MATEMATYKA – WYKŁAD 8

RACHUNEK CAŁKOWY FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ
CAŁKA NIEOZNACZONA_cz.1

Def.1

Różniczka funkcji w punkcie: $df(x) = f'(x)\cdot \Delta x$ lub $df(x) = f'(x)\,dx$ (ponieważ $dx = \Delta x$).

Def.2.

Funkcją pierwotną funkcji *f* w pewnym przedziale (właściwym lub niewłaściwym) nazywamy taką funkcję *F*, której pochodna równa się funkcji *f* w tym przedziale.

Np.

Funkcja sinus x jest funkcją pierwotną funkcji cosinus x, ponieważ $(\sin x)' = \cos x$.

Def.3.

Zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji *f* nazywamy ***całką nieoznaczoną*** funkcji *f* i oznaczamy symbolem $\int f(x)\,dx$.

Przy czym $\int f(x)\,dx = F(x) + C\,,\quad C \in R$, gdzie *F* - dowolna funkcja pierwotna funkcji, a *C* to dowolna stała, nazywana stałą całkowania.

Symbolika: $\int$ ***f(x)*** **dx** - ***całka nieoznaczona z funkcji f(x)*** .

Przykład:

$\int x\,dx = ...$

Tw.1.

Każda funkcja ciągła na przedziale X jest całkowalna na tym przedziale.

Podstawowe wzory.

1^0 $\int dx = x + C$

2^0 $\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$ dla $a \neq -1$

3^0 $\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C$

4^0 $\int e^x\,dx = e^x + C$

5^0 $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}\,a^x + C$ dla $a > 0\,,\ a \neq 1$

6^0 $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

7^0 $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

8^0 $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = tg\,x + C$

9^0 $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -ctg\,x + C$

10^0 $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctg\,x + C$

11^0 $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$

Tw.2.

a) $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

b) $\int k\cdot f(x)dx = k\int f(x)dx$, gdzie $k \neq 0$ dowolna stała.

I. Obliczanie całek nieoznaczonych przy zastosowaniu wzorów podstawowych, twierdzeń podstawowych i przekształceń funkcji podcałkowej.

Przykłady:

a) $\int\left(3x^2-2x^{10}+5e^x-4\sqrt[4]{x^3}-\frac{10}{x^3}+11\right)dx$

b) $\int tg^2x\ dx$

Rozwiązanie:

a)

$$\int\left(3x^2-2x^{10}+5e^x-4\sqrt[4]{x^3}-\frac{10}{x^3}+11\right)dx = 3\int x^2dx-2\int x^{10}dx+5\int e^xdx-4\int \sqrt[4]{x^3}dx-10\int\frac{1}{x^3}dx+11\int dx =$$

$$=3\int x^2dx-2\int x^{10}dx+5\int e^xdx-4\int x^{\frac{3}{4}}dx-10\int x^{-3}dx+11\int dx = 3\cdot\frac{1}{3}x^3-2\cdot\frac{1}{11}x^{11}+5e^x-4\cdot\frac{1}{\frac{7}{4}}x^{\frac{7}{4}}+$$

$$-10\cdot\frac{1}{-2}x^{-2}+11\cdot x+C = x^3-\frac{2}{11}x^{11}+5e^x-\frac{16}{7}x^{\frac{7}{4}}+5x^{-2}+11x+C$$

b) $\int tg^2x\ dx = \int\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2dx = \int\frac{\sin^2x}{\cos^2x}dx = \ldots = \int\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}dx = \int\frac{1}{\cos^2x}dx-\int\frac{\cos^2x}{\cos^2x}dx =$

$=\int\frac{1}{\cos^2x}dx-\int 1dx = tgx-x+C$

Zadanie

Oblicz całki:

a) $\int\left(5\sin x-\frac{3}{\sqrt[5]{x^3}}-13x+\frac{6}{\cos^2x}-\frac{7}{x}+2\right)dx$

b) $\int(x^3+7)(4x-5)dx$

Zadania do samodzielnego przerobienia w domu.

a) $\int(x^2-4x^3+5x-2)dx$	b) $\int\left(x^2-\frac{4}{x^3}+2\sin x-5\right)dx$	c) $\int(x^2-x+1)(x+1)dx$
d) $\int x^2\cdot\sqrt[3]{x}\ dx$	e) $\int\left(3-2\sqrt[4]{x}\right)^2dx$	f) $\int(x^2-1)(2x-\sqrt{x})dx$
g) $\int ctg^2x\ dx$	h) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2x\cdot\sin^2x}dx$	i) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$

Wskazówka: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

II. Obliczanie całek nieoznaczonych przez podstawienie.

Jeżeli funkcja *f* jest ciągła w przedziale (*a*, *b*) , zaś funkcja $t=\varphi(x)$ ma ciągłą pochodną i nadto wartości jej leżą w przedziale (*a*, *b*), to

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\int f(t)dt$$

przy czym po scałkowaniu prawej strony należy ją wyrazić za pomocą zmiennej *x* podstawiając $t=\varphi(x)$. Jest to tzw. ***wzór na całkowanie przez podstawienie***.

Przykłady

a) $\int(4x+7)^{10}dx$

b) $\int x^2 e^{2x^3-9}\,dx$

Rozwiązanie:

a)

$$\int(4x+7)^{10}dx=\left|\begin{array}{l} t=4x+7 \quad /d \\ dt=4\,dx \quad /:4 \\ \frac{1}{4}dt=dx \end{array}\right|=\int t^{10}\frac{1}{4}dt=\frac{1}{4}\int t^{10}dt=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{11}t^{11}+C=\frac{1}{44}t^{11}+C=\frac{1}{44}(4x+7)^{11}+C$$

b) $$\int x^2 e^{2x^3-9}dx=\left|\begin{array}{l} t=2x^3-9 \quad /d \\ dt=6x^2dx \quad /:6 \\ \frac{1}{6}dt=x^2dx \end{array}\right|=\int e^t\frac{1}{6}dt=\frac{1}{6}\int e^t\,dt=\frac{1}{6}\cdot e^t+C=\frac{1}{6}e^{2x^3-9}+C$$

Zadania do samodzielnego przerobienia w domu.

Obliczyć całki:

a) $\int\sqrt{3x-1}\,dx$	b) $\int 2\cos 5x\,dx$	c) $\int 3e^{-2x+3}\,dx$	d) $\int\frac{5dx}{3x-2}$
e) $\int\sin(3x-2)dx$	f) $\int x\sqrt[4]{1-2x^2}\,dx$	g) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^3-5}}$	h) $\int 2x^3 e^{-3x^4+5}\,dx$
i) $\int\frac{dx}{(2x+1)^3}$	j) $\int x\cdot\cos\left(2+3x^2\right)dx$	k) $\int\frac{\sqrt{\ln x-3}}{x}dx$	l) $\int\frac{x}{\sqrt[3]{2x^2-1}}\,dx$
m) $\int\frac{dx}{x\cdot\ln x}$	n) $\int\frac{dx}{4x^2+1}$	o) $\int\frac{e^x\,dx}{2e^x-1}$.	