Facultad
de
Ciencias

Geometría de los grupos de Lie

Geometry of Lie groups

Trabajo de Fin de Grado
Para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Guillermo Ruiz Laborda
Directora: Nuria Corral Pérez

Junio - 2020

A mi abuela Isabel,
sé que estarías orgullosa.

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer el apoyo y la atención a la tutora de este trabajo, Nuria Corral. A lo largo de la carrera he aprendido de ti a razonar y trabajar con rigor en matemáticas, pero sobre todo, a disfrutarlas. Además, durante este último año me has aconsejado y ayudado no solo de cara a este trabajo, sino también a orientar mi futuro en un año que es bastante complicado. Por todo ello, este trabajo es también tuyo.

A nivel personal, son demasiadas las personas que han pasado por mi vida estos últimos cinco años y que han hecho de este período algo especial. Por supuesto, agradezco a mi grupo de amigos previo a mi etapa universitaria el haber estado siempre ahí y poder pasar tan buenos momentos con ellos. En particular, a Celia, por haberme enseñado tanto.
Mis compañeros de Facultad han sido también muy importantes, me han enseñado tanto el valor del esfuerzo y el trabajo como la necesidad de disfrutar de estos años y afrontar la vida con más optimismo. De aquí, junto con muchos otros los cuales sé que se darán por aludidos, quería nombrar a Nacho y a Íñigo, sin los cuales mi paso por esta Facultad no habría tenido mucho sentido. Y a Toraya, que quizás le da un buen uso a este trabajo.

Fuera de Santander, tanto en Berlín como en Suiza, he conocido a gente muy especial. Me habéis enseñado a ser más independiente y a atreverme a cosas que antes ni imaginaba. De vosotros me queda el recuerdo de dos experiencias inolvidables.

Y, por supuesto, quedaba agradecer todo esto a mi familia, siempre apoyándome y animándome tanto en el plano académico como en el personal. Gracias a mis padres, Antonio y Carmen, por hacer de mi la persona que soy hoy en día.

Resumen

La teoría de grupos de Lie juega un papel importante en muchas áreas de las matemáticas. Un grupo de Lie es un grupo que además tiene estructura de variedad diferenciable y verifica que las operaciones de grupo son diferenciables. En este trabajo hemos estudiado las herramientas de geometría diferencial, topología y álgebra necesarias para realizar un estudio de los grupos de Lie, describiendo sus propiedades, aplicaciones al estudio de variedades diferenciables y estudiando ejemplos con detalle.

Un objeto importante en el estudio de grupos de Lie es su álgebra de Lie: a cada grupo de Lie se le puede asociar un espacio vectorial de dimensión finita, formado por los campos de vectores invariantes por la izquierda, que se conoce como álgebra de Lie del grupo de Lie. Un resultado fundamental en esta teoría es que muchas propiedades de los grupos de Lie están completamente determinadas por las propiedades de su correspondiente álgebra de Lie.

Se han estudiado las acciones de grupos de Lie sobre variedades diferenciables, y en particular aquellas que son transitivas que dan lugar a lo que se conocen como variedades homogéneas. Además, se definirá la aplicación exponencial de un grupo de Lie que nos permitirá establecer una correspondencia entre el álgebra de Lie y el grupo de Lie.

Palabras clave: Variedad diferenciable, grupo de Lie, álgebra de Lie, acciones de grupo de Lie, aplicación exponencial.

Abstract

The theory of Lie groups plays an important role in several areas of mathematics. A Lie group is a group endowed with a structure of differentiable manifold, verifying that the group operations are smooth maps. In this work, we have dealt with concepts from differential geometry, topology and algebra necessary to undertake a study of Lie groups, describe their properties, applications to differentiable manifolds and thoroughly present some examples.

A relevant element arisen from the study of a Lie group is its Lie algebra: to each Lie group there is an associated, finite dimensional vector space, containing all the so-called left-invariant fields, and commonly known as Lie algebra of the Lie group. A fundamental result of this theory is that several properties of Lie groups are completely determined by those of their corresponding Lie algebra.

We have also studied actions of Lie groups on differentiable manifolds, particularizing the case of those which are transitive and give rise to the so-called homogeneous manifolds. In addition, we have introduced the concept of exponential map of a Lie group, prior to establish a correspondence between the Lie group and its corresponding Lie algebra.

Key words: Differentiable manifold, Lie group, Lie algebra, actions of a Lie group, exponential map.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El estudio de los grupos de Lie y álgebras de Lie es uno de los campos más interesantes de las Matemáticas y de otras ramas científicas. Por ejemplo, en muchas disciplinas de la Física Moderna, desde el Modelo Estándar de Física de Partículas hasta la Mecánica Cuántica, las simetrías juegan un papel esencial.

Su origen se remonta al siglo XIX, de la mano del matemático noruego Sophus Lie. Inspirado por la idea de Évariste Galois de utilizar la teoría de grupos para la resolución de ecuaciones polinómicas, Lie estaba interesado en el uso de simetrías, expresadas en forma de acciones de grupo, para la resolución de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, aquí las simetrías no forman un conjunto finito (como por ejemplo las rotaciones de un polígono en el plano), sino que forman parte de un espacio continuo de transformaciones, denominadas transformaciones infinitesimales. El punto clave es que ciertos espacios de soluciones de ecuaciones diferenciales son estables bajo dichas transformaciones.

A modo de ejemplo, consideremos un cuerpo masivo en el origen $(0,0)$ de $\mathbb{R}^2$. De esta forma, y según las leyes clásicas de gravitación, una partícula con posición $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ se verá atraída por el cuerpo central con una intensidad creciente según disminuye la distancia que los separa. En concreto, dicha atracción viene dada por siguiente el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \tag{1.1}$$

Consideramos ahora la acción de la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1$ sobre $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Un sencillo cálculo nos lleva a que si $(x(t), y(t))$ es una solución de (1.1), también lo es el vector transformado por la acción anterior, para cualquier $\varphi \in [0, 2\pi)$. La complicación de considerar este tipo de simetrías es que el grupo $\mathbb{S}^1$ $(\varphi_1 \cdot \varphi_2 = (\varphi_1 + \varphi_2) \bmod 2\pi)$, que como veremos es un grupo de Lie, no está finitamente generado. Sin embargo, la teoría de grupos y álgebras de Lie nos permite estudiar estas transformaciones infinitesimales por medio de la noción de álgebra de Lie de un grupo de Lie, que es un espacio vectorial finitamente generado. En el caso aquí expuesto, y bajo este formalismo, se podría ver a $\mathbb{S}^1$ como generado por un único elemento, el generador de su álgebra de Lie. De esta forma, podemos reducir la dificultad del problema a resolver una cuestión de álgebra lineal.

Comenzaremos el trabajo con una breve introducción de los conceptos de geometría diferencial necesarios para su comprensión, y que nos servirá para fijar la notación que utilizaremos a lo largo de la memoria. Estaremos reiteradamente pasando de una variedad a su espacio tangente, así como trabajando con campos vectoriales y aplicaciones tangentes.

En el tercer capítulo introduciremos los conceptos básicos de la teoría de grupos y álgebras de Lie. Un grupo de Lie G es un grupo con estructura de variedad diferenciable de forma que las operaciones de grupo son diferenciables. Fijado un elemento del grupo $g \in G$, podemos definir un difeomorfismo de G en G, denominado traslación a la izquierda, dado por $L_g(h) = g \cdot h$ para $h \in G$. Se define el álgebra de Lie $Lie(G)$ de G como el subespacio vectorial formado por todos los campos de vectores sobre G invariantes por la traslación a la izquierda, y que a su vez verifica ser un álgebra. Además, probaremos que $Lie(G)$ se puede identificar con el espacio tangente T_eG a G en el elemento neutro, y por lo tanto es un espacio vectorial de dimensión finita. La última parte de este capítulo estará dedicada a dar condiciones que permitan asegurar que un subgrupo algebraico H de G también es subgrupo de Lie y a ver, en ese caso, la relación entre $Lie(H)$ y $Lie(G)$.

Los capítulos cuarto y quinto recogerán un compendio de aplicaciones de la teoría de grupos y álgebras de Lie, en particular lo referido a espacios homogéneos, representaciones y la aplicación exponencial.
Más en concreto, en el capítulo cuatro estudiaremos las acciones de grupos de Lie sobre variedades diferenciables, lo que nos permitirá considerar los espacios homogéneos: las variedades diferenciables provistas de una acción transitiva. En particular, probaremos un teorema de caracterización de espacios homogéneos, que afirma que todo espacio homogéneo (por la acción de un grupo de Lie G) es difeomorfo al cociente $G/Stab_G(p)$ para cualquier punto p de la variedad, donde $Stab_G(p)$ es el estabilizador el punto p por la acción del grupo G.

Por último, el capítulo cinco gira en torno al concepto de aplicación exponencial. Esta aplicación está definida entre el álgebra de Lie $Lie(G)$ y el grupo G de forma que a cada campo de vectores X le asocia $\gamma(1)$ donde γ es la curva integral del campo X que empieza en el elemento neutro de G. Una propiedad importante de la aplicación exponencial es que es un difeomorfismo de un entorno de $0 \in Lie(G)$ en un entorno de $e \in G$. Además, nos permitirá enunciar y demostrar teoremas de clasificación y correspondencias entre subgrupos de Lie y subálgebras de Lie. De forma cualitativa, la aplicación exponencial es la herramienta que nos permitirá pasar de un grupo de Lie a su álgebra e Lie asociada.

Además, a lo largo de todo el trabajo se han incluido ejemplos, estudiando muchos de los grupos clásicos como el grupo general lineal, el grupo especial lineal, el grupo ortogonal, el grupo unitario, etc.

Capítulo 2

Preliminares

En este primer capítulo se introducirán las nociones básicas de geometría diferencial necesarias para el trabajo. Se han tomado como referencia el libro de Lee [6] y el de Brickell and Clark [1]. En general, salvo casos particulares, se omitirán las demostraciones.

Índice

2.1. Variedades diferenciables

Definición 2.1. *Sea $\mathcal{M}$ un conjunto*

*i) Una aplicación $x : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ se llama **carta** si es inyectiva y su imagen $x(\mathcal{U})$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Llamaremos a $\mathcal{U}$ **dominio** de la carta x y a la n-upla*

$$x(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$$

***coordenadas** de $p \in \mathcal{U}$ respecto de la carta dada. El par $(x, \mathcal{U})$ se denominará **entorno coordenado de** p.*

*ii) Se llama **atlas** sobre $\mathcal{M}$ a una colección $\mathcal{A}$ de cartas cuyos dominios recubran todo el conjunto $\mathcal{M}$.*

*iii) Un atlas $\mathcal{A}$ se dice **diferenciable** (o $\mathcal{C}^\infty$) si los cambios de cartas son $\mathcal{C}^\infty$. Esto es, dadas dos cartas $x, y \in \mathcal{A}$ cualesquiera, cuyos dominios $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ verifican $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$, se tiene que $x(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ e $y(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$ y la composición*

$$y \circ x^{-1} : x(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \to y(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

*es un difeomorfismo $\mathcal{C}^\infty$. La función $y \circ x^{-1}$ se denomina **cambio de coordenadas**.*

*iv) Se dice que $\mathcal{A}$ es un **atlas maximal** si no puede incluirse en ningún otro.*

Proposición 2.2. *Todo atlas $\mathcal{C}^\infty$ está contenido en un atlas maximal*

Demostración. Una prueba detallada se puede ver en [9, p.191] □

A partir de esto podemos dar la definición de variedad diferenciable:

Definición 2.3. *Un conjunto $\mathcal{M}$ se dice que es una **variedad diferenciable** si se le puede dotar de un atlas $\mathcal{A}$ diferenciable maximal. En ese caso, llamaremos **dimensión** n de $\mathcal{M}$ a la del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ en donde las cartas de $\mathcal{A}$ toman valores.*

Observación 2.4.

- *Como se ha visto en la Proposición 2.2, para dotar a un conjunto $\mathcal{M}$ de una estructura de variedad diferenciable basta, con definir un atlas sobre el conjunto, ya que estará contenido en un atlas maximal.*
- *Los dominios de las cartas del atlas maximal nos permiten definir una base para una topología sobre $\mathcal{M}$ y por tanto dotarle de estructura de espacio topológico.*

Ejemplo 2.5. *Ejemplos de variedades diferenciables:*

i) *El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ tiene trivialmente una estructura de variedad diferenciable, tomando un atlas formado por la carta global identidad.*

ii) *La circunferencia $\mathbb{S}^1$ es una variedad diferenciable de dimensión uno. Basta considerar las cartas:*

$$x : \mathcal{U} = \{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t),\ t \in (0,1)\} \to \mathbb{R}\ ;\ x(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = t,$$

$$y : \mathcal{U} = \{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t),\ t \in (-1/2, 1/2)\} \to \mathbb{R}\ ;\ y(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = t.$$

iii) *La esfera $\mathbb{S}^2$ es una variedad diferenciable de dimensión 2. Se puede construir un atlas a partir de dos proyecciones estereográficas sobre el plano que contiene al ecuador.*

iv) *El producto cartesiano de variedades diferenciables es variedad diferenciable. Así, el toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \overset{n}{\cdots} \times \mathbb{S}^1$ de dimensión n tiene estructura de variedad diferenciable.*

v) *El grupo general lineal real $GL(n,\mathbb{R})$ (resp. $GL(n,\mathbb{C})$) de matrices $n \times n$ con determinante no nulo es una variedad diferenciable de dimensión n^2 (resp. $2n^2$). Basta tomar en cada caso la carta global que envía los elementos de la matriz a un único vector en $\mathbb{R}^{n^2}$ (resp. $\mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$).*

A continuación, introduciremos la definición de función y aplicación diferenciable sobre variedades. Salvo que se indique lo contrario, emplearemos los términos diferenciable y $\mathcal{C}^\infty$ indistintamente.

Definición 2.6. *Sean $\mathcal{M}$ una variedad diferenciable y $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ una aplicación.*

1. *Se dice que f es una **función diferenciable en un punto** $p \in \mathcal{M}$ si para toda carta $x : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ cuyo dominio $\mathcal{U}$ contenga a p se verifica que $f \circ x^{-1} : x(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $x(p)$.*
2. *Se dice que f es una **función diferenciable** si lo es para todo punto $p \in \mathcal{M}$.*

Definición 2.7. *Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ variedades diferenciables y $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ una aplicación.*

1. *Se dice que f es una **aplicación diferenciable en un punto** $p \in \mathcal{M}$ si para toda carta $x : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ cuyo dominio $\mathcal{U}$ contenga a p y para toda carta $y : \mathcal{N} \to \mathbb{R}^m$ cuyo dominio $\mathcal{V}$ contenga al punto $f(p)$ se verifica que $y \circ f \circ x^{-1} : x(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^n \to y(\mathcal{V}) \subseteq \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x(p)$.*
2. *Se dice que f es una **aplicación diferenciable** si lo es para todo punto $p \in \mathcal{M}$.*
3. *Se dice que f es un **difeomorfismo** si es una aplicación diferenciable, biyectiva y de inversa también diferenciable.*

2.2. Espacio tangente

Vamos a dar dos definiciones alternativas del espacio tangente de una variedad diferenciable sobre un punto $p \in \mathcal{M}$. En primer lugar, lo definiremos a partir de la derivación lineal sobre el conjunto de gérmenes en m. Posteriormente, veremos que admite como base el conjunto de vectores tangentes a curvas contenidas en $\mathcal{M}$ y que pasan por p. En adelante, denotaremos:

$$\mathcal{F}(\mathcal{M}) := \{f : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \ ; \ f \text{ es diferenciable}\}$$
$$\mathcal{F}(p) := \{f : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \ ; \ f \text{ es diferenciable en un entorno de } p\}$$

Definición 2.8. *Dos funciones $f, g \in \mathcal{F}(p)$ son **equivalentes** si coinciden en un entorno de p. Esto define una relación de equivalencia $\sim$ en el conjunto de funciones de $\mathcal{F}(p)$. Llamaremos **germen** a cada una de las clases de equivalencia y denotaremos por $F_p := \mathcal{F}(p)/\sim$ al conjunto de gérmenes en p.*

Se puede probar que el espacio cociente F_p de la Definición 2.8 tiene una estructura de álgebra sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones de suma y multiplicación de funciones y producto por escalares.

Definición 2.9. *Un **vector tangente en p** es una derivación lineal sobre F_p. Esto es, para cualesquiera $f, g \in F_p$ se cumple:*

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$$

*El conjunto de vectores tangentes a $\mathcal{M}$ en p se conoce como **espacio tangente a $\mathcal{M}$ en** p, y se denota por $T_p\mathcal{M}$.*

Observemos que si definimos $(v + w)(f)$ y $(\lambda v)(f)$ como:

$$(v + w)(f) = v(f) + w(f) \quad , \quad (\lambda v(f)) = \lambda v(f)$$

para $v, w \in T_p\mathcal{M}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tanto $v + w$ como λv son de nuevo vectores tangentes en p. Así, $T_p\mathcal{M}$ es un espacio vectorial real. Veamos que su dimensión en efecto coincide con la de $\mathcal{M}$ y que admite una base formada por las derivadas parciales definidas a continuación:

Definición 2.10. *Sean $\mathcal{M}$ una variedad diferenciable, $p \in \mathcal{M}$ y $x : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ una carta con $p \in \mathcal{U}$ y funciones coordenadas $(x^1(p), \ldots, x^n(p))$. Se llama **derivada parcial** respecto de x^i en el punto p al operador:*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p : F_p \to \mathbb{R}$$

definido por

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (f) = \left(\frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial t_i}\right)(x(p)),$$

donde $(t_1, \ldots, t_n)$ son las coordenadas en $\mathbb{R}^n$.

En lo sucesivo, y si no da lugar a confusión, se omitirá la indicación de que se está trabajando sobre el punto p. Recordemos que los conceptos de vector y espacio tangente están definidos para cada punto de la variedad.

Lema 2.11. *Sean $\mathcal{M}$ una variedad diferenciable, $f \in \mathcal{F}(p)$ una función diferenciable y $(x,\mathcal{U})$ un entorno coordenado de $p \in \mathcal{U}$ con $x(p) = a = (a^1, \ldots, a^n)$. Entonces existen funciones $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{F}(p)$ y un entorno $\mathcal{V}$ de p en el que la función f se puede escribir como*

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - a^i)h_i.$$

Las funciones h_i verifican, para todo $i = 1, \ldots, n$:

$$h_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Demostración. Definimos la función $y : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ dada por $m \mapsto x(m) - a$. Tenemos que $y(p) = 0$, y como x es inyectiva y $x(\mathcal{U})$ es abierto, $\mathcal{V} = y(\mathcal{U})$ es entorno abierto de 0 en $\mathbb{R}^n$. De hecho, tenemos que $(y, \mathcal{U})$ es un entorno coordenado de p en $\mathcal{M}$. Consideramos la expresión local de f en esta carta, que está dada por

$$\psi := f \circ y^{-1} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}.$$

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de la Cadena se tiene:

$$\psi(z) - \psi(0) = \int_0^1 \frac{d\psi}{dt}(tz)dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial z_i}(tz) z_i dt = \sum_{i=1}^n z_i \int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial z_i}(tz)dt = \sum_{i=1}^n z_i g_i(z),$$

donde denotamos por $(z_1, \ldots, z_n)$ a las coordenadas en $\mathcal{V}$ y hemos llamado:

$$g_i(z) := \int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial z_i}(tz)dt.$$

Si $(t_1, \ldots t_n)$ son coordenadas en $x(\mathcal{U})$ dadas por $z_i = t_i - a^i$ y consideramos la función $h_i := g_i \circ y$, tenemos que:

$$h_i(p) = (g_i \circ y)(p) = g_i(0) = \int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial z_i}(0)dt = \frac{\partial \psi}{\partial z_i}(0) \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial (f \circ x^{-1})}{\partial t_j}(x(p)) \frac{\partial (x^j \circ y^{-1})}{\partial z_i}(0),$$

donde en la igualdad (*) hemos aplicado la regla de la cadena a la aplicación $\psi = f \circ y^{-1} = (f \circ x^{-1}) \circ (x \circ y^{-1})$ (no estamos haciendo más que un cambio de carta). Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial (x^j \circ y^{-1})}{\partial z_i} = \delta_{ij}$$

obtenemos que $h_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, como queríamos probar. □

Proposición 2.12. *Con la notación anterior, el conjunto de las derivadas parciales*

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \ : \ 1 \leq i \leq n \right\}$$

forma una base del espacio tangente $T_p\mathcal{M}$.

Demostración. Veamos en primer lugar que los elementos de $\mathcal{B}$ son linealmente independientes. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ verificando

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0$$

Aplicando esta función sobre cada una de las funciones coordenada x^k con $1 \leq k \leq n$ obtenemos

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial x^k}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{ik} = \lambda_k = 0,$$

por lo que todos los coeficientes se anulan.

Sea ahora $v \in T_p\mathcal{M}$. En primer lugar, veamos que para cualquier función constante c se tiene que $v(c) = 0$. En efecto, por la condición de derivación lineal se tiene:

$$v(1) = v(1 \cdot 1) = 1v(1) + v(1)1 = 2v(1) \Rightarrow v(1) = 0 \Longrightarrow v(c) = v(c \cdot 1) = cv(1) = 0.$$

Ahora, por el Lema 2.11, tenemos que para cualquier función $f \in \mathcal{F}(p)$ existen funciones $h_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ tales que se cumple

$$v(f) = v\left(f(p) + \sum_{i=1}^{n}(x^i - x(p)^i)h_i\right)$$

en un entorno de p. Teniendo en cuenta que $v(f(p)) = v(x(p)^i) = 0$ y escribiendo $x(p) = (a^1, \ldots, a^n)$, nos queda

$$v(f) = v(f(p)) + \sum_{i=1}^{n}\left[v(x^i - a^i)h_i + (a^i - a^i)v(h_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} v(x^i)h_i = \sum_{i=1}^{n} v(x^i)\frac{\partial f}{\partial x^i} \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

como queríamos probar. □

Corolario 2.13. *El espacio tangente $T_p\mathcal{M}$ es un espacio vectorial real de dimensión n.*

Una caracterización alternativa del espacio tangente viene dada por el conjunto de vectores tangentes a las curvas contenidas en la variedad:

Definición 2.14. *Sea una curva $\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}$ diferenciable y con $\alpha(t_0) = p$. Podemos definir el* ***vector tangente a** α **en** p *como la aplicación:*

$$\begin{aligned} v_{\alpha(t_0)} : F_p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(t_0). \end{aligned}$$

Escribiremos también $v_{\alpha(t_0)} = \alpha'(t_0)$.

Con esta noción, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.15. *El espacio tangente $T_p\mathcal{M}$ se puede ver como el conjunto de los vectores tangentes a curvas contenidas en $\mathcal{M}$ en el punto p.*

Demostración. Sea $(x, \mathcal{U})$ un entorno coordenado con $p \in \mathcal{U}$. Dado $k \in \{1, \ldots, n\}$, consideremos la curva $\alpha : (-\delta, \delta) \to \mathcal{U}$ definida por

$$(x \circ \alpha)(t) := x(p) + te_k = (x^1(p), \ldots, x^{k-1}(p), \underbrace{x^k(p) + t}_{k}, x^{k+1}(p), \ldots, x^n(p)) \equiv (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)).$$

Sea ahora $v_{\alpha(0)}$ el vector tangente a α en el punto $p = \alpha(0)$. Por la proposición anterior, sabemos que podemos escribir

$$v_{\alpha(0)} = \sum_{i=1}^{n} v_{\alpha(0)}(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Pero utilizando la Definición 2.14, tenemos que

$$v_{\alpha(0)}(x^i) = \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt}(0) = \frac{d\alpha_i}{dt}(0) = \delta_{ik}.$$

Luego queda:

$$v_{\alpha(0)} = \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Por tanto, las derivadas parciales en $T_p\mathcal{M}$ coinciden con los vectores tangentes en p de determinadas curvas que pasen por ese punto. Como las derivadas parciales forman a su vez una base de $T_p\mathcal{M}$, se concluye que el espacio tangente coincide con el espacio vectorial generado por dichos vectores tangentes. □

2.3. Campos vectoriales

Vamos a introducir en esta sección otro concepto importante para el desarrollo del trabajo, como son los campos vectoriales. Los campos vectoriales se pueden definir de formas diversas, de las cuales se escogerá una u otra en función del contexto por simplicidad. En primer lugar, definimos:

Definición 2.16. *Sea $\mathcal{M}$ una variedad diferenciable. Llamamos **fibrado tangente** a la unión disjunta de todos los espacios tangentes $T_p\mathcal{M}$, esto es:*

$$T\mathcal{M} := \bigsqcup_{p\in\mathcal{M}} T_p\mathcal{M} = \bigcup_{p\in\mathcal{M}} \{p\} \times T_p\mathcal{M}$$

De esta forma, un elemento del fibrado tangente puede ser visto como un par (p, v), donde p es un punto de la variedad y v un vector tangente a $\mathcal{M}$ en p.

