第四章作业

作者：曾是少年

二 图像去畸变

现实生活中的图像总存在畸变。原则上来说，针孔透视相机应该将三维世界中的直线投影成直线，但是当我们使用广角和鱼眼镜头时，由于畸变的原因，直线在图像里看起来是扭曲的。本次作业，你将尝试如何对一张图像去畸变，得到畸变前的图像。

图1 是本次习题的测试图像（`code/test.png`），来自EuRoC 数据集[1]。可以明显看到实际的柱子、箱子的直线边缘在图像中被扭曲成了曲线。这就是由相机畸变造成的。根据我们在课上的介绍，畸变前后的坐标变换为：

$$
\begin{aligned}
x_{distorted} &= x(1+k_1r^2+k_2r^4)+2p_1xy+p_2(r^2+2x^2) \\
y_{distorted} &= y(1+k_1r^2+k_2r^4)+p_1(r^2+2y^2)+2p_2xy
\end{aligned}
$$

其中x; y 为去畸变后的坐标，$x_{distorted}$，$y_{distroted}$ 为去畸变前的坐标。

现给定参数：

$$k_1=0.28340811; k2=0.07395907; p_1=0.00019359; p_2=1.76187114e^{-5}:$$

以及相机内参

$$f_x=458.654; f_y=457.296; c_x=367.215; c_y=248.375:$$

请根据`undistort_image.cpp` 文件中内容，完成对该图像的去畸变操作。

答： **去畸变过程**主要包括以下步骤：

1. 将图像的像素坐标系通过内参矩阵转换到相机归一化坐标系

$$
\begin{aligned}
x &= (u-c_x)/f_x \\
y &= (v-c_y)/f_y
\end{aligned}
$$

2. 在相机坐标系下进行去畸变操作

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2+y^2} \\
x' &= x*(1+k_1*r^2+k_2*r^4)+2*p_1*x*y+p_2*(r^2+2*x^2) \\
y' &= y*(1+k_1*r^2+k_2*r^4)+2*p_2*x*y+p_1*(r^2+2*y^2)
\end{aligned}
$$

3. 去畸变操作结束后，将相机坐标系重新转换到图像像素坐标系

$$
\begin{aligned}
u' &= x'*f_x+c_x \\
v' &= y'*f_y+c_y
\end{aligned}
$$

4. 用源图像的像素值对新图像的像素点进行插值

代码修改部分

```
// u(x) 列 v(y) 行
double u_distorted = 0, v_distorted = 0;
// TODO 按照公式，计算点(u,v)对应到畸变图像中的坐标
```

```
// start your code here

// 把像素坐标系的点投影到归一化平面
double x = (u-cx)/fx, y = (v-cy)/fy;

// 计算图像点坐标到光心的距离;
double r = sqrt(x*x+y*y);

// 计算投影点畸变后的点
double x_distorted = x*(1+k1*r+k2*r*r)+2*p1*x*y+p2*(r+2*x*x);
double y_distorted = y*(1+k1*r+k2*r*r)+2*p2*x*y+p1*(r+2*y*y);

// 把畸变后的点投影回去
u_distorted = x_distorted*fx+cx;
v_distorted = y_distorted*fy+cy;
// end your code here
```

运行结果截图

三 双目视差的使用

双目相机的一大好处是可以通过左右目的视差来恢复深度。课程中我们介绍了由视差计算深度的过程。本题，你需要根据视差计算深度，进而生成点云数据。本题的数据来自 `Kitti` 数据集[2]。

`Kitti` 中的相机部分使用了一个双目模型。双目采集到左图和右图，然后我们可以通过左右视图恢复出深度。经典双目恢复深度的算法有 `BM(Block Matching)`，`SGBM(Semi-Global Block Matching)` [3, 4] 等，
但本题不探讨立体视觉内容（那是一个大问题）。我们假设双目计算的视差已经给定，请你根据双目模型，画出图像对应的点云，并显示到 `Pangolin` 中。

