確率論基礎 2022 まとめ

安田

概要

確率論基礎がそこそこ難解なため, PDF としてまとめました. スライドを読んで理解しながら書きますので, 間違った表現があったら申し訳ないです. 基本的には, スライドと同じことを書いて, 詳しい説明が欲しいと感じたところには詳しい説明を入れるという方式をとっていますが, 結構主観も入ってます. あと, 多少書きやすいように時系列をいじるかもしれません. そこそこ分量が多いので, 目次や最後のページにある索引を参照すると良いと思います.

目次

1 Introduction

1.1 標本空間

定義 1.1.1 (標本空間)**.** 確率的事象の起こり得る個々の (単一の) 結果のことを**標本**, 標本全体の集合を**標本空間**という.

スライドには載っていなかったが, 定義のない言葉を使いたくないので, 事象についても定義をしておく.

定義 1.1.2 (事象)**.** 標本空間の部分集合のうち, その確率を計算できるものを**事象**という.

曖昧な定義に見えるが, 計算可能な部分集合を決めてからそれを事象と呼ぶため, おそらく問題ないと思われる.

1.2 組合せ確率

組合せ確率は, 高校数学でやるような確率のことである.

定義 1.2.1 (組合せ確率)**.** 有限な標本空間 Ω に対して, 任意の部分集合 A を事象とし, その**組合せ確率** $P(A)$ を

$$P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}$$

と定義する.

このとき, 各標本 $\omega \in \Omega$ に対して, $P(\omega)$ は同じ値を取る. (あらゆる標本の確率は等しい.)

1.3 離散確率

有限な標本空間で, 全ての標本の確率が等しいような状況は具体的すぎて, 流石に全てのケースに対応するのは無理がある. そこで, 可算まで増やし, 確率にもそこそこ自由度を持たせたものを考える.

定義 1.3.1 (離散確率)**.** 高々可算な標本空間 Ω に対して, **確率質量関数** $p : \Omega \to [0, 1]$ を次を満たすように定める.

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

ここで, 任意の Ω の部分集合 A を事象とし, その確率を

$$P(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

と定義する. このとき, この組 (Ω, p) を**離散確率空間**と呼ぶ.

スライドには $p(\omega) \geq 0$ が条件とあるが, $p : \Omega \to [0, 1]$ の定義から既に満たされている.

筆者は理解力が乏しいため, この定義において "A が無限集合だったら計算不可能では" と考えてしまった (当然そんなことはない). 一応, 同じ勘違いをしている方向けに説明を書いておこうと思う. p が具体的に定められていて, Ω は離散的な集合であるから, 極限的な操作が入らない. したがって, p が限りなく小さいような

ω の無限集合の確率というのは考える必要がない. p が限りなく小さくなることはあり得ない. A に順序を持たせれば, 通常の無限級数のように計算できる.

例 1.3.2. コインを表が出るまで表を投げることを考える. 標本空間を Ω とする. ω_i を i 回目に初めて表が出ることを表す標本, また ω_∞ を永遠に表が出ないことを表す標本とする. ここで, $p : \Omega \to [0, 1]$ を $p(\omega_i) = \frac{1}{2^i}, p(\omega_\infty) = 0$ とする。

$$\sum_{p \in \Omega} p(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

より (Ω, p) は離散確率空間である. 例えばこのとき, 偶数回目に初めて表が出る事象 A の確率は

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} p(\omega_{2i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

となる.

例 1.3.3. また, よく出現する確率として, 次のようなものがある.

- 標本空間 $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して, $p_{\mathrm{du}}(i) = \frac{1}{n}$ とすると, $(\Omega, p_{\mathrm{du}})$ は離散確率空間であり, **離散一様分布**と言われる.
- $\alpha \in (0, 1)$ とする. 標本空間 $\Omega = 0, 1, \cdots, n$ に対して, $p_{\mathrm{bin}} = \binom{n}{i} \alpha^i (1 - \alpha)^{n-i}$ とすると, $(\Omega, p_{\mathrm{bin}})$ は離散確率空間であり, **二項分布**と言われる.
- $\alpha \in (0, 1)$ とする. 標本空間 $Omega = \{1, 2, \cdots\}$ に対して, $p_{\mathrm{geo}}(i) = (1 - \alpha)^{i-1} \alpha$ とすると, $(\Omega, p_{\mathrm{geo}})$ は離散確率空間であり, **幾何分布**と言われる.
- $\lambda > 0$ とする. 標本空間 $\Omega = 0, 1, \cdot$ に対して, $p_{\mathrm{poi}}(i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$ とすると, $(\Omega, p_{\mathrm{poi}})$ は離散確率空間であり, **ポアソン分布**と言われる.