Se puede probar que podemos dotar a $T\mathcal{M}$ de una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2\dim\mathcal{M}$. Observemos además que el fibrado tangente admite una proyección natural a la variedad:

$$\pi : T\mathcal{M} \to \mathcal{M}$$

definida por $\pi(p, v) = p$ si, y sólo si, $v \in T_p\mathcal{M}$. Con esto, podemos definir el concepto de campo vectorial,

Definición 2.17. *Un **campo vectorial** sobre una variedad diferenciable $\mathcal{M}$ es una aplicación*

$$X : \mathcal{M} \to T\mathcal{M}$$

que verifica ser una sección diferenciable de la proyección $\pi : T\mathcal{M} \to \mathcal{M}$, es decir, verificando $\pi\circ X = Id_{\mathcal{M}}$. Por simplicidad en la notación, no consideraremos que X le asigna a cada punto $p \in \mathcal{M}$ un par $(p, X(p))$, sino que únicamente le asigna el vector $X(p) \in T_p\mathcal{M}$. El conjunto de campos vectoriales sobre $\mathcal{M}$ se denota por $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$, y verifica ser un espacio vectorial.

Observación 2.18. *Dado un punto $p \in \mathcal{M}$, sabemos que $X(p) \in T_p\mathcal{M}$. Luego, si $(x,\mathcal{U})$ es un entorno coordenado de p de funciones coordenadas $x^1, \ldots, x^n$, como el espacio tangente $T_p\mathcal{M}$ tiene por base a las derivadas parciales*

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \ : \ 1 \leq i \leq n \right\},$$

podemos escribir X de la siguiente forma, utilizando el convenio de sumación de Einstein:

$$X(p) = X_p = \sum_{i=1}^{n} X_p^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \equiv X_p^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \tag{2.1}$$

donde definimos $X(p) := X_p$ y $X_p^i := X_p(x^i)$.

Otra forma útil de ver los campos vectoriales es algebraicamente como derivaciones lineales. En efecto, hemos visto que un campo vectorial X puede escribirse para cada punto p como un elemento de $T_p\mathcal{M}$, así que es una derivación lineal. Si escribimos $X(p) = X_p$ como en (2.1), podemos definir un campo vectorial X como una aplicación

$$X : \mathcal{F}(\mathcal{M}) \to \mathcal{F}(\mathcal{M})$$

que verifica ser derivación $\mathbb{R}-$lineal y que además satisface la regla de Leibnitz:

$$X(fg) = X(f)g + fX(g) \text{ para cualesquiera } f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{M}).$$

Dicha condición se tiene inmediatamente de las propiedades de las derivadas parciales.

2.4. Aplicación tangente

Por otra parte, dada una aplicación diferenciable entre variedades, siempre podemos definir una aplicación lineal entre sus espacios tangentes cuya presencia en este trabajo es bastante frecuente:

Definición 2.19. *Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ variedades diferenciables, $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ una aplicación diferenciable y $p \in \mathcal{M}$. La* ***aplicación diferencial o tangente de*** *φ* ***en*** *p es una aplicación lineal $\varphi_* : T_p\mathcal{M} \to T_{\varphi(p)}\mathcal{N}$ definida como sigue: dada una curva α sobre $\mathcal{M}$, al vector $v = \alpha'(t_0) \in T_p\mathcal{M}$ (ver Definición 2.14) se le hace corresponder el vector:*

$$\varphi_*(v) = (\varphi \circ \alpha)'(t_0) \in T_{\varphi(p)}\mathcal{N}.$$

Además, fijada una carta de $\mathcal{M}$, la matriz de la aplicación lineal entre los espacios tangentes coincide con la matriz jacobiana de coeficientes las derivadas de la aplicación φ en su representación en coordenadas de una carta de $\mathcal{N}$.
Algebraicamente, podemos ver la diferencial como la aplicación que a cada campo $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ se le hace corresponder

$$\varphi_*(X)(h) = X(h \circ \varphi).$$

Hay que insistir en el hecho de que, en general, $\varphi_*(X)$ no es un campo vectorial de $\mathfrak{X}(\mathcal{N})$, ya que puede no estar definido en todos los puntos de $\mathcal{N}$. Un ejemplo de ello es cuando φ no es sobreyectiva. Sin embargo, esto sí que se verifica cuando φ es un difeomorfismo (ver [6, p.183]).

La aplicación tangente se puede definir de forma natural entre los fibrados tangentes, $\varphi_* : T\mathcal{M} \to T\mathcal{N}$, y verifica:

1. $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ si se tiene que $\mathcal{M}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{M}_3$.
2. $id_* = id_{T\mathcal{M}}$, siendo $id : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ la identidad.

La segunda propiedad es evidente, mientras que la primera se deduce de la Regla de la Cadena. Esto nos permite reconocer la aplicación tangente como un **funtor (covariante)** de la categoría de variedades diferenciables en la categoría de fibrados tangentes.

En lo sucesivo, cuando hablemos de rango de una aplicación entre variedades, nos estaremos refiriendo realmente al rango de su aplicación tangente como morfismo de espacios vectoriales. Es decir, usaremos "rango de φ" y "rango de φ_*" indistintamente.
En función de las propiedades de la aplicación tangente se pueden clasificar las aplicaciones diferenciables entre variedades:

Definición 2.20. *Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ variedades diferenciables y $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ una aplicación diferenciable. Se dice que:*

i) *f es una* ***submersión*** *si la aplicación tangente $f_* : T_p\mathcal{M} \to T_{f(p)}\mathcal{N}$ es sobreyectiva para todo $p \in \mathcal{M}$.*

ii) *f es una* ***inmersión*** *si la aplicación tangente $f_* : T_p\mathcal{M} \to T_{f(p)}\mathcal{N}$ es inyectiva para todo $p \in \mathcal{M}$.*

iii) *f es un* ***embedding*** *si es una inmersión inyectiva.*

iv) *$\mathcal{M}$ es una* ***subvariedad (inmersa)*** *de $\mathcal{N}$ si $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ y la inclusión natural $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$ es un embedding.*

v) *$\mathcal{M}$ es una* ***subvariedad regular*** *de $\mathcal{N}$ si es subvariedad y la topología de $\mathcal{M}$ como variedad coincide con la de subespacio de $\mathcal{N}$.*

vi) *f es un* ***embedding regular*** *si es un embedding y $f(\mathcal{M})$ es una subvariedad regular de $\mathcal{N}$.*

Observación 2.21.

i) *Si $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ es un subconjunto abierto de una variedad con atlas maximal $\mathcal{A}$, podemos dotarle de estructura de variedad con el atlas (maximal)*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{N}} := \{(x,\mathcal{U} \cap \mathcal{N}) : \ (x,\mathcal{U}) \in \mathcal{A}\}$$

Como la topología de variedad de $\mathcal{N}$ coincide con la de subespacio, $\mathcal{N}$ verifica ser subvariedad regular de $\mathcal{M}$.

ii) *Si $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es una aplicación diferenciable entre variedades cuya imagen está contenida en una subvariedad regular $\mathcal{N}_1$ de $\mathcal{N}$, entonces la aplicación $g : \mathcal{M} \to \mathcal{N}_1$ inducida por f donde se restringe la imagen verifica ser diferenciable.*

iii) *Sea $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es una inmersión inyectiva. Llamamos $\mathcal{S} = F(\mathcal{N})$. El atlas*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}} = \{(F(\mathcal{U}), x \circ F^{-1}) \colon (x,\mathcal{U}) \text{ es entorno coordenado de } \mathcal{N}\}$$

define sobre $\mathcal{S}$ una estructura de subvariedad (no necesariamente regular).

Otro resultado muy importante consecuencia del teorema de la función implícita es el siguiente (cf. [6][p.83]) :

Teorema 2.22. *Si $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es una aplicación diferenciable entre variedades, tal que f_* tiene rango k constante, entonces $f^{-1}(c)$ es una subvariedad regular de codimensión k en $\mathcal{M}$ para todo $c \in \mathcal{N}$. En particular, esto ocurre si f es una submersión. Además, se cumple que:*

i) *Si f es sobreyectiva, entonces es submersión.*

ii) *Si f es inyectiva, entonces es inmersión.*

iii) *Si f es biyectiva, entonces es un difeomorfismo.*

Y el siguiente teorema da una condición suficiente bajo la cual definir una aplicación diferenciable sobre el conjunto imagen de una submersión:

Proposición 2.23. *Supongamos que $\pi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es una submersión sobreyectiva entre variedades diferenciables. Si $\mathcal{P}$ es otra variedad diferenciable y $F : \mathcal{M} \to \mathcal{P}$ es una aplicación diferenciable que verifica ser constante en las fibras de π (contraimágenes por π de conjuntos unipuntuales), entonces existe una única aplicación diferenciable $\tilde{F} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ tal que $\tilde{F} \circ \pi = F$.*

Para concluir este capítulo, fijémonos en que la definición que hemos dado desde el principio de variedad diferenciable es la más general: un conjunto dotado de atlas maximal. La ventaja de este enfoque es que podemos construir numerosos ejemplos de variedades topológicamente "exóticas", y que no se asemejan a nuestra intuición de variedad como generalización de superficie 2-dimensional en el espacio euclídeo. En [6] hacen la distinción entre variedad topológica (*topological manifold*) que coincide con la definición que hemos dado, y variedad diferenciable (*smooth manifold*), que requiere que el espacio sea Hausdorff y satisfaga el segundo axioma de numerabilidad. Con esta segunda definición se satisfacen resultados importantes como la existencia de particiones de la unidad y el teorema de inmersión de Whitney. Es por tanto dicho enfoque el que adoptaremos para trabajar de forma natural con grupos y álgebras de Lie:

Indicación

Todas las variedades diferenciables que consideremos a partir de ahora serán Hausdorff y verificarán el segundo axioma de numerabilidad.

Capítulo 3

Grupos y Álgebras de Lie

El objetivo de este capítulo es dar una visión general sobre los conceptos de la teoría de grupos y álgebras de Lie. Se definirán dichos conceptos junto con una serie de ejemplos ilustrativos que ayuden a entender su importancia en las Matemáticas. Además, se introducirá el concepto de álgebra de Lie de un grupo de Lie, que supone un caso particular de álgebra de Lie. Seguidamente, hablaremos de conceptos elementales tales como morfismos inducidos en álgebras de Lie y criterios para poder definir y entender correctamente los subgrupos y las subálgebras de Lie. Se seguirá como referencias a Warner [11] y a Lee [6].

Índice

3.1. Grupos de Lie

Definición 3.1. *Un* ***grupo de Lie*** *es una variedad diferenciable G provista de una estructura de grupo $(G, \cdot)$ verificando que la aplicación:*

$$\begin{aligned} \varphi\colon G \times G &\to G \\ (a,b) &\mapsto a \cdot b^{-1} \end{aligned}$$

es diferenciable.

Observación 3.2. *Si G es un grupo de Lie, entonces la aplicación $a \mapsto a^{-1}$ que manda cada elemento a su inverso es diferenciable por ser la composición de aplicaciones diferenciables,*

$$a \mapsto (e,a) \mapsto a^{-1},$$

donde e denota el elemento neutro. Por el mismo motivo, la aplicación $(a,b) \mapsto a \cdot b$ que manda cada par de elementos a su producto es diferenciable. Basta considerar la composición:

$$(a,b) \mapsto (a, b^{-1}) \mapsto a \cdot b.$$

El recíproco es trivialmente cierto, luego la Definición 3.1 es equivalente a requerir que estas dos aplicaciones sean diferenciables.

Ejemplo 3.3. *Algunos ejemplos elementales de grupos de Lie son:*

i) $\mathbb{R}^n$ *con la suma de vectores. Análogamente, cualquier espacio vectorial de dimensión finita.*

ii) *La circunferencia* $\mathbb{S}^1 := \{e^{2\pi it} : t \in [0,1)\} \subset \mathbb{C}^*$ *con la multiplicación inducida por la de* $\mathbb{C}^*$ *(que también es grupo de Lie).*

iii) *Si* G *y* H *son grupos de Lie, su producto cartesiano* $G \times H$ *también lo es. El espacio* $G \times H$ *posee la estructura de variedad producto y su operación es la de* G *y* H *coordenada a coordenada:*

$$(g,h) \cdot (g',h') := (g \cdot g', h \cdot h')$$

iv) *Por ser* $\mathbb{S}^1$ *grupo de Lie, también lo es el n-toro* $\mathbb{T}^n = \prod_{i=1}^n \mathbb{S}^1$ *para* $n \geq 2$.

v) *El grupo general lineal (complejo* $GL(n,\mathbb{C})$ *o real* $GL(n,\mathbb{R})$*) con la operación de multiplicación de matrices. Basta ver que la multiplicación* $A \cdot B$ *de matrices es diferenciable porque los coeficientes resultantes son polinomios, mientras que los coeficientes de la matriz inversa* A^{-1} *se pueden expresar como funciones racionales de los coeficientes de* A *con denominador (*$\det(A)$*) que no se anula.*

Definición 3.4. *Si* G *y* H *son grupos de Lie, una aplicación* $F : G \to H$ *es un* ***homomorfismo (o morfismo) de grupos de Lie*** *si verifica ser un homomorfismo de grupos diferenciable.*

3.2. Álgebras de Lie

Introducido el concepto de grupo de Lie, veamos cómo definir una estructura de espacio vectorial de dimensión finita asociado al grupo de Lie. Dicho espacio vectorial será un caso particular de álgebra de Lie, definida de forma natural a partir de los corchetes de Lie.

Definición 3.5. *Sean* $\mathcal{M}$ *una variedad diferenciable y* $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ *campos vectoriales sobre* $\mathcal{M}$. *Llamamos* ***corchete de Lie*** *al campo vectorial* $[X,Y]$ *definido, para cada* $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$*, por*

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Proposición 3.6. *Sean* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ *campos vectoriales sobre una variedad diferenciable* $\mathcal{M}$. *Entonces:*

i) $[X,Y]$ *es un campo vectorial.*

ii) *Si* $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$*, entonces* $[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

iii) ***Antisimetría:*** $[X,Y] = -[Y,X]$.

iv) ***Identidad de Jacobi:*** $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$.

Un espacio vectorial con una operación bilineal satisfaciendo iii) y iv) se denomina ***álgebra de Lie****.*

Demostración. Las propiedades son una mera comprobación utilizando las nociones básicas de campo vectorial y la regla de Leibnitz. $\square$

Por otra parte, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, un subespacio vectorial $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ se llama **subálgebra de Lie** si es cerrado con la operación de corchete, i.e, dados $X, Y \in \mathfrak{h}$, se tiene que $[X,Y] \in \mathfrak{h}$. En este caso $\mathfrak{h}$ es un álgebra de Lie con la restricción de $[\cdot,\cdot]$.
Si $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son álgebras de Lie, una aplicación lineal $T : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ se llama **homomorfismo (o morfismo) de álgebras de Lie** si preserva los corchetes, esto es:

$$T[X,Y] = [T(X), T(Y)] \text{ para cualesquiera } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Ejemplo 3.7. *Ejemplos de álgebras de Lie:*

i) *El espacio vectorial $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ formado por todos los campos vectoriales sobre una variedad $\mathcal{M}$ tiene estructura de álgebra de Lie con la operación de corchete de Lie definida previamente.*

ii) *Si V es un espacio vectorial, los espacios*[1]

$$End(V) = \{f : V \to V \ : f \text{ es aplicación lineal}\} \text{ y}$$

$$Aut(V) = \{f : V \to V \ : f \text{ es aplicación lineal invertible}\}$$

de endomorfismos y automorfismos de V respectivamente son álgebras de Lie cuyo corchete de Lie se define para cada par de transformaciones f y g:

$$[f, g] := f \circ g - g \circ f.$$

iii) *El espacio vectorial $gl(n, \mathbb{R})$ de matrices $n \times n$ es un álgebra de Lie bajo la operación de conmutar:*

$$[A, B] = AB - BA$$

Dado un grupo de Lie G, podemos definir un álgebra de Lie especial a partir de los campos vectoriales invariantes por la izquierda, que abordaremos más adelante. Empecemos definiendo cuándo dos campos vectoriales están relacionados a través de una aplicación diferenciable:

Definición 3.8. *Sea $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ una aplicación diferenciable entre variedades y sean $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$ campos vectoriales sobre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ respectivamente. Decimos que X e Y están $\varphi-$**relacionados** si se cumple que:*

$$\varphi_*(X_p) = Y_{\varphi(p)} \text{ para todo } p \in \mathcal{M}.$$

Veamos que esta propiedad de que los campos estén relacionados por una aplicación se puede trasladar a los corchetes de Lie:

Proposición 3.9. *Sean $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ una aplicación diferenciable entre variedades y $X, X' \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, $Y, Y' \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Si X (resp. X') está φ-relacionado con Y (resp. Y'), entonces $[X, X']$ está φ-relacionado con $[Y, Y']$.*

Demostración. Sea $p \in \mathcal{M}$. Debemos probar que $\varphi_*([X, X']_p) = [Y, Y']_{\varphi(p)}$. Consideramos una función $f \in \mathcal{F}(\mathcal{N})$ arbitraria y veamos que ambos términos actúan igual sobre dicha función. Sin más que utilizar la definición de diferencial y de corchete de Lie:

$$\begin{aligned}
\varphi_*([X, X']_p)(f) &= [X, X']_p(f \circ \varphi) = X_p(X'(f \circ \varphi)) - X'_p(X(f \circ \varphi)) = X_p(\varphi_*(X')(f)) - X'_p(\varphi_*(X)(f)) \\
&\overset{(*)}{=} X_p(Y'(f) \circ \varphi) - X'_p(Y(f) \circ \varphi) = \varphi_*(X_p)(Y'(f)) - \varphi_*(X'_p)(Y(f)) \\
&\overset{(**)}{=} Y_{\varphi(p)}(Y'(f)) - Y'_{\varphi(p)}(Y(f)) = [Y, Y']_{\varphi(p)}(f)
\end{aligned}$$

Donde hemos usado nuestra hipótesis en las igualdades (*) y (**). □

Consideremos ahora un caso particular para la aplicación φ. Sea G un grupo de Lie y $g \in G$. Entonces podemos definir las aplicaciones $L_g, R_g : G \to G$ de **traslación a izquierda** y **traslación a derecha** por g en G, dadas por:

$$L_g(h) = g \cdot h \qquad R_g(h) = h \cdot g$$

[1] Recordemos que si V es un $\mathbb{K}-$espacio vectorial, un elemento $f \in End(V)$ (o $f \in Aut(V)$) verifica $f\mid_{\mathbb{K}} = id_{\mathbb{K}}$.

Claramente, dichas aplicaciones son difeomorfismos. Por ejemplo, L_g puede escribirse como composición de dos aplicaciones diferenciables (por ser G grupo de Lie):

$$G \xrightarrow{i_g} G \times G \xrightarrow{m} G$$

donde $i_g(h) = (g, h)$ y m es la multiplicación en G. Por tanto L_g es diferenciable. Como además $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ es diferenciable por un razonamiento similar, se concluye que L_g (análogamente R_g) es en efecto un difeomorfismo.

Diremos que un campo vectorial X sobre G es **invariante por la izquierda** si X está L_g-relacionado consigo mismo para todo $g \in G$. Esto es:

$$(L_g)_*(X_{g'}) = X_{g \cdot g'} \text{ para todo } g, g' \in G.$$

Como L_g es un difeomorfismo, sabemos que su aplicación tangente $(L_g)_*$ es un isomorfismo lineal entre espacios tangentes. Podemos abreviar la condición anterior escribiendo $(L_g)_*X = X_g$ para todo $g \in G$. Además, se tiene que el conjunto de los campos vectoriales de G invariantes por la izquierda es un subespacio vectorial de $\mathfrak{X}(G)$. Si tenemos que X e Y son invariantes por la izquierda, entonces por la Proposición 3.9 se tiene que $[X, Y]$ también es invariante por la izquierda y así dicho subespacio es cerrado bajo la operación del corchete de Lie. Esto nos permite dar la siguiente definición:

Definición 3.10. *Sea G un grupo de Lie. Se llama* ***álgebra de Lie de*** G *al subespacio vectorial $Lie(G)$ de $\mathfrak{X}(G)$ formado por todos los campos vectoriales sobre G invariantes por la izquierda.*

Por la discusión anterior, dicho subespacio verifica ser un álgebra de Lie (particularmente, diremos que se trata de una subalgebra de Lie de $\mathfrak{X}(G)$). El resultado fundamental consecuencia de esta definición es que $Lie(G)$ es un espacio vectorial de dimensión finita igual a la de G[2]. La razón es que se puede identificar el álgebra de Lie de G con el espacio tangente a G en el elemento neutro vía el siguiente isomorfismo de espacios vectoriales:

Teorema 3.11. *Sea G un grupo de Lie con elemento neutro e. La aplicación:*

$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & Lie(G) & \longrightarrow & T_eG \\ & X & \longmapsto & X_e \end{array}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. Por tanto, dim Lie(G)=dim G.

Demostración. La aplicación ψ es obviamente $\mathbb{R}-$lineal: dados $X, Y \in Lie(G)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, se tiene que $(\lambda X + \mu Y)_e = \lambda X_e + \mu Y_e$. Veamos que es inyectiva y sobreyectiva:

- Inyectividad. Si dados $X, Y \in Lie(G)$ se tiene que $\psi(X) = \psi(Y)$, entonces para todo $g \in G$:

  $$X_g = (L_g)_*(X_e) = (L_g)_*(Y_e) = Y_g$$

- Sobreyectividad. Sea $v \in T_eG$. Consideramos el campo vectorial dado, para cada $g \in G$, por:

  $$X_g := (L_g)_*v$$

  Obviamente se verifica que $\psi(X) = v$ y que X es invariante por la izquierda: dados $g, h \in G$ cualesquiera, entonces

  $$X_{g \cdot h} = (L_{g \cdot h})_*v = (L_g)_*(L_h)_*v = (L_g)_*(X_h)$$

Luego en efecto $Lie(G)$ y T_eG son isomorfos como espacios vectoriales y tienen la misma dimensión. □

[2]Observemos que, en general, un álgebra de Lie no tiene por qué ser de dimensión finita, ver [3]

Observación 3.12. *Tal y como lo hemos definido, un campo vectorial es para nosotros siempre diferenciable. Sin embargo, esta suposición no es estrictamente necesaria para definir Lie(G). En [6] se demuestra que el conjunto de todos los campos vectoriales invariantes por la izquierda son diferenciables.*

Ejemplo 3.13. *Algunos ejemplos de álgebra de Lie de un grupo de Lie:*

i) ***Espacio euclídeo*** $\mathbb{R}^n$. *Las traslaciones a izquierda por un elemento $a \in \mathbb{R}^n$ vienen dadas por la aplicación afín $L_a(x) = a + x$, cuya aplicación tangente está representada por la matriz identidad en coordenadas globales. Dado el campo vectorial*

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

X es invariante por la izquierda si, y solo si las funciones X^i son constantes. Por el Lema de Schwarz de igualdad de las derivadas cruzadas, el corchete de Lie de dos campos vectoriales con funciones coeficientes constantes es cero y así el álgebra de Lie de $\mathbb{R}^n$ es abeliana ($[X, Y] = 0 = -[Y, X] \Rightarrow [X, Y] = [Y, X]$), y por tanto se tiene que Lie$(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$. Este resultado se puede trasladar inmediatamente a cualquier $\mathbb{K}-$espacio vectorial V de dimensión finita, de forma que Lie$(V) \cong V$.

ii) ***La circunferencia unidad*** $\mathbb{S}^1$. *Viendo la circunferencia con notación exponencial $e^{2\pi it}$ dentro de $\mathbb{C}$, cada traslación a izquierda tiene una representación en coordenadas de la forma $t \mapsto t + c$. El campo vectorial $X = d/dt$ es claramente invariante por la izquierda y es una base para el álgebra de Lie de $\mathbb{S}^1$. Por tanto, Lie$(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}$.*

iii) ***El n-Toro*** $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \overset{n}{\cdots} \times \mathbb{S}^1$ *es un caso análogo al anterior. Observemos que $\{\partial/\partial\theta^1, \ldots, \partial/\partial\theta^n\}$ es una base de Lie$(\mathbb{T}^n)$.*

De igual forma que el espacio tangente es una "representación" lineal de una variedad diferenciable, se puede entender *Lie*(G) como una "representación" lineal del grupo de Lie G. Veremos más adelante que muchas propiedades del grupo G se pueden estudiar directamente sobre su álgebra de Lie. En muchas ocasiones, este último enfoque es mucho más sencillo que trabajar directamente con el grupo.
En el siguiente resultado vamos a calcular el álgebra de Lie del grupo de Lie no abeliano más importante: el grupo general lineal $GL(n, \mathbb{R})$.

Teorema 3.14. *El espacio $gl(n, \mathbb{R})$ de todas las matrices $n \times n$ con coeficientes reales es isomorfo a Lie$(GL(n, \mathbb{R}))$.*

Demostración. El conjunto $gl(n, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial (tomando la suma de matrices y la multiplicación por escalares) de dimensión n^2. Como se ha comentado antes, dicho espacio tiene estructura de álgebra de Lie si escribimos $[A, B] := AB - BA$. El grupo general lineal $GL(n, \mathbb{R})$ hereda de forma natural la estructura de variedad diferenciable $gl(n, \mathbb{R})$ como subconjunto abierto de dicho espacio. En efecto, la función determinante

$$\begin{aligned} \det\colon gl(n, \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det(A) \end{aligned}$$

es diferenciable. Para comprobarlo utilizamos la Definición 2.6 y componemos con la carta global x que envía cada matriz a un vector en $\mathbb{R}^{n^2}$. El resultado de calcular el determinante es un polinomio con coeficientes reales, obviamente $\mathcal{C}^\infty$. Por tanto, det es también continua y $GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ es abierto. En particular, se tiene que $T_{Id}GL(n, \mathbb{R}) = T_{Id}gl(n, \mathbb{R})$ y que $GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie con la multiplicación de matrices.

