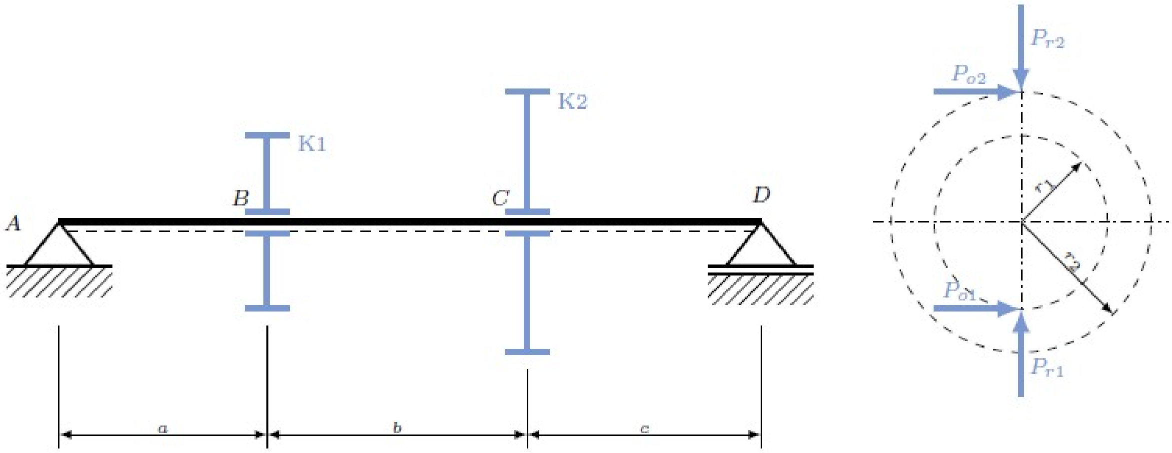
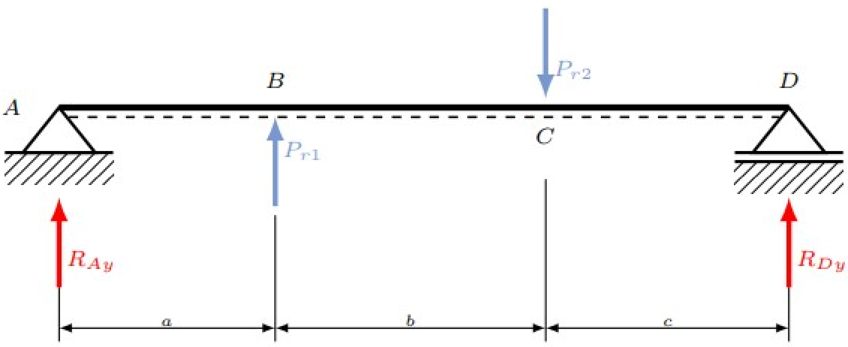
Obliczyć średnicę wałka w miejscach osadzenia kól zębatych (Rys. 1). Wał jest obciążony siłami międzyzębnymi przekładni zębatej walcowej o zębach prostych. Na koło 1 działają siły: odwodowa $P_{o1} := 11950\ N$ i promieniowa $P_{r1} := 4350\ N$, na koło 2 odpowiednio: $P_{o2} := 5370\ N$ i $P_{r2} := 1950\ N$. Obliczenia należy wykonać dla następujących wymiarów: $r_2 := 160\ mm$, $a := 80\ mm$, $b := 100\ mm$, $c := 90\ mm$. Wał wykonano ze stali C45, dla której: $k_{go} := 78\ MPa$, $k_{sj} := 95\ MPa$.



Rys. 1 Szkic projektowanej belki



Rys. 2 Schemat obliczeniowy belki w płaszczyźnie XY

Korzystając z Rys. 2 zapisano równania równowagi:

$$-R_{Ay} - P_{r1} + P_{r2} - R_{Dy} = 0$$
$$-P_{r1} \cdot a + P_{r2} \cdot (a+b) - R_{Dy} \cdot (a+b+c) = 0$$

Równania można przekształcić do postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -(a+b+c) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_{Ay} \\ R_{Dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{r1} - P_{r2} \\ P_{r1} \cdot a - P_{r2} \cdot (a+b) \end{bmatrix}$$

stąd (po doprowadzeniu macierzy do tych samych jednostek):

$$\begin{bmatrix} R_{Ay} \\ R_{Dy} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \dfrac{-(a+b+c)}{mm} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P_{r1} - P_{r2} \\ \dfrac{P_{r1} \cdot a - P_{r2} \cdot (a+b)}{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2411.111 \\ 11.111 \end{bmatrix} N$$

Reakcje wynoszą odpowiednio $R_{Ay}=-2411.11\ N$, $R_{Dy}=11.11\ N$. Dane potrzebne do wyznaczenia przebiegu momentu gnącego zostały zebrane w tabeli (Tab. 1).