なお, $\alpha n = \lambda$ の関係式のもと $n \to \infty$ とすると, 二項分布はポアソン分布へ収束する.

$$p_{\mathrm{bin}}(i) = \binom{n}{i} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-i} = \frac{\lambda^i}{i!} \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-i+1)}{n \cdot n \cdots n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\lambda \cdot \frac{n}{\lambda}} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-i}$$

ここで, $\dfrac{n-k}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 1, \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{\lambda \cdot \frac{n}{\lambda}} \xrightarrow{n \to \infty} e^{-\lambda}, (1 - \dfrac{\lambda}{n})^{-i} \xrightarrow{n \to \infty} 1$ より, 主張が従う.

1.4 離散確率の限界

上のように, 離散確率空間は様々な確率へ対応する. それでもまだ, これでもうまく定義できないような確率というものが存在する. 例えば, $[0, 1]$ からランダムに 1 点を選ぶという操作において, 離散確率空間の定義では, 確率質量関数を自由に定義できない. 非可算無限個の要素に値をふるような確率質量関数を定義した時, 標本の数が大きすぎて総和が無限大となってしまうのである. しかし, なんとなくなイメージしか沸かず, 実際の証明が気になるということが筆者にはあった. 同じような人のためにしっかりとした証明をしておく. ここで, 非可算無限個の値の総和は取れないため, 可算無限個の部分集合を用意するだけで無限大へ行ってしまうことを証明する. このとき, ましてや Ω 全体での総和など取れないということである.

命題 1.4.1. Ω を非可算無限集合とする. $p:\Omega\to[0,1]$ を集合 $\{\omega\in\Omega \mid p(\omega)\neq 0\}$ の濃度が非可算無限なるように定めるとき, ある可算無限部分集合 $A:=\{a_1,a_2,\cdots\}$ で, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}p(a_n)=\infty$ となる.

証明. ある $\epsilon>0$ が存在し, $\{\omega\in\Omega \mid p(\omega)\geq\omega\}$ の濃度が無限であることを示せば, これが命題の A にあたる. そこで, そのような ϵ が存在しないと仮定する. $p(\omega)\neq 0$ となる ω が無限個あるから, ある 0 に収束する無限列 $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が取れて, $A_i:=\{\omega\in\Omega \mid p(\omega)\geq\varepsilon_i\}$ として

$$i>j\Rightarrow|A_i\setminus A_j|>0$$

となる. また, 仮定より $|A_i|<\aleph_0$ だから, $|A_i\setminus A_j|<\aleph_0$ である. このとき $A_0=\emptyset$ として

$$\{\omega\in\Omega \mid p(\omega)\neq 0\}=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i\setminus A_{i-1})$$

であるが, 右辺は有限集合の可算無限和だから可算無限集合となる. しかし, 左辺は非可算無限となり, 矛盾である. したがって, 最初に述べたような ε は存在する.

ただし, 有限集合の可算無限和が可算無限となる証明は「有限集合 可算無限和」で調べると出てくるので, そこで見て欲しい. ■

このように証明できた. 筆者は, この証明をする前に, なぜ可算無限だとうまくいくのかがぼんやりとしか理解ができていなかったが, 上の証明を用いれば簡単にわかる. $\varepsilon>0$ が取れなくても $\{\omega\in\Omega \mid p(\omega)\neq 0\}$ は可算無限までは到達できるということである.

2 可測空間

先ほど述べたように, 離散確率空間には限界がある. そこで, もっと一般的な確率を定義するための準備として, 集合に対して可測集合というものを定義していろいろと考える.

