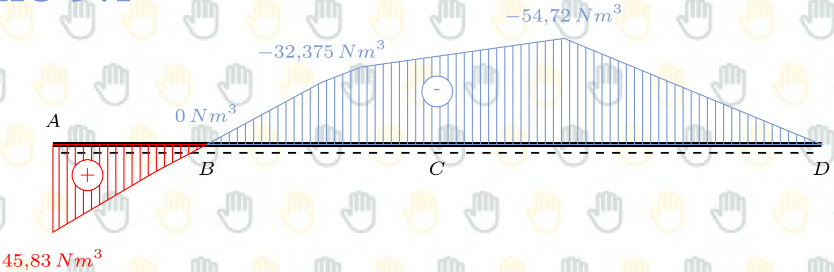


# Zadanie 9.1

## Momenty gnące dla fikcyjnej belki:

| **Przedział** | **Wzór** | **Wartość** |
|---|---|---|
| $x = 0$ | | $45{,}83\,Nm^3$ |
| $x \in (0, \frac{2}{3} \cdot a)$ | $\bar{M_A} - \bar{R_A} \cdot x$ | |
| $x = \frac{2}{3} \cdot a$ | | $14{,}39\,Nm$ |
| $x \in (\frac{2}{3} \cdot a, a)$ | $\bar{M_A} - \bar{R_A} \cdot x + S_1 \cdot (x - \frac{2}{3} \cdot a)$ | |
| $x = a$ | | $0\,Nm^3$ |
| $x \in (a, a + \frac{1}{2} \cdot b)$ | $-\bar{R_B} \cdot (x - a)$ | |
| $x = a + \frac{1}{2} \cdot b$ | | $-32{,}375\,Nm^3$ |
| $x \in (a + \frac{1}{2} \cdot b, a + \frac{2}{3} \cdot b)$ | $-\bar{R_B} \cdot (x - a) + S_2 \cdot (x - a - \frac{1}{2} \cdot b)$ | |
| $x = a + \frac{2}{3} \cdot b$ | | $-40{,}17\,Nm^3$ |
| $x \in (a + \frac{2}{3} \cdot b, a + b + \frac{1}{3} \cdot c)$ | $-\bar{R_B} \cdot (x - a) + S_2 \cdot (x - a - \frac{1}{2} \cdot b) + S_3 \cdot (x - a - \frac{2}{3} \cdot b)$ | |
| $x = a + b + \frac{1}{3} \cdot c$ | | $-54{,}72\,Nm^3$ |
| $x \in (a + b + \frac{1}{3} \cdot c, a + b + c)$ | $-\bar{R_B} \cdot (x - a) + S_2 \cdot (x - a - \frac{1}{2} \cdot b) + S_3 \cdot (x - a - \frac{2}{3} \cdot b) + S_4 \cdot (x - a - b - \frac{1}{3} \cdot c)$ | |
| $x = a + b + c$ | | $0\,Nm^3$ |

# Zadanie 9.1




Maksymalny moment gnący dla belki fikcyjnej wyznacza największe ugięcie belki ($M_{Amax} = 54{,}72\, Nm^3, E = 210\, GPa$):

$$y_A = \frac{M_{\bar{A}max}}{E \cdot J} = \frac{64 \cdot M_{\bar{A}max}}{E \cdot \pi \cdot d^4} \leq f_{dop}$$

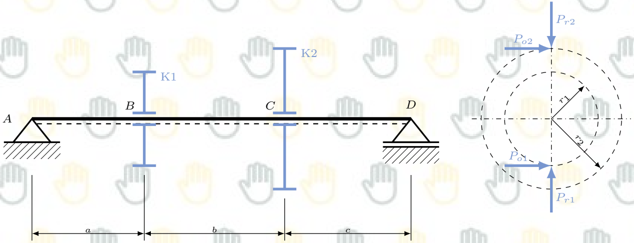
stąd

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{64 \cdot M_{\bar{A}max}}{E \cdot \pi \cdot f_{dop}}} = 60{,}36\, mm$$

Przyjęto $d = 62\, mm$.