Sea x^{ij} la función coordenada de x en $gl(n, \mathbb{R})$ que le asigna a cada matriz su componente ij y definimos

$$\begin{aligned} \alpha\colon\ T_{Id}gl(n, \mathbb{R}) &\to gl(n, \mathbb{R}) \\ v = v^{ij}\frac{\partial}{\partial x^{ij}} &\mapsto (v^{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \end{aligned}$$

O, equivalentemente, $\alpha(v)_{ij} := v(x^{ij})$. Es decir, α envía los coeficientes del vector v en la base de las derivadas parciales a una matriz con dichos coeficientes. Además, es claro que α es un isomorfismo de espacios vectoriales.
Consideramos ahora la composición de α con el isomorfismo $\psi : Lie(GL(n, \mathbb{R})) \to T_{Id}gl(n, \mathbb{R})$ dado por el Teorem 3.11:

$$Lie(GL(n, \mathbb{R})) \xrightarrow{\psi} T_{Id}GL(n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\alpha} gl(n, \mathbb{R}).$$

Veamos que la composición de los dos isomorfismos, $F := \alpha \circ \psi$, es en efecto un isomorfismo de álgebras de Lie. Para ello solo falta probar que preserva la operación del corchete de Lie. Sean $X, Y \in Lie(GL(n, \mathbb{R}))$. Por ser Y un campo vectorial invariante por la izquierda, dada $A \in GL(n, \mathbb{R})$, se tiene

$$Y_A(x^{ij}) = (L_A)_*(Y_{Id})(x^{ij}) = Y_{Id}(x^{ij} \circ L_A).$$

Como para cada matriz $B \in GL(n, \mathbb{R})$ se tiene que

$$(x^{ij} \circ L_A)(B) = x^{ij}(AB) = \sum_{k=1}^{n} x^{ik}(A)x^{kj}(B),$$

entonces

$$Y_{Id}(x^{ij} \circ L_A) = \sum_{k=1}^{n} x^{ik}(A)Y_{Id}(x^{kj}) = \sum_{k=1}^{n} x^{ik}(A)\alpha(Y_{Id})_{kj} = \sum_{k=1}^{n} x^{ik}(A)F(Y)_{kj}.$$

Ahora, si calculamos la componente ij de $F([X, Y])$, tenemos

$$\begin{aligned} F([X,Y])_{ij} =& [X,Y]_{Id}(x^{ij}) = X_{Id}(Y(x^{ij})) - Y_{Id}(X(x^{ij})) = \sum_{k=1}^{n} \Big[X_{Id}(x^{ik})F(Y)_{kj} - Y_{Id}(x^{ik})F(X)_{kj} \Big] \\ =& \sum_{k=1}^{n} [F(X)_{ik}F(Y)_{kj} - F(Y)_{ik}F(X)_{kj}] = [F(X), F(Y)]_{ij}. \end{aligned}$$

Por tanto, $F : Lie(GL(n, \mathbb{R})) \to gl(n, \mathbb{R})$ es un isomorfismo de álgebras de Lie. □

Si V es un espacio vectorial real de dimensión finita, existe un resultado análogo al teorema anterior si consideramos los grupos de transformaciones lineales de V.

Corolario 3.15. *Si V es un espacio vectorial real de dimensión finita, entonces existe un isomorfismo de álgebras de Lie entre $Lie(Aut(V))$ y $End(V)$.*

Demostración. Supongamos que V tiene dimensión $n < \infty$. Basta fijar una base de V, asociar de manera biunívoca a cada automorfismo de V una matriz en $GL(n, \mathbb{R})$, y aplicar el teorema anterior. □

La propiedad de que $Lie(GL(n, \mathbb{R}))$ es isomorfa a $gl(n, \mathbb{R})$ es también cierta para el caso complejo. En [6, p.198-199] se prueba que $Lie(GL(n, \mathbb{C})) \cong gl(n, \mathbb{C})$.

3.2.1. Morfismos inducidos entre álgebras de Lie

Dado un morfismo de grupos de Lie, veamos cómo es posible definir un morfismo inducido entre sus respectivas álgebras de Lie:

Teorema 3.16. *Sean G y H grupos de Lie de respectivas álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$. Supongamos que $F : G \to H$ es un morfismo de grupos. Entonces, la aplicación $\tilde{F} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ inducida por F está definida de la forma siguiente: dado $X \in \mathfrak{g}$, su imagen $\tilde{F}(X)$ es el único campo vectorial en $\mathfrak{h}$ que está $F-$relacionado con X. Además $\tilde{F}$ es un morfismo de álgebras de Lie.*

Demostración. Consideremos los respectivos isomorfismos canónicos ψ_G y ψ_H definidos en la demostración del Teorema 3.11. Por lo discutido anteriormente, consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\tilde{F}"] \arrow[d, "\psi_G"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\psi_H"] \\ T_eG \arrow[r, "F_*"] & T_{\tilde{e}}H \end{tikzcd}$$

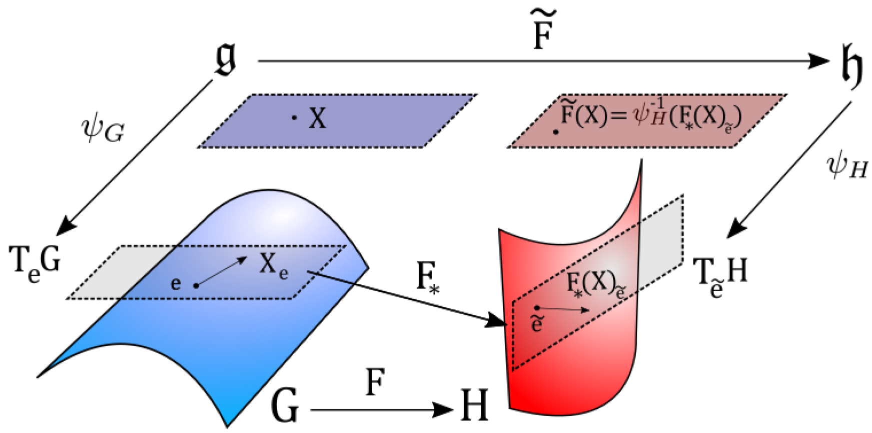

Figura 3.1: *Ilustración del paso entre el álgebra de Lie y el espacio tangente en la identidad para definir $\tilde{F}$.*

y definimos $\tilde{F}$ de forma única para que sea conmutativo, esto es, $\tilde{F} := \psi_H^{-1} \circ F_* \circ \psi_G$. De la demostración del Teorema 3.11 sabemos que la inversa de ψ_H actúa sobre un vector $v \in T_{\tilde{e}}H$ en la forma:

$$(\psi_H^{-1}v)_h = (L_h)_* v \text{ para cualquier } h \in H.$$

Por tanto, la imagen de cualquier campo $X \in \mathfrak{g}$ a través de $\tilde{F}$ viene dada por:

$$\tilde{F}(X)_h = (L_h)_* F_*(X_e) \text{ para cualquier } h \in H.$$

Veamos ahora que el campo $Y := \tilde{F}(X)$ así definido está $F-$relacionado con X y que en efecto $\tilde{F}$ es un morfismo de álgebras de Lie.
En primer lugar, como F es un homomorfismo de grupos se tiene que:

$$\begin{aligned} F(gg') = F(g)F(g') \Longrightarrow & F(L_g g') = L_{F(g)}F(g') \\ \Longrightarrow & F \circ (L_g) = (L_{F(g)}) \circ F \\ \Longrightarrow & F_* \circ (L_g)_* = (L_{F(g)})_* \circ F_*. \end{aligned}$$

donde en la última implicación hemos usado que la aplicación tangente verifica la regla de la cadena. Entonces, como $X \in \mathfrak{g}$ y utilizando la definición de $\tilde{F}$ se tiene

$$F_*X_g = F_*(L_g)_*X_e = (L_{F(g)})_*F_*X_e = \tilde{F}(X)_{F(g)} = Y_{F(g)}.$$

Por tanto, los campos X e Y están $F-$relacionados. Si además existiera otro campo $Z \in \mathfrak{h}$ que estuviese $F-$relacionado con X, entonces $Z_{\tilde{e}} = F_*(X_e) = \tilde{F}(X)_{\tilde{e}}$ y por lo tanto $Z_h = (L_h)_*Z_{\tilde{e}} = (L_h)_*F_*X_e = \tilde{F}(X)_h = Y_h$ para todo $h \in H$.

Ahora, dados $X, X' \in \mathfrak{g}$, acabamos de ver que sus imágenes por $\tilde{F}$, Y e Y', están $F-$relacionados. Por el Teorema 3.9, $[X, X']$ y $[Y', Y']$ también están $F-$relacionados y por la unicidad en la definición de $\tilde{F}$ ha de verificarse:

$$\tilde{F}[X, X'] = [Y, Y'] = [\tilde{F}(X), \tilde{F}(X')],$$

concluyéndose que F es en efecto un morfismo de álgebras de Lie. □

Es evidente que la aplicación identidad sobre G, $Id_G : G \to G$, induce el morfismo identidad entre álgebras de Lie, esto es, $\tilde{Id} = Id_{\mathfrak{g}}$. Además, puesto que la aplicación tangente obedece la regla de la cadena, también se verifica que $\widetilde{F_1 \circ F_2} = \tilde{F}_1 \circ \tilde{F}_2$. Como consecuencia de esto se tiene el siguiente

Corolario 3.17. *Grupos de Lie isomorfos tienen álgebras de Lie isomorfas.*

Demostración. Si existe un isomorfismo $F : G \to H$, entonces

$$F_* \circ (F^{-1})_* = (F \circ F^{-1})_* = (Id_H)_*$$

$$(F^{-1})_* \circ F_* = (F^{-1} \circ F)_* = (Id_G)_*$$

De esto se deduce inmediatamente que $\tilde{F} := \psi_H^{-1} \circ F_* \circ \psi_G$ tiene a $\tilde{F}^{-1} := \psi_G^{-1} \circ (F_*)^{-1} \circ \psi_H$ como inversa. □

3.3. Subgrupos y subálgebras de Lie

Para finalizar el capítulo, hablaremos de forma breve de cómo caracterizar los subgrupos de Lie de un grupo de Lie y las subálgebras de su respectiva álgebra de Lie.

Definición 3.18. *Sean G un grupo de Lie y $H \subseteq G$ un subgrupo de G. Se dice que H es un **subgrupo de Lie** de G si H verifica además ser grupo de Lie y ser subvariedad de G.*

En general, dada una subvariedad H de G con estructura de subgrupo, no podemos asegurar que H sea por sí mismo un subgrupo de Lie. Una condición suficiente para esto es que H sea subvariedad regular, como veremos en el siguiente resultado. Sin embargo, no se trata de una condición necesaria (ver Ejemplo 5.26).

Proposición 3.19. *Sean G un grupo de Lie y $H \subset G$ un subgrupo de G que además es subvariedad regular. Entonces H es un subgrupo de Lie G. Además, si H es abierto en G, también es cerrado en G.*

Demostración. Demostremos en primer lugar que H es en efecto un subgrupo Lie, para lo que hay que probar que la operación $\varphi_H : H \times H \to H$ dada por la Definición 3.1 es $\mathcal{C}^\infty$. Como $\varphi_G : G \times G \to G$ es diferenciable, su restricción sobre H, $\varphi_H : H \times H \to G$, también lo es. Por una parte, sabemos que H es cerrado bajo la operación de grupo ($\varphi_H(H \times H) = H$) y por otra que su topología coincide con la de subespacio de G. Utilizando la Observación 2.21 ii), necesariamente la multiplicación $\varphi_H : H \times H \to H$ es diferenciable y por tanto H es un subgrupo de Lie de G.

Supongamos ahora que H es abierto en G. Hemos visto que la traslación a izquierda $L_g : G \to G$ por $g \in G$ es un difeomorfismo, y en particular $L_g : H \to gH := \{gh \text{ con } h \in H\}$ también lo es. Claramente, si $g \in G \backslash H$, se verifica que $gH \subset G \backslash H$ y además gH es abierto por serlo H. Así, podemos escribir:

$$H = G \setminus \left(\bigcup_{g \in G \backslash H} gH \right).$$

y se concluye que H es cerrado. □

Más tarde probaremos el llamado Teorema del subgrupo cerrado (o de Cartan), que afirma que todo subgrupo cerrado de un grupo de Lie G es una subvariedad regular de G, y por el precedente resultado un subgrupo de Lie.

Ejemplo 3.20. *Algunos ejemplos importantes de subgrupos de Lie son los siguientes:*

i) *La circunferencia $\mathbb{S}^1$ es claramente un subgrupo de Lie de $\mathbb{C}^*$.*

ii) *El subconjunto $GL^+(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$ de matrices con determinante positivo es subgrupo porque $det(AB) = det(A)det(B)$. Es abierto por ser $GL^+(n, \mathbb{R}) = det^{-1}(0, \infty)$ y por tanto es una subvariedad regular por la Observación 2.21 i). Por la Proposición 3.19 es un subgrupo de Lie de dimensión n^2.*

iii) *El grupo ortogonal* $O(n) := \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : \ A^T A = Id_n\}$ *es claramente un subgrupo de* $GL(n,\mathbb{R})$. *Sea* $M(n,\mathbb{R})$ *el conjunto de matrices* $n \times n$ *simétricas, que es claramente un subespacio de* $gl(n,\mathbb{R})$ *de dimensión* $n(n+1)/2$ *porque cualquier matriz simétrica queda determinada de forma única por los elementos por encima o por debajo de la diagonal. La aplicación*

$$\begin{aligned} \Phi \colon GL(n,\mathbb{R}) &\to M(n,\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^T A \end{aligned}$$

es diferenciable y verifica que $O(n) = \Phi^{-1}(Id_n)$. *Si probamos que* Φ *es una submersión, aplicando el Teorema 2.22,* $O(n)$ *verificará ser una subvariedad regular de* $GL(n,\mathbb{R})$ *de dimensión* $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$, *y por la proposición precedente un subgrupo de Lie de dicha dimensión. Sea* $A \in O(n)$ *y consideramos la aplicación tangente* $\Phi_* : T_A GL(n,\mathbb{R}) \to T_{\Phi(A)} M(n,\mathbb{R})$. *Podemos identificar los espacios tangentes* $T_A GL(n,\mathbb{R})$ *y* $T_{\Phi(A)} M(n,\mathbb{R})$ *con* $gl(n,\mathbb{R})$ *y con* $M(n,\mathbb{R})$ *respectivamente porque* $GL(n,\mathbb{R})$ *es un subconjunto abierto del espacio vectorial* $gl(n,\mathbb{R})$ *y* $M(n,\mathbb{R})$ *es un espacio vectorial. Dado* $B \in gl(n,\mathbb{R})$, *la curva* $\alpha(t) := A + tB$ *satisface* $\alpha(0) = A$ *y* $\alpha'(0) = B$. *Usando la Definición 2.19, podemos calcular:*

$$\Phi_* B = (\Phi \circ \alpha)'(0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Phi(A+tB) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (A+tB)^T (A+tB) = A^T B + B^T A.$$

Entonces, dada $C \in M(n,\mathbb{R})$,

$$\Phi_*(\frac{1}{2}AC) = \frac{1}{2}A^T AC + \frac{1}{2}C^T A^T A = C.$$

Luego Φ_* *es sobreyectiva y* Φ *una submersión, como queríamos probar.*

Si G es un grupo de Lie y $H \subset G$ es un subgrupo de Lie, esperaríamos que $Lie(H)$ sea un subálgebra de Lie de $Lie(G)$. Estrictamente hablando, dicha afirmación no es cierta en general, ya que los elementos de $Lie(H)$ son campos vectoriales en H y podrían no estar definidos en todo G. Sin embargo, el siguiente resultado nos permite identificar $Lie(H)$ con una subálgebra de $Lie(G)$.

Proposición 3.21. *Sea* $H \subset G$ *un subgrupo de Lie. El subconjunto* $\mathfrak{h}$ *definido por:*

$$\mathfrak{h} := \{X \in Lie(G) \ : \ X_e \in T_e H\}$$

es una subálgebra de Lie de $Lie(G)$ *isomorfa a* $Lie(H)$.

Demostración. Sea $i : H \hookrightarrow G$ la inclusión. En primer lugar, dado que sabemos que H es subvariedad de G, i_* es inyectiva y podemos identificar el espacio tangente en la identidad $T_e H \simeq Lie(H)$ con su imagen por i_*, que es un subálgebra de $Lie(G) \simeq T_e G$. Más concretamente, haciendo uso del Teorema 3.16, para cada $X \in \mathfrak{h}$ llamamos $Y = \tilde{i}(X)$, que es un campo vectorial sobre G. Probando que $Y \in Lie(G)$ y que $Y_e \in T_e H$ conseguiríamos la identificación entre $\tilde{i}(\mathfrak{h})$ y $\mathfrak{h}$.

Para ver que Y es invariante por la izquierda tenemos que comprobar que $Y_{gg'} = (L_g)_* Y_{g'}$ para cualesquiera $g, g' \in G$. Tenemos:

$$Y_{gg'} = \tilde{i}(X)_{gg'} = (L_{gg'})_* i_*(X_e) = (L_g)_*(L_{g'})_* i_*(X_e) = (L_g)_* \tilde{i}(X)_{g'} = (L_g)_* Y_{g'}.$$

Por tanto, $Y \in Lie(G)$. Veamos ahora la segunda condición:

$$Y_e = \tilde{i}(X)_e = (L_e)_* i_*(X_e).$$

Como $(L_e)_* : T_e G \to T_e G$ es la identidad, tenemos que $Y_e = i_*(X_e)$. Por ser i_* inyectiva, podemos identificar a Y_e con un elemento de $T_e H$.

□

Podemos identificar $Lie(H)$ con una subálgebra de $Lie(G)$ aunque los elementos de $Lie(H)$ no sean campos vectoriales invariantes por la izquierda sobre G, ya que no podrían estar definidos fuera de H. El resultado precedente demuestra que todo elemento de $Lie(H)$ se corresponde de forma única con un elemento de $Lie(G)$, determinado por su valor en la identidad.

Concluimos el capítulo calculando el álgebra de Lie del grupo ortogonal $O(n)$.

Ejemplo 3.22. *Consideramos $O(n)$ como subgrupo de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$. En el Ejemplo 3.20 iii) vimos que este espacio es igual a $\Phi^{-1}(Id)$, donde*

$$\begin{aligned} \Phi\colon GL(n,\mathbb{R}) &\to M(n,\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^T A \end{aligned}$$

Sea $B \in O(n)$ y consideramos la inclusión $i : O(n) \hookrightarrow GL(n,\mathbb{R})$. Podemos ver el espacio tangente $T_B O(n)$ como $i_*(T_B O(n)) \subset T_B GL(n,\mathbb{R})$.
En primer lugar, tenemos que la composición $\Phi \circ i$ es una aplicación constante y por tanto su diferencial $(\Phi \circ i)_* = \Phi_* \circ i_*$ es la aplicación nula. Luego $i_*(T_B O(n)) = T_B O(n) \subset Ker\ \Phi_*$ para todo $B \in O(n)$. Por otra parte, la aplicación tangente

$$\Phi_* : T_B GL(n,\mathbb{R}) \to T_{\Phi(B)} M(n,\mathbb{R})$$

es, como se ha visto en el Ejemplo 3.20 iii), una aplicación sobreyectiva entre espacios vectoriales. Por tanto:

$$dim Ker\ \Phi_* = dim T_B GL(n,\mathbb{R}) - dim T_{\Phi(B)} M(n,\mathbb{R}) = dim T_B O(n) \text{ para todo } B \in O(n),$$

así que necesariamente $T_B O(n) = Ker\ \Phi_*$ para todo $B \in O(n)$. En particular, dicha igualdad se tiene para $B = Id$, y como en este caso $\Phi_* C = C^T + C$ para todo $C \in O(n)$, tenemos

$$\mathfrak{o}(n) := T_{Id} O(n) = \{B \in gl(n,\mathbb{R}) : B^T + B = 0\} = \{B \in gl(n,\mathbb{R}) : B \text{ es antisimétrica}\}.$$

Recordemos que podemos identificar el espacio tangente de $GL(n,\mathbb{R})$ en cualquier punto con $gl(n,\mathbb{R})$. La Proposición 3.21 implica que $\mathfrak{o}(n)$ es una subálgebra de $gl(n,\mathbb{R})$ que es isomorfa a $Lie(O(n))$.

Capítulo 4

Acciones de grupos de Lie

Uno de los enfoques más exitosos para el estudio de la geometría fue sugerido por el matemático alemán Felix Klein. De acuerdo con él, la geometría se reduce a un $G-$espacio M, es decir, un conjunto M dotado de una cierta estructura geométrica (e.g. espacio vectorial, variedad diferenciable, etc.) junto con un grupo G de transformaciones sobre el mismo. Como veremos, las propiedades de un grupo actuando sobre M pueden arrojar mucha información sobre las de M, haciendo de este enfoque un poderoso nexo entre la geometría y el álgebra. Un caso particular de este tratamiento se tiene cuando el grupo actúa transitivamente sobre M, esto es, para cada par de puntos de M existe una transformación que lleva uno en el otro. En esta situación, diremos que M es un $G-$espacio homogéneo, y es en esas condiciones donde se tienen resultados importantes.

Comenzaremos el capítulo describiendo el concepto de acciones de grupos de Lie sobre variedades y seguidamente enunciaremos y demostraremos el teorema del rango equivariado. Posteriormente, nos centraremos en el estudio de las acciones transitivas y los correspondientes $G-$espacios homogéneos. Se seguirá como referencia a Lee ([6]) y a Gallier ([2]).

Índice

4.1. Acciones de grupo

Definición 4.1. *Si G es un grupo y M un conjunto, una* ***acción a izquierda de G en M*** *es una aplicación $\theta : G \times M \to M$, escrita $\theta(g, p) \mapsto g \cdot p$, verificando*

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot p) = (g_1 g_2) \cdot p \text{ para todo } g_1, g_2 \in G \text{ y } p \in M,$$

$$e \cdot p = p \text{ para todo } p \in M.$$

Análogamente, se puede definir una acción a derecha $M \times G \to M$ con propiedades análogas.

Introduzcamos algunos conceptos importantes relativos a las acciones de grupos:

Definición 4.2. *Sea $\theta : G \times M \to M$ una acción a izquierda de un grupo G sobre un conjunto M (las definiciones para acciones a derecha son análogas).*

i) Para cualquier $p \in M$, la ***órbita*** *de p bajo la acción θ es el conjunto*

$$G \cdot p = \{g \cdot p : g \in G\}.$$

ii) La acción se dice ***transitiva*** *si dados dos puntos $p, q \in M$, existe un elemento $g \in G$ tal que $g \cdot p = q$. Es decir, $G \cdot p = M$ para cualquier $p \in M$.*

iii) Dado $p \in M$, el ***estabilizador*** *de p es el conjunto de todos los elementos $g \in G$ que fijan p:*

$$Stab_G(p) = \{g \in G : g \cdot p = p\}.$$

$Stab_G(p)$ es claramente un subgrupo de G.

iv) La acción se dice ***libre*** *si el único elemento de G que fija cualquier elemento de M es el elemento neutro. Esto es, $Stab_G(p) = \{e\}$ para todo $p \in M$.*

En lo sucesivo, G será un grupo de Lie y $\mathcal{M}$ una variedad diferenciable. Diremos que la acción (a izquierda o a derecha) es **continua** si lo es la respectiva aplicación. En ese caso, diremos que $\mathcal{M}$ es un G**-espacio**. Si además la acción es diferenciable, $\mathcal{M}$ es un $G-$**espacio regular**.
Dada una acción continua θ de G sobre $\mathcal{M}$, observemos que fijado un punto $g \in G$, la aplicación $\theta_g : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ dada por $\theta_g(p) = \theta(g, p)$ es un homeomorfismo, con $\theta_{g^{-1}}$ su inversa. Además, si θ es diferenciable, θ_g es un difeomorfismo.

Ejemplo 4.3. *Ejemplos clásicos de acciones de grupos de Lie sobre variedades:*

i) La ***acción trivial*** *de G sobre $\mathcal{M}$ dada por $g \cdot p = p$ para todo $g \in G$ es diferenciable y el estabilizador de cada elemento es todo el grupo G.*

ii) La acción natural de $GL(n, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}^n$ dada por la multiplicación por una matriz: $(A, x) \mapsto Ax$ es una acción por la propiedad asociativa del producto de matrices y es $\mathcal{C}^\infty$ porque las componentes de Ax son polinomios que dependen de los coeficientes de A y de x. Como todo vector no nulo es imagen de cualquier otro por una transformación lineal, las únicas órbitas son $\{0\}$ y $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

iii) Podemos restringir la acción de $GL(n, \mathbb{R})$ a $O(n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Como las matrices ortogonales preservan el producto escalar, es fácil ver que las órbitas son esferas centradas en el origen. Más aún, podemos restringir esta acción a $O(n) \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ para hacer que sea transitiva. En efecto, dados dos elementos $p, q \in \mathbb{S}^{n-1}$, basta completar $\{p\}$ y $\{q\}$ a bases ortonormales en $\mathbb{R}^n$. Tomando A y $\tilde{A}$ las matrices ortogonales cuyas columnas están formadas por los vectores de respectivas bases, es fácil comprobar que $\tilde{A}A^{-1}p = q$. La acción es además $\mathcal{C}^\infty$ porque $\mathbb{S}^{n-1}$ es una subvariedad regular de $\mathbb{R}^n$.

iv) Cualquier grupo de Lie G actúa de forma transitiva, diferenciable y libre sobre sí mismo con la traslación a izquierda o a derecha. Dicha acción la podemos restringir a un subgrupo de Lie $H \subset G$, pero en general ya no será transitiva.

