WYKŁAD 3

CAŁKA OZNACZONA. OBLICZANIE POLA OBSZARU.

Całka oznaczona.

Def. (**wzór Newtona-Leibniza**)

Jeżeli $f(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale $\langle a,b\rangle$, to

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(gdzie $F(x)$ – dowolna funkcja pierwotna funkcji $f(x)$)

Uwaga. Powyższy wzór obowiązuje dla dowolnych liczb rzeczywistych a,b.

Własności:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

oraz

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

Przykład.

$$\int_{-1}^{2}\left(2x^3-3x^2+5x-11\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 11x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{1}{2}2^4 - 2^3 + \frac{5}{2}2^2 - 11\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{2}(-1)^4 - (-1)^3 + \frac{5}{2}(-1)^2 + 11\right)$$

$$= (8-8+10-22) - \left(\frac{1}{2}+1+\frac{5}{2}+11\right) = -12-15 = -27$$

Inne ważne własności całki oznaczonej :

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, gdzie $c\in(a;b)$

Własności te wynikają wprost z definicji całki oznaczonej.

Zadanie domowe:

Wykazać te własności korzystając z definicji całki oznaczonej.

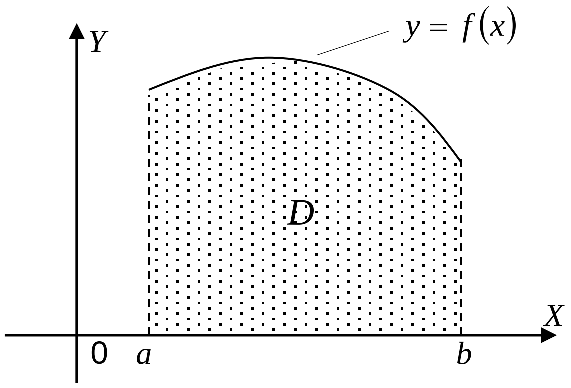
Zastosowanie całki oznaczonej do obliczania pola.

1. <u>Interpretacja geometryczna</u> $\int_a^b f(x)dx$ przy założeniu $f(x) \geq 0$ oraz $a < b$.

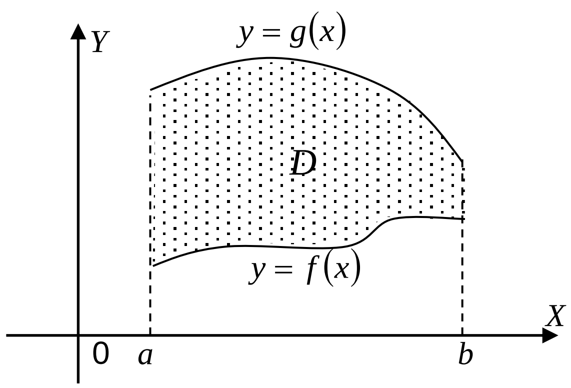
$$|D| = \int_a^b f(x)dx \qquad \text{(rys. 1)}$$

2. <u>Obliczanie pola obszaru D opisanego nierównościami</u>.

Jeżeli $D: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$ to $|D| = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$ (rys. 2) .



Rys. 1



Rys. 2