本题给定的左右图见 `code/left.png` 和 `code/right.png`，视差图亦给定，见code/right.png。双目的参数如下：

$$f_x = 718.856; f_y = 718.856; c_x = 607.1928; c_y = 185.2157:$$

且双目左右间距（即基线）为:

$$d = 0.573m:$$

请根据以上参数，计算相机数据对应的点云，并显示到Pangolin 中。程序请参考 `code/disparity.cpp` 文件。

答：课本中的**双目相机模型如**下：

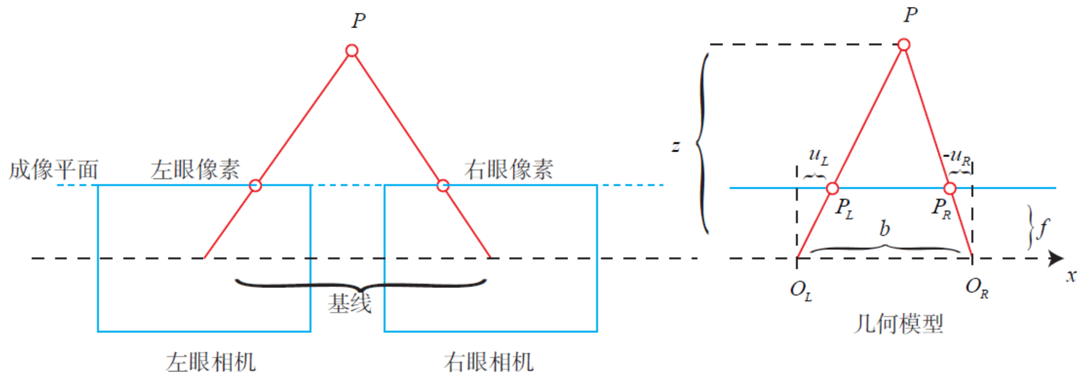


图 5-6　双目相机的成像模型。O_L, O_R 为左右光圈中心，方框为成像平面，f 为焦距。u_L 和 u_R 为成像平面的坐标。请注意，按照图中坐标定义，u_R 应该是负数，所以图中标出的距离为 $-u_R$。

深度计算公式为：

$$depth = \frac{f * b}{d}$$

在程序中，视差disp由深度图提供(uchar类型)。，f焦距由f_x给出，b是基线距离（程序中由d表示，可能会有一点混淆）。

课本中提到。虽然由视差计算深度的公式很简洁，但视差d 本身的计算却比较困难。本程序中**已经提供了视差图**因此很容易计算得到深度。

注意事项：

- 计算点的时候需要把像素点先转换到相机坐标系。
- 程序中基线距离的表示符号为d
- 视差图中数据类型为uchar

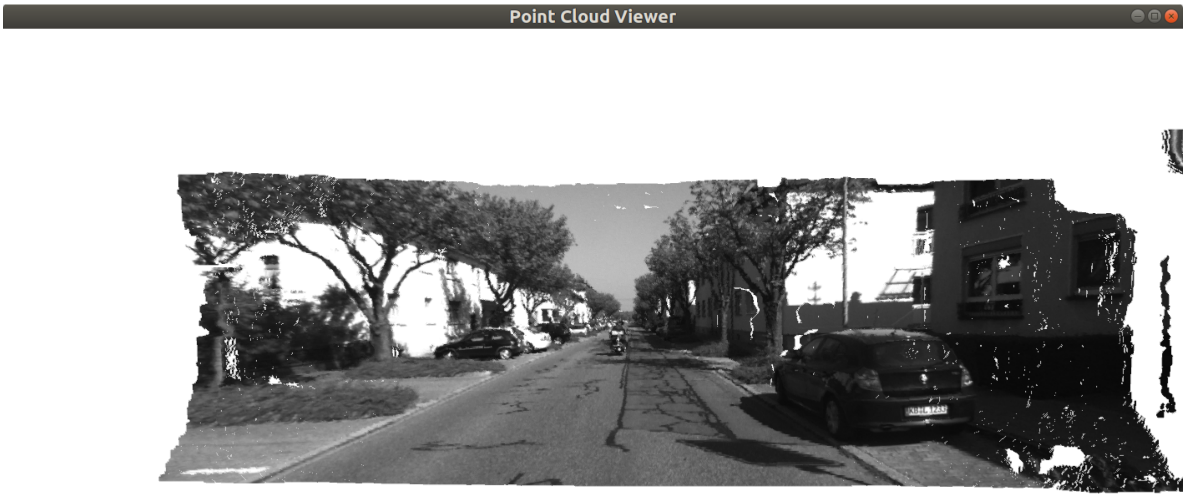
点云计算代码

```
// TODO 根据双目模型计算点云
// 如果你的机器慢，请把后面的v++和u++改成v+=2, u+=2
for (int v = 0; v < left.rows; v++)
    for (int u = 0; u < left.cols; u++) {

        Vector4d point(0, 0, 0, left.at<uchar>(v, u) / 255.0); // 前三维为xyz,第四维为颜色
        // start your code here (~6 lines)
        // 根据双目模型计算 point 的位置
        double x = (u-cx)/fx;
        double y = (v-cy)/fy;
        float disp = disparity.at<uchar>(v,u); //视差
```

```
        double depth = fx*d/(disp);//  d是基线
        point[0] = x*depth;
        point[1] = y*depth;
        point[2] = 1*depth;
        pointcloud.push_back(point);
        // end your code here
    }
```

