3.7 考虑从飞机看两点之间的最短路径问题，如图 3.31 所示，图中有很多凸多边形障碍。这是复杂环境中机器人要解决的导航问题的理想化。

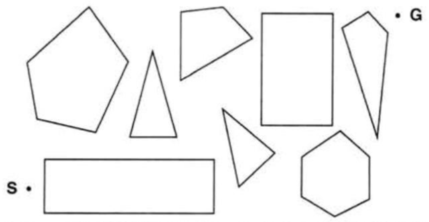

图 3.31 有多边形障碍的场景。S 和 G 为开始和终止状态

a. 假设状态空间包含所有坐标(x, y)。状态空间有多大？有多少条路可以到达目标？

b. 简要回答为什么从一个多边形顶点到图中任何地方的最短路径一定会包含直线区段和多边形顶点。定义一个好的状态空间。分析状态空间的大小。

c. 定义实现该搜索问题所需要的函数，其中函数 ACTIONS 以一顶点为其输入，返回以该顶点为起点直线到达另一顶点的矢量集合（不要忘记同一多边形的邻居）。使用直线距离作为启发式函数。

d. 应用本章讨论的一个或多个算法求解此问题，并给出性能评价。

答：

a. 状态空间无限大，有无穷多条路可以到达目标。

b. 两点间的最近距离是直线，如果不能走直线的话，最近的距离应该是偏离直线的最近多线段长度之和，对于有障碍物的路线，应该考虑它对于直线垂直的最远位置即切点作为线段端点。在本题中，从 S 出发，最短路线的第一条线段应该是从 S 到第一个障碍物的切点，由于障碍物是多边形，切点只能在顶点上，因此路径只能是顶点的连线。

问题 a 中定义状态空间包含图中所有的坐标，在这里可以定义状态空间为开始和终止状态与图中障碍的顶点坐标，图中有 33 个顶点和初始结束两个点，因此状态空间大小为 35。

c. 初始状态：In(S)，顶点 S 处。

行动 ACTIONS(S)：给定一个顶点，返回以该顶点为起点直线到达另一顶点的矢量集合，包括同一多边形的邻居。

转移模型 RESULT(S,a)：返回在状态 S 下执行行动 a 后达到的状态。

目标测试：状态集{In(G)}。

路径耗散 COST(S,a,S’)：在状态 S 下执行行动 a 后到达状态 S’所消耗的代价，在这里可以定义为矢量长度。

启发式函数 h(S)：在这里使用当前顶点对于目标 G 的直线距离作为启发式函数。

d. 对于启发式搜索，我们可以使用算法贪婪最佳优先搜索和 A*搜索。

贪婪最佳优先搜索：

评价函数 f(n)=h(n)，评价函数即为对于目标 G 的直线距离。

首先我们需要一个到达终点 G 的直线距离表格作为启发函数。从起点 S 出发，每一轮扩展距离 G 最近的顶点。对于该算法，他不是最优的，也不是完备的。最坏情况下的时间复杂度和空间复杂度都是 O(b^m)，m 是搜索空间的最大深度。

A*搜索：

评价函数 f(n)=g(n)+h(n)，评价函数为对于目标 G 的直线距离与走过的线段距离之和。

同样我们需要一个到达终点 G 的直线距离表格作为启发函数，同时需要记录当前走过的距离。从起点 S 出发，每一轮扩展二者和最小的顶点。对于该算法，由于我们的 h(n)是一致且可采纳的（用直线距离作为度量，全为正数），该算法既是最优的也是完备的，且也是效率最优的。时间复杂度和空间复杂度都是 O(b^d)。

3.27 n 辆车放置在 $n\times n$ 网格的方格(1, 1)至方格(n, 1)中。这些车要以相反序移至另一端；从(i, 1)开始的第 i 辆车，目标位置是(n−i+1, n)。每一轮，每辆车可以选择上、下、左、右各移动一格或静止不动；如果某辆车选择静止不动，跟它邻近的车（最多只能有一辆）可以跳过它。两辆车不能在同一格中。

a. 计算状态空间的大小，记为 n 的函数。

b. 计算分支因子的大小，记为 n 的函数。

c. 假设小车 i 坐标为(x_i, y_i)，并且网格中没有其他车辆，它的目标为(n−i+1, n)，请给出可采纳的启发式。

d. 对于整个问题而言，下列启发式函数哪个是可采纳的？请解释。

（i） $\sum_{i=1}^{n} h_i$

（ii） $\max(h_1,\cdots,h_n)$

（iii） $\min(h_1,\cdots,h_n)$

答：

a. 状态空间大小为：n^{2n}。

空间大小为n^2，摆放第一个时有n^2种可能性，第二个时有n^2-1 种可能性，所以对于 n*n 棋盘放置 n 辆车的情况，计算公式为：n^2*(n^2-1)*(n^2-2)*⋯*(n^2-n+1)。若不考虑两辆车可在同一格中的条件，可将公式简化为：n^{2n}。

b. 5^n。

对每一轮，每一辆车有 5 种可能的动作，向左、右、上、下、停止不动，而每轮中移动 n 辆车，所以分支因子大小约为5^n。（类似：教材 3.6 八数码问题）

一个随机产生的八数码问题的平均解步数是 22 步。分支因子约为 3（当空格在棋盘正中间的时候，有四种可能的移动；而当它在四个角上的时候只有两种可能；当在四条边上的时候有三种可能）。这意味着到达深度为 22 的穷举搜索树将考虑大约 $3^{22}\approx 3.1\times 10^{10}$ 个状态。图搜索可以

c. 曼哈顿距离。h_i = |(n-i+1-x)|+|(n-y)|。

d. 只有iii是可采纳的。

首先要说明一件事，问题 c 中的可采纳启发式是对于单个车来说的，而该问中是对于每一轮（n 辆车）来说的，我们期待的结果都是**移动的轮数**。

设完成该问题时所有车需要移动的总距离为 S（即所有车从当前状态到最终状态需要移动的总格数）。可以知道，S⩾$\sum_{i=1}^{n} h_i$⩾n*min(h_1,⋯,h_n)。由于每辆车只能移动一格，或停止不动让其他车移动两格，所以在每一轮中，一共最多只能移动 n 格。因此我们的最少轮数为: n*min(h_1,⋯,h_n)/n=min(h_1,⋯,h_n)。答案iii可采纳。

答案 i 计算的是所有小车的启发式函数和，没有平均到每一轮内，不满足条件（如果除以 n 则满足条件）；答案ii计算的是最大值，没有考虑到更近的情况，有可能会高估代价，同样不满足条件。