4.2. Aplicaciones equivariantes

Definición 4.4. *Sean M y N dos $G-$espacios (a izquierda o derecha). Una aplicación $F : M \to N$ se dice* ***equivariante*** *respecto de las acciones de G sobre M y N si para cada $g \in G$ y para cada $p \in M$ se tiene que:*

$$F(g \cdot p) = g \cdot F(p) \quad \text{si la acción es a izquierda.}$$

$$F(p \cdot g) = F(p) \cdot g \quad \text{si la acción es a derecha.}$$

Equivalentemente, dadas las acciones φ y θ de G sobre M y N respectivamente, se cumple que F es equivariante si, para cada $g \in G$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{F} & N \\ {\scriptstyle \varphi_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_g} \\ M & \xrightarrow{F} & N \end{array}$$

Ejemplo 4.5. *Veamos un par de ejemplos de aplicaciones equivariantes:*

i) Sea $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector no nulo. Definimos las acciones diferenciables de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^n$ y sobre $\mathbb{T}^n$:

$$\varphi(t, (x_1, \dots, x_n)) := (x_1 + tv_1, \dots, x_n + tv_n),$$
$$\theta(t, (z_1, \dots, z_n)) := (e^{2\pi i t v_1} z_1, \dots, e^{2\pi i t v_n} z_n),$$

siendo $t \in \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{T}^n$. Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ el recubrimiento universal del n-toro, es decir, la aplicación dada por $F(x_1, \dots, x_n) = (e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_n})$. Entonces para cualquier $t \in \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{T}^n$ se tiene que

$$\theta_t(F(x_1, \dots, x_n)) = \theta_t(e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_n}) = (e^{2\pi i(x_1 + tv_1)}, \dots, e^{2\pi i(x_n + tv_n)})$$

y

$$F(\varphi_t(x_1, \dots, x_n)) = F(x_1 + tv_1, \dots, x_n + tv_n) = (e^{2\pi i(x_1 + tv_1)}, \dots, e^{2\pi i(x_n + tv_n)}),$$

luego F es equivariante.

ii) Sean G y H grupos de Lie y $F : G \to H$ un morfismos de grupos de Lie. Consideramos la acción natural φ de G sobre sí mismo dada por la traslación a izquierda. Además, se puede comprobar que la condición de morfismo de grupos de F nos permite definir una acción a izquierda θ dada por

$$\theta_g(h) = F(g)h \quad \text{para todo } g \in G, h \in H.$$

Por otra parte, se tiene que F es equivariante respecto de las acciones φ y θ:

$$\theta_g \circ F(g') = F(g)F(g') = F(gg') = F(\varphi_g(g')) = F \circ \varphi_g(g').$$

Probemos el teorema principal de esta subsección, que nos permite relacionar la propiedad de que una aplicación sea equivariante con su rango. En particular, nos será útil a la hora de construir subvariedades regulares.

Teorema 4.6. ***(Teorema del rango equivariado)*** *Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ variedades diferenciables y G un grupo de Lie. Supongamos que $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es una aplicación diferenciable entre variedades que verifica ser equivariante respecto de una $G-$acción transitiva sobre $\mathcal{M}$ y una $G-$acción sobre $\mathcal{N}$, ambas diferenciables. Entonces el rango de F es constante. En particular, los conjuntos de nivel $F^{-1}(c)$ con $c \in \mathcal{N}$ son subvariedades regulares de $\mathcal{M}$.*

Demostración. Sean φ y θ las acciones de G sobre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ respectivamente, y tomamos puntos $p, p_0 \in \mathcal{M}$. Por hipótesis, φ es transitiva y por tanto existe $g \in G$ tal que $\varphi_g(p_0) = p$. Además, puesto que la aplicación tangente es un funtor covariante, de la igualdad $\theta_g \circ F = F \circ \varphi_g$ se tiene que podemos pasar al siguiente diagrama conmutativo, donde solo aparecen espacios vectoriales:

$$\begin{array}{ccc} T_{p_0}\mathcal{M} & \xrightarrow{F_*} & T_{F(p_0)}\mathcal{N} \\ {\scriptstyle (\varphi_g)_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\theta_g)_*} \\ T_p\mathcal{M} & \xrightarrow{F_*} & T_{F(p)}\mathcal{N} \end{array}$$

Como φ_g y θ_g son difeomorfismos y la aplicación tangente de un difeomorfimo entre variedades es un isomorfismo entre sus espacios tangentes para cada punto, entonces las flechas verticales del diagrama son isomorfismos. De esta forma, las aplicaciones $F_* : T_{p_0}\mathcal{M} \to T_{F(p_0)}\mathcal{N}$ y $F_* : T_p\mathcal{M} \to T_{F(p)}\mathcal{N}$ tienen el mismo rango. Como la elección del punto p ha sido arbitraria, necesariamente el rango de F es constante. Por otra parte, del Teorema 2.22 sabemos que los conjuntos de nivel $F^{-1}(c)$ son subvariedades regulares de $\mathcal{M}$ para todo $c \in \mathcal{N}$ y así concluimos la demostración. □

La aplicación del teorema previo a la Teoría de grupos de Lie permite demostrar resultados de gran relevancia:

Corolario 4.7. *Sea $F : G \to H$ un morfismo de grupos de Lie. Se tiene que:*

i) F tiene rango constante.

ii) El núcleo de F es un subgrupo de Lie, cuya codimensión es igual al rango de F.

iii) Si además F es una aplicación inyectiva, $F(G)$ es un subgrupo de Lie de H.

Demostración. Para i), podemos tomar las acciones φ y θ definidas en el Ejemplo 4.5 ii). Como la acción de G sobre sí mismo por traslación a izquierda es transitiva, del teorema anterior se deduce que F tiene rango constante.

Por el Teorema 2.22, el núcleo Ker $F = F^{-1}(e)$ de F es una subvariedad regular de G cuya codimensión es igual al rango de F. Por la Proposición 3.19, Ker F es subgrupo de Lie de G y así hemos probado ii).

Por último, supongamos que F es inyectiva. Como tiene rango constante, por el mismo Teorema 2.22 sabemos que es una inmersión, y de la Observación 2.21 iii) se deduce que $F(G)$ es subvariedad de H. Por otra parte, es claro que $F(G)$ es subgrupo de H.
Falta ver que $F(G)$ tiene estructura de grupo de Lie. Si consideramos la aplicación $\varphi : H \times H \to H$ dada por $\varphi(h_1, h_2) = h_1 h_2^{-1}$, la cual sabemos que es diferenciable, tenemos que $\psi = \varphi\mid_{F(G)\times F(G)}$: $F(G) \times F(G) \to H$ es diferenciable, y que la imagen de ψ está contenida en $F(G)$. Hay que probar que $\psi : F(G) \times F(G) \to F(G)$ sigue siendo diferenciable, hecho que sería inmediato si $F(G)$ fuese subvariedad regular de H.

Observamos que como F es inyectiva, por el punto anterior se ha de verificar que su rango coincide con la dimensión de G. Por tener G dimensión mayor que cero y F rango constante, podemos aplicar el Teorema de la Función Inversa para variedades en todos los puntos $g \in G$ y $F(g) \in F(G)$. Además, el hecho de que F sea inyectiva nos lleva a que la inversa está justamente definida globalmente, por lo que F es un difeomorfismo entre G y $F(G)$ (para más detalles, consultar en [6, p.79, p.660]). Consideramos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "F\times F"] \arrow[d, "\psi_1"'] & F(G) \times F(G) \arrow[d, "\psi"] \\ G \arrow[r, "F"] & F(G) \end{tikzcd}$$

donde $\psi_1 : G \times G \to G$ viene dada por $\psi_1(g_1, g_2) = g_1 g_2^{-1}$. Así, ψ es diferenciable por ser composición de aplicaciones diferenciables. Por todo lo anterior, $F(G)$ es un subgrupo de Lie de H. □

Acabaremos esta subsección con unas aplicaciones del resultado anterior sobre ciertos subgrupos de $GL(n, \mathbb{C})$:

- Grupo especial lineal complejo: $SL(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \ : \ \det A = 1\}$.

- Grupo unitario: $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \;:\; A^*A = Id_n\}$, donde definimos $A^* := \bar{A}^T$.
- Grupo especial unitario: $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$.

Teorema 4.8. *Los espacios $U(n)$, $SL(n, \mathbb{C})$ y $SU(n)$ son subgrupos de Lie de $GL(n, \mathbb{C})$ de dimensión (real) n^2, $2n^2 - 2$ y $n^2 - 1$ respectivamente.*

Demostración. Consideramos la aplicación $\Phi : GL(n, \mathbb{C}) \to M(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : A = A^*\}$ dada por $A \mapsto A^*A$, que es claramente diferenciable y verifica que Ker $\Phi = \Phi^{-1}(Id_n) = U(n)$. Veamos que el rango de Φ es constante. Para ello, consideramos la acción de $GL(n, \mathbb{C})$ sobre sí mismo dada por multiplicación a derecha (que claramente es transitiva por el Ejemplo 4.3 *iv*)) y la acción de $GL(n, \mathbb{C})$ sobre $M(n, \mathbb{C})$ dada por:

$$X \cdot B = B^*XB \text{ para } X \in M(n, \mathbb{C}),\; B \in GL(n, \mathbb{C}).$$

La acción es claramente $\mathcal{C}^\infty$, y Φ es equivariante porque dadas $A, B \in GL(n, \mathbb{C})$ tenemos que:

$$\Phi(AB) = (AB)^*(AB) = B^*A^*AB = B^*\Phi(A)B = \Phi(A) \cdot B.$$

Por el Teorema 4.6, el rango de Φ es constante y así $U(n)$ =Ker Φ es subvariedad regular de $GL(n, \mathbb{C})$, y por la Proposición 3.19 subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{C})$. Veamos ahora cuál es su dimensión. Como el rango de la aplicación es constante, basta calcularlo sobre la identidad $Id_n \in GL(n, \mathbb{C})$. Sea $B \in T_{Id_n}GL(n, \mathbb{C}) = gl(n, \mathbb{C})$ (como en el Ejemplo 3.20 *iii*)) y $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to GL(n, \mathbb{C})$ la curva $\gamma(t) = Id_n + tB$. La curva γ verifica $\gamma(0) = Id_n$ y $\gamma'(0) = B$, así que:

$$\Phi_*B = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\Phi \circ \gamma)(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (Id_n + tB)^*(Id_n + tB) = B + B^*,$$

que es una matriz hermítica, i.e., coincide con su traspuesta conjugada. Recíprocamente, sea A una matriz hermítica. Entonces, por lo anterior es claro que $\Phi_*(\frac{1}{2}A) = A \in$ Im Φ_*. En definitiva, la imagen de Φ_* es el conjunto de todas las matrices hermíticas. Para calcular su dimensión, basta ver que las matrices complejas $n \times n$ tienen dimensión $2n^2$ como espacio vectorial real. Si consideramos las matrices hermíticas como $\mathbb{R}-$espacio vectorial, tenemos que imponer n condiciones a los elementos de la diagonal principal para que sean reales (i.e. que su parte imaginaria sea nula), más luego condiciones adicionales para que si la matriz se escribe como (a_{ij}) se verifique $\bar{a}_{ij} = a_{ji}$ fuera de la diagonal principal. Es decir, se han de imponer otras $2[(n-1) + (n-2) + \cdots + 1] = n(n-1)$ condiciones adicionales. En total, se obtiene que las matrices hermíticas tienen dimensión

$$2n^2 - n - n(n-1) = n^2$$

como espacio vectorial real. Por tanto, co-dim $U(n) = n^2$ y así tiene dimensión $2n^2 - n^2 = n^2$.

Por otra parte, consideremos la aplicación determinante det : $GL(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$, que tiene como núcleo a $SL(n, \mathbb{C})$ y es claramente sobreyectiva. De hecho, estamos en un caso particular del Ejemplo 4.5 ii), así que la aplicación det es equivariante y por el Teorema 4.6 tiene rango constante. Por el Teorema 2.22 i) es una submersión (tiene por tanto rango constante igual a 2) y así $SL(n, \mathbb{C})$ es un subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{C})$ de dimensión $2n^2 - 2$.

Por último, observamos que si $A \in U(n)$, su determinante tiene módulo 1 y así la restricción de la aplicación determinante det : $U(n) \to \mathbb{C}^*$ toma valores en $\mathbb{S}^1$. Claramente es sobreyectiva y siguiendo un razonamiento similar al previo tiene rango constante, es una submersión de rango constante igual a 1 (dimensión de $\mathbb{S}^1$ como variedad diferenciable) y por tanto $SU(n)$ es un subgrupo de Lie de $U(n)$ de dimensión $n^2 - 1$. Probar que la restricción de la acción a $SU(n)$ sigue siendo transitiva requiere un razonamiento idéntico al del Ejemplo 4.3 *iii*). $\square$

4.3. Representaciones

Existe un tipo de acción de grupo de Lie de gran importancia en las Matemáticas y en muchas ramas de la Ciencia, en particular en la Física. Por ejemplo, en Mecánica Cuántica es de extremada utilidad el uso de argumentos de simetría para describir los posibles estados cuánticos de un espacio de Hilbert en general de dimensión infinita. Dicho de una forma coloquial, una representación de un grupo es una descripción del mismo como grupo de transformaciones (i.e. automorfismos). Veámoslo con más detalle para el caso de grupos de Lie. Seguiremos como referencia algunos resultados de [7].

Definición 4.9. *Sea G un grupo de Lie. Llamamos* ***representación (de dimensión finita) de*** *G a un homomorfismo de grupos de Lie $\rho : G \to Aut(V)$ para un cierto espacio vectorial V de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (en general $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).*

Un acción de un grupo G sobre un espacio vectorial V se dice que es **lineal** si para todo $g \in G$, la aplicación de V sobre si mismo que hace corresponder a cada $v \in V$ el elemento $g \cdot v$ es lineal. Es claro que una representación ρ nos permite definir una acción lineal $\mathcal{C}^\infty$ a izquierda de G sobre V, dada por:

$$g \cdot v = \rho(g)v \text{ para } g \in G \text{ y } v \in V.$$

Como vimos en el Corolario 4.7 *ii*), si ρ es inyectiva, la imagen $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ es un subgrupo de Lie de $\mathrm{Aut}(V)$. En ese caso, diremos que la representación es **fiel**, y tendremos un isomorfismo de grupos de Lie entre G y $\rho(G) \subset \mathrm{Aut}(V)$. Más aún, como V tiene dimensión $n < \infty$, podemos fijar una base para V y considerar la identificación canónica $\mathrm{Aut}(V) \cong GL(n, \mathbb{R})$ (o $\mathrm{Aut}(V) \cong GL(n, \mathbb{C})$) dado el caso.

Ejemplo 4.10. *Veamos algunos ejemplos de representaciones:*

i) Si G es un subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$, la inclusión $G \hookrightarrow GL(n, \mathbb{R})$ es una representación fiel.

ii) La aplicación $\rho : \mathbb{T}^n \to GL(n, \mathbb{C})$ dada por

$$\rho(z_1, \dots, z_n) = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_n \end{pmatrix}$$

es una representación fiel de $\mathbb{T}^n$.

iii) La aplicación $\rho : \mathbb{R}^n \to GL(n+1, \mathbb{R})$ que actúa sobre cada vector columna $x \in \mathbb{R}^n$ de la forma

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} Id_n & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una representación fiel del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ visto como grupo de Lie aditivo.

Por último, y en lo que respecta a representaciones de grupos de Lie, vamos a ver un resultado clásico de teoría de representaciones conocido como **Lema de Schur**, que nos aporta una descripción sencilla de los elementos de $\mathrm{Aut}(V)$. Primero demos las siguientes definiciones:

Definición 4.11. *Sean G un grupo y $\rho : G \to Aut(V)$ una representación de G con V un espacio vectorial.*

i) Decimos que un subespacio $W \subset V$ es $G-$invariante si para cada $g \in G$ se verifica que $\rho(g)(W) \subset W$.

ii) La representación ρ es irreducible si no existe ningún subespacio propio de V que sea $G-$invariante.

Definición 4.12. *Sean G un grupo y $\rho : G \to Aut(V)$ una representación de G sobre un espacio vectorial V. Definimos*

$$Aut(V)^G = \{\sigma \in Aut(V) \ : \rho(g) \circ \sigma = \sigma \circ \rho(g), \ \forall g \in G\}.$$

Enunciamos y demostramos ahora el Lema de Schur:

Lema 4.13. ***(Lema de Schur)*** *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado y $\rho : G \to Aut(V)$ una representación $\mathbb{K}$-lineal de un grupo G. Si ρ es irreducible, entonces $Aut(V)^G = \{\lambda Id_V : \lambda \in \mathbb{K}\}$. Es decir, cualquier automorfismo de $Aut(V)^G$ es una homotecia o la aplicación nula.*

Demostración. Sea $\sigma \in \mathrm{Aut}(V)^G$. Como $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado, el polinomio característico $\det(\sigma - XId_V) \in \mathbb{K}[X]$ tiene al menos una raíz $\lambda \in \mathbb{K}$ y por tanto un vector propio $v \neq 0$ asociado al valor propio λ. Para todo $g \in G$ tenemos

$$-\lambda\rho(g) = -\lambda Id_V \circ \rho(g) = \rho(g) \circ (-\lambda Id_V). \tag{4.1}$$

Pero como $\sigma \in \mathrm{Aut}(V)^G$, verifica que $\rho(g) \circ \sigma = \sigma \circ \rho(g)$ para todo $g \in G$. Sumando a la ecuación (4.1) los términos de esta última igualdad y aplicando la propiedad distributiva para la composición se obtiene

$$(\sigma - \lambda Id_V) \circ \rho(g) = \rho(g) \circ (\sigma - \lambda Id_V) \text{ para todo } g \in G,$$

de donde se deduce que el subespacio $\mathrm{Ker}(\sigma - \lambda Id_V)$ de V es $G-$invariante. Como la representación es irreducible, $\mathrm{Ker}(\sigma - \lambda Id_V)$ es o bien el subespacio trivial, caso excluido porque $0 \neq v \in \mathrm{Ker}(\sigma - \lambda Id_V)$, o bien el espacio total, de lo que se sigue que $\sigma = \lambda Id_V$. □

También podemos definir el concepto homónimo para álgebras de Lie cuyo tratamiento es prácticamente análogo. Una **representación (de dimension finita)** de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un morfismo de álgebras de Lie $\omega : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ con V un espacio vectorial. Notamos que ahora el espacio de llegada no es el de automorfismos sino en el de endomorfismos, visto como álgebra de Lie por medio del corchete de Lie definido en el Ejemplo 3.7 ii). El sentido de esta definición radica en que, como vimos en el Corolario 3.15, el álgebra de Lie de $\mathrm{Aut}(V)$ se puede identificar con $\mathrm{End}(V)$. Es decir, si $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ es una representación de un grupo de Lie G, entonces $\tilde{\rho} : \mathfrak{g} = Lie(G) \to \mathrm{End}(V)$ puede verse como una representación de su álgebra de Lie.

El siguiente resultado, que nos limitaremos únicamente a enunciar, establece que todo álgebra de Lie de dimensión finita es isomorfa a una subálgebra de Lie de $gl(n, \mathbb{R})$ (o $gl(n, \mathbb{C})$) para un cierto n. Se puede encontrar una demostración en [10].

Teorema 4.14. ***(Teorema de Ado)*** *Todo álgebra de Lie de dimensión finita admite una representación fiel de dimensión finita.*

Es importante señalar que la versión análoga para grupos de Lie no es cierta. Es decir, existen grupos de Lie que no son isomorfos a ningún subgrupo de $\mathrm{Aut}(V)$. Un ejemplo es el recubrimiento universal del grupo especial lineal $SL(n, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$ (matrices de $GL(n, \mathbb{R})$ con determinante igual a 1), ver [6, p. 563].

4.4. Espacios homogéneos

Un caso particular e interesante en el estudio de las acciones de grupo es cuando este actúa de forma transitiva. En esta situación, una variedad diferenciable $\mathcal{M}$ provista de una $G-$acción transitiva se denomina $G-$**espacio homogéneo** (o **variedad homogénea** si no hace falta especificar el grupo G). Intuitivamente, podemos decir que los espacios homogéneos cumplen la propiedad de que localmente presentan la misma estructura en cada punto.
Estos espacios juegan un papel crucial en muchas áreas de la Geometría Diferencial e incluso de la Física. Veamos en primer lugar algunos ejemplos:

Ejemplo 4.15.

i) *Como vimos en el Ejemplo 4.3 iii), la acción natural de* $O(n)$ *sobre* $\mathbb{S}^{n-1}$ *es transitiva para* $n \geq 2$. *También lo es si restringimos a* $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in O(n) \ : \ \det A = 1\}$. *Por tanto,* $\mathbb{S}^{n-1}$ *es un* $O(n)-$*(o* $SO(n)-$*) espacio homogéneo para* $n \geq 2$.

ii) *Definimos el* ***grupo euclídeo*** $\mathbb{E}^n$ *sobre* $\mathbb{R}^n$*:*

$$\mathbb{E}^n := \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \ A \in O(n), \ b \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Claramente, $\mathbb{E}^n$ *es una subvariedad regular de* $GL(n+1, \mathbb{R})$. *Por otra parte, consideremos el subespacio afín* T *de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *dado por la ecuación implícita* $x_{n+1} = 1$. *Por construcción, las matrices de* $\mathbb{E}^n$ *están asociadas a aplicaciones lineales que dejan fijos todos los elementos de* T. *Identificando* T *con* $\mathbb{R}^n$ *de manera natural, podemos definir la acción*

$$\begin{aligned} \theta\colon \quad & \mathbb{E}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ & \left(\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \right) \mapsto Ax + b. \end{aligned}$$

Es evidente que las aplicaciones inducidas por la acción θ *son difeomorfismos de* $\mathbb{R}^n$ *que preservan la distancia euclídea. Lo primero es claro puesto que* $Ax + b$ *es una traslación compuesta con una rotación, que es diferenciable y con inversa* $y \mapsto A^{-1}(y - b)$ *(recordemos que* A *es ortogonal, en particular invertible). Lo segundo también es inmediato puesto que las traslaciones y rotaciones preservan la distancia euclídea:*

$$d(Ax + b, Ay + b) = \parallel A(x - y) \parallel = \parallel x - y \parallel = d(x, y).$$

Recíprocamente, cualquier difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}^n$ *es de la forma* $x \mapsto Ax + b$ *con* $A \in O(n)$, *es decir, composición de una rotación con una traslación.*
Por otra parte, como cualquier elemento de $\mathbb{R}^n$ *puede ser visto como imagen de otro a través de una traslación, se verifica que* $\mathbb{E}^n$ *actúa por la acción* θ *de forma transitiva sobre* $\mathbb{R}^n$, *así que* $\mathbb{R}^n$ *es un* $\mathbb{E}^n-$*espacio homogéneo.*

iii) *El grupo especial lineal* $SL(2, \mathbb{R})$ *de matrices* 2×2 *actúa de forma diferenciable y transitiva sobre el semiplano complejo* $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \colon Im\ z > 0\}$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Dichas transformaciones reciben el nombre de ***transformaciones de Möbius***. *Veamos que en efecto se trata de una acción transitiva. Sean* $z = z_1 + iz_2$, $u = u_1 + iu_2 \in \mathbb{H}$. *Buscamos una matriz de* $SL(2, \mathbb{R})$ *que envíe* z *a* u, *esto es:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az_1 + b + az_2 i}{cz_1 + d + cz_2 i} = u = u_1 + iu_2.$$

Por tanto, tenemos que

$$u_1 = \frac{(az_1 + b)(cz_1 + d) + acz_2^2}{(cz_1 + d)^2 + c^2 z_2^2} \quad ; \quad u_2 = \frac{-cz_2(az_1 + b) + az_2(cz_1 + d)}{(cz_1 + d)^2 + c^2 z_2^2}.$$

Si hacemos $c = 0$, *entonces* $ad = \det A = 1$ *y se tiene que:*

$$u_1 = \frac{d(az_1 + b)}{d^2} = \frac{z_1 + db}{d^2} \quad ; \quad u_2 = \frac{adz_2}{d^2} = \frac{z_2}{d^2}.$$

De donde obtenemos que

$$d = +\sqrt{\frac{z_2}{u_2}} \Rightarrow u_1 = \frac{u_2}{z_2}\left(z_1 + \sqrt{\frac{z_2}{u_2}}b\right) \Rightarrow b = \frac{u_1\frac{z_2}{u_2} - z_1}{\sqrt{z_2/u_2}}.$$

Como además $a = 1/d = \sqrt{u_2/z_2}$, concluimos que:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{u_2/z_2} & \dfrac{u_1\frac{z_2}{u_2} - z_1}{\sqrt{z_2/u_2}} \\ 0 & \sqrt{z_2/u_2} \end{pmatrix} \cdot z = u.$$

Vamos a enunciar algunos resultados que nos permitan construir y caracterizar espacios homogéneos a partir de grupos de Lie. En primer lugar, definiremos qué entendemos por acción propia y probaremos un lema que nos permitirá construir espacios homogéneos.