2.1 集合演算

和や積や差または補集合のような一般的な集合論の話は省く. 排反は定義しておく.

定義 2.1.1. 集合 A,B について, $A\cap B=\emptyset$ となるとき A と B は**互いに排反**であるという. また, A の部分集合 $A_1,\cdots,A_n$ がそれぞれ互いに排反で $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A$ となるとき, $A_1,\cdots,A_n$ は A の**分割**であるという.

無限個のド・モルガンの法則の証明だけは, 一応ぱっと見れたら筆者的には嬉しいので載せておく. (スライドにも載っている.)

補題 2.1.2 (ド・モルガンの法則)**.**

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)^c=\bigcap_{i=1}^{\infty}{A_i}^c\ ,\quad\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)^c=\bigcup_{i=1}^{\infty}{A_i}^c$$

証明.

$$\begin{aligned}\omega \in \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c &\iff \omega \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \iff \forall i \geq 1, \omega \notin A_i \\ &\iff \forall i \geq 1, \omega \in {A_i}^c \iff \omega \in \bigcap_{i=1}^{\infty} {A_i}^c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega \in \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c &\iff \omega \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \iff \exists i \geq 1, \omega \notin A_i \\ &\iff \exists i \geq 1, \omega \in {A_i}^c \iff \omega \in \bigcup_{i=1}^{\infty} {A_i}^c\end{aligned}$$

■

2.2 σ-集合体と可測空間

ここからが測度論の本題である.

定義 2.2.1 (可測空間)**.** 集合 Ω の部分集合族 $\mathcal{F}$ が Ω 上の σ-集合体であるとは, 次のことを満たすことをいう.

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$

(2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

(3) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

このとき, 組 $(\Omega, \mathcal{F})$ を**可測空間**という. また, $\mathcal{F}$ の元を**可測集合**ともいう.

σ-集合体の例として, 次のようなものがある.

例 2.2.2.

- $\mathcal{F}_0 = \{0, \Omega\}$
- $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$
- $\emptyset \neq A \subsetneq \Omega$ に対して, $\mathcal{F}_A = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$

ある集合族を含むような σ-集合体を考えたい. このとき, 次のような便利な命題がある.

定理 2.2.3. Ω を集合とする. $\mathcal{V}$ を Ω の部分集合族とすると, $\mathcal{V} \subset \mathcal{F}$ を満たし, 順序関係 $\subset$ について最小の σ-集合体となる $\mathcal{F}$ が存在する.

証明. $\mathcal{M}$ を, $\mathcal{V}$ を含む σ-集合体全体の集合とする. このとき, 2^{Ω} は $\mathcal{V}$ を含む σ-集合体であるから, $\mathcal{M} \neq \emptyset$ である. ここで, $\mathcal{F}$ を $\mathcal{M}$ の元全ての積集合 (共通部分) とすると, $\mathcal{V}$ を包含する任意の σ -集合体に含まれている. したがって, これが σ-集合体となることを示せばよい.

任意の $\mathcal{M}$ の元は Ω を元に持つから, $\Omega \in \mathcal{F}$ である. 同様の考え方で $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}, \quad A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ も示せる. ■

これにより, ある集合族から, それを包含する最小の σ-集合体へ写す写像を定義できる.

定義 2.2.4. $\mathcal{V}$ を Ω の部分集合族とする．このとき, $\mathcal{V}$ を含む最小の σ-集合体を $\sigma(\mathcal{V})$ で表す．これを $\mathcal{V}$ から生成される σ-集合体ともいう．

また, σ-集合体の定義は最小限の条件のみで書かれているが, 実際はもっと色々な演算について閉じていることがわかる．

命題 2.2.5. (1) $\phi \in \mathcal{F}$

(2) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{F}$

(3) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

証明. (1) は $\Omega^c = \emptyset$ により従う．(2) は A_3 以降を $\emptyset$ とした A_i の可算無限和を考えれば $A \cup B$, またここから $(A^c \cup B^c)^c$ を考えれば $A \cap B$, $A \setminus B = A \cap B^c$ を考えれば $A \setminus B$ の証明ができる．(3) についても, 可算無限和のド・モルガンの法則を用いて $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i{}^c\right)^c$ を考えれば良い． ■