# Zadanie 9.2

Obliczyć średnicę wału w miejscu osadzenia kół zębatych. Wał jest obciążony siłami międzyzębnymi przekładni zębatej walcowej o zębach prostych. Na koło 1 działają siły: obwodowa $P_{o1} = 11950\,N$ i promieniowa $P_{r1} = 4350\,N$, na koło 2 odpowiednio: $P_{o2} = 5370\,N$ i $P_{r2} = 1950\,N$. Obliczenia należy wykonać dla następujących wymiarów: $r_2 = 160\,mm$, $a = 80\,mm$, $b = 100\,mm$, $c = 90\,mm$. Wał wykonano ze stali C45, dla której: $k_{go} = 78\,MPa$, $k_{sj} = 95\,MPa$.



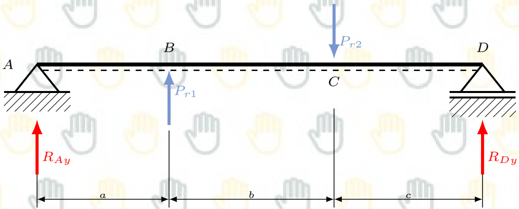
# Zadanie 9.2

Równania równowagi:

$$\sum F_y : -R_{Ay} - P_{r1} + P_{r2} - R_{Dy} = 0$$
$$\sum M_A : -P_{r1} \cdot a + P_{r2} \cdot (a+b) - R_{Dy} \cdot (a+b+c) = 0$$

stąd

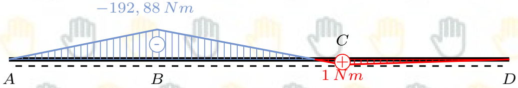
$$R_{Dy} = \frac{-P_{r1} \cdot a + P_{r2} \cdot (a+b)}{a+b+c} = 11{,}11\,N$$
$$R_{Ay} = -P_{r1} + P_{r2} - R_{Dy} = -2411{,}11\,N$$



# Zadanie 9.2

Momenty gnące w punktach wynoszą:

| Przedział | Wzór | Wartość |
|---|---|---|
| $x = 0$ | | $0\,Nm$ |
| $x \in (0,a)$ | $R_{Ay} \cdot x$ | |
| $x = a$ | | $-192{,}88\,Nm$ |
| $x \in (a,a+b)$ | $R_{Ay} \cdot x + P_{r1} \cdot (x-a)$ | |
| $x = a+b$ | | $1{,}0\,Nm$ |
| $x \in (a+b,a+b+c)$ | $R_{Ay} \cdot x + P_{r1} \cdot (x-a) - P_{r2} \cdot (x-a-b)$ | |
| $x = a+b+c$ | | $0\,Nm$ |




Politechnika Warszawska

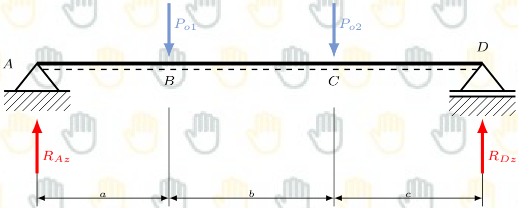
# Zadanie 9.2

Równania równowagi:

$$\sum F_z : R_{Az} - P_{o1} - P_{o2} + R_{Dz} = 0$$
$$\sum M_A : P_{o1} \cdot a + P_{o2} \cdot (a+b) - R_{Dz} \cdot (a+b+c) = 0$$

stąd

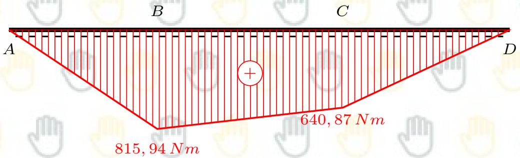
$$R_{Dz} = \frac{P_{o1} \cdot a + P_{o2} \cdot (a+b)}{a+b+c} = 7120{,}74\,N$$
$$R_{Az} = P_{o1} + P_{o2} - R_{Dz} = 10199{,}26\,N$$