生成的点云截图如下所示：



四 矩阵运算微分

在优化中经常会遇到矩阵微分的问题。例如，当自变量为向量x，求标量函数u(x) 对x 的导数时，即为矩阵微分。通常线性代数教材不会深入探讨此事，这往往是矩阵论的内容。我在`ppt/`目录下为你准备了一份清华研究生课的矩阵论课件（仅矩阵微分部分）。阅读此ppt，回答下列问题：
设变量为$x \in R^N$，那么：

1. 矩阵$A \in R^{N \times N}$，那么d(Ax)/dx 是什么？

答：x是$n \times 1$列向量

令矩阵$A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, $A = [a_1'; a_2'; \dots; a_n']$

$$\frac{\partial Ax}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Ax_1}{\partial x_1} & \frac{\partial Ax_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial Ax_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial Ax_1}{\partial x_2} & \frac{\partial Ax_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial Ax_n}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial Ax_1}{\partial x_n} & \frac{\partial Ax_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial Ax_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

先对x的第i个分量求导：

$$\frac{\partial Ax_i}{\partial x_k} = \frac{\partial a_i x}{\partial x_k} = a_{ik}$$

导入前式有：

$$\frac{\partial Ax}{\partial x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = A^T$$

2. 矩阵$A \in R^{N \times N}$，那么$d(x^TAx)/dx$ 是什么？

答:

$$\frac{\partial x^TAx}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^TAx}{\partial x_1} & \frac{\partial x^TAx}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial x^TAx}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

先对x的第k个分量求导，结果如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^TAx}{\partial x_k} &= \frac{\partial \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_iA_{ij}x_j}{\partial x_k} \\ &= \sum_{i=1}^n A_{ik}x_i + \sum_{j=1}^n A_{kj}x_j \\ &= a_k^Tx + a'_kx \end{aligned}$$

可以看出第一部分是矩阵A的第k列转置后和x相乘得到，第二部分是矩阵A的第k行和x相乘得到，排列好就是:

$$\frac{\partial x^TAx}{\partial x} = A^Tx + Ax$$

3. 证明：$x^TAx = tr(Axx^T)$

证明:

设a,b都是n维列向量，显然有

$$ab^T = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{bmatrix}$$

$$b^Ta = \sum_{i=1}^n a_ib_i$$

显然，可以得到：

$$tr(ab^T) = b^Ta$$

令 $a = Ax$, $b = x$ 可得

$$tr(Axx^T) = tr((Ax)x^T) = x^TAx$$

证毕

附加参考：

Identities: vector-by-vector $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$

Condition	Expression	Numerator layout, i.e. by $\mathbf{y}$ and $\mathbf{x}^\mathsf{T}$	Denominator layout, i.e. by $\mathbf{y}^\mathsf{T}$ and $\mathbf{x}$
$\mathbf{a}$ is not a function of $\mathbf{x}$	$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} =$	$\mathbf{0}$	
	$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} =$	$\mathbf{I}$	
$\mathbf{A}$ is not a function of $\mathbf{x}$	$\frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} =$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}^\top$
$\mathbf{A}$ is not a function of $\mathbf{x}$	$\frac{\partial \mathbf{x}^\top \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}} =$	$\mathbf{A}^\top$	$\mathbf{A}$
a is not a function of $\mathbf{x}$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$	$\frac{\partial a\mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} =$	$a\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$	
$a = a(\mathbf{x})$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$	$\frac{\partial a\mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} =$	$a\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{u}\frac{\partial a}{\partial \mathbf{x}}$	$a\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial a}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{u}^\top$
$\mathbf{A}$ is not a function of $\mathbf{x}$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$	$\frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} =$	$\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$	$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{A}^\top$
$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$	$\frac{\partial (\mathbf{u}+\mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} =$	$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}$	
$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$	$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} =$	$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$	$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}$
$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$	$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{u}))}{\partial \mathbf{x}} =$	$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{g}}\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$	$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{g}}$