Tab. 1 Zestawienie danych do wyznaczenia momentu gnącego

Przedział	**Wzór**	**Wartość**
$x=0$		$0\,Nm$
$x \in (0,a)$	$R_{Ay} \cdot x$	
$x=a$		$-192{,}88\,Nm$
$x \in (a,a+b)$	$R_{Ay} \cdot x + P_{r1} \cdot (x-a)$	
$x=a+b$		$1{,}0\,Nm$
$x \in (a+b,a+b+c)$	$R_{Ay} \cdot x + P_{r1} \cdot (x-a) - P_{r2} \cdot (x-a-b)$	
$x=a+b+c$		$0\,Nm$

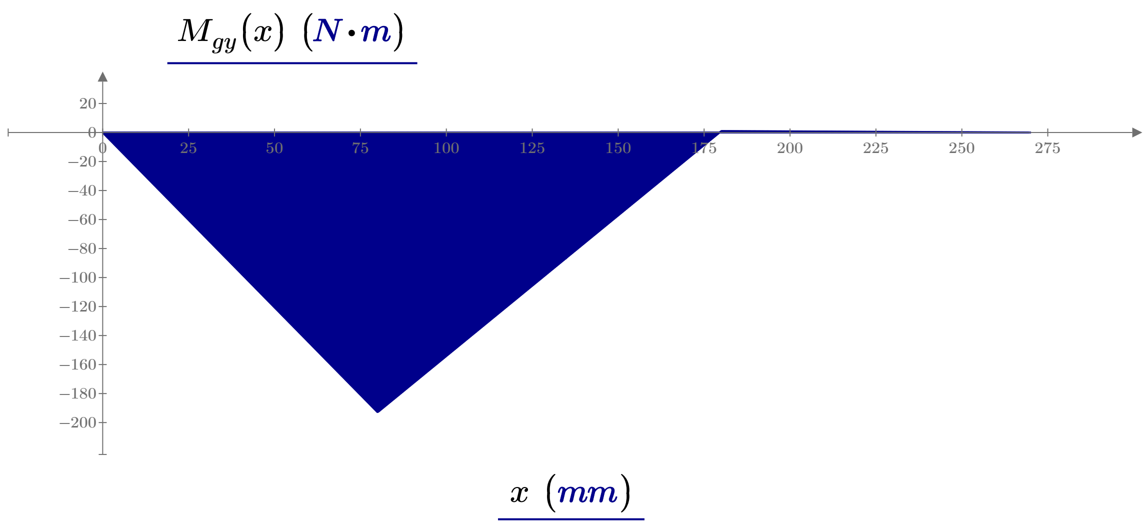
$$M_{gy1}(x):=(R_{Ay}\cdot x)\cdot(0\le x<a)$$

$$M_{gy2}(x):=(R_{Ay}\cdot x+P_{r1}\cdot(x-a))\cdot(a\le x<a+b)$$

$$M_{gy3}(x):=(R_{Ay}\cdot x+P_{r1}\cdot(x-a)-P_{r2}\cdot(x-a-b))\cdot(a+b\le x<a+b+c)$$

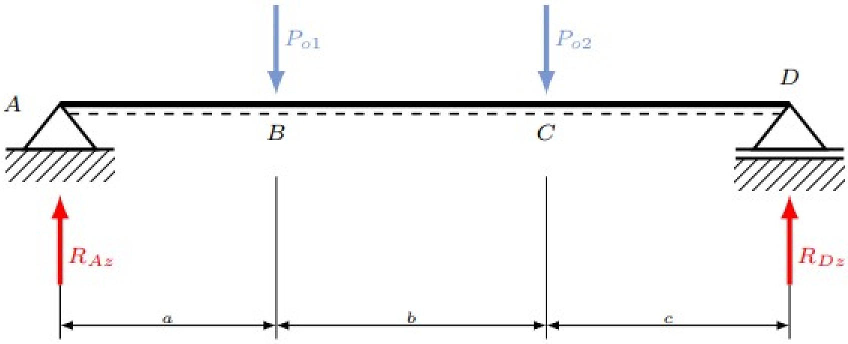
$$M_{gy}(x):=M_{gy1}(x)+M_{gy2}(x)+M_{gy3}(x)$$

Wykres (Rys. 3) został przygotowany dla $x:=0,0.001\cdot(a+b+c)..(a+b+c)$



Rys. 3 Wykres momentu gnącego w płaszczyźnie XY

Analogiczne obliczenia zostały wykonane w płaszczyźnie XZ. Korzystając ze schematu (Rys. 4) zapisano równania równowagi.