また, σ-集合体同士の積集合についても次の命題がある．スライドでは 2 つの積集合についての命題であったが, もっと一般的に成立する

命題 2.2.6. $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ を Ω 上の σ-集合体の族とすると, その共通部分も Ω 上の σ-集合体である．

この証明は, 2.2.3 の証明の後半部分であるから省く．また, σ-集合体の和集合は必ずしも σ-集合体とはならないので, 注意が必要である．

次に確率に組み込むためのちょっとした定義を書いておく．スライドでは, 可測空間と事象を同時に定義していたが, ここでは離して定義しておく．

定義 2.2.7. $(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とする．Ω を確率空間と見るとき, 事象全体の集合を $\mathcal{F}$ で定める．

2.3 ボレル集合体

ボレル集合体とは, σ-集合族の一種である．全ての開集合の族を包含する最小の σ-集合族と定義される．確率論基礎では, 実数の場合のみ扱うようである．

定義 2.3.1 (実数のボレル集合体)**.** 実数上の**ボレル集合体** $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ とは, 全ての半開区間を含む最小の σ-集合体である．$\mathbb{R}^n$ 上では, 開集合を含むようなものと定める．また, ボレル集合体の元をボレル集合ともいう．

なぜ半開区間で定義したのかよくわからない．それはともかく, ボレル集合体は, 直感的に思いつくような $\mathbb{R}$ の部分集合は基本的にボレル集合となる．

命題 2.3.2.

(1) $\{a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

(2) $[a, b], (a, b), [a, b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

(3) $(a, \infty), [a, \infty), (-\infty, a], (-\infty, a) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

証明. (1)$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, a]$ より従う．(2) は (1) を用いて境界点を足したり引いたりすることで示せる．(3)

は $(a,\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a,a+n]$ より (a,∞) について示され, あとは (2) と同様に示せる. ■

2.4 事象列の極限

まずは単調列の極限についてである.

定義 2.4.1. $(\Omega,\mathcal{F})$ を可測空間, (A_n) をその事象列とする.

(1) $A_1\subset A_2\subset\cdots$ のとき, これを**単調増加列**と言い, A_n の極限を次のように定義する.

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$$

(2) $A_1\supset A_2\supset\cdots$ のとき, これを**単調減少列**と言い, A_n の極限を次のように定義する.

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$$

これらは, それぞれ単調増加列 A_n, 単調減少列 B_n に対して

$$A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i\ ,\quad B_n=\bigcap_{i=1}^{n}B_i$$

となっていることから, 自然な定義だと分かる. ここで, 一般の事象の列にも極限を定義したい. その準備として上極限と下極限を定義する. まず, 事象列 A_n に対して

$$B_n=\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i, C_n=\bigcap_{i=n}^{\infty}A_i$$

とすれば B_n,C_n はそれぞれ単調減少列, 単調増加列となることがすぐにわかる. これを用いる.

定義 2.4.2. $(\Omega,\mathcal{F})$ を可測空間, (A_i) をその事象列とする. このとき

$$\limsup_{n\to\infty}A_n:=\lim_{n\to\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i$$

を $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の**上極限**,

$$\liminf_{n\to\infty}A_n:=\lim_{n\to\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty}A_i=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i$$

を $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の**下極限**という.

n が十分大きい時, 上極限はどれだけ n が大きくなっても A_n は最大そこまで大きくなるという集合になるイメージで, 下極限は n が大きくなっても A_n は少なくともそれだけは包含するような最大の集合になるイメージである. また, これらの上極限, 下極限は次のように言い換えることができる.

命題 2.4.3. $(\Omega,\mathcal{F})$ を可測空間, (A_i) をその事象列とする. このとき次のことが成り立つ.

(1) $\omega\in\limsup_{n\to\infty}A_n\iff\omega\in A_i$ となる i が無限個

(2) $\omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n \iff \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \omega \in A_n$

証明.