Definición 4.16. *Sea $\theta : G \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ una acción continua de un grupo de Lie sobre una variedad diferenciable. Decimos que la acción es **propia** si la aplicación $\Theta : G \times \mathcal{M} \to \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ dada por $(g, p) \mapsto (\theta(g, p), p) = (g \cdot p, p)$ es propia, es decir, si la contraimagen de cualquier conjunto compacto es compacta.*

Lema 4.17. *Sea $\mathcal{M}$ una variedad diferenciable y G un grupo de Lie actuando de forma continua sobre $\mathcal{M}$. Entonces, la acción es propia si, y solo si, para toda sucesión $\{p_i\}$ convergente en $\mathcal{M}$ y para toda sucesión $\{g_i\}$ en G verificándose que $\{g_i \cdot p_i\}$ converge, se tiene que existe alguna subsucesión de $\{g_i\}$ convergente.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $\Theta : G \times \mathcal{M} \to \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ dada por $(g, p) \mapsto (g \cdot p, p)$. Supongamos que la acción de G sobre $\mathcal{M}$ es propia y sean $\{p_i\}_i$ y $\{g_i\}_i$ satisfaciendo la hipótesis del enunciado. Sean también $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ entornos compactos de $p = \lim_i p_i$ y de $q = \lim_i (g_i \cdot p_i)$ respectivamente (recordemos que una variedad diferenciable satisface las propiedades topológicas locales de $\mathbb{R}^n$; en particular, es localmente compacta y podemos tomar $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ con estas condiciones) . Entonces, se tiene que $\Theta(g_i, p_i) \in \mathcal{V} \times \mathcal{U}$ para i suficientemente grande. Es decir, como la acción θ es propia, la sucesión (g_i, p_i) pertenece al compacto $\Theta^{-1}(\mathcal{V} \times \mathcal{U})$ para i suficientemente grande. Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass (ver Teorema A.8) para variedades, existe una subsucesión convergente de $\{(g_i, p_i)\}_i$, y en particular de $\{g_i\}_i$.

$\Leftarrow$) Recíprocamente, asumimos que se verifica la propiedad del enunciado. Sea ahora $K \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ un compacto. Si $\{(g_i, p_i)\}_i$ es una sucesión en $\Theta^{-1}(K)$, entonces $\Theta(g_i, p_i) = (g_i \cdot p_i, p_i) \in K$, y como K es compacto, por Bolzano-Weierstrass obtenemos una subsucesión convergente de $\{(g_i \cdot p_i, p_i)\}_i$ en las condiciones del enunciado, es decir, tenemos una sucesión $\{p_{i_k}\}_k$ convergente y otra sucesión $\{g_{i_k}\}_k$ (no necesariamente convergente) tales que $\{g_{i_k} \cdot p_{i_k}\}_k$ converge. Por hipótesis, $\{g_{i_k}\}_k$ posee una subsucesión convergente que podemos denotar por $\{g_{i_{k_l}}\}_l$. La subsucesión correspondiente de $\{(g_i, p_i)\}_i$, es decir, $\{(g_{i_{k_l}}, p_{i_{k_l}})\}_l$, converge en $G \times \mathcal{M}$, y por ser $\mathcal{M}$ un espacio Hausdorff, K es en particular cerrado y $\Theta^{-1}(K)$ también lo es por continuidad. Por tanto, el límite de la subsucesión convergente de $\{(g_i, p_i)\}$ está en $\Theta^{-1}(K)$ y así $\Theta^{-1}(K)$ es compacto. □

El siguiente teorema nos da una condición suficiente para poder definir una estructura de variedad diferenciable en el espacio cociente de una variedad diferenciable sobre la que actúa un grupo de Lie:

Teorema 4.18. ***(Teorema de la variedad cociente)*** *Supongamos que un grupo de Lie G actúa de forma diferenciable, libre y propia sobre una variedad diferenciable $\mathcal{M}$. Entonces, el espacio de las órbitas $\mathcal{M}/G$ tiene una única estructura de variedad diferenciable de dimensión $\dim \mathcal{M} - \dim G$, y la proyección canónica $\pi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}/G$ es una submersión.*

Demostración. Una demostración de este resultado se puede encontrar en [6, pp.544-547]. □

Ahora sí podemos enunciar y demostrar un teorema que nos permite construir espacios homogéneos como cocientes de grupos de Lie por subgrupos de Lie cerrados.

Teorema 4.19. *Sean G un grupo de Lie y H un subgrupo de Lie cerrado de G. El espacio de clases a izquierda $G/H = \{gH : g \in G\}$ tiene una única estructura de variedad diferenciable de forma que la proyección canónica $\pi : G \to G/H$ es una submersión. La acción a izquierda de G en G/H dada por*

$$g_1 \cdot (g_2 H) = (g_1 g_2)H$$

permite ver a G/H como un $G-$espacio homogéneo.

Demostración. Comencemos observando que, si consideramos la acción de H sobre G por traslación a derecha, entonces $g_1, g_2 \in G$ están en la misma $H-$órbita si, y solo si, $g_1 h = g_2$ para algún $h \in H$, o equivalentemente, g_1 y g_2 están en la misma clase módulo H. Esto quiere decir que las órbitas dadas por la acción a derecha de H en G son precisamente las clases a izquierda de G/H.

Como vimos en el Ejemplo 4.3 *iv*), la acción de H en G es diferenciable y libre. Veamos que además dicha acción es propia. Sean $\{g_i\}$ una sucesión convergente en G y $\{h_i\}$ una sucesión en H tales que $\{g_i h_i\}$ es convergente. Por continuidad de la aplicación $\varphi : G \times G \to G$ dada por $\varphi(g_1, g_2) = g_1^{-1} g_2$, la sucesión $h_i = g_i^{-1}(g_i h_i)$ converge a un punto en G que, como H es cerrado, está en H. Por el Lema 4.17, sabemos que la acción es propia. Ahora estamos en las hipótesis del Teorema 4.18, por lo que G/H tiene una única estructura de variedad diferenciable de forma que la aplicación de paso al cociente $\pi : G \to G/H$ es una submersión. Obviamente, también lo será la aplicación $Id_G \times \pi : G \times G \to G \times G/H$ dada por $(g_1, g_2) \mapsto (g_1, \pi(g_2))$. Consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "m"] \arrow[d, "Id_G \times \pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G \times G/H \arrow[r, "\theta"] & G/H \end{tikzcd}$$

donde:

- m es la operación de grupo de G,
- θ es la acción de G en G/H dada por $\theta(g_1, g_2 H) = (g_1 g_2)H$.

Por otra parte, tenemos que $\pi \circ m : G \times G \to G/H$ es constante en las fibras de $Id_G \times \pi$: dados $g_1 \in G$ y $g, \tilde{g} \in G$ con $gH = \tilde{g}H$, se tiene que

$$\pi \circ m(g_1, g) = \pi(g_1 g) = g_1 g H = g_1 \tilde{g} H = \pi(g_1 \tilde{g}) = \pi \circ m(g_1, \tilde{g}).$$

Por tanto, haciendo uso de la Proposición 2.23, concluimos que θ está bien definida y es diferenciable. Dados dos puntos $g_1 H$, $g_2 H \in G/H$, el elemento $g_2 g_1^{-1} \in G$ satisface $(g_2 g_1^{-1}) g_1 H = g_2 H$, por lo que la acción θ es transitiva, y así podemos ver a G/H como un $G-$espacio homogéneo. □

De hecho, como veremos, se cumple que todo espacio homogéneo es equivalente a uno de la forma G/H en las condiciones del teorema anterior. En primer lugar, probemos que el estabilizador de cualquier acción diferenciable de un grupo de Lie es un subgrupo de Lie cerrado:

Lema 4.20. *Si $\mathcal{M}$ es un $G-$espacio regular dado por una acción θ, entonces para cada $p \in \mathcal{M}$ el estabilizador $Stab_G(p)$ es un subgrupo de Lie cerrado de G.*

Demostración. Para cada $p \in \mathcal{M}$, definimos la aplicación $\rho^{(p)} : G \to \mathcal{M}$ dada por $g \mapsto g \cdot p$. Por una parte, es claro que $Stab_G(p) = (\rho^{(p)})^{-1}(p)$. Por otra, tenemos que $\rho^{(p)}$ es equivariante respecto de las acciones θ y $\delta : G \times G \to G$, $\delta(g_1, g_2) = g_1 g_2$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho^{(p)}"] \arrow[d, "\delta_g"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "\theta_g"] \\ G \arrow[r, "\rho^{(p)}"] & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

En efecto, sea $\tilde{g} \in G$. Entonces:

- $(\theta_g \circ \rho^{(p)})(\tilde{g}) = \theta_g(\tilde{g} \cdot p) = g \cdot (\tilde{g} \cdot p) = (g\tilde{g}) \cdot p.$
- $(\rho^{(p)} \circ \delta_g)(\tilde{g}) = \rho^{(p)}(g\tilde{g}) = (g\tilde{g}) \cdot p.$

Por el Teorema 4.6 del rango equivariado, tenemos que $Stab_G(p)$ es una subvariedad regular de G, y por tanto un subgrupo de Lie por la Proposición 3.19. Que es cerrado se deduce de que $Stab_G(p) = (\rho^{(p)})^{-1}(\{p\})$, con $\mathcal{M}$ un espacio Hausdorff. □

Teorema 4.21. ***(Teorema de caracterización de espacios homogéneos)*** *Sea $\mathcal{M}$ un $G-$espacio homogéneo con G un grupo de Lie. Dado $p \in \mathcal{M}$ arbitrario, la aplicación $F : G/Stab_G(p) \to \mathcal{M}$ dada por $F(gStab_G(p)) = g \cdot p$ es un difeomorfismo equivariante entre variedades diferenciables. En estas condiciones, escribiremos $\mathcal{M} \cong G/Stab_G(p)$.*

Demostración. Por comodidad, escribimos $H := Stab_G(p)$. En primer lugar, veamos que F está bien definida sobre el espacio de las órbitas $G/Stab_G(p)$. En efecto, si $g_1H = g_2H$, entonces $g_1^{-1}g_2 = h \in H$ y

$$F(g_2H) = g_2 \cdot p = g_1(h \cdot p) = g_1 \cdot p = F(g_1H),$$

ya que $h \in H = Stab_G(p)$. Además, F es equivariante respecto de las acciones de G sobre $\mathcal{M}$ y la acción de G sobre G/H (hemos probado que es acción en el Teorema 4.19) puesto que:

$$F(g_1g_2H) = (g_1g_2) \cdot p = g_1 \cdot F(g_2H).$$

Si consideramos las acciones de G sobre G y sobre G/H dadas por la multiplicación por la izquierda, tenemos que $\pi : G \to G/H$ es equivariante respecto de dichas acciones, y por el Teorema 4.6, π tiene rango constante. Como además π es sobreyectiva, conculimos que π es una submersión usando la Proposición 2.22.
Consideramos la aplicación $\rho^{(g)} : G \to \mathcal{M}$ dada por $\rho^{(p)}(g) = g \cdot p$ como en el lema previo. Por tanto, tenemos el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho^{(p)}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{M} \\ G/H \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

donde la aplicación $\rho^{(p)}$ es diferenciable por serlo la acción y verifica ser constante en las fibras de π. En efecto,

$$\rho^{(p)}(\pi^{-1}(\tilde{g}H)) = \{g \cdot p \, : g \in \pi^{-1}(\tilde{g}H)\} = \{\tilde{g}h \cdot p \colon h \in H\} = \{\tilde{g} \cdot (h \cdot p) \colon h \in H\} = \{\tilde{g} \cdot p\}.$$

Aplicando el Teorema 2.23, tenemos que F es diferenciable.
Veamos ahora que F es además biyectiva. Dado $q \in \mathcal{M}$, por ser la acción de G sobre $\mathcal{M}$ transitiva, existe $g \in G$ tal que $F(gH) = g \cdot p = q$. Esto prueba la sobreyectividad, mientras que la inyectividad es evidente:

$$F(g_1H) = g_1 \cdot p = g_2 \cdot p = F(g_2H) \Rightarrow g_2^{-1}g_1 \cdot p = e \cdot p = p \Rightarrow g_2^{-1}g_1 \in Stab_G(p) \Rightarrow g_1H = g_2H.$$

Por ser F equivariante, del Teorema 4.6 se deduce que tiene rango constante. Por ser además biyectiva, la Proposición 2.22 nos asegura que F es un difeomorfismo. □

Concluimos el capítulo con la aplicación de este teorema en los espacios del ejemplo 4.15. De esta forma, espacios familiares pueden expresarse como cocientes de grupos de Lie sobre un subgrupo de Lie cerrado, que en nuestro caso juega el papel del estabilizador de la acción transitiva.

Ejemplo 4.22.

i) *Consideremos de nuevo la acción natural de $O(n)$ sobre $\mathbb{S}^{n-1}$. Fijamos un punto arbitrario, por ejemplo $p = (0,\dots,0,1) \in \mathbb{S}^{n-1}$ el "polo norte". Es sencillo ver que el estabilizador de la acción sobre el punto p es $O(n-1)$. Sea $A \in O(n)$ una matriz ortogonal. Entonces se tiene que:*

$$Ap = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como $A \in O(n)$, sus vectores columna son ortogonales. En particular se tiene, calculando el producto escalar de cada fila con la última, que $a_{nn} = 1$ y $a_{in} = 0$ si $i \neq n$. Entonces:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto es, la matriz A queda determinada por una submatriz ortogonal de $O(n-1)$. En otras palabras, el estabilizador sobre p de la acción considerada es el conjunto de transformaciones ortogonales de $\mathbb{S}^{n-1}$ que dejan fija la última variable. Aplicando el Teorema 4.21, se tiene que $\mathbb{S}^{n-1} \cong O(n)/O(n-1)$. Análogamente, restringiendo la acción al grupo especial ortogonal $SO(n) = SL(n,\mathbb{R}) \cap O(n)$, se puede probar que $\mathbb{S}^{n-1} \cong SO(n)/SO(n-1)$.

ii) *El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{E}^n-$espacio homogéneo tal y como vimos en el Ejemplo 4.15 ii). Consideramos el punto $p = (0,0\dots,0,1) \in \mathbb{R}^n$. El estabilizador de la acción sobre p es $O(n)$. En efecto, sea una matriz $A \in \mathbb{E}^n$, de la forma*

$$A = \begin{pmatrix} T & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } T \in O(n) \text{ y } b \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces:

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } T \in O(n).$$

Por el teorema anterior, $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{E}^n/O(n)$.

iii) *Consideremos de nuevo las transformaciones de Möbius de $SL(2,\mathbb{R})$ actuando sobre el semiplano complejo $\mathbb{H}$. Tomando $i \in \mathbb{H}$, el estabilizador de la acción sobre dicho punto es $SO(2)$:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} i = i \Longleftrightarrow \frac{ai+b}{ci+d} = i \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} ad - bc = d^2 + c^2 \\ bd + ac = 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow d = a, c = -b$$

Luego $Stab_{SL(2,\mathbb{R})}(i) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a^2 + b^2 = 1 \right\} = SO(2).$

En virtud del teorema precedente, tenemos que $\mathbb{H} \cong SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$.

Capítulo 5

Subgrupos uniparamétricos y aplicación exponencial

En este capítulo veremos una serie de resultados importantes y generales de la teoría de grupos y álgebras de Lie. En primer lugar, introduciremos una visión más geométrica del álgebra de Lie de un grupo de Lie por medio de los subgrupos uniparamétricos. Después, definiremos la aplicación exponencial para demostrar una serie de resultados más profundos que ligan el grupo de Lie con su respectiva álgebra de Lie, en particular teoremas de clasificación y correspondencia entre subálgebras de Lie de G y subgrupos de Lie de G. Para esto último utilizaremos la teoría de distribuciones y el teorema de Frobenius, que generaliza la existencia y unicidad de curvas integrales mediante distribuciones involutivas. Por último, enunciaremos y demostramos el Teorema de Cartan o el Teorema del subgrupo cerrado. Dicho teorema nos permitirá dar una caracterización bastante general de subgrupos de Lie de G cerrados vistos como subvariedades regulares de G. Seguiremos como referencia a Lee [6], a Wang, [12], a Warner [11] y a Varadajan [10], entre otros.

Índice

5.1. Subgrupos uniparamétricos

Un **subgrupo uniparamétrico** de un grupo de Lie G es un morfismo de grupos de Lie:

$$\gamma : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow G.$$

Según esta definición, un subgrupo uniparamétrico de G no es un subgrupo algebraico, ya que estamos haciendo referencia al morfismo de grupos. Nuestro objetivo ahora será el de identificar los subgrupos uniparamétricos de G con ciertas curvas sobre la variedad.

Definición 5.1. *Sean $\mathcal{M}$ una variedad, $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ un campo vectorial sobre $\mathcal{M}$ e $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo que contenga al 0. Una curva $\gamma : I \longrightarrow \mathcal{M}$ se dice que es una **curva integral de X** si $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$ para todo $t \in I$. Es decir, en coordenadas locales tenemos que:*

$$X_{\gamma(t)} = X^i(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\gamma(t)} \; ; \; \gamma'(t) = \frac{\partial(x^i \circ \gamma)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\gamma(t)} \Longrightarrow X^i(\gamma(t)) = \frac{\partial(x^i \circ \gamma)}{\partial t} \text{ para todo } t \in I \text{ y } i = 1, \ldots, n.$$

*Diremos que la curva integral γ **comienza** o **pasa** por $p \in \mathcal{M}$ si $\gamma(0) = p$.*

Observación 5.2.

i) Por el Teorema de Picard-Lindenlöf de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales, se verifica que para cada campo $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ y para cada punto $p \in \mathcal{M}$, existe una única curva integral de X que pasa por p.

ii) La regla de la cadena nos proporciona el siguiente resultado: sea $\gamma : I \longrightarrow \mathcal{M}$ una curva integral de un campo $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ y consideramos $\tilde{I} := \{t + a : t \in I\}$. Entonces, la curva $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \to \mathcal{M}$ dada por $\tilde{\gamma} := \gamma(t - a)$ es curva integral de X para todo $a \in \mathbb{R}$.

Es inmediato comprobar que el carácter de curva integral "se conserva" entre campos vectoriales relacionados por aplicaciones diferenciables (ver Definición 3.8):

Proposición 5.3. *Sean $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ una aplicación diferenciable y $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$ campos vectoriales. Entonces, X e Y están $F-$relacionados si, y solo si, para toda curva integral γ de X, se tiene que $F \circ \gamma$ es curva integral de Y.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Sea $\gamma : I \longrightarrow \mathcal{M}$ una curva integral de X. Definimos la curva $\sigma : I \longrightarrow \mathcal{N}$ dada por $\sigma := F \circ \gamma$. Utilizando la regla de la cadena y que los campos están $F-$relacionados tenemos que

$$\sigma'(t) = (F \circ \gamma)'(t) = (F_*)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = (F_*)_{\gamma(t)}(X_{\gamma(t)}) = Y_{F(\gamma(t))} = Y_{\sigma(t)}.$$

Es decir, σ es una curva integral de Y.

$\Longleftarrow$) Sean $p \in \mathcal{M}$, $\varepsilon > 0$ y $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathcal{M}$ una curva integral de X que comienza en p. Por hipótesis, $F \circ \gamma$ es una curva integral de Y que comienza en $F(p)$, esto es:

$$Y_{F(p)} = (F \circ \gamma)'(0) = (F_*)_p(\gamma'(0)) = (F_*)_p(X_p),$$

por lo que X e Y están $F-$relacionados. □

Una forma alternativa de visualizar una familia de curvas integrales asociadas a un campo vectorial es la siguiente. Supóngase $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, definimos la aplicación $\theta_t : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ que envía cada $p \in \mathcal{M}$ al punto que se obtiene siguiendo un tiempo t la curva integral de X que comienza en p. Por otra parte, de los dos puntos de la Observación 5.2 se tiene que $(\theta_t \circ \theta_s)(p) = \theta_{t+s}(p)$. Estas observaciones nos conducen a la siguiente definición:

Definición 5.4. *Llamamos **flujo global** en una variedad $\mathcal{M}$ a una acción a izquierda $\theta : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ sobre $\mathcal{M}$ tal que para todo $s, t \in \mathbb{R}$ y para todo $p \in \mathcal{M}$, se tiene que $\theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t + s, p)$ y $\theta(0, p) = p$.*

Es posible considerar flujos que no están definidos globalmente. Basta pensar, por ejemplo, en un campo vectorial cuya curva integral en un punto no puede extenderse sobre $\mathbb{R}$.
Sea ahora $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathcal{M}$ un abierto tal que, para todo $p \in \mathcal{M}$, el conjunto $\mathcal{D}^{(p)} := \{t \in \mathbb{R} : (t, p) \in \mathcal{D}\}$ es un abierto que contiene al 0. Decimos que una aplicación continua $\theta : \mathcal{D} \to \mathcal{M}$ es un **flujo local (o acción local de grupo uniparamétrico)** si $\theta(0, p) = p$ para todo $p \in \mathcal{M}$ y $\theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t + s, p)$ para cualesquiera $s \in \mathcal{D}^{(p)}$ y $t \in \mathcal{D}^{\theta(s,p)}$ con $t + s \in \mathcal{D}^{(p)}$.
Llamaremos a θ, indistintamente, **flujo local** o **acción local de grupo uniparamétrico** para distinguirlo de la Definición 5.4. Asimismo, empleamos la notación $\theta_t(p) = \theta^{(p)}(t) = \theta(t, p)$.

El teorema de existencia y unicidad de solución para ecuaciones diferenciales nos permite asegurar que un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ genera un flujo local, que llamaremos **flujo generado por** X (para más detalle, ver [6, p.210-215]). Dicho flujo está generado como sigue: dado $p \in \mathcal{M}$, existe un único flujo local

$\theta : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{M}$ definido en un abierto $\mathcal{D}$ maximal tal que $\theta^{(p)} : \mathcal{D}^{(p)} \longrightarrow \mathcal{M}$ es la (única) curva integral de X que pasa por p. Diremos que X es **completo** si genera un flujo global, i.e, si $\mathcal{D}^{(p)} = \mathbb{R}$ para cualquier $p \in \mathcal{M}$. En lo sucesivo, nos interesará probar que los campos invariantes por la izquierda son completos. Para ello, probemos el siguiente lema:

Lema 5.5. *Sean $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ un campo vectorial y θ el flujo local que genera. Supongamos que existe un ε tal que, para todo $p \in \mathcal{M}$, el dominio $\mathcal{D}^{(p)}$ de $\theta^{(p)}$ contiene a $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Entonces X es completo.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que existe un $p \in \mathcal{M}$ para el cual el dominio $\mathcal{D}^{(p)}$ de $\theta^{(p)}$ está acotado superiormente. Por hipótesis, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\theta^{(p)}(t)$ está definido al menos para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Sea $a = \sup \mathcal{D}^{(p)}$ y consideramos un número positivo t_0 verificando $a - \varepsilon < t_0 < a$. Sea $q = \theta^{(p)}(t_0)$. Definimos una curva $\gamma : (-\varepsilon, t_0 + \varepsilon) \longrightarrow \mathcal{M}$ dada por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \theta^{(p)}(t) & \text{si } -\varepsilon < t < a \\ \theta^{(q)}(t - t_0) & \text{si } t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon \end{cases}$$

Veamos en primer lugar que está bien definida donde se solapan. Utilizando las propiedades de flujo local, si $t - t_0 < a$, se tiene que $\theta^{(q)}(t - t_0) = \theta(t - t_0, q) = \theta(t - t_0, \theta^{(p)}(t_0)) = \theta(t - t_0, \theta(t_0, p)) = \theta(t, p) = \theta^{(p)}(t)$. Teniendo en cuenta ahora la Observación 5.2 ii), tenemos que γ es la curva integral de X que pasa por p, y al estar definida en $(-\varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, por la elección de t_0 se llega a una contradicción con que $a = \sup \mathcal{D}^{(p)}$. □

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente resultado:

Teorema 5.6. *Sean G un grupo de Lie y $X \in Lie(G)$. Entonces X es completo.*

Demostración. Sean $\theta : \mathcal{D} \longrightarrow G$ el flujo de X y $\varepsilon > 0$ tal que $\theta^{(e)}$ esté definido en $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Consideramos un elemento $g \in G$ arbitrario. Por ser X invariante por la izquierda, X está L_g-relacionado consigo mismo, y por la Proposición 5.3, se tiene que $L_g \circ \theta^{(e)} = \theta^{(g)}$ es una curva integral de X que empieza en g, ya que $\theta^{(g)}(0) = \theta(0, g) = g$ por las propiedades de flujo. Como g era arbitrario, se verifica que $\theta^{(g)}$ está definida para todo $g \in G$ al menos en $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Por tanto, estamos en las condiciones del lema anterior, que nos garantiza que X es completo. □

Este resultado que acabamos de probar es esencial, pues nos permite dar una visión alternativa del álgebra de Lie de un grupo de Lie.