Rys. 4 Schemat obliczeniowy belki w płaszczyźnie XZ

$$R_{Az} - P_{o1} - P_{o2} + R_{Dz} = 0$$
$$P_{o1} \cdot a + P_{o2} \cdot (a+b) - R_{Dz} \cdot (a+b+c) = 0$$

Równania można przekształcić do postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -(a+b+c) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_{Az} \\ R_{Dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{o1} + P_{o2} \\ -P_{o1} \cdot a - P_{o2} \cdot (a+b) \end{bmatrix}$$

stąd (po doprowadzeniu macierzy do tych samych jednostek):

$$\begin{bmatrix} R_{Az} \\ R_{Dz} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{-(a+b+c)}{mm} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P_{o1} + P_{o2} \\ \frac{-P_{o1} \cdot a - P_{o2} \cdot (a+b)}{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10199.259 \\ 7120.741 \end{bmatrix} N$$

Reakcje wynoszą odpowiednio $R_{Az} = 10199.26\ N$, $R_{Dz} = 7120.74\ N$. Dane potrzebne do wyznaczenia przebiegu momentu gnącego zostały zebrane w tabeli (Tab. 2).

Tab. 2 Zestawienie danych do wyznaczenia momentu gnącego

Przedział	**Wzór**	**Wartość**
$x = 0$		$0\ Nm$
$x \in (0,a)$	$R_{Az} \cdot x$	
$x = a$		$815{,}94\ Nm$
$x \in (a, a+b)$	$R_{Az} \cdot x - P_{o1} \cdot (x-a)$	
$x = a+b$		$640{,}87\ Nm$
$x \in (a+b, a+b+c)$	$R_{Az} \cdot x - P_{o1} \cdot (x-a) - P_{o2} \cdot (x-a-b)$	
$x = a+b+c$		$0\ Nm$

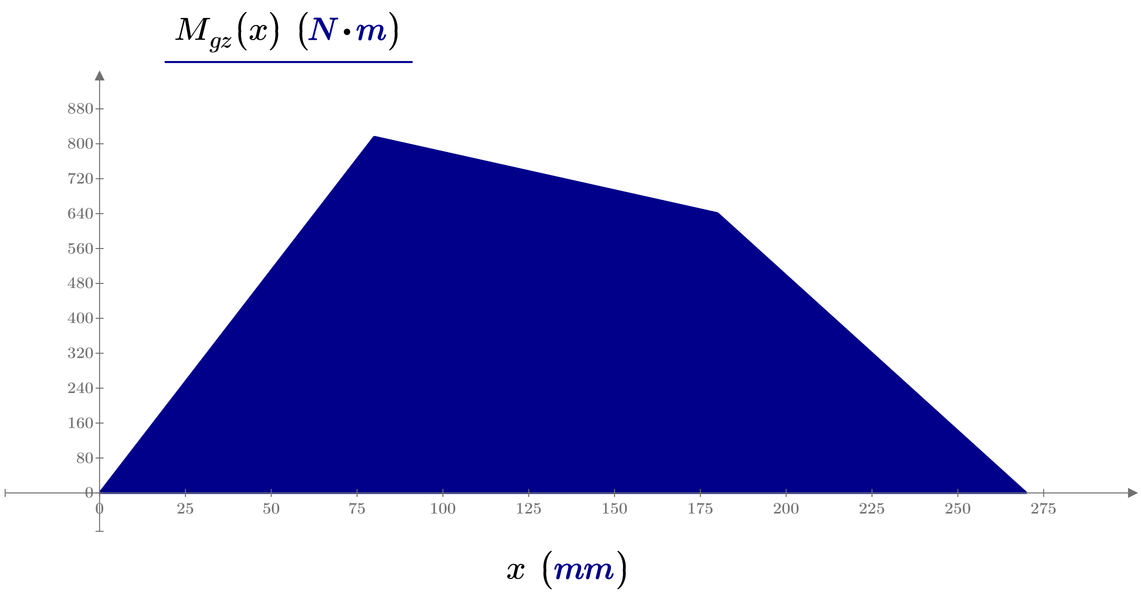
$$M_{gz1}(x) := (R_{Az} \cdot x) \cdot (0 \le x < a)$$