# Zadanie 9.2

Momenty gnące w punktach wynoszą:

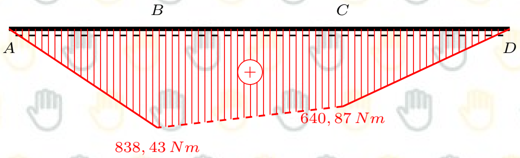
| Przedział | Wzór | Wartość |
|---|---|---|
| $x = 0$ | | $0\,Nm$ |
| $x \in (0,a)$ | $R_{Az} \cdot x$ | |
| $x = a$ | | $815{,}94\,Nm$ |
| $x \in (a,a+b)$ | $R_{Az} \cdot x - P_{o1} \cdot (x-a)$ | |
| $x = a+b$ | | $640{,}87\,Nm$ |
| $x \in (a+b,a+b+c)$ | $R_{Az} \cdot x - P_{o1} \cdot (x-a) - P_{o2} \cdot (x-a-b)$ | |
| $x = a+b+c$ | | $0\,Nm$ |



# Zadanie 9.2

Momenty gnące wypadkowe w punktach B i C wynoszą:

$$M_{gB} = \sqrt{M_{gyB}^2 + M_{gzB}^2} = 838{,}43\,Nm$$
$$M_{gC} = \sqrt{M_{gyC}^2 + M_{gzC}^2} = 640{,}87\,Nm$$

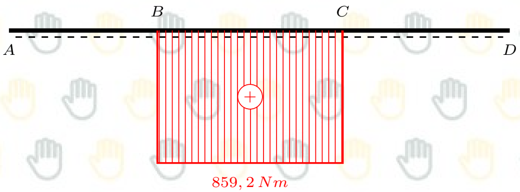



Uproszczono przebieg momentu gnącego między punkami B i C.

# Zadanie 9.2

Wał jest skręcany stałym momentem skręcającym na odcinku BC:

$$M_s = P_{o2} \cdot r_2 = 859{,}2\,Nm$$



# Zadanie 9.2

Ponieważ $M_g < 2 \cdot M_s$

$$M_{zB} = \sqrt{(\frac{2 \cdot k_{sj}}{k_{go}} \cdot M_{gB})^2 + M_s^2} = 2215{,}7\,N$$
$$M_{zC} = \sqrt{(\frac{2 \cdot k_{sj}}{k_{go}} \cdot M_{gC})^2 + M_s^2} = 1781{,}91\,N$$

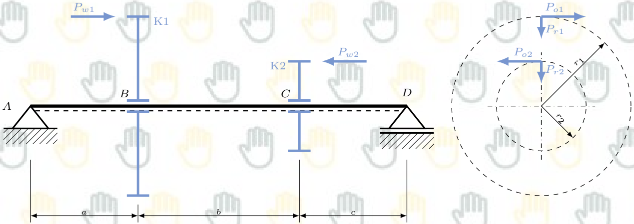
Średnica wału w punktach B i C wynosi:

$$d_B \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{zB}}{\pi \cdot k_{sj}}} = 49{,}16\,mm$$
$$d_C \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{zC}}{\pi \cdot k_{sj}}} = 45{,}71\,mm$$

Przyjęto: $d_B = 50\,mm, d_C = 46\,mm$

# Zadanie 9.3

Na wale dwupodporowym osadzono dwa koła zębate o zębach śrubowych i promieniach tocznych $r_1 = 155\,mm$, $r_2 = 62{,}5\,mm$. Na koło 1 działają siły: obwodowa $P_{o1} = 1805\,N$, promieniowa $P_{r1} = 679\,N$ i wzdłużna $P_{w1} = 484\,N$, natomiast na koło 2 odpowiednio: $P_{o2} = 4480\,N$, $P_{r2} = 1610\,N$ i $P_{w2} = 790\,N$. Określić teoretyczny (z warunku wytrzymałościowego) i rzeczywisty zarys wału wykonanego ze stali 15Cr2, dla której: $k_{go} = 80\,MPa$, $k_{sj} = 85\,MPa$. Dane wymiary: $a = 80\,mm$, $b = 120\,mm$, $c = 80\,mm$.