(1)

$$\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n \iff \omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_n \iff \forall n \geq 1, \omega \in \bigcup_{i=n}^{\infty} A_n$$

となる. 無限個の n で成立すれば当然上の命題が成立する. また, 有限個の n でこれが成立すると仮定すると, 明らかにその最大の n を N として $n = N + 1$ とすれば矛盾する. したがって, 示された.

(2)

$$\omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n \iff \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_n \iff \exists N \in \mathbb{N}, \omega \in \bigcap_{i=n}^{\infty} \iff \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \omega \in$$

■

ここから, 明らかに上極限が下極限を包含していることがわかる. また, 次のように補集合についての等式が存在する.

命題 2.4.4. $(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間, (A_i) をその事象列とする. このとき次のことが成り立つ.

(1) $\limsup_{n\to\infty} {A_n}^c = \left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right)^c$

(2) $\liminf_{n\to\infty} {A_n}^c = \left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)^c$

証明. (1) のみ証明すれば, (2) は A_n を ${A_n}^c$ に置き換えて, 全体の補集合を取ればよい. (1) はド・モルガンの法則から

$$\left(\liminf_{n\to\infty}\right)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=n}^{\infty}\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} {A_n}^c = \limsup_{n\to\infty} {A_n}^c$$

より従う. ■

上極限と下極限を用いて, ようやく事象列の極限というのが次のように定義される.

定義 2.4.5. $(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間, (A_i) をその事象列とする.

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$$

のとき**極限が存在する**といい, A_n の極限を

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$$

で定める.

3 確率空間

3.1 離散確率空間から一般的な確率空間へ

一般的な確率空間を定義するにあたって, 離散確率空間と似た性質を持つように定義したい. まずは離散確率空間の次の性質を振り返る.

補題 3.1.1. (Ω, p) を離散確率空間, P をその離散確率関数とする．このとき次が成り立つ．

(1) $\forall A \in 2^{\Omega}, P(A) \geq 0$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) (A_i) を 2^{Ω} の元の列とする．各 i, j で A_i, A_j が排反のとき

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

である．

証明. (1), (2) はほぼ定義そのものである．(3) については,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{\omega \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} p(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\omega \in A_i} p(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

より従う． ■

これらの性質を参考に一般的な確率空間を定義する．

定義 3.1.2 (確率空間)**.** $(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とする．ここで, 写像 $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ は次の条件を満たす時, P を**確率測度**という．

(1) $P(\Omega) = 1$

(2) (A_i) を $\mathcal{F}$ 上の列とする．各 i, j で A_i, A_j を排反のとき,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

である．これを σ**-加法性**という．

事象の集合は前も述べた通り $\mathcal{F}$ である．このとき, 組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間という．

授業では $\forall A \in \mathcal{F}, P(A) \geq 0$ を定義に入れていたが, P の値域からすでに条件は満たされている．また, 離散確率空間は明らかにこの定義を満たしているから, 当然確率空間となる．

3.2 確率の性質

まずは, 離散確率空間と同様に次の性質が成り立つ．

命題 3.2.1. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, A, B をその事象とする．このとき次が成立する．

(1) $P(\phi) = 0$

(2) A, B が排反ならば $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ である．これを**加法性**という．

(3) $P(A^c) = 1 - P(A)$

証明は離散確率空間と同じように証明できるため省く．また, 次のような性質も成り立つ．

命題 3.2.2. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, A, B をその事象とする．このとき次が成立する．

(1) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ これを**単調性**という.

(2) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ これを**劣加法性**という.

(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ これを**加法法則**という.

証明. (1) 加法性を用いれば, $P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$ である.

(2) (3) から従う.

(3) 加法性を用いる. $P(A \cup B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A)$ であり, $P(B) = P((B \cap A) \cup (B \setminus A)) = P(B \cap A) + P(B \setminus A)$ であるから, これらを比較すればよい.

■

加法法則, 劣加法性をたくさん使うと, 次のような性質も導ける.

定理 3.2.3. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, $A_1, \cdots, A_n$ をその事象とする. このとき次のことが成立する.

(1) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ これも劣加法性という.

(2) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)$ これを**包除原理**という.

証明.

