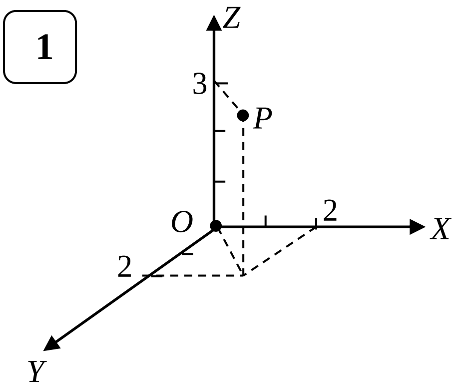
WYKŁAD 7
RACHUNEK RÓŻNICZKOWY FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH (1)

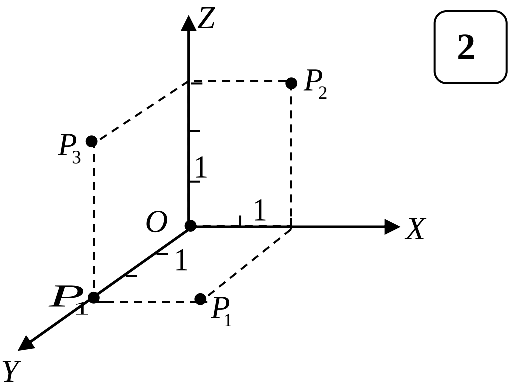
I. Pojęcia wstępne.

Przestrzeń R^2, R^3 i R^n. Funkcje wielu zmiennych .

Do tej pory zajmowaliśmy się funkcjami jednej zmiennej – te funkcje określone były w przestrzeni *R*, a wykres znajdował się w przestrzeni R^2. Teraz przechodzimy do pojęcia funkcji wielu zmiennych, czyli funkcji, które mogą być określone w przestrzeni R^2, R^3 itd.

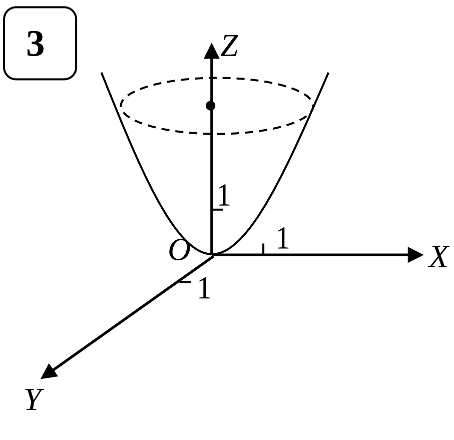
Poniżej mamy rysunki przedstawiające układ współrzędnych XYZ oraz współrzędne punktu w przestrzeni R^3 (1) i (2). Rysunek (2) pokazuje punkty położone w tzw. płaszczyznach układu.

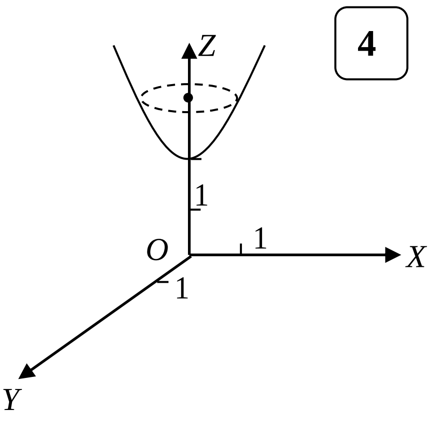




Przestrzenie R^4, R^5 itd., czyli ogólnie mówiąc przestrzenie R^n, są już na dla nas zupełnie abstrakcyjne i nie jesteśmy w stanie sobie nawet ich wyobrazić. Niemniej przestrzenie takie będziemy rozważać, jak również funkcje w nich określone.

Wykres funkcji dwu zmiennych.





Wykres funkcji dwu zmiennych położony jest w przestrzeni R^3. Jest to powierzchnia, której „kształt" (rodzaj) zależny jest od wzoru funkcji.

Na rys. (3) przedstawiony jest wykres funkcji $z = x^2 + y^2$, a na rys. (4) wykres funkcji $z = x^2 + y^2 + 2$.

Te powierzchnie mają określone nazwy – są to tzw. paraboloidy obrotowe (ponieważ powstają poprzez obrót paraboli wokół osi OZ). W pierwszym przypadku jest to paraboloida obrotowa o wierzchołku w środku układu (0;0;0), w drugim przypadku paraboloida obrotowa o wierzchołku w punkcie (0;0;2) .

II. Definicja pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego (na przykładzie funkcji dwóch zmiennych)

1. **Przyrosty cząstkowe funkcji** $f(x,y)$ w punkcie $P_0(x_0,y_0)$:

a) $\Delta_x f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$

b) $\Delta_y f(x_0,y_0)=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

2. **Definicja pochodnych cząstkowych** $f_x^{'}(x_0,y_0)$ i $f_y^{'}(x_0,y_0)$.

$$\boxed{f_x^{'}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(x_0,y_0)}{\Delta x}} \quad \text{oraz} \quad \boxed{f_y^{'}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f(x_0,y_0)}{\Delta y}} .$$

3. **Inne oznaczenia** dla pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego.

$f_x^{'}=\dfrac{\partial f}{\partial x}$ lub jeśli $z=f(x,y)$ to $f_x^{'}=z_x^{'}=\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial x}$

$f_y^{'}=\dfrac{\partial f}{\partial y}$ lub jeśli $z=f(x,y)$ to $f_y^{'}=z_y^{'}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

III. Obliczanie pochodnych cząstkowych.

Przy obliczaniu pochodnych cząstkowych będziemy korzystać z twierdzeń i wzorów analogicznych do wzorów i twierdzeń dla pochodnej funkcji jednej zmiennej, zastępując pochodne funkcji jednej zmiennej odpowiednimi pochodnymi cząstkowymi. Ponadto należy pamiętać, że

- przy obliczaniu pochodnej $f_x^{'}$ wszystkie pozostałe zmienne (oprócz x) traktujemy jako stałe
- przy obliczaniu pochodnej $f_y^{'}$ wszystkie pozostałe zmienne(oprócz y) traktujemy jako stałe itd.

Przykład 1

Obliczyć pochodne cząstkowe I rzędu dla funkcji:

a) $f(x,y)=4x^3y^2-3x+12y^2+7$

b) $f(x,y,z)=3xy^2z-5x^2y^3+7xz-6y^5$

IV. Pochodne cząstkowe rzędów wyższych.

Definicja i oznaczenia.

$\boxed{f''_{xx}=(f'_x)'_x}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $\quad\boxed{f''_{xy}=(f'_x)'_y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ $\quad\boxed{f''_{yx}=(f'_y)'_x}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ $\quad\boxed{f''_{yy}=(f'_y)'_y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Uwaga:

Pochodne liczone względem tej samej zmiennej, czyli f''_{xx} i f''_{yy} są to tzw. ***pochodne czyste***. Natomiast pochodne f''_{xy} i f''_{yx} określamy mianem ***pochodnych mieszanych***.

Przykład 2

Obliczyć pochodne cząstkowe II rzędu dla funkcji:

a) $f(x,y)=3xy^2-2x^2+2y-5$

b) $f(x,y,z)=2xyz-3xz^2$

Twierdzenie Schwarza.

Jeżeli pochodne mieszane f''_{xy} i f''_{yx} są ciągłe w obszarze $D\subset R^2$ to są one identyczne, tzn.

$$\boxed{f''_{xy}=f''_{yx}} .$$