# Zadanie 9.3

Równania równowagi w płaszczyźnie XY:

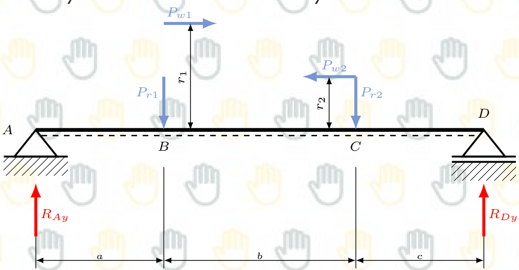
$$\sum F_y : R_{Ay} - P_{r1} - P_{r2} + R_{Dy} = 0$$

$$\sum M_A : r_1 \cdot P_{w1} + a \cdot P_{r1} + (a+b) \cdot P_{r2} - r_2 \cdot P_{w2} - (a+b+c) \cdot R_{Dy} = 0$$

stąd

$$R_{Dy} = \frac{r_1 \cdot P_{w1} + a \cdot P_{r1} + (a+b) \cdot P_{r2} - r_2 \cdot P_{w2}}{a+b+c} = 1435{,}59\, N$$

$$R_{Ay} = P_{r1} + P_{r2} - R_{Dy} = 853{,}41\, N$$



# Zadanie 9.3

Momenty gnące w punktach B i C zmieniają się skokowo, stąd należy w każdym z punktów obliczać dwie wartości momentu $M_{gL}$ i $M_{gP}$.

| **Przedział** | **Wzór** | **Wartość** |
|---|---|---|
| $x = 0$ | | $0\,Nm$ |
| $x \in (0,a)$ | $R_{Ay} \cdot x$ | |
| $x_L = a$ | | $68{,}27\,Nm$ |
| $x_P = a$ | | $143{,}29\,Nm$ |
| $x \in (a,a+b)$ | $R_{Ay} \cdot x + P_{w1} \cdot r_1 - P_{r1} \cdot (x-a)$ | |
| $x_L = a+b$ | | $164{,}22\,Nm$ |
| $x_P = a+b$ | | $114{,}85\,Nm$ |
| $x \in (a+b,a+b+c)$ | $R_{Ay} \cdot x + P_{w1} \cdot r_1 - P_{r1} \cdot (x-a) - P_{w2} \cdot r_2 - P_{r2} \cdot (x-a-b)$ | |
| $x = a+b+c$ | | $0\,Nm$ |

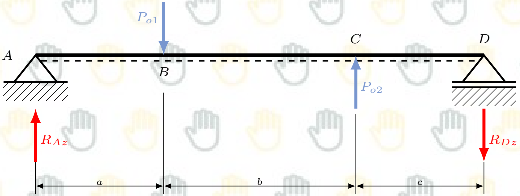
# Zadanie 9.3

Równania równowagi w płaszczyźnie XZ:

$$\sum F_z : R_{Az} - P_{o1} + P_{o2} - R_{Dz} = 0$$
$$\sum M_A : a \cdot P_{o1} - (a + b) \cdot P_{o2} + (a + b + c) \cdot R_{Dz} = 0$$

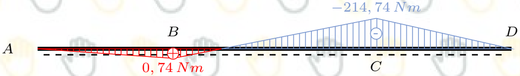
stąd

$$R_{Dz} = \frac{-a \cdot P_{o1} + (a+b) \cdot P_{o2}}{a+b+c} = 2684{,}29\,N$$
$$R_{Az} = P_{o1} - P_{o2} + R_{Dz} = 9{,}29\,N$$