五 高斯牛顿法的曲线拟合实验

我们在课上演示了用`Ceres`和`g2o`进行曲线拟合的实验，可以看到优化框架给我们带来了诸多便利。本题中你需要自己实现一遍高斯牛顿的迭代过程，求解曲线的参数。我们将原题复述如下。设有曲线满足以下方程：

$$y = \exp(ax^2 + bx + c) + w.$$

其中a, b, c为曲线参数，`w`为噪声。现有N个数据点(x, y)，希望通过此N个点来拟合a, b, c。实验中取$N = 100$。
那么，定义误差为$e_i = y_i - \exp(ax_i^2 + bx_i + c)$，于是$(a, b, c)$的最优解可通过解以下最小二乘获得：

$$\min_{a,b,c} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} ||y_i \exp(ax_i^2 + bx_i + c)||^2$$

现在请你书写 `Gauss-Newton` 的程序以解决此问题。程序框架见 `code/gaussnewton.cpp`，请填写程序内容以完成作业。作为验证，按照此程序的设定，估计得到的a; b; c 应为：
$a = 0.890912; b = 2.1719; c = 0.943629,$
这和书中的结果是吻合的。

答：先回顾高斯牛顿法求解最小二乘问题的步骤：

$$\Delta x^* = \arg\min_{\Delta x} \frac{1}{2} ||f(x) + J(x)^T \Delta x||^2$$

1. 给定初始值x_0。
2. 对于第k 次迭代，求出当前的雅可比矩阵$J(x_k)$ 和误差$f(x_k)$。
3. 求解增量方程：$H\Delta x_k = g$。
4. 若Δx_k 足够小，则停止。否则，令$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$，返回第2 步。

可以按照以上步骤来修改代码

1. 设置初始值

```
double ae = 2.0, be = -1.0, ce = 5.0;
```

2. 计算雅可比矩阵$J(x_k)$ 和误差$f(x_k)$。

计算误差 $error = f(x_i) - f_e(x_i)$

```
error = yi - exp(ae * xi * xi + be * xi + ce);
```

计算雅可比矩阵$J = \frac{\partial error}{\partial x}$

```
Vector3d J; // 雅可比矩阵
J[0] = - exp(ae * xi * xi + be * xi + ce)* xi * xi;  // de/da
J[1] = - exp(ae * xi * xi + be * xi + ce)* xi;  // de/db
J[2] = - exp(ae * xi * xi + be * xi + ce);  // de/dc
```

3. 求解增量方程

计算增量矩阵H

```
H += J * J.transpose(); // GN近似的H
```

计算g

```
b += -error * J;
```

用EIgen中的ldlt求解$H\Delta x = b$。

```
Vector3d dx;
dx = H.ldlt().solve(b);
```

4. 若Δx_k 足够小，则停止。否则，令$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$，返回第2 步。

```
if (iter > 0 && cost > lastCost) {
    // 误差增长了，说明近似的不够好
    cout << "cost: " << cost << ", last cost: " << lastCost << endl;
    break;
}
```