$$M_{gz2}(x) := (R_{Az} \cdot x - P_{o1} \cdot (x-a)) \cdot (a \le x < a+b)$$

$$M_{gz3}(x) := \left(R_{Az} \cdot x - P_{o1} \cdot (x-a) - P_{o2} \cdot (x-a-b)\right) \cdot (a+b \le x < a+b+c)$$

$$M_{gz}(x) := M_{gz1}(x) + M_{gz2}(x) + M_{gz3}(x)$$

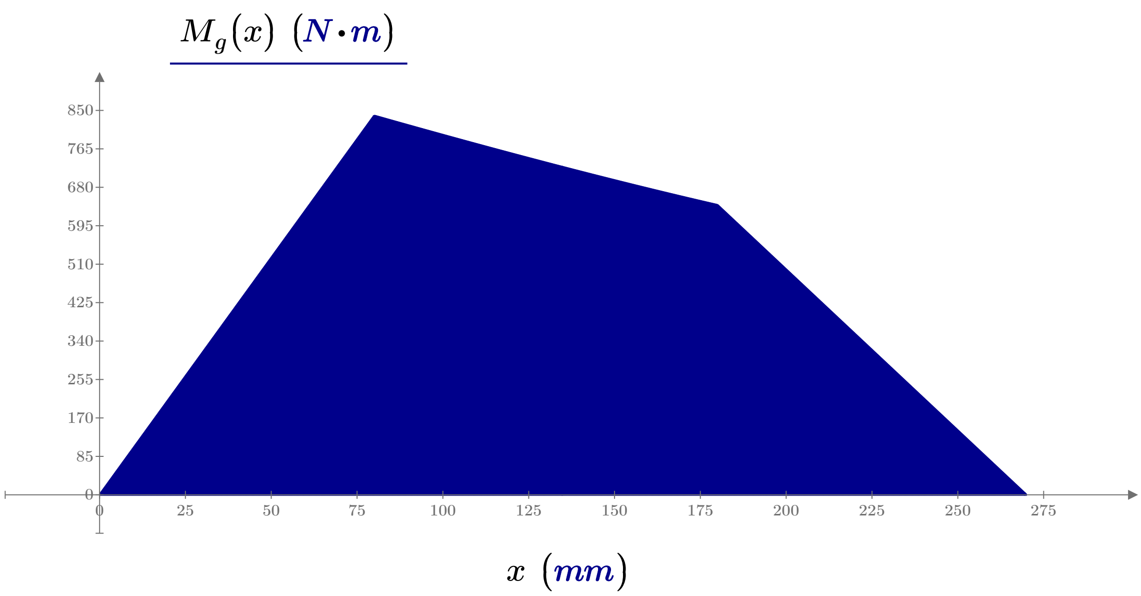
Wykres (Rys. 5) przedstawia przebieg moemntu gnącego w płaszczyźnie XZ.



Rys. 5 Wykres momentu gnącego w płaszczyźnie XZ

Wypadkowy moment gnący wynosi (Rys. 6):

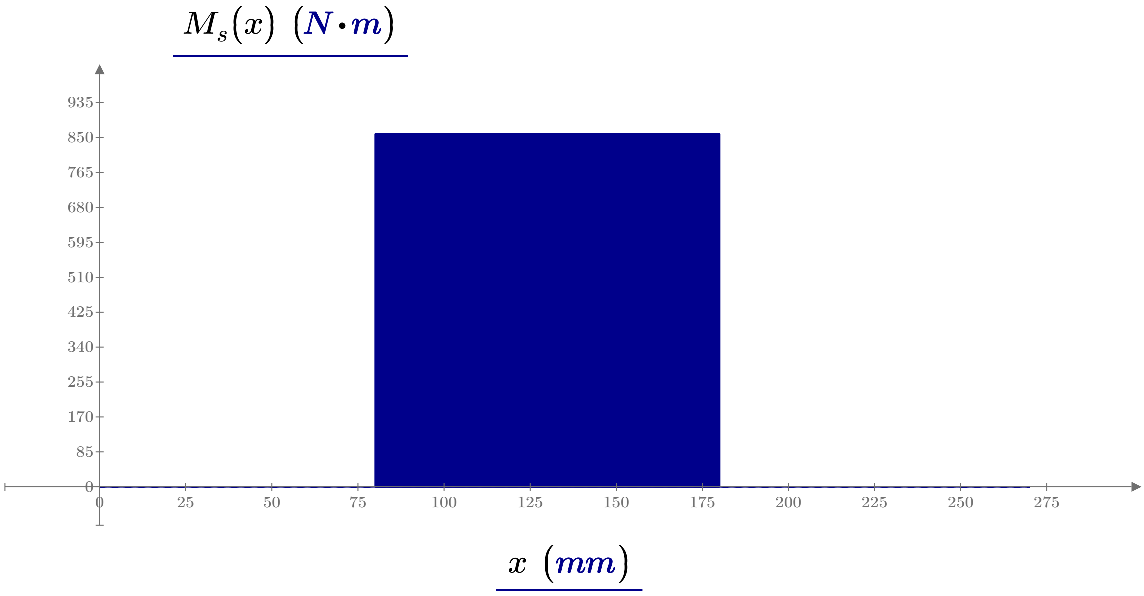
$$M_g(x) := \sqrt{\left(M_{gy}(x)\right)^2 + \left(M_{gz}(x)\right)^2}$$



