WYKŁAD 4
MACIERZE. DZIAŁANIA NA MACIERZACH.

Definicja 1.

Macierzą nazywamy prostokątną tablicę o *m* wierszach i *n* kolumnach, postaci:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

gdzie a_{ij}, nazywany elementem macierzy, jest liczbą.

Liczbę wierszy *m* i liczbę kolumn *n* macierzy nazywamy jej wymiarem i oznaczamy $m \times n$.

Macierz wymiaru $m \times n$ może być zapisana symbolicznie w formie $A = [a_{ij}]_{m\times n}$.

Definicja 2.

Macierze *A* i *B* nazywamy równymi, co zapisujemy $A=B$, jeśli mają ten sam wymiar $m \times n$ oraz $a_{ij} = b_{ij}$ dla wszystkich $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$.

Rodzaje macierzy.

1. Macierz kwadratowa.
   Macierz o tej samej liczbie wierszy i kolumn ($m = n$) nazywamy macierzą kwadratową.
2. Macierz diagonalna (przekątniowa).
   Macierz kwadratowa, w której wszystkie elementy nie znajdujące się na głównej przekątnej (tzn. dla których jest $i \neq j$) są równe zero.
3. Macierz jednostkowa.
   Macierz diagonalną, w której wszystkie elementy znajdujące się na głównej przekątnej są równe 1, nazywamy macierzą jednostkową. Macierz jednostkową oznaczamy literą *I*.

$$I_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

4. Macierz zerowa.
   Macierzą zerową, oznaczaną symbolem $0_{m\times n}$, nazywamy $m \times n$ wymiarową macierz, której wszystkie elementy są równe zeru.

Działania na macierzach.

Jeśli $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, mają jednakowe wymiary i *k* jest dowolną liczbą rzeczywistą, to określone są następujące działania:

- **Dodawanie i odejmowanie macierzy**:
  $C = A \pm B = [c_{ij}]$, gdzie $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$,
- **Mnożenie macierzy przez liczbę**:
  $D = k \cdot A = [d_{ij}]$, gdzie $d_{ij} = k \cdot a_{ij}$,

Transponowanie macierzy.

Macierzą transponowaną macierzy A, oznaczaną symbolem A^T , nazywamy macierz utworzoną z macierzy A przez zamianę wierszy na kolumny i kolumn na wiersze.

Jeśli $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, to $A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$.

<u>Iloczyn macierzy.</u>

Iloczynem $m\times n$ wymiarowej $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i $n\times p$ wymiarowej macierzy $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ nazywamy $m\times p$ wymiarową macierz C taką, że

$$C = A\cdot B = [c_{ij}]_{m\times p},$$

gdzie c_{ij} jest iloczynem skalarnym i-tego wiersza macierzy A i j-tej kolumny macierzy B.

Uwaga:

<u>Iloczyn macierzy A i B istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B.</u>

Niektóre własności mnożenia macierzy.

1. Mnożenie macierzy **nie jest przemienne**. Jeśli nawet oba iloczyny istnieją, to najczęściej $\boldsymbol{A\cdot B \neq B\cdot A}$.
2. $\boldsymbol{A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C}$
3. $\boldsymbol{(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T}$.
4. $\boldsymbol{A_{m\times n}\cdot 0_{n\times p} = 0_{m\times p}}$

(Uwaga: W przeciwieństwie do liczb rzeczywistych jeśli $A\cdot B = 0$, to wcale nie oznacza, że $A = 0$ lub $B = 0$.)

5. $\boldsymbol{A\cdot I=A}$ oraz $\boldsymbol{I\cdot A=A}$, gdzie A jest dowolną macierzą, I – macierzą jednostkową odpowiedniego stopnia.