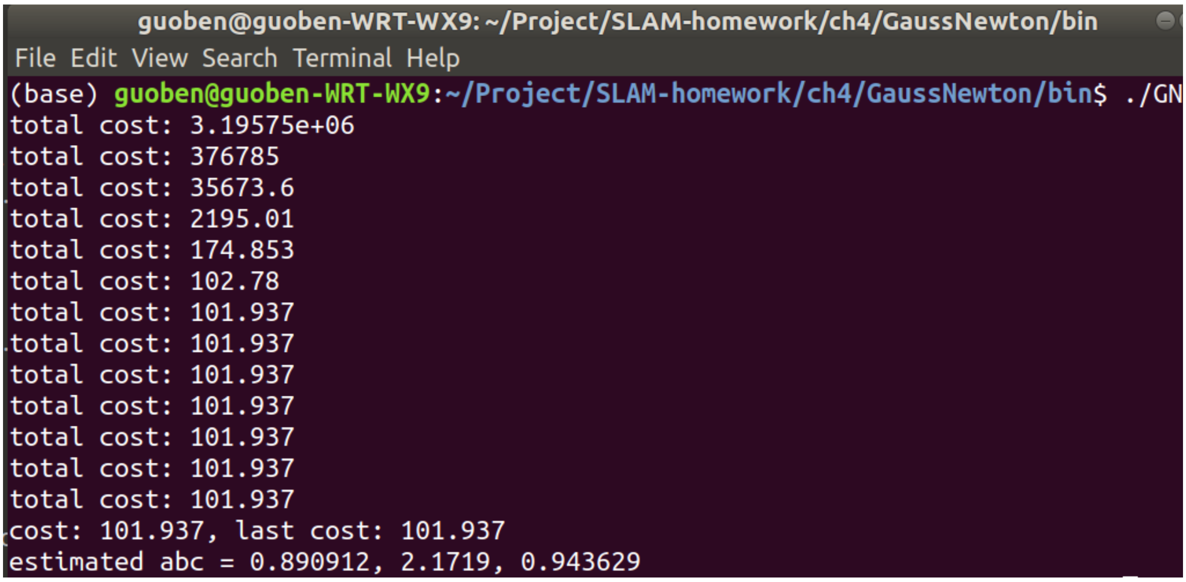
至此，代码修改完毕。

运行结果：

```
/home/guoben/Project/SLAM-homework/ch4/GaussNewton/bin/GN
total cost: 3.19575e+06
total cost: 376785
total cost: 35673.6
total cost: 2195.01
total cost: 174.853
total cost: 102.78
total cost: 101.937
total cost: 101.937
total cost: 101.937
total cost: 101.937
total cost: 101.937
total cost: 101.937
total cost: 101.937
cost: 101.937, last cost: 101.937
estimated abc = 0.890912, 2.1719, 0.943629

Process finished with exit code 0
```

截图



附加题 * 批量最大似然估计

考虑离散时间系统：

$$x_k = x_{k-1} + v_k + w_k; w \sim N(0; Q)$$
$$y_k = x_k + n_k; n_k \sim N(0; R)$$

这可以表达一辆沿x 轴前进或后退的汽车。第一个公式为运动方程，v_k 为输入，w_k 为噪声；第二个公式为观测方程，y_k 为路标点。取时间$k=1,...,3$，现希望根据已有的v,y 进行状态估计。设初始状态 x_0 已知。
请根据本题题设，推导批量（batch）最大似然估计。首先，令批量状态变量为

$x=[x_0,x_1,x_2,x_3]^T$，令批量观测为$z=[v_1,v_2,v_3,y_1,y_2,y_3]^T$，那么：

1. 可以定义矩阵 H，使得批量误差为$e=z-Hx$。请给出此处H的具体形式。

答：该线性系统很简单，很容易的写成以下形式

$$\begin{aligned} v_k &= x_k - x_{k-1} + w_k \\ y_k &= x_k + n_k \end{aligned}$$

而$z-Hx=e\sim N(0,\Sigma)$, 向量化上式可以得到：

$$H=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 据上问，最大似然估计可转换为最小二乘问题, 请给出此问题下信息矩阵W 的具体取值。

$$x^*=\arg\min\frac{1}{2}(z-Hx)^TW^{-1}(z-Hx)$$

其中W 为此问题的信息矩阵，可以从最大似然的概率定义给出。

答：$W=diag(Q,R)$

$$\begin{aligned} x^* &= \arg\max P(x|z) = \arg\max P(z|x) \\ &= \prod_{k=1}^{3} P(v_k|x_{k-1},x_k)\prod_{k=1}^{3}P(y_k|x_k) \end{aligned}$$

其中 $P(v_k|x_{k-1},x_k)=N(x_k-x_{k-1},Q)$，

$P(y_k|x_k)=N(x_k,R)$。

误差变量如下：

$$e_{v,k}=x_k-x_{k-1}-v_k, e_{z,k}=y_k-x_k$$

对概率取对数，可以把最小二乘的目标函数化为如下形式：

$$\min\sum_{k=1}^{3}e_{v,k}^TQ^{-1}e_{v,k}+\sum_{k=1}^{3}e_{y,k}^TR^{-1}e_{y,k}$$

因此$W=diag(Q,Q,Q,R,R,R)$; 即

$$
W = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix}
$$

此时，最小二乘问题可以写为：

$$
x^* = \arg\min e^T W^{-1} e
$$

3. 假设所有噪声相互无关，该问题存在唯一的解吗？若有，唯一解是什么？若没有，说明理由。

答：当噪声相互无关的时候，该问题存在唯一解。

因为$Hx = z$这个式子中H是6*4矩阵，**方程个数大于未知量个数的方程组**，是一个超定矩阵。而系数矩阵超定时，最小二乘问题可以得到唯一解。

唯一最小二乘解如下：

$$
x = (H^T H)^{-1} H^T z
$$