Teorema 5.7. *Dado G un grupo de Lie, se verifica que los subgrupos uniparamétricos de G son precisamente las curvas integrales de los campos vectoriales invariantes a izquierda con origen en e.*

Demostración. Este teorema nos está dando una correspondencia biunívoca entre dos categorías diferentes: subgrupos uniparamétricos de G, que son homomorfismos de grupos de Lie y campos vectoriales invariantes por la izquierda. Probemos por tanto la doble implicación.

$\Longleftarrow$) Sea $X \in Lie(G)$ y γ su curva integral pasando por e. Recordamos que, por el teorema anterior, X es completo y así γ está definida en todo $\mathbb{R}$. Sea $s \in \mathbb{R}$ y $g = \gamma(s)$. Por otra parte, es claro que la curva $\sigma(t) := L_g(\gamma(t)) = g \cdot \gamma(t) = \gamma(s) \cdot \gamma(t)$ es la curva integral de X que empieza en g. Utilizando la Observación 5.2 ii), también lo es $\tau(t) := \gamma(s + t)$. Por el punto i) de la misma observación concluimos que dichas curvas han de ser la misma, con lo que:

$$\gamma(s) \cdot \gamma(t) = \gamma(s + t).$$

Como además $\gamma(0) = e$, se concluye que $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow G$ es un subgrupo uniparamétrico de G.

$\Longrightarrow$) Sea ahora $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow G$ un subgrupo uniparamétrico de G. Consideramos el morfismo de álgebras de Lie inducido por γ:

$$\tilde{\gamma} : Lie(\mathbb{R}) = \langle d/dt \rangle \longrightarrow Lie(G).$$

De forma análoga al Teorema 3.16, sea el campo $X := \tilde{\gamma}(d/dt)$. Como vimos en la demostración de dicho teorema, es el único campo vectorial sobre G invariante a izquierda que está $\gamma-$relacionado con d/dt. Por tanto, para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\gamma'(t_0) = \gamma_* \left(\frac{d}{dt}\right)_{t_0} = X_{\gamma(t_0)},$$

pero esto nos está diciendo precisamente que γ es la curva integral de X que empieza en $\gamma(0) = e$. □

El teorema anterior nos proporciona una manera alternativa de concebir el álgebra de Lie de un grupo de Lie G. Recapitulando: introdujimos primeramente $Lie(G)$ en la Definición 3.10 como el conjunto de campos vectoriales invariantes a izquierda sobre G, habiendo visto previamente que es un espacio vectorial, pero desconociendo su dimensión. Inmediatamente después, probamos en el Teorema 3.11 que $Lie(G)$ se puede identificar con el espacio vectorial T_eG, de dimensión finita igual a la que tiene G como variedad, y por tanto más fácil de trabajar con él. Ahora, este último teorema nos aporta una visión geométrica en términos de curvas integrales que complementa a la puramente algebraica que teníamos hasta ahora.
En definitiva, tenemos la correspondencia biunívoca:

$$T_eG \longleftrightarrow Lie(G) \longleftrightarrow \{ \text{ Subgrupos uniparamétricos de } G \}. \tag{5.1}$$

Dado $X \in Lie(G)$, llamaremos **subgrupo uniparamétrico generado por** X al subgrupo uniparamétrico de G que se obtiene de esta forma, es decir, a la curva integral de X que pasa por la identidad.

Por otra parte, es inmediato caracterizar los subgrupos uniparamétricos de los subgrupos de Lie:

Proposición 5.8. *Sean G un grupo de Lie y $H \subseteq G$ un subgrupo de Lie. Los subgrupos uniparamétricos de H son aquellos subgrupos uniparamétricos γ de G tales que $\gamma'(0)$ está en T_eH.*

Demostración. Sea $\gamma : \mathbb{R} \to H$ un subgrupo uniparamétrico de H e $i : H \hookrightarrow G$ la inclusión. Entonces, la composición

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\ \gamma\ } H \xhookrightarrow{\ i\ } G$$

es un morfismo de grupos de Lie y por tanto un subgrupo uniparamétrico de G.

Recíprocamente, sea $\gamma : \mathbb{R} \to G$ un subgrupo uniparamétrico de G generado por el campo de vectores $X \in Lie(G)$ para el cual suponemos que $X_e = \gamma'(0) \in T_eH$. Utilizando el resultado dado por la Proposición 3.21, consideramos $\delta : \mathbb{R} \to H$ el subgrupo uniparamétrico de H generado por el campo de vectores Y de H, donde $\tilde{i}(Y) = X$. En estas condiciones, y como $i_* : T_eH \to T_eG$ es inyectiva al ser H subvariedad de G, se tiene que $X_e = i_*(Y_e) = i_*(X_e)$ y por lo tanto $\gamma'(0) = X_e = Y_e = \delta'(0)$. Más aún, componiendo con la inclusión podemos ver a $i \circ \delta$ como un subgrupo uniparamétrico de G con el mismo valor para γ' en el origen. Por la unicidad, $\gamma = i \circ \delta$. □

5.2. Aplicación exponencial y resultados de la Teoría de Lie

El concepto de aplicación exponencial está íntimamente ligado al de geodésica, cuyo campo de estudio es la Geometría Riemanniana. Sin embargo, nosotros la utilizaremos en el contexto de grupos y álgebras de Lie, en particular para el estudio de los grupos uniparamétricos.

Definición 5.9. *Sea G un grupo de Lie. Llamamos **aplicación exponencial** a la aplicación definida por:*

$$\begin{aligned} \exp\colon\ Lie(G) &\longrightarrow G \\ X &\longmapsto \gamma(1), \end{aligned}$$

donde γ es la curva integral de X que empieza en e.

Observación 5.10. *Es inmediato comprobar a partir de la definición previa que, para cualquier* $X \in Lie(G)$*, tenemos que* $\gamma(s) := \exp(sX)$ *es el subgrupo uniparamétrico de* G *generado por* X*. En efecto, si* $\tau : \mathbb{R} \longrightarrow G$ *es dicho subgrupo uniparamétrico y tomamos* $s \in \mathbb{R}$*, entonces* $\tilde{\tau}(t) := \tau(st)$ *es la curva integral de* sX *con* $\tilde{\tau}(0) = e$*. Así que* $\gamma(s) = \exp(sX) = \tilde{\tau}(1) = \tau(s)$*.*

Ejemplo 5.11. *Algunos ejemplos de aplicación exponencial:*

i) Sea V *un* $\mathbb{K}-$*espacio vectorial de dimensión* n*, y fijamos una base* $\{e_1, \ldots, e_n\}$*. Ahora, consideramos* $Lie(V) = V$ *mediante la identificación del álgebra de Lie con el espacio tangente en el* 0*. Por otra parte, es claro que dado* $i \in \{1, \ldots, n\}$*, la curva* $\gamma^{(i)}(t) = te_i$ *es curva integral del campo* $X^{(i)} = e_i$*, que además comienza en* $(0, \ldots, 0) \in V$*. Así, tenemos que* $\exp(X^{(i)}) = \gamma^{(i)}(1) = e_i$ *y en consecuencia la aplicación exponencial coincide con la identidad sobre* V*.*

ii) Dada la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$*, su álgebra de Lie puede ser identificada con la recta* $\{it \colon t \in \mathbb{R}\}$*. La aplicación exponencial para* $\mathbb{S}^1$ *visto como grupo de Lie se calcula como* $\gamma(1)$*, donde* γ *es la solución de la EDO* $\gamma'(t) = i\gamma(t)$*. Es decir,* $\gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$*, por lo que la definición de aplicación exponencial coincide con la de función exponencial sobre* $\mathbb{C}$ *ya conocida.*

Una vez dados a conocer estos ejemplos, procedemos a probar una lista de propiedades generales sobre la aplicación exponencial, que posteriormente usaremos de forma reiterada.

Proposición 5.12. *Sea* G *un grupo de Lie. Entonces se cumple que:*

i) La aplicación exponencial $\exp$ *es diferenciable.*

ii) Para todo $X \in Lie(G)$ *y cualesquiera* $s, t \in \mathbb{R}$*, se tiene que* $\exp[(s + t)X] = \exp(sX)\exp(tX)$*.*

iii) Para todo $X \in Lie(G)$*, se tiene que* $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$*.*

iv) Para cualesquiera $X \in Lie(G)$ *y* $n \in \mathbb{Z}$*, se cumple* $(\exp X)^n = \exp(nX)$*.*

v) La aplicación diferencial en el cero de $Lie(G)$*,* $(\exp_*)_0 : T_0Lie(G) \to T_eG$*, es la aplicación identidad, identificando tanto* $T_0Lie(G)$ *como* T_eG *con* $Lie(G)$*.*

vi) Existe un entorno $\mathcal{U}$ *de* $0 \in Lie(G)$ *tal que la restricción de* $\exp$ *a* $\mathcal{U}$ *es un difeomorfismo en un entorno de* $e \in G$*.*

Demostración. Para el punto $i)$, sean $X \in Lie(G)$ y $g \in G$ y definimos en $G \times Lie(G)$ el siguiente campo vectorial:

$$V_{g,X} = (X_g, 0) \in T_gG \times T_XLie(G) \cong T_{g,X}(G \times Lie(G)).$$

La curva integral de V que empieza en (g, X) es justamente $\sigma(t) = (g\exp(tX), X)$, y por tanto el flujo que genera es $\theta_t(g, X) = (g\exp(tX), X)$. Si denotamos por $\pi_G : G \times Lie(G) \to G$ la proyección sobre la primera coordenada, entonces para $t = 1$ y $g = e$ se cumple

$$\pi_G \circ \theta_1(e, X) = \pi_G(\exp X, X) = \exp X.$$

Esto es, $\exp X$ es composición de aplicaciones diferenciables, y por tanto diferenciable.
Los puntos $ii)$ y $iii)$ se deducen de forma inmediata del hecho que $\exp(sX) = \gamma(s)$ es un homomorfismo de grupos por la Observación 5.10. La propiedad $iv)$ se puede probar fácilmente por inducción y utilizando el punto $ii)$. Para $n = 2$, $(\exp X)^2 = \exp X \exp X = \exp(X + X) = \exp(2X)$. Si asumimos que la igualdad es cierta para $n - 1$ con $n > 1$, entonces

$$(\exp X)^n = \exp X \cdot (\exp X)^{n-1} = \exp X \cdot \exp[(n - 1)X] = \exp[(1 + n - 1)X] = \exp(nX).$$

De forma análoga, procediendo por inducción y haciendo uso de $iii)$, se deduce la igualdad para $n < 0$.

Para v), sean $X \in Lie(G)$ arbitrario, $\gamma : \mathbb{R} \to G$ el subgrupo uniparamétrico generado por X y $\sigma : \mathbb{R} \to Lie(G)$ la curva dada por $s \mapsto sX$. Entonces se cumple que $\sigma'(s) = X$ y

$$(\exp_*)_0 X = (\exp_*)_0(\sigma'(0)) = (\exp \circ \sigma)'(0) = \frac{d}{dt}(\exp tX)_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(t))_{t=0} = X_{\gamma(0)} = X_e.$$

Es decir, $(\exp_*)_0$ es la aplicación identidad en $Lie(G)$. Por ser la aplicación diferencial un isomorfismo de espacios vectoriales, utilizando el Teorema de la Función Inversa se deduce inmediatamente vi). □

5.2.1. Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff

Si estuviéramos trabajando con la función exponencial usual en $\mathbb{R}$, la ecuación

$$e^x e^y = e^z$$

tendría fácil solución: $z = x + y$. Sin embargo, si nos planteamos la ecuación

$$\exp X \cdot \exp Y = \exp Z$$

con $X, Y, Z \in Lie(G)$, la solución $Z = X + Y$ solo es válida si $[X, Y] = 0$. La fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (de forma abreviada BCH) da precisamente una expresión para Z que depende del corchete de Lie $[X, Y]$.
En primer lugar, es sencillo probar una expresión de primer orden para $\exp X \cdot \exp Y$.

Proposición 5.13. *Sea G un grupo de Lie. Para cualesquiera $X, Y \in Lie(G)$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que la siguiente expresión es cierta para todo $t \in I := (-\varepsilon, \varepsilon)$:*

$$\exp(tX) \cdot \exp(tY) = \exp[t(X + Y) + \mathcal{O}(t^2)],$$

donde $\mathcal{O}(t^2) : I \to Lie(G)$ es una función $\mathcal{C}^\infty$ tal que $\frac{\mathcal{O}(t^2)}{t^2}$ está acotado en $t = 0$.

Demostración. Por la Proposición 5.12 vi), para un cierto $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, la curva

$$\begin{aligned} \Lambda \colon I &\longrightarrow Lie(G) \\ t &\longmapsto \exp^{-1}(\exp(tX) \cdot \exp(tY)) \end{aligned}$$

es diferenciable. Obviamente se tiene que $\Lambda(0) = 0$ y

$$\exp(tX) \cdot \exp(tY) = \exp \Lambda(t) \text{ si } t \in I.$$

Probemos que el vector tangente en $t = 0$ de $\exp(tX) \cdot \exp(tY)$ es $X_e + Y_e$.
Para un caso general, sean α y β curvas en G verificando que $\alpha(0) = \beta(0) = e$ y sus vectores tangentes en el origen $\alpha'(0) = u, \beta'(0) = v$. Entonces el vector tangente de la curva $\gamma(t) = \alpha(t) \cdot \beta(t)$ en $t = 0$ es

$$\begin{aligned} \gamma_* \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} &= (\alpha \cdot \beta)_* \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{d\alpha}{dt} \cdot \beta\right)_{t=0} + \left(\alpha \cdot \frac{d\beta}{dt}\right)_{t=0} \\ &= \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t=0} \cdot \beta(0) + \alpha(0) \cdot \left(\frac{d\beta}{dt}\right)_{t=0} = \alpha'(0) \cdot \beta(0) + \alpha(0) \cdot \beta'(0) = u + v. \end{aligned}$$

Visto esto, se tiene por tanto que

$$\Lambda'(0) = ((\exp_*)_0)^{-1} \left[\exp(tX)' + \exp(tY)'\right]_{t=0} \overset{(*)}{=} \left[\exp(tX)' + \exp(tY)'\right]_{t=0} = X_e + Y_e \equiv X + Y,$$

donde en (*) hemos usado la Proposición 5.12 v) y en la última hemos realizado la usual identificación entre vectores de T_eG y campos vectoriales de $Lie(G)$. Así, el Teorema de Taylor nos da la expresión

$$\Lambda(t) = \exp^{-1}(\exp(tX) \cdot \exp(tY)) = t(X + Y) + \mathcal{O}(t^2) \text{ para todo } t \in I,$$

donde $\mathcal{O}(t^2) : I \to Lie(G)$ es una función $\mathcal{C}^\infty$ tal que $\frac{\mathcal{O}(t^2)}{t^2}$ está acotado en $t = 0$. Puesto que hemos tomado $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ un entorno de 0 tal que la aplicación exponencial es un difeomorfismo (en particular biyectiva), podemos aplicar exp a ambos lados de la igualdad para obtener así la igualdad del enunciado:

$$\exp(tX) \cdot \exp(tY) = \exp[t(X+Y) + \mathcal{O}(t^2)] \text{ para todo } t \in I.$$

□

El resultado anterior solamente nos da una expresión en primer orden. Existe, sin embargo, una expresión general para la fórmula BCH a partir de una definición recursiva de los coeficientes que aparecen en la serie de Taylor. Brevemente, buscamos una expresión del tipo

$$\exp(tX) \cdot \exp(tY) = \exp(C(t, X, Y)), \text{ donde } C(t, X, Y) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k c_k(X, Y).$$

En [10, p.114-121] se demuestra rigurosamente que los coeficientes c_k satisfacen la fórmula recursiva, para $k \geq 1$,

$$(k+1)c_{k+1}(X,Y) = \frac{1}{2}[X-Y, c_k(X,Y)] + \sum_{p\geq 1, 2p\leq n} K_{2p} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_{2p}>0 \\ k_1+\cdots+k_{2p}=n}} [c_{k_1}(X,Y), [\dots[c_{k_{2p}}(X,Y), X+Y]\dots],$$

bajo la condición de que $c_1(X,Y) = X+Y$ como se ha visto en la proposición anterior y donde los coeficientes K_{2p} son los del desarrollo en serie de

$$f(z) = \frac{z}{1-e^{-z}} - \frac{1}{2}z = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} K_{2p} z^{2p}.$$

Los primeros términos del desarrollo son [10]

$$\exp(tX) \cdot \exp(tY) = \exp\left\{t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + \frac{t^3}{12}([[X,Y],Y] - [[X,Y],X]) + \dots\right\}.$$

Como anticipamos al comienzo de esta subsección, la expresión $\exp X \cdot \exp Y = \exp(X+Y)$ solamente es válida si $[X,Y] = 0$.

5.2.2. Clasificación de grupos y álgebras de Lie

De la fórmula BCH se deduce el siguiente corolario:

Corolario 5.14. *Un grupo de Lie G conexo es conmutativo si y solo si su álgebra de Lie es conmutativa.*

Demostración. $\Leftarrow$) Si $Lie(G)$ es conmutativa, es claro que para cualesquiera $X, Y \in Lie(G)$, tenemos que $[X,Y] = XY - YX = 0$ y por la fórmula BCH

$$\exp X \cdot \exp Y = \exp(X+Y) = \exp(Y+X) = \exp Y \cdot \exp X.$$

Esta igualdad implica que G es abeliano porque la aplicación exponencial se restringe a un difeomorfismo en un entorno abierto $\mathcal{U}$ de 0 en su imagen $\mathcal{V} := \exp(\mathcal{U})$. Nos faltaría probar que $\mathcal{V}$ genera todo el grupo G. Sea $\mathcal{S}$ el subgrupo generado por $\mathcal{V}$, esto es

$$< \mathcal{V} >= \mathcal{S} = \{g_1^{p_1} \dots g_k^{p_k} \text{ con } k, p_1, \dots, p_k \in \mathbb{Z} \text{ y } g_1, \dots, g_k \in \mathcal{V}\}.$$

Evidentemente $\mathcal{S}$ es no vacío y es abierto puesto que para cada $g \in \mathcal{S}$ se tiene que $g \in g\mathcal{V} = \{g \cdot u \text{ con } u \in \mathcal{V}\} \subset \mathcal{S}$ (recordamos que $g\mathcal{V} = L_g(\mathcal{V})$ y L_g es un difeomorfismo, en particular $L_g(\mathcal{V})$ es abierto). Por otra

parte, $\mathcal{S}$ es a su vez cerrado, ya que si $g \in G \setminus \mathcal{S}$, necesariamente el abierto $g\mathcal{V}$ está contenido en $G \setminus \mathcal{S}$. Si intersecase a $\mathcal{S}$, i.e., $g \cdot u \in \mathcal{S}$ para algunos $g \in G$ y $u \in \mathcal{V}$, tendríamos que $g = guu^{-1} \in \mathcal{S}$, suponiendo esto una contradicción con nuestra elección de $g \in G \setminus \mathcal{S}$.
Por ser $\mathcal{S}$ un subconjunto no vacío , abierto y cerrado a la vez, de un espacio conexo, necesariamente ha de ser $G = \mathcal{S}$, como queríamos probar.
$\Rightarrow$) Recíprocamente, supongamos que G es abeliano. Para cualesquiera $X, Y \in Lie(G)$ vemos que $\exp X \cdot \exp Y = \exp Y \cdot \exp X$, y por la fórmula BCH se tiene que $\mathcal{O}(t^2) = 0$, o equivalentemente, que $[X, Y] = 0$. Por tanto, $Lie(G)$ es conmutativo. □

Observamos que la condición de que el grupo de Lie sea conexo es crucial, pues este resultado no es cierto en general. Por ejemplo, si G es un grupo de Lie abeliano y conexo y H es un grupo de Lie no abeliano y finito, entonces $G \times H$ es un grupo de Lie no abeliano cuya álgebra de Lie es conmutativa: $Lie(G \times H) \cong Lie(G)$ ya que $Lie(H) \cong \{0\}$ es trivial. Recordamos que el álgebra de Lie es un espacio vectorial de la misma dimensión que su grupo de Lie. En este caso, un grupo finito tiene dimensión cero.

En las condiciones del corolario anterior (G conexo), la equivalencia entre la conmutatividad del grupo y la de su álgebra de Lie no es la única propiedad. Existe además un teorema de clasificación para grupos abelianos conexos.

Teorema 5.15. *Cualquier grupo de Lie G conexo y abeliano es isomorfo a $\mathbb{R}^\alpha \times \mathbb{S}^\beta$.*

Demostración. En lo sucesivo, consideramos $Lie(G) \cong \mathbb{R}^t$ para algún $t \in \mathbb{N}$ vía la identificación del álgebra de Lie con el espacio tangente en la identidad. En particular, podemos ver al espacio vectorial $Lie(G)$ como un grupo de Lie con la suma de vectores. Por una parte, tenemos que la aplicación exponencial $\exp : Lie(G) \to G$ es diferenciable por la Proposición 5.12 *i*). Además, puesto que G es conexo y abeliano, el álgebra $Lie(G)$ es es conmutativa por el Corolario 5.14 y la fórmula BCH se reduce a $\exp(X + Y) = \exp(X) \cdot \exp(Y)$. Esto último equivale a decir que exp preserva la operación de grupos. En definitiva, la aplicación exponencial es, bajo estas condiciones, un morfismo de grupos de Lie.

Como vimos en el Corolario 4.7, el núcleo de cualquier morfismo de grupos de Lie es una subvariedad regular, y por tanto un subgrupo de Lie. En particular lo será el núcleo de la aplicación exponencial, $Ker(\exp)$. Sea $\mathcal{U}$ un entorno abierto de $0 \in Lie(G)$ sobre el cual la aplicación exponencial se restringe a un difeomorfismo. Entonces es claro que $Ker(\exp) \cap \mathcal{U} = \{0\}$ y por tanto $\{0\}$ es abierto en la topología de subespacio de $Ker(\exp)$. Más aún, puesto que las traslaciones L_X de vector X en $Lie(G)$ son difeomorfismos, entonces $L_X(\{0\}) = \{X\}$ es abierto para cualquier $X \in Lie(G)$. Así, $Ker(\exp)$ tiene la topología discreta y es isomorfo a $\mathbb{Z}^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ (para más detalles sobre esta última afirmación, consultar [5, p.12]).

Por otra parte, como vimos en la demostración del corolario anterior, al ser G conexo y $\exp(\mathcal{U})$ abierto en G, necesariamente $\langle \exp(\mathcal{U}) \rangle = G$. Por tanto, dado $g \in G$, existen $X_1, \dots X_n \in \mathcal{U}$ y $r_1, \dots r_n \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$g = \exp(X_1)^{r_1} \cdots \exp(X_n)^{r_n} = \exp(r_1 X_1) \cdots \exp(r_n X_n) = \exp(\underbrace{r_1 X_1 + \dots r_n X_n}_{\in Lie(G)}),$$

donde hemos utilizado la Proposición 5.12 *ii*) y *iv*) y de nuevo el hecho de que $Lie(G)$ sea conmutativa. Así, hemos probado que la aplicación exponencial es sobreyectiva.
Por el Primer Teorema de Isomorfía se tiene que G es isomorfo a $Lie(G)/Ker(\exp)$. Identificando a $Lie(G)$ con el grupo aditivo $\mathbb{R}^t$, donde $t \geq k$ dado que $Ker(\exp)$ es una subvariedad de $Lie(G)$, podemos escribir:

$$G \cong \mathbb{R}^t/\mathbb{Z}^k = (\mathbb{R}^{t-k} \times \mathbb{R}^k)/\mathbb{Z}^k = \mathbb{R}^{t-k} \times \mathbb{T}^k = \mathbb{R}^\alpha \times \mathbb{S}^\beta,$$

siendo en nuestro caso $\alpha = t - k$ y $\beta = k$. □

Ejemplo 5.16. *Si consideramos el grupo de Lie* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *provisto del producto, observamos que se identifica de manera inmediata con* $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{S}$ *vía el isomorfismo* $re^{i\theta} \mapsto (r, e^{i\theta})$*. Por último, es inmediato ver que* $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ *es isomorfo a* $(\mathbb{R}, +)$ *vía la aplicación logaritmo.*

5.2.3. Correspondencia entre subgrupos y subálgebras de Lie

Dado un subgrupo de Lie $H \subset G$, es natural preguntarse cómo relacionar $Lie(H)$ con $Lie(G)$. Ya vimos en la Proposición 3.21 que podemos identificar $Lie(H)$ con una subálgebra de $Lie(G)$ sin más que hacer uso de las definiciones pertinentes. Nuestra pregunta ahora es si se puede encontrar una correspondencia en sentido inverso. Es decir, dado un grupo de Lie G y una subálgebra $\mathfrak{h} \subset Lie(G)$, ¿existe un subgrupo de Lie H de G tal que $Lie(H) \simeq \mathfrak{h}$? Para dar respuesta a esta pregunta hemos de introducir primero una serie de conceptos previos.