Rys. 6 Wykres wypadkowego momentu gnącego

Wał jest skręcany stałym momentem skręcającym (Rys. 7) na odcinku BC, który wynosi:

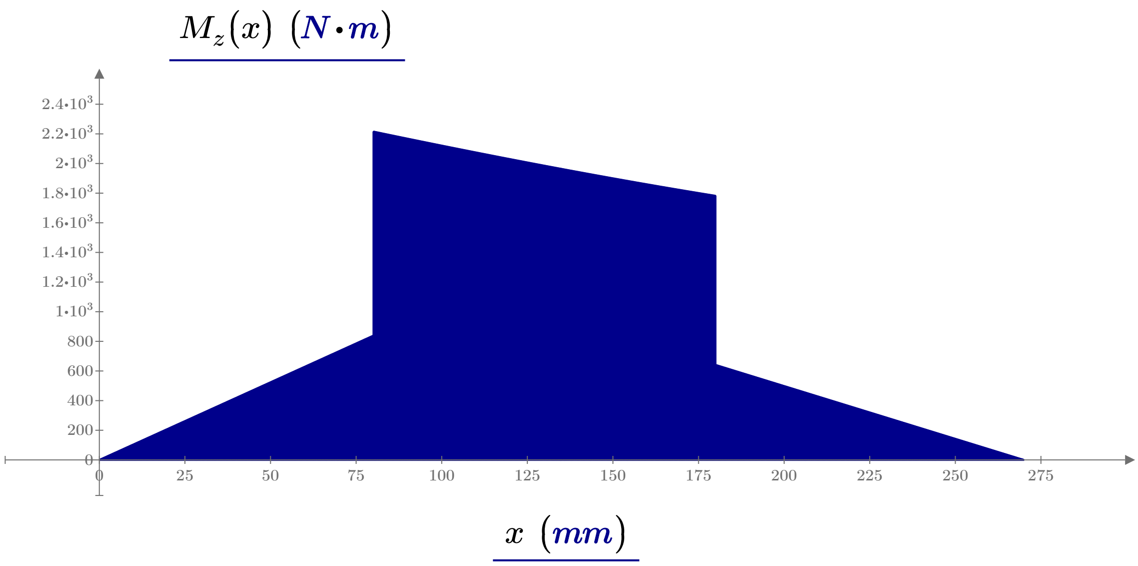
$$M_s(x) := (P_{o2} \cdot r_2) \cdot (a \le x \le a+b)$$



Rys. 7 Wykres momentu skręcającego

Zastępczy moment działający na ten układ może być wyznaczony z następującego warunku, gdyż $M_g < 2\ M_s$ (odcinek BC). Przebieg moemntu pokazano na Rys. 8.

$$M_z(x) := \sqrt{\left(\frac{2 \cdot k_{sj}}{k_{go}} \cdot M_g(x)\right)^2 + (M_s(x))^2} \cdot ((a \le x \le a+b)) + M_g(x) \cdot (0 \le x < a) + M_g(x) \cdot (a+b < x \le a+b+c)$$



Rys. 8 Wykres momentu zastępczego

Średnice wału w miejscach osadzenia kół zębatych wynoszą:

$$d_B := \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_z(a)}{\pi \cdot k_{sj}}} = 49.157\ mm \qquad d_C := \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_z(a+b)}{\pi \cdot k_{sj}}} = 45.713\ mm$$

Ostatecznie przyjęto średnice:

$$D_B := \left(\text{floor}\left(\frac{d_B}{mm}\right) + 1\right) mm = 50\ mm \qquad D_C := \left(\text{floor}\left(\frac{d_C}{mm}\right) + 1\right) mm = 46\ mm$$