# Zadanie 9.3

| Przedział | Wzór | Wartość |
|---|---|---|
| $x = 0$ | | $0\,Nm$ |
| $x \in (0,a)$ | $R_{Az} \cdot x$ | |
| $x = a$ | | $0,74\,Nm$ |
| $x \in (a,a+b)$ | $R_{Az} \cdot x - P_{o1} \cdot (x-a)$ | |
| $x = a+b$ | | $-214,74\,Nm$ |
| $x \in (a+b,a+b+c)$ | $R_{Az} \cdot x - P_{o1} \cdot (x-a) + P_{o2} \cdot (x-a-b)$ | |
| $x = a+b+c$ | | $0\,Nm$ |



# Zadanie 9.3

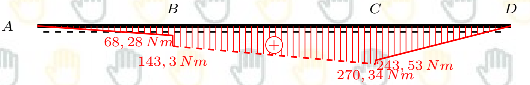
Momenty gnące wypadkowe w punktach B i C wynoszą:

$$M_{gBL} = \sqrt{M_{gyBL}^2 + M_{gzB}^2} = 68{,}28\, Nm$$

$$M_{gBP} = \sqrt{M_{gyBP}^2 + M_{gzB}^2} = 143{,}29\, Nm$$

$$M_{gCL} = \sqrt{M_{gyCL}^2 + M_{gzC}^2} = 270{,}34\, Nm$$

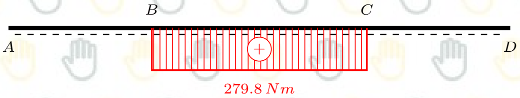
$$M_{gCP} = \sqrt{M_{gyCP}^2 + M_{gzC}^2} = 243{,}52\, Nm$$



# Zadanie 9.3

Wał jest skręcany stałym momentem skręcającym na odcinku BC:

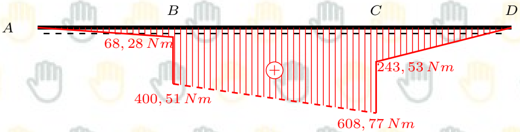
$$M_s = P_{o1} \cdot r_1 = 279{,}8\, N \cdot m$$



# Zadanie 9.3

Ponieważ $M_g < 2 \cdot M_s$

$$M_{zBP} = \sqrt{(\frac{2 \cdot k_{sj}}{k_{go}} \cdot M_{gBP})^2 + M_s^2} = 413{,}52\, N$$
$$M_{zCL} = \sqrt{(\frac{2 \cdot k_{sj}}{k_{go}} \cdot M_{gCL})^2 + M_s^2} = 638{,}98\, N$$



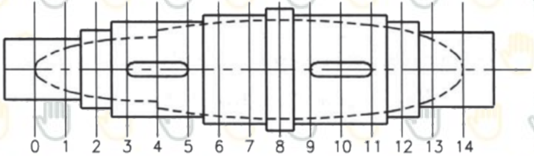
# Zadanie 9.3

W punktach 1, 2, 3, 4L, 10P, 11, 12, 13 wał jest zginany, zatem

$$M_{zi} = M_{gi}$$
$$d_i \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{zi}}{\pi \cdot k_{go}}}$$

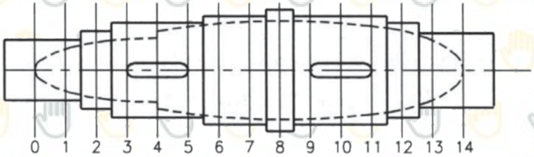
W punktach 4P, 5, 6, 7, 8, 9, 10L wał jest zginany i skręcany, zatem

$$M_{zi} = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot k_{sj}}{k_{go}} \cdot M_{gi}\right)^2 + M_s^2}$$
$$d_i \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{zi}}{\pi \cdot k_{sj}}}$$



