WYKŁAD 5

WYZNACZNIK MACIERZY

Definicja.
Wyznacznikiem macierzy kwadratowej ***A*** nazywamy funkcję, która przyporządkowuje tej macierzy liczbę oznaczaną symbolem det(***A***) lub $|A|$.

Twierdzenie.
1. Jeżeli $A=[a_{11}]$ to $\det A=a_{11}$.

2. Jeżeli $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ to $\det A=(-1)^{1+1}a_{11}\cdot M_{11}+(-1)^{1+2}a_{12}\cdot M_{12}+\dots+(-1)^{1+n}a_{1n}\cdot M_{1n}$

gdzie M_{ij} to wyznacznik macierzy, która powstaje z macierzy *A* poprzez skreślenie *i*-tego wiersza oraz *j*-tej kolumny.

Tw. Laplace'a.
Wyznacznik macierzy można rozwijać według elementów dowolnego wiersza (lub dowolnej kolumny) i wszystkie te rozwinięcia są sobie równe.

Niektóre własności wyznaczników:

1) $\det A=\det\left(A^T\right)$.

2) Jeżeli w wyznaczniku przestawimy dwa dowolne wiersze (lub dwie dowolne kolumny), to wyznacznik zmieni znak.

3) Wartość wyznacznika jest równa zeru, jeżeli wyznacznik zawiera:
- wiersz (lub kolumnę), którego wszystkie elementy są zerami;
- dwa wiersze (kolumny) o jednakowych elementach;
- dwa wiersze (kolumny), których elementy są proporcjonalne.

Definicja.
Macierz kwadratową, której wyznacznik jest różny od zera, nazywamy ***macierzą nieosobliwą***.
Macierz kwadratową, której wyznacznik jest równy zeru, nazywamy ***macierzą osobliwą***.

MACIERZ ODWROTNA.

Definicja 5.
Macierzą odwrotną do macierzy kwadratowej *A* nazywamy taką macierz A^{-1} , że spełniony jest warunek:

$$\boxed{A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I}$$

(gdzie macierz I jest macierzą jednostkową tego samego stopnia co A).
Macierz A nazywamy wtedy **macierzą odwracalną**.

Twierdzenie.
Macierz kwadratowa jest macierzą odwracalną wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa.

Twierdzenie.
Jeżeli macierz *A* jest nieosobliwa, to istnieje macierz odwrotna A^{-1} dana wzorem:

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\left(A^D\right)^T}$$

gdzie A^D oznacza tzw. macierz dopełnień, której elementami są liczby $D_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$.