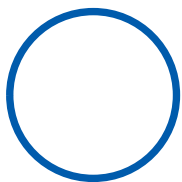


第四次作业讲解



主讲人 王一鸣



1. 图像去畸变

畸变模型 { 径向畸变（镜头形状造成）
切向畸变（透镜和成像非严格平行）

A

B

$$x_{distorted} = x + \underbrace{(k_1 r^2 + k_2 r^4)}_A x + 2p_1 xy + p_2(r^2 + 2x^2) \quad (1)$$

$$y_{distorted} = y + \underbrace{(k_1 r^2 + k_2 r^4)}_A y + \underbrace{p_1(r^2 + 2y^2)}_B + 2p_2 xy \quad (2)$$

其中, $r = \text{sqrt}(x^2 + y^2)$

1. 图像去畸变

图像去畸变的具体步骤如下：

- 计算归一化坐标
- 计算 r
- 进行径向畸变和切向畸变纠正
- 将纠正后的点通过内参数矩阵投影到像素平面

2. 双目视差的使用

由双目视差恢复深度的步骤如下：

- 计算归一化坐标
- 计算当前点深度， $z=fb/d$
- 计算 x ， y ，

$$X = X_{P_c} * Z, Y = Y_{P_c} * Z,$$

3. 矩阵运算微分

注意，此题中， x 应该是 $N \times 1$ 的维度

1. 求 $d(Ax)/dx$

答：令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

(3)

3. 矩阵运算微分

(4)

则 $d(AX)/dX$ 为向量对向量，可得

$$d(AX)/dX = \begin{bmatrix} \partial y_1/\partial x_1 & \partial y_2/\partial x_1 & \cdots & \partial y_n/\partial x_1 \\ \partial y_1/\partial x_2 & \partial y_2/\partial x_2 & \cdots & \partial y_n/\partial x_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \partial y_1/\partial x_n & \partial y_2/\partial x_n & \cdots & \partial y_n/\partial x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = A^T \quad (5)$$

3. 矩阵运算微分

2. 求 $d(x^T Ax)/dx$

答:

$$Y = x^T Ax = [x_1 \quad \cdots \quad x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + x_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)$$

(7)

3. 矩阵运算微分

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

3. 矩阵运算微分

3. 证明: $x^T A x = \text{tr}(A x x^T)$.

证明:

$$A x x^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

则 $\text{tr}(A x x^T) = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + x_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) = x^T A x$

4. 高斯牛顿法的曲线拟合实验



高斯牛顿法步骤如下：

- 给定初始值 x_0
- 对于第 k 次迭代，求出当前的雅克比矩阵和误差
- 计算hessian矩阵和 g
- 求解增量方程
- 迭代停止条件

5. 批量最大似然估计

1. 请给出此处 H 的具体形式

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(9)

(10)

5. 批量最大似然估计

2. 给出此问题下 W 的具体取值

答：构建误差变量：

$$\mathbf{e}_{v,k} = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_{y,k} = \mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k \quad (11)$$

最小二乘的目标函数为

$$\min \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_{v,k}^T Q^{-1} \mathbf{e}_{v,k} + \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_{y,k}^T R^{-1} \mathbf{e}_{y,k} \quad (12)$$

因此，

$$W = \text{diag}(Q, Q, Q, R, R, R) \quad (13)$$

5. 批量最大似然估计

3. 假设所有噪声相互无关, 该问题存在唯一的解吗? 若有, 唯一解是什么? 若没有, 说明理由。

答: $\text{rank}(H)=4$, 问题存在唯一解。

目标函数

$$J(x) = \frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}) \quad (14)$$

让目标函数相对于自变量的偏导数为零

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial J(x)}{\partial \mathbf{x}^T} \right|_{\hat{\mathbf{x}}} &= -\mathbf{H}^T \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) = 0 \\ \Rightarrow (\mathbf{H}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{H}) \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{H}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{z} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{由 } \mathbf{x}_{map}^* = (\mathbf{H}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{z}$$



感谢各位聆听 !
Thanks for Listening ●