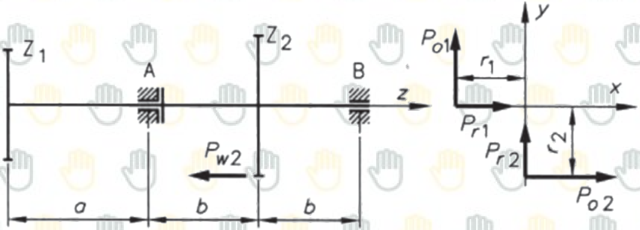
# Zadanie 9.3

| Nr przekroju | Współrzędna x | $M_z$ | $d_i$ | d |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 20 |
| 1 | 20 | 17,07 | 12,95 | |
| 2 | 40 | 34,14 | 16,32 | 25 |
| 3 | 60 | 51,21 | 18,68 | 30 |
| 4*L* | 80 | 68,28 | 20,56 | |
| 4*P* | 80 | 413,52 | 29,15 | |
| 5 | 100 | 425,62 | 29,43 | |
| 6 | 120 | 450,62 | 30 | 35 |
| 7 | 140 | 486,55 | 30,78 | |
| 8 | 160 | 531,19 | 31,69 | 40 |
| 9 | 180 | 582,53 | 32,68 | 35 |
| 10*L* | 200 | 638,98 | 33,7 | |
| 10*P* | 200 | 243,52 | 31,42 | |
| 11 | 220 | 182,64 | 28,54 | |
| 12 | 240 | 121,76 | 24,94 | 30 |
| 13 | 260 | 60,88 | 19,79 | 25 |
| 14 | 280 | 0 | 0 | |



# Zadanie 9.6

Określić z warunku wytrzymałościowego teoretyczny zarys wału, oraz na jego podstawie ustalić rzeczywisty zarys wału. Na wale są osadzone dwa koła zębate. Na koło 1 działają siły: $P_{o1} = 5000\,N$ i $P_{r1} = 2800\,N$, na koło 2 o promieniu $r_2 = 0{,}05\,m$ działają siły: $P_{o2} = 8000\,N$, $P_{r2} = 3800\,N$ i $P_{w2} = 2400\,N$. Naprężenia dopuszczalne dla materiału wału (stal C45) wynoszą: $k_{go} = 78\,MPa$, $k_{sj} = 95\,MPa$. Długości wału: $a = 0{,}08\,m$, $b = 0{,}06\,m$.



# Bibliografia


A. Dziurski, E. Mazanek, and L. Kania. *Przykłady obliczeń z podstaw konstrukcji maszyn: Łożyska, sprzęgła i hamulce, przekładnie mechaniczne. tom 2*. WNT, 2015. isbn: 9788393491360.

L. W. Kurmaz and O. L. Kurmaz. *Podstawy konstruowania węzłów i części maszyn: podręcznik konstruowania*. Samodzielna Sekcja "Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej", 2011. isbn: 9788388906343.

E. Mazanek, A. Dziurski, and L. Kania. *Przykłady obliczeń z podstaw konstrukcji maszyn: Połączenia, sprężyny, zawory, wały maszynowe. tom 1*. WNT, 2005. isbn: 9788320435528.

W. Starego. *Poradnik konstruktora przekładni pasowych*.


THANK
YOU
GRACIAS
ARIGATO
SHUKURIA
DANKSCHEEN
BİYAN
SHUKRIA
TINGKI
YAQHANYELAY
TASHAKKUR ATU
SUKSAMA
EKHMET
GRAZIE
MEHRBANI
PALDIES
BOLZİN
MERCI
JUSPAXAR
GOZAIMASHITA
EFCHARISTO
KOMAPSUMNIDA
MAAKE
SPASSIBO
SPASIBO
YUSPAGARATAM