Definición 5.17. *Sean* $\mathcal{M}$ *una variedad diferenciable de dimensión* n *y* $k \in \mathbb{N}$ *con* $0 < k \leq n$*.*

i) Una ***distribución de dimensión*** k *es una familia* $\mathfrak{D} = \{\mathfrak{D}_p \subset T_p\mathcal{M}$ *para cada* $p \in \mathcal{M}\}$*, donde* $\mathfrak{D}_p \subset T_p\mathcal{M}$ *es un subespacio vectorial de dimensión* k *para cada* $p \in \mathcal{M}$*. Decimos que* $\mathfrak{D}$ *es* ***diferenciable*** *si cada* $p \in \mathcal{M}$ *posee un entorno abierto* $\mathcal{U}$ *y existen* k *campos vectoriales* $X_1, \ldots, X_k$ *que generan* $\mathfrak{D}$ *en cada punto de* $\mathcal{U}$*.*

ii) Una distribución diferenciable se dice ***involutiva*** *si* $[X, Y] \in \mathfrak{D}$ *siempre que* $X, Y \in \mathfrak{D}$*.*

iii) Una subvariedad $\mathcal{N} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{M}$ *se dice* ***subvariedad integral*** *de una distribución diferenciable* $\mathfrak{D}$ *si* $i_*(T_p\mathcal{N}) = \mathfrak{D}_p$ *para cualquier* $p \in \mathcal{N}$*.*

iv) Una distribución diferenciable $\mathfrak{D}$ *se dice* ***completamente integrable*** *si para cada* $p \in \mathcal{M}$ *existe una subvariedad integral de* $\mathfrak{D}$ *que contenga a* p*.*

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 5.18.

i) Si $k = n$*, es decir, si* $\mathfrak{D}_p = T_p\mathcal{M}$ *para todo* $p \in \mathcal{M}$*, entonces es obvio que* $[X, Y] \in \mathfrak{D}$ *siempre que* $X, Y \in \mathfrak{D}$*. La* ***distribución tangente*** *siempre es involutiva.*

ii) Las distribuciones de dimensión uno siempre son involutivas, ya que cada par de campos son proporcionales.

iii) Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ *de dimensión* s *define una distribución involutiva*

$$\mathfrak{D} = \langle X_1, \ldots, X_s \colon X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{g} \rangle,$$

ya que verifica ser un espacio vectorial de dimensión s *cerrado bajo la operación de corchete de Lie.*

El punto *iii*) del ejemplo anterior es clave para probar el resultado principal de esta subsección. La razón reside en el siguiente teorema:

Teorema 5.19. ***(Teorema de Frobenius).*** *Una distribución* $\mathfrak{D}$ *es completamente integrable si y solo si es involutiva. Más aún, si* $\mathfrak{D}$ *es involutiva, por cada* $p \in \mathcal{M}$ *pasa una única variedad integrable* $\mathcal{N}$ *de* $\mathfrak{D}$ *conexa que verifica ser maximal con esa propiedad.*

Demostración. Detalles de la demostración se pueden encontrar, por ejemplo, en [11]. □

Antes de continuar, veamos un breve ejemplo.

Ejemplo 5.20. *Consideramos en* $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$ *la distribución*

$$\mathfrak{D} = \langle X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \ , Y = \frac{\partial}{\partial z}\rangle.$$

De forma inmediata se comprueba que $[X, Y] = 0$ *globalmente, así que* $\mathfrak{D}$ *es involutiva. Por el Teorema de Frobenius, sabemos que es completamente integrable. De hecho, para cada punto* (x, y, z) *un sencillo cálculo nos conduce a que las curvas integrales de* X *son circunferencias centradas en* $(0, 0, z)$*, mientras que las de* Y *son rectas paralelas al eje* z*. En nuestro caso, las subvariedad integrales de la distribución* $\mathfrak{D}$ *que pasan por cada punto son los cilindros de eje el eje* z*.*

Una consecuencia importante del Teorema de Frobenius es que nos permite restringir el rango de aplicaciones diferenciables entre grupos de Lie. Más concretamente,

Proposición 5.21. *Sea* H *un subgrupo de Lie de* G*. Entonces se tiene que* H *es una variedad integral de una distribución involutiva. Más aún, dada cualquier variedad* $\mathcal{M}$ *y una aplicación* $F : \mathcal{M} \to G$ *diferenciable cuya imagen esté contenida en* H*, también es diferenciable vista como aplicación entre* $\mathcal{M}$ *y* H*.*

Demostración. Podemos definir la distribución

$$\mathfrak{D}_g = \{X_g \colon X \in Lie(G),\ X_e \in T_e H\} \subseteq T_g G \text{ para todo } g \in G.$$

Utilizando la caracterización de $Lie(H)$ como un subálgebra de $Lie(G)$ como vimos en la Proposición 3.21, es sencillo comprobar que $\mathfrak{D}_h = T_h H$ para todo $h \in H$, con lo que H es una subvariedad integral de la distribución $\mathfrak{D}$, que por definición verifica ser involutiva.
La segunda afirmación es consecuencia del Teorema de Frobenius (cf. [6, p.500]) y es un resultado general para variedades. Esto es, no se restringe únicamente al caso de grupos de Lie. □

Este último resultado nos permite ofrecer una caracterización alternativa de $Lie(H)$ en términos de la aplicación exponencial:

Proposición 5.22. *Sean* G *un grupo de Lie y* $H \subset G$ *un subgrupo de Lie. Análogamente a la Proposición 3.21, identificamos a* $Lie(H)$ *con la subálgebra*

$$\mathfrak{h} = \{X \in Lie(G) \ : \ X_e \in T_e H\}$$

de $Lie(G)$*. Entonces se verifica que la aplicación exponencial de* H *es justamente la restricción a* $Lie(H)$ *de la aplicación exponencial de* G *y además*

$$Lie(H) \simeq \mathfrak{h} \simeq \{X \in Lie(G)\colon \exp(tX) \in H \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}. \tag{5.2}$$

Demostración. La primera afirmación es inmediata de la Proposición 5.8: dado $X \in \mathfrak{h}$, entonces $X_e \in T_e H$ y se deduce que el subgrupo uniparamétrico γ de G generado por X coincide con el de H. Por tanto, $\gamma(1) \in H$ y la restricción de la exponencial de G es la propia exponencial de H.

Para probar la segunda afirmación, únicamente nos hace falta ver que dado $X \in Lie(G)$ se tiene la siguiente equivalencia:

$$\exp(tX) \in H \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow X_e \in T_e H.$$

Definimos la curva diferenciable $\gamma : \mathbb{R} \to G$ dada por $\gamma(t) := \exp(tX)$. Supongamos que $\gamma(t) \in H$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Al ser H subgrupo de Lie de G, por la Proposición 5.21, γ es diferenciable vista como aplicación con llegada en H, y así podemos afirmar que $X_e = \gamma'(0) \in T_e H$. El recíproco es una consecuencia inmediata de la Proposición 5.8 y de la correspondencia (5.1). □

Ahora vamos a proceder a enunciar y demostrar el teorema de correspondencia antes citado:

Teorema 5.23. *Si G es un grupo de Lie, entonces existe una correspondencia uno a uno entre subgrupos de Lie de G conexos y subálgebras de $Lie(G)$.*

Demostración. Dado un subgrupo de Lie H (en particular conexo) de G podemos identificar $Lie(H)$ con una subálgebra de $Lie(G)$ según lo visto en las Proposiciones 3.21 y 5.22.

Recíprocamente, sea $\mathfrak{h}$ un subálgebra de $Lie(G)$. Sean $X_1, \dots, X_k$ campos vectoriales linealmente independientes sobre $e \in G$ de forma que sean una base para $\mathfrak{h}$. Por ser invariantes por la izquierda, también verifican ser linealmente independientes en T_gG para cualquier $g \in G$. Definimos la distribución

$$\mathfrak{D}_g = \langle X_{1g}, \dots, X_{kg} \rangle.$$

$\mathfrak{D}$ es una distribución de dimensión k sobre G. Por otra parte, $\mathfrak{D}$ es invariante por la izquierda, en el sentido de que $(L_g)_* \mathfrak{D}_{g'} = \mathfrak{D}_{gg'}$ para $g, g' \in G$ cualesquiera. De aquí se sigue que si $\mathcal{N}$ es cualquier subvariedad integral de $\mathfrak{D}$, también lo será $L_g(\mathcal{N})$ para cualquier $g \in G$.

Como $[X_i, X_j] \in \mathfrak{h}$ para todo i, j, la distribución es involutiva. Por el Teorema de Frobenius, existe una única subvariedad integral conexa de $\mathfrak{D}$ que contiene a $e \in G$, que denotamos por H. El hecho de que sea subvariedad integral de una distribución generada por los campos vectoriales de $\mathfrak{h}$ y que pase por la identidad quiere decir que $Lie(H) \simeq T_eH = \mathfrak{D}_e \simeq \mathfrak{h}$, por lo que solo nos falta probar que H es un subgrupo de Lie de G y que es único con estas propiedades.

Podemos probar que H es subgrupo como consecuencia del Teorema de Frobenius:

- Dado $h \in H$, se tiene que $h = L_h e \in H \cap L_h H \neq \emptyset$. Como H es maximal, necesariamente $L_h(H) \subset H$. En particular, $hh' = L_h h' \in H$ para cualesquiera $h, h' \in H$.
- Dado $h \in H$, $L_h^{-1} h = e \in H \cap L_{h^{-1}} H$. Como H es maximal, necesariamente $L_{h^{-1}} H \subset H$. En particular, $h^{-1} h \in H$ para cualesquiera $h, h' \in H$.

Por ser G grupo de Lie, la aplicación $\tau : G \times G \to G$ dada por $(g_1, g_2) \mapsto g_1^{-1} g_2$ es diferenciable. Como además H es una subvariedad integral de una distribución involutiva, por la Proposición 5.21 se tiene que τ es también diferenciable como aplicación definida de $H \times H$ a H. Así, H es subgrupo de Lie de G.

Para probar la unicidad, supongamos que existe otro subgrupo de Lie conexo K con álgebra de Lie $\mathfrak{h}$. En primer lugar, por la elección de H se tiene que $K \subset H$. Además, puesto que $T_eK = T_eH$, la aplicación tangente de la inclusión $i : K \hookrightarrow H$ resulta ser la identidad, y por el Teorema de la Función Inversa i verifica ser un difeomorfismo local. Como H es conexo, ocurre de forma análoga a la aplicación exponencial (ver Teorema 5.15) que i es sobreyectiva, y por tanto que $K = H$. □

5.2.4. Teorema del subgrupo cerrado

Como anticipamos en la subsección 3.3, dado un grupo de Lie G y un subgrupo algebraico $H \subset G$, no podemos asegurar que H tenga estructura de grupo de Lie, y que por tanto sea grupo de Lie. De hecho, demostramos en la Proposición 3.19 una condición suficiente para que esto fuese cierto; a saber, que H sea subvariedad regular de G. Sin embargo, la aplicación exponencial nos permite probar un resultado mucho más fuerte, que afirma que todo subgrupo cerrado de G es una subvariedad regular, y por dicha proposición un subgrupo de Lie.

En este contexto, el siguiente resultado es de utilidad (ver [6, p.101]):

Teorema 5.24. *Sea $\mathcal{M}$ una variedad diferenciable de dimensión n. Si $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$ es una variedad regular de $\mathcal{M}$ de dimensión k, entonces para cada punto $p \in \mathcal{S}$ existe una carta (x, U) de $\mathcal{M}$ con $p \in U$ tal que*

$$x(U \cap \mathcal{S}) = x(U) \cap \{(x^{k+1}, \dots, x^n) = (c_{k+1}, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n-k}\}. \tag{5.3}$$

En particular, puesto que las cartas son homeomorfismos, se tiene que $U \cap \mathcal{S}$ es cerrado en U.

Recíprocamente, si $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$ es un subconjunto que verifica que para cada $p \in \mathcal{S}$ existe una carta (x, U) de $\mathcal{M}$ satisfaciendo (5.3), entonces $\mathcal{S}$ admite una estructura de variedad diferenciable de forma que es una subvariedad regular de $\mathcal{M}$.

Enunciamos y demostramos ahora el teorema antes citado:

Teorema 5.25. ***(Teorema del subgrupo cerrado de Émile Cartan)***
Sea G un grupo de Lie y $H \subset G$ un subgrupo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) H es cerrado en G.

ii) H es una subvariedad regular de G, y por tanto subgrupo de Lie de G

Demostración. $i) \Longrightarrow ii)$ Supongamos que $H \subset G$ es cerrado en G y veamos que es subvariedad regular. En primer lugar, consideramos el subconjunto de $Lie(G)$ dado por la expresión (5.2),

$$\mathfrak{h} = \{X \in Lie(G) \colon \exp(tX) \in H \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}.$$

Dado que aquí no podemos suponer que H es subgrupo de Lie de G, no es posible usar la Proposición 5.22 que identifica a $\mathfrak{h}$ con $Lie(H)$. Sin embargo, podemos demostrar que $\mathfrak{h}$ es un subespacio vectorial de $Lie(G)$ utilizando el hecho de que H es cerrado en G. Dados $t \in \mathbb{R}$ y $X \in \mathfrak{h}$, es obvio que $tX \in \mathfrak{h}$. Para ver que es cerrado bajo la suma de vectores, sean $X, Y \in \mathfrak{h}$ cualesquiera. Dados $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$, la expresión hasta primer orden de la fórmula BCH que vimos en la Proposición 5.13 nos dice que

$$\left(\exp \frac{t}{n} X\right) \cdot \left(\exp \frac{t}{n} Y\right) = \exp\left(\frac{t}{n}(X+Y) + \mathcal{O}\left(\frac{t^2}{n^2}\right)\right).$$

Pero usando la Proposición 5.12 $iv)$ llegamos a

$$\left[\left(\exp \frac{t}{n} X\right) \cdot \left(\exp \frac{t}{n} Y\right)\right]^n = \left[\exp\left(\frac{t}{n}(X+Y) + \mathcal{O}\left(\frac{t^2}{n^2}\right)\right)\right]^n = \exp\left(t(X+Y) + \mathcal{O}\left(\frac{t^2}{n}\right)\right).$$

Ahora, fijando t y tomando el límite cuando $n \to \infty$ se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(t(X+Y) + \mathcal{O}\left(\frac{t^2}{n}\right)\right) = \exp t(X+Y),$$

que pertenece a H por ser cerrado. Con esto concluimos que $\mathfrak{h}$ es un subespacio vectorial de $Lie(G)$.

Vamos a probar, en primer lugar, que podemos encontrar un entorno $\mathcal{U}$ de $0 \in Lie(G)$ para el cual la aplicación exponencial es un difeomorfismo, y que además cumple que

$$\exp(\mathcal{U} \cap \mathfrak{h}) = (\exp \mathcal{U}) \cap H.$$

Sabemos por la Proposición 5.12 $vi)$ que exp se puede restringir a un difeomorfismo sobre un cierto entorno del origen de $Lie(G)$, y por definición de $\mathfrak{h}$ es claro que $\exp(\mathcal{U} \cap \mathfrak{h}) \subseteq (\exp \mathcal{U}) \cap H$. Solo nos falta encontrar $\mathcal{U}$ lo suficientemente pequeño como para que se dé la otra contención.
Por reducción al absurdo, supongamos que la inclusión no se puede dar. Como $Lie(G)$ tiene dimensión finita, podemos tomar un subespacio $\mathfrak{k} \subset Lie(G)$ tal que $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h} = Lie(G)$. La aplicación $\Phi : Lie(G) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h} \to G$ dada por $\Phi(X \oplus Y) := \exp X \cdot \exp Y$, donde $X \in \mathfrak{k}$ e $Y \in \mathfrak{h}$, verifica que es un difeomorfismo

para un cierto entorno de $0 \in \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}$. La prueba de esto es muy similar a la utilizada en la Proposición 5.12 *vi*), ya que

$$\Phi_*(X \oplus Y)_0 = \Phi_*(X \oplus 0)_0 + \Phi_*(0 \oplus Y)_0 = \left(\frac{d}{dt}\exp(tX)\right)_{t=0} + \left(\frac{d}{dt}\exp(tY)\right)_{t=0} = X + Y.$$

Por tanto, $(\Phi_*)_0 = id_{T_0 Lie(G)}$ y podemos aplicar de nuevo el Teorema de la Función Inversa.

Para ver la inclusión, vamos a probar en primer lugar que podemos encontrar un entorno $\mathcal{U}_{\mathfrak{k}}$ de $0 \in \mathfrak{k}$ tal que

$$H \cap \exp(\mathcal{U}_{\mathfrak{k}} \setminus \{0\}) = \emptyset.$$

Si esta igualdad no es cierta, entonces existe una sucesión X_i en $\mathfrak{k}$ con $\exp X_i \in H$ y $X_i \to 0$. Sea $||\cdot||$ una norma en $\mathfrak{k}$ y definimos $\tilde{X}_i = X_i/||X_i||$, que se encuentra en la bola unidad. Al ser este conjunto compacto, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass existe una subsucesión convergente $\tilde{X}_{i_k} \to Z \in \mathfrak{k}$. Si escribimos $t_{i_k} = ||X_{i_k}||$, tenemos que t_{i_k} tiende a 0. Así, para cada t podemos tomar enteros $n_{i_k}(t)$ tales que $t_{i_k} n_{i_k}(t) \to t$. Podemos ver que dichos enteros son aquellos que hacen el término $t_{i_k} n_{i_k}(t)$ lo más cercano posible a t para cada i_k. Esto es,

$$\left| n_{i_k}(t) - \frac{t}{t_{i_k}} \right| \leq 1 \Rightarrow |t_{i_k} n_{i_k}(t) - t| \leq t_{i_k} \to 0.$$

Pero como H es cerrado, se tiene que

$$\begin{aligned}\exp(tZ) &= \exp(t \lim \tilde{X}_{i_k}) = \exp(\lim t_{i_k} n_{i_k}(t) \tilde{X}_{i_k}) = \exp(\lim n_{i_k}(t) X_{i_k}) \\ &= \lim(\exp(n_{i_k}(t) X_{i_k})) = \lim(\exp(X_{i_k})^{n_{i_k}(t)}) \in H,\end{aligned}$$

donde en la última y penúltima igualdades hemos usado las propiedades *iv*) y *i*) de la Proposición 5.12, respectivamente. Por definición de $\mathfrak{h}$, esto último implica que $Z \in \mathfrak{h}$. Pero como también $Z \in \mathfrak{k}$ y $Lie(G) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}$, necesariamente ha de ser $Z = 0$, lo que supone una contradicción porque $||Z|| = 1$.
Por tanto, podemos escoger $\mathcal{U}_{\mathfrak{k}}$ con dicha propiedad y $\mathcal{U}_{\mathfrak{h}}$, ambos entornos abiertos de $0 \in Lie(G)$ tales que $\Phi\, |_{\mathcal{U}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathcal{U}_{\mathfrak{h}}} \colon \mathcal{U}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathcal{U}_{\mathfrak{h}} \to G$ sea un difeomorfismo sobre su imagen, que llamamos $\mathcal{V}$. Claramente, $\mathcal{V}$ es un entorno (abierto) de $e \in G$.

Sea ahora $x \in \mathcal{V} \cap H$. Entonces tenemos que

$$x = \exp X \cdot \exp Y$$

para ciertos $X \in \mathcal{U}_{\mathfrak{k}}$ e $Y \in \mathcal{U}_{\mathfrak{h}}$. Por definición de $\mathfrak{h}$ y elección de Y, se tiene que $\exp Y \in H$, así que $\exp X = (\exp Y)^{-1} \cdot x \in H \cap \exp \mathcal{U}_{\mathfrak{k}}$ y necesariamente $Y = 0$. Por consiguiente, $x \in \exp(\{0\} \oplus \mathcal{U}_{\mathfrak{h}})$. Esto prueba que tomando $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathcal{U}_{\mathfrak{h}}$ se tiene la inclusión $\exp(\mathcal{U} \cap \mathfrak{h}) \supseteq (\exp \mathcal{U}) \cap H$ que buscábamos. En resumen, hemos probado que existe un entorno $\mathcal{U}$ de $0 \in Lie(G)$ que verifica

$$\exp(\mathcal{U} \cap \mathfrak{h}) = (\exp \mathcal{U}) \cap H.$$

Tomamos ahora el isomorfismo de espacios vectoriales $\varphi : Lie(G) \to \mathbb{R}^n$, donde $n = \dim G$, que envía el subespacio $\mathfrak{h}$ a $\mathbb{R}^k$, con $k = \dim \mathfrak{h}$. Consideramos asimismo la composición con la inversa de exp sobre el entorno $\exp \mathcal{U}$ en el que esta es difeomorfismo:

$$\theta := \varphi \circ \exp^{-1} : \exp \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n.$$

Por una parte, tenemos que $\theta((\exp \mathcal{U}) \cap H) = \varphi(\mathcal{U} \cap \mathfrak{h})$ por lo que acabamos de ver. Dado $h \in H$, se tiene que L_h es un difeomorfismo de $\exp \mathcal{U}$ a un entorno $L_h(\exp \mathcal{U})$ de h. Como H tiene estructura de grupo, es invariante bajo L_h (i.e. $L_h(H) = H$), y se cumple que

$$L_h((\exp \mathcal{U}) \cap H) = L_h(\exp \mathcal{U}) \cap H,$$

y por tanto $\theta \circ L_h^{-1} = \theta \circ L_{h^{-1}}$ es una carta de H definida en un entorno $L_h(\exp\mathcal{U}) \cap H$ de h. Como h era arbitrario, utilizando el Teorema 5.24 se tiene que H es una subvariedad regular de G. Además, por la Proposición 3.19 deducimos H es un subgrupo de Lie de G.

$ii) \Longrightarrow i)$. Suponemos ahora que $H \subseteq G$ es una subvariedad regular (y por tanto subgrupo de Lie por la Proposición 3.19). Nos falta ver que es cerrado en G.
Para ello, sea $\{h_i\}$ una sucesión de puntos de H que converge a un elemento $g \in G$. Sea $\mathcal{U}$ el dominio de una carta de G que contenga a la identidad y tal que $\mathcal{U} \cap H$ cumpla la condición (5.3) (podemos tomarlo así porque H es subvariedad regular de G). Elegimos W un entorno compacto de la identidad en G que esté contenido en $\mathcal{U}$. Por ser G un grupo de Lie, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \mu\colon & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (g_1, g_2) & \longmapsto & g_1^{-1}g_2 \end{array}$$

es continua y existe un entorno $\mathcal{V}$ de la identidad en G tal que $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \subseteq \mu^{-1}(W)$.
Como la sucesión $\{g^{-1}h_i\}$ converge a e, podemos asumir, eliminando un número finito de términos de la sucesión si es necesario, que $g^{-1}h_i \in \mathcal{V}$ para cualquier i. Por tanto, para cualesquiera i y j se cumple

$$h_j^{-1}h_i = (g^{-1}h_j)^{-1}(g^{-1}h_i) \in W.$$

Además, como H es subgrupo, tenemos que $h_j^{-1}h_i \in H$. Por lo tanto, $h_j^{-1}h_i \in W \cap H = W \cap (H \cap \mathcal{U})$. Como, por el Teorema 5.24, $H \cap \mathcal{U}$ es cerrado en $\mathcal{U}$ y W es un compacto contenido en $\mathcal{U}$[1], entonces $W \cap H$ es cerrado en G. Luego, si fijamos j cualquiera y hacemos tender i a ∞, llegamos a que

$$h_j^{-1}h_i \to h_j^{-1}g \in W \cap H \subseteq H.$$

Por tanto, $g \in H$ y H es cerrado, como queríamos probar. □

Volviendo a la Definición 3.18, recordamos que no es necesario exigir que un subgrupo de Lie sea subvariedad regular. Esto es sin embargo, por la Proposición 3.19, una condición suficiente y así lo hemos utilizado de manera reiterada. El Teorema de Cartan nos permite construir un ejemplo de subgrupo de Lie que no verifica ser subvariedad regular:

Ejemplo 5.26. ***Curva densa en el toro.*** *Consideremos $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ un número irracional y el subconjunto $\mathcal{K} = \gamma(\mathbb{R}) \subset \mathbb{T}^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, donde $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$ es la curva*

$$\gamma(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i a t}).$$

Recordamos que aquí estamos viendo al toro como $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de forma que se hereda el producto de elementos que hace a $\mathbb{C}$ grupo de Lie, i.e., $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$.

[1]Tenemos que $H \cap \mathcal{U} = B \cap \mathcal{U}$ con B cerrado en G así que $W \cap (H \cap \mathcal{U}) = W \cap B$ es un cerrado en G ya que W es cerrado por ser un compacto en un Hausdorff.