(1) $n = 1$ では当然成立する. ある n で成立したとすると, 劣加法性より $n + 1$ でも成立する. したがって, 任意の n で成立する.

(2) $n = 1$ では当然成立する. ある n で成立したとする. このとき

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} (A_{i_j} \cap A_{n+1})\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k < n+1} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k = n+1} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} (A_{i_j} \cap A_{n+1})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n+1} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)
\end{aligned}
$$

より $n + 1$ でも成立する. したがって, 任意の n で成立する.

■

包除原理の使用例は次のようなものである.

例 3.2.4. 組合せ確率で考える. n 人が 1 人ずつプレゼントを持ち寄り, 一旦回収しまた 1 人 1 つずつプレゼントを受けとるとする. このとき, 少なくとも 1 人は自分のプレゼントを手にする確率は次のように計算できる. n 個から k 個選ぶ組合せは $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ であり, k 人が自分のプレゼントを受け取る確率は $\frac{(n-k)!}{n!}$ である. A_i を i 人目が自分のプレゼントを受け取る事象とすれば, 少なくとも 1 人は自分のプレゼントを手にする確率は,

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}
\end{aligned}
$$

となる.

3.3 確率の連続性

確率にも, 実数の連続性のような性質がある. すなわち, 確率は極限の入れ替えが可能である. この命題を示すためにはまずは単調列の場合から証明する必要がある.

補題 3.3.1 (確率の連続性 (単調列)). $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする. 単調な事象列 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ について

$$
\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)
$$

である.

証明. (A_n) が単調増加列の場合, $B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ $(n \geq 2)$ とおけば, これは $\lim_{n\to\infty} A_n$ の分割であり, 各 B_n は排反だから

$$
\begin{aligned}
P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P(B_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right)
\end{aligned}
$$

である. (A_n) が単調減少列の場合, $({A_n}^c)$ は単調増加列だから,

$$
\begin{aligned}
P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} {A_n}^c\right)^c\right) \\
&= 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} {A_n}^c\right) = 1 - P\left(\lim_{n\to\infty} {A_n}^c\right) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} P\left({A_n}^c\right) = 1 - \lim_{n\to\infty}(1 - P(A_n)) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)
\end{aligned}
$$

である. ■

すでに有用な命題であるが, さらにこれを用いて, 極限を持つすべての事象列について連続性が成立することが示される.

定理 3.3.2 (確率の連続性)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする．事象列 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ が極限を持つとき

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$$

である．

証明.

$$\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \subset A_n \subset \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$$

より,

$$P\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right) \leq P(A_n) \leq P\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_n\right)$$

である．ここで, 補題 3.3.1 と事象列の極限の存在より,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right) &= P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right) = P\left(\liminf_{n\to\infty} A_i\right) = P\left(\limsup_{n\to\infty} A_i\right) \\ &= P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right)\end{aligned}$$

だから, はさみうちの原理と事象列の極限の定義から

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$$

である． ■

次のような場合に使用することができる．

例 3.3.3. 表と裏の確率の等しいコインを投げ続ける試行について, 事象 A_n を 1 回目から n 回目まで常に表が出る事象とする．このとき $P(A_n) = \frac{1}{2^n}$ であり, $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ は任意の N について N 回目まで裏が一度も出ない, すなわち永久に表のみが出る事象である．確率の連続性を用いれば, この事象の確率は

$$P(A) = P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$$

である．

また, 確率の連続性を用いれば劣加法性を無限和の場合まで拡張できる．

定理 3.3.4 (劣加法性)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする．事象列 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ に対して

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

である．

証明. 定理 3.2.3 と補題 3.3.2 より,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

である． ■

劣加法性は次のような補題に応用できる．こちらも事象列の極限に関する命題である．

補題 3.3.5 (ボレル・カンテリの第 1 補題)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする． 事象列 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ が $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ を満たすならば, $P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$ が成立する．

証明. 定理 3.3.2 と定理 3.2.3 から

$$
\begin{aligned}
P\left(\limsup_{nt\to\infty} A_n\right) &= P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) = 0
\end{aligned}
$$

より従う． ■

3.4 条件付き確率

索引