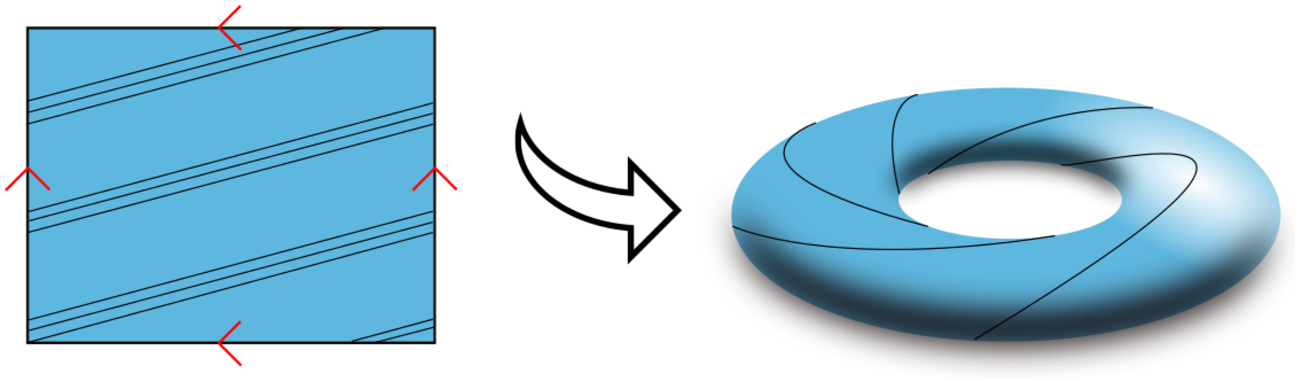

Figura 5.1: *Toro $\mathbb{T}^2$ sobre el que aparece trazado $\mathcal{K} = \gamma(\mathbb{R})$. El hecho de que la pendiente de la curva sea irracional hace que se pueda dar vueltas indefinidamente al toro sin pasar dos veces por el mismo punto.*

Dado que γ es un morfismo de grupos de Lie inyectivo (su derivada no se anula en ningún punto), del Corolario 4.7 iii) se deduce que $\gamma(\mathbb{R}) = \mathcal{K}$ es subvariedad del toro. Por otra parte, es claro que $\mathcal{K}$ es cerrado bajo este producto. También es evidente que para $t = 0$ tenemos el elemento neutro, y que el inverso se obtiene de hacer el cambio $t \mapsto -t$. Como además el producto y la inversión son aplicaciones $\mathcal{C}^\infty$, se tiene que $\mathcal{K}$ posee estructura de grupo de Lie.

Sea ahora el conjunto $L = \{e^{2\pi i a m} \colon m \in \mathbb{Z}\}$ y veamos que es denso en $\mathbb{S}^1$. Como a es irracional, am no puede ser entero. Esto quiere decir que si dividimos el círculo unidad en k intervalos abiertos de longitud $2\pi/k$, y aplicamos el principio del palomar, de entre los primeros $k+1$ elementos de L, $e^{2\pi i a}, e^{4\pi i a}, \ldots, e^{2\pi(k+1)ia}$, habrá dos puntos en un mismo intervalo, cuya fase se diferenciará en un término menor que $2\pi/k$. Dado $\varepsilon > 0$, basta tomar k suficientemente grande como para que $2\pi/k < \varepsilon$. Así, cualquier entorno de $\mathbb{S}^1$ interseca a L. Consecuencia inmediata de lo anterior es que $\mathcal{K}$ es denso en $\mathbb{T}^2$.

En particular, tenemos que $\mathcal{K}$ está estrictamente contenido en su adherencia, que por ser denso es todo el toro. Por tanto, $\mathcal{K}$ no es cerrado en $\mathbb{T}^2$. Del Teorema 5.25 se deduce que la curva no puede ser una subvariedad regular del toro.

Bibliografía

[1] F. Brickell, R.S. Clark. *Differentiable Manifolds. An introduction.* Van Nostrand, London 1970.

[2] J. Gallier. *Notes On Group Actions Manifolds, Lie Groups and Lie Algebras.* University of Pennsylvania, 2007. Disponible en https://www.cis.upenn.edu/~cis610/lie1.pdf. Última visita: junio de 2020.

[3] I. Gordon. *Infinite-dimensional Lie algebras*, University of Edinburgh, term 2008/9. Disponible en https://www.maths.ed.ac.uk/~igordon/. Última visita: abril de 2020.

[4] A. Kirillov, *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*, Department of Mathematics, SUNY at Stony Brook, Stony Brook, NY 11794, USA. Disponible en http://www.math.stonybrook.edu/~kirillov/. Última visita: mayo de 2020.

[5] J. Lafuente, *Introducción a la teoría de grupos de Lie*. Publicación interna del Departamento de Geometría y Topología, UCM, (1998). Disponible en http://www.mat.ucm.es/~jlafuent/own/Manuales/Variedades/Toplie.pdf. Última visita: mayo de 2020.

[6] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer-Verlag, New York, 2013.

[7] I. Morata. *On Lie groups and algebras*, Facultat de Matemàtiques, Universitat de Barcelona, trabajo de fin de máster 2014. Disponible en Dipòsit Digital de la Universitat de Barcelona.

[8] W. Miller. *Symmetry groups and their applications*, Ed. Academic Press New York, 1972.

[9] G. L. Naber. *Topology, Geometry, and Gauge Fields: Foundations.* Springer Science & Business Media, 2011.

[10] V. S. Varadajan. *Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[11] F. W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[12] Z. Wang. *Apuntes de Introducción a grupos de Lie (semestre de otoño de 2013)*, University of Science and Technology of China. Disponible en http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/13F-Lie/Lie.html. Última visita: abril de 2020.

Apéndice A

Nociones de Topología en Variedades

A lo largo de la memoria del presente trabajo se utilizan conceptos topológicos de manera reiterada. Como bien es sabido, en el caso de trabajar con el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, las propiedades topológicas se convierten en hipótesis de numerosos resultados y teoremas. Por ejemplo, el Teorema de Bolzano es un caso particular de que la imagen de un conjunto conexo por una aplicación continua sigue siendo conexo. Además, el hecho de que estemos trabajando con $\mathbb{R}^n$ hace que podamos expresar propiedades topológicas en términos más manejables. Por ejemplo, un conjunto es compacto si y solo si es cerrado y acotado. Asimismo, al ser un espacio métrico, podemos definir la noción de límite de una sucesión sin necesidad de hacerlo en términos de entornos.

En definitiva, estar en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ nos permite adaptar y simplificar en gran medida las nociones de topología que subyacen a los resultados de Cálculo Diferencial más importantes. Cuando pasamos a variedades diferenciales, sin embargo, hay que tener un cuidado especial. La ventaja de trabajar con ellas es que podemos verlas como “localmente similares” a $\mathbb{R}^n$, hecho que facilita bastante las cosas. En este anexo introduciremos de forma breve la topología que presenta una variedad diferenciable *cualquiera* por el hecho de serlo, y veremos cómo dicha estructura topológica nos permite trabajar localmente de forma análoga a como lo haríamos en $\mathbb{R}^n$.
Aspectos básicos de Topología general, como pueden ser la definición propia de topología, base, abierto, entorno, etc. se dan por conocidos. Propiedades básicas, a saber, la conexión, conexión por caminos compacidad y sus versiones locales, se asumen asimismo conocidas por el lector. Seguiremos la notación utilizada a lo largo del trabajo: consideramos $\mathcal{M}$ una variedad diferenciable formada por un atlas maximal $\mathcal{A}$. Hemos tomado como referencia a Lee [6] y a Brickell and Clark [1].

A.0.1. Estructura topológica en variedades

Veamos, en primer lugar, que las cartas de una variedad se pueden “localizar”, es decir, que a partir de una carta es posible construir otras cuyo dominio esté contenido en el dominio de la primera:

Proposición A.1. *Sea $x : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ una carta con dominio $\mathcal{U}$ en una variedad diferenciable $\mathcal{M}$. Si $W \subset \mathcal{U}$ es un subconjunto de $\mathcal{U}$ tal que $x(W) \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces $x\,|_W$ es también una carta de la variedad.*

De forma inmediata y a partir de la propiedad anterior se introduce la topología en $\mathcal{M}$ del siguiente modo:

Teorema A.2. *La colección de dominios de cartas del atlas maximal $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}$ constituye una base de una topología τ_{dif} de $\mathcal{M}$, que llamamos simplemente* ***topología inducida*** *por la estructura de variedad diferenciable.*

La principal ventaja de este enfoque se vislumbra en el siguiente resultado:

Proposición A.3. *Las cartas son homemorfismos.*

Esta es la razón por la cual, en el sentido topológico, podemos ver una variedad diferenciable como localemente equivalente a $\mathbb{R}^n$: para cada punto de $\mathcal{M}$ podemos encontrar un entorno (un dominio de carta) homeomorfo a un entorno de $\mathbb{R}^n$.

Observación A.4. *Las variedades diferenciables verifican todos los axiomas locales de $\mathbb{R}^n$, dotado de la topología usual. En general, diremos que un espacio topológico presenta una cierta propiedad topológica localmente si cada punto admite una base de entornos*[1] *que verifiquen dicha propiedad. En particular, las variedades diferenciables son localmente compactas, localmente conexas y localmente conexas por caminos (y por tanto semilocalmente simplemente conexas).*

A.0.2. Criterios secuenciales en variedades

Esporádicamente a lo largo del trabajo se ha hecho uso de criterios secuenciales para probar la compacidad de ciertos conjuntos. Aunque este resultado no es en general cierto para un espacio topológico cualquiera, sí que lo es para variedades diferenciables consideradas en este trabajo y provistas de la estructura topológica antes mencionada. Comencemos recordando los axiomas de numerabilidad:

Definición A.5. *Un espacio toplógico (X, τ) verifica:*

i) El ***primer axioma de numerabilidad*** *(I.A.N) si cada punto admite base numerable de entornos.*

ii) El ***segundo axioma de numerabilidad*** *(II.A.N) si la topología admite una base numerable.*

Se tiene además el siguiente resultado:

Proposición A.6. *Sea $\mathcal{M}$ una variedad diferenciable*

i) $(\mathcal{M}, \tau_{dif})$ verifica I.A.N.

ii) Si $\mathcal{M}$ admite un atlas numerable, entonces $(\mathcal{M}, \tau_{dif})$ verifica II.A.N.

El punto i) de la proposición anterior es cierto para cualquier variedad diferenciable, y es consecuencia inmediata de que las variedades sean localmente euclídeas: basta tomar una base numerable de entornos en $\mathbb{R}^n$ y trasladarla a la variedad mediante las imágenes inversas de una carta de $\mathcal{A}$.

La ventaja de que en una variedad cualquier se satisfaga I.A.N es que nos permite caracterizar la adherencia de un conjunto cualquiera en términos de límites de sucesiones. Tenemos el siguiente lema:

Lema A.7. *Sean X un espacio topológico verificando I.A.N y A un subconjunto cualquiera de X. Entonces A es cerrado si y solo si A contiene el límite de cualquier sucesión convergente de elementos de A.*

El lema previo nos permite por tanto demostrar que un conjunto es cerrado sin necesidad de recurrir a la definición, de un modo análogo a como se procede en $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, para poder hablar de compacidad en términos de sucesiones se hace necesario añadir la hipótesis de que el espacio topológico sea T_2 y verifique el segundo axioma de numerabilidad:

Teorema A.8. ***(Teorema de Bolzano-Weierstrass)*** *Sea X un espacio topológico Hausdorff que verifica II.A.N. Entonces, X es compacto si y solo si toda sucesión de elementos de X posee una subsucesión convergente a un elemento de X.*

En definitiva, la compacidad es una propiedad topológica que puede ser fácilmente caracterizada en términos de sucesiones si se imponen ciertas condiciones. Esta es una de las razones por las cuales a lo largo de todo el trabajo únicamente consideramos variedades diferenciables que cumplen II.A.N y son Hausdorff, como es el caso de todos los grupo de Lie que han ido apareciendo.

[1] Una base de entornos de $p \in \mathcal{M}$ es una familia de abiertos $\{\mathcal{U}_i\}$ que contienen a p y tales que para todo abierto $\mathcal{V}$ que contiene a p, existe algún abierto $\mathcal{U}_i$ de la base verificando $p \in \mathcal{U}_i \subset \mathcal{V}$.

Apéndice B

Grupos de Lie de matriciales

Como hemos visto en el último capítulo, la expresión (5.2) nos da una caracterización bastante sencilla del álgebra de Lie en términos de la exponencial. En este apéndice vamos a aplicar los resultados vistos en dicho capítulo a un caso particular de grupos de Lie que involucra los grupos de matrices provistos del producto. Muchos de los ejemplos ya han ido apareciendo a lo largo del trabajo, pero en este caso la aplicación exponencial nos va a permitir caracterizarlos de una forma mucho más precisa y profunda. Nuestro espacio ambiente es, como de costumbre, $gl(n,\mathbb{K})$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ indistintamente. Cuando sea necesario considerar un cuerpo u otro, se indicará explícitamente.

Definición B.1. *La* ***exponencial de una matriz cuadrada*** $A \in gl(n,\mathbb{K})$ *viene dada por la serie:*

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}. \tag{B.1}$$

La ecuación (B.1) converge para cualquier matriz $A \in gl(n,\mathbb{K})$. La demostración de esta afirmación emplea la norma matricial de Frobenius,

$$||A = (a)_{ij}||_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

y puede consultarse en [6, p.517].
Es inmediato observar que la definición anterior es un caso particular de la aplicación exponencial en un grupo de Lie. Basta ver que $\gamma(t) = e^{tA}$ es el subgrupo uniparamétrico de $GL(n,\mathbb{K})$ generado por $A \in gl(n,\mathbb{K}) \simeq Lie(GL(n,\mathbb{K}))$. La razón es que la expresión de γ satisface el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \gamma'(t) = \gamma(t)A \\ \gamma(0) = Id_n \end{cases}$$

La definición anterior conlleva las siguientes propiedades de la exponencial de matriz:

Proposición B.2. *Sean* $A, B \in gl(n,\mathbb{K})$ *y* $C \in GL(n,\mathbb{K})$. *Entonces:*

i) $e^{0_n} = Id_n$.

ii) $(e^A)^* = e^{A^*}$. *Análogamente con la transposición,* $(e^A)^T = e^{A^T}$.

iii) Si A *y* B *conmutan,* $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

iv) e^A *es invertible con inversa* $(e^A)^{-1} = e^{-A}$. *En particular,* $e^A \in GL(n,\mathbb{K})$.

v) $\det e^A = e^{Tr(A)}$, *donde* $Tr(A)$ *denota la traza de* A.

Demostración. Las dos primeras propiedades son evidentes. En cuanto a la tercera, basta ver que se trata de un caso particular de la fórmula BCH para $\exp(A) = e^A$. Para el punto *iv*), definimos $S_j(A)$ como la j-ésima suma parcial de (B.1), es decir,

$$S_j(A) = Id_n + A + \frac{A^2}{2} + \cdots + \frac{A^j}{j!}.$$

Sea $B \in gl(n, \mathbb{K})$. Como la aplicación $A \mapsto BA$ es continua sobre $gl(n, \mathbb{K})$, se tiene que

$$B\left(\lim_{j\to\infty} S_j(A)\right) = \lim_{j\to\infty} BS_j(A).$$

En particular, si tomamos $B \in GL(n, \mathbb{K})$, entonces $B\left(\lim_{j\to\infty} S_j(A)\right)B^{-1} = \lim_{j\to\infty} BS_j(A)B^{-1}$, o equivalentemente

$$Be^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}}$$

Más aún, se tiene que toda matriz con coeficientes complejos es similar a otra (es decir, presenta los mismos valores propios) que es triangular superior (ver una demostración en [8, p.155]), y por tanto podemos escoger $B \in GL(n, \mathbb{K})$ tal que BAB^{-1} sea triangular superior. Si los elementos de la diagonal de BAB^{-1} son $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, entonces es claro que $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$ son los elementos de la diagonal de $e^{BAB^{-1}}$ y que esta última matriz es también diagonal superior. En particular,

$$0 \neq \det e^{BAB^{-1}} = \det Be^A B^{-1} = \det e^A,$$

y así $e^A \in GL(n, \mathbb{K})$. La expresión para la inversa se deduce de *iii*) y de la fórmula del binomio de Newton para matrices, que solamente es valida cuando A y B conmutan:

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = e^A e^B.$$

Únicamente basta considerar la fórmula anterior para A y $-A$, matrices que obviamente conmutan.

Para demostrar *v*), basta observar que la traza y el determinante de una matriz son, respectivamente, la suma y el producto de sus autovalores, respectivamente. Así, tenemos que

$$\det e^A = \det(Be^A B^{-1}) = \det(e^{BAB^{-1}}) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = e^{Tr(A)}.$$

□

Definición B.3. *Llamaremos* ***grupo de Lie matricial*** *a cualquier subgrupo G de $GL(n, \mathbb{K})$ que sea cerrado en $GL(n, \mathbb{K})$.*

Esta noción es bastante más restrictiva que la de subgrupo de Lie de la Definición 3.18. Según el Teorema 5.25 de Cartan, todo subgrupo matricial verifica ser un subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{K})$, pero el recíproco no es cierto. La clave de todo esto es que estamos exigiendo que el subgrupo sea cerrado en $GL(n, \mathbb{K})$, algo que en muchos casos no se verifica. Veámoslo en el siguiente ejemplo:

Ejemplo B.4. *$GL(n, \mathbb{Q})$ es un subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ por ser $\mathbb{Q}$ cerrado bajo suma y multiplicación. Sin embargo, podemos encontrar una sucesión convergente de elementos de $GL(n, \mathbb{Q})$ cuyo límite no está en $GL(n, \mathbb{Q})$:*

$$A_n = \begin{pmatrix} (1+\frac{1}{n})^n & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & (1+\frac{1}{n})^n \end{pmatrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} e & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que $GL(n,\mathbb{Q})$ no es cerrado en $GL(n,\mathbb{R})$ (ver apéndice A sobre criterios secuenciales). Por tanto, no es ni subgrupo de Lie matricial ni subvariedad regular. De hecho, a $GL(n,\mathbb{Q})$ ni siquiera podemos dotarle de estructura de variedad diferenciable real.

La ventaja de haber particularizado la aplicación exponencial y el hecho de que los subgrupos de Lie matriciales sean un caso particular de subgrupo de Lie de $GL(n,\mathbb{K})$, nos permite trabajar más cómodamente, por medio la Proposición 5.22, con el álgebra de Lie de los grupos de matrices. En efecto, como vimos en el Teorema 3.14, el álgebra de Lie de $GL(n,\mathbb{K})$ se puede identificar (salvo isomorfismo) con el conjunto $gl(n,\mathbb{K})$ de matrices $n\times n$ (el resultado lo probamos para $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ pero es valido también para $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, consultar en [6]). Por tanto, dado un subgrupo matricial G de $GL(n,\mathbb{K})$, su álgebra de Lie vendrá dada por el siguiente caso particular de la expresión (5.2):

$$Lie(G)\simeq\{A\in gl(n,\mathbb{K})\colon e^{tA}\in G \text{ para todo } t\in\mathbb{R}\}. \tag{B.2}$$

Álgebras de Lie de grupos de Lie matriciales

Hasta ahora, los subgrupos matriciales que han ido apareciendo los hemos presentado como subgrupos de Lie de $GL(n,\mathbb{K})$. Sin embargo, en lo que respecta a subgrupos de Lie matriciales, lo único que es necesario probar es que son subgrupos cerrados en $GL(n,\mathbb{K})$, y por el Teorema de Cartan automáticamente subgrupos de Lie:

1. **Grupo ortogonal** $O(n)=\{A\in GL(n,\mathbb{R})\colon A^TA=Id_n\}$, formado por las matrices ortogonales reales, esto es, aquellas cuyas columnas son vectores ortonormales respecto del producto escalar estándar en $\mathbb{R}^n$. El grupo ortogonal es cerrado porque se puede escribir como contraimagen por una aplicación continua, det, del cerrado $\{1,-1\}$.
   Mientras que en el Ejemplo 3.22 calculamos el álgebra de Lie de $O(n)$ utilizando directamente la definición, es decir, llegando a una expresión para $T_{Id_n}O(n)$, ahora podemos proceder por medio de la noción de aplicación exponencial. Dados una matriz $A\in gl(n,\mathbb{R})$ y $t\in\mathbb{R}$, la matriz e^{tA} es ortogonal si y solo si
   $$e^{tA^T}=\left(e^{tA}\right)^T=(e^{tA})^{-1}=e^{-tA},$$
   donde hemos usado los puntos *ii*) y *iv*) de la Proposición B.2. Como esta igualdad ha de ser cierta para cualquier $t\in\mathbb{R}$, necesariamente $A^T=-A$ y de la expresión (B.2) recuperamos el resultado del Ejemplo 3.22:
   $$Lie(O(n))\simeq\mathfrak{o}(n):=\{A\in gl(n,\mathbb{R})\colon A^T+A=0\},$$
   que es el conjunto de las matrices antisimétricas.

2. **Grupo unitario** $U(n)=\{A\in GL(n,\mathbb{C})\colon A^*A=Id_n\}$, formado por todas las matrices $n\times n$ complejas[1] unitarias. Equivalentemente, son las matrices cuyas columnas son ortonormales respecto del producto escalar estándar en $\mathbb{C}^n$. Es inmediato ver que $U(n)$ es un subgrupo de $GL(n,\mathbb{C})$.

   Ahora, para cualquier matriz A, se tiene que
   $$\det A^*=\det\overline{A}^T=\det\overline{A}=\overline{\det A}.$$
   (Basta considerar la definición de determinante y que el conjugado de la suma y del producto es la suma y el producto de conjugados). Si ahora imponemos que A es unitaria, llegamos a que
   $$\det(A^*A)=\det A^*\det A=\overline{\det A}\det A=|\det A|^2=1\Leftrightarrow\det A\in\mathbb{S}^1.$$

[1] aquí sí es necesario que el cuerpo al que pertenecen los coeficientes sea $\mathbb{C}$.

Por tanto, podemos ver a $U(n)$ como la contraimagen a través de det de $\mathbb{S}^1$, que es cerrado. Así, el grupo unitario es un subgrupo de Lie matricial.

Respecto del cálculo del álgebra de Lie, el procedimiento es similar al del caso de $O(n)$:

$$e^{tA^*} = \left(e^{tA}\right)^* = (e^{tA})^{-1} = e^{-tA}.$$

De esta forma, el álgebra de Lie de $U(n)$ es el conjunto de matrices antihermíticas:

$$Lie(U(n)) \simeq \mathfrak{u}(n) := \{A \in gl(n, \mathbb{C})\colon\ A^* + A = 0\}.$$

3. **Grupo especial lineal** $SL(n, \mathbb{K}) = \{A \in GL(n, \mathbb{K})\colon\ \det A = 1\}$ formado por las matrices con determinante 1 (aquí podemos tomar $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ indistintamente) . Es obvio que el producto de dos matrices con determinante igual a 1 sigue teniendo determinante 1, y de igual manera para la inversa.

   Por otra parte $SL(n, \mathbb{K}) = \det^{-1}(\{1\})$, así que es también cerrado. Veamos ahora cuál es su álgebra de Lie. Sea $A \in gl(n, \mathbb{K})$ tal que $\det e^{tA} = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. De la proposición B.2 v) se tiene que

   $$1 = \det e^{tA} = e^{Tr(tA)} = e^{t\cdot Tr(A)} \iff t \cdot Tr(A) = 2\pi i n \text{ para cierto } n \in \mathbb{Z} \text{ y para todo } t \in \mathbb{R}.$$

   La igualdad anterior ha de verificarse para cualquier $t \in \mathbb{R}$ y para un $n \in \mathbb{Z}$. Por tanto, la única posibilidad es que $n = 0$ y $Tr(A) = 0$. Así, el álgebra de Lie de $SL(n, \mathbb{K})$ es el conjunto de las matrices libres de traza:

   $$Lie(SL(n, \mathbb{K})) \simeq \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) := \{A \in gl(n, \mathbb{C})\colon\ Tr(A) = 0\}.$$

4. **Grupo especial ortogonal** $SO(n) = SL(n, \mathbb{R}) \cap O(n)$, de matrices ortogonales con determinante igual a 1. Evidentemente, que sea grupo de Lie matricial es consecuencia inmediata de poder expresarse como intersección de dos grupos de Lie matriciales.

   En cuanto al álgebra de Lie podemos observar, por una parte, que una matriz antisimétrica tiene traza cero, así que $Lie(SO(n)) \equiv \mathfrak{so}(n) \supset \mathfrak{o}(n)$. La otra inclusión es obvia por la definición de $SO(n)$, así que $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$.

   Particularicemos para el caso $n = 3$, en donde $SO(3)$ representa el conjunto de rotaciones sobre la esfera 3-dimensional. Vemos que una posible elección para una base de $\mathfrak{so}(3)$ es la siguiente [4]:

   $$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Los subgrupos uniparamétricos de $SO(3)$ vienen dados por las rotaciones alrededor de los ejes x, y y z. Es sencillo comprobar mediante derivación que dichas rotaciones son de la forma $\exp(tJ)$ con $J \in \{J_x, J_y, J_z\}$. Por ejemplo, la rotación alrededor del eje x un ángulo t es

   $$\exp(tJ_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Los elementos de la forma $\exp(tJ_x), \exp(tJ_y)$ y $\exp(tJ_z)$ generan un entorno abierto de la identidad en $SO(3)$. Además, de la relación $\mathbb{S}^2 \cong SO(3)/SO(2)$ podemos deducir que $SO(3)$ es conexo (para más detalles, consultar [6, p.558]). Por tanto, dichos elementos generan $SO(3)$. En cierto sentido, podemos decir que el grupo especial ortogonal de dimensión tres está generado por tres elementos.

5. **Grupo especial unitario** $SU(n) = SL(n,\mathbb{C}) \cap U(n)$, formado por las matrices unitarias con determinante igual a 1. En este caso, a diferencia de $SO(n)$, no es cierto que las matrices antihermíticas tengan traza igual a cero. Así, $Lie(SU(n)) \simeq \mathfrak{su}(n) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ es el conjunto de las matríces antihermíticas de traza cero.