第三章作业

作业：曾是少年

二 群的性质

课上我们讲解了什么是群。请根据群定义，求解以下问题：

1. $\{Z,+\}$ 是否为群？若是，验证其满足群定义；若不是，说明理由。

答：{Z,+}**是群**；

对于$\{Z,+\}$，设$a_1 \in Z$,$a_2 \in Z$,$a_e \in Z$。

1. 对于$\forall a_1 \in Z$,$a_2 \in Z$, 有$a_1 + a_2 \in Z$, 因此满足**封闭性**。
2. 对于$\forall a_1 \in Z, a_2 \in Z, a_3 \in Z$, $(a_1+a_2)+a_3 = a_1+(a_2+a_3)$，因此满足**结合律**。
3. Z中存在$0 \in Z$,对于$\forall a \in Z$,有$a+0=a$,因此慢足**幺元**
4. 对于$\forall a \in Z$, 存在 $-a \in Z$,使得 $a+(-a)=0$,因此满足**逆**。

$\{Z,+\}$满足以上四条性质，因此**是群**

2. $\{N,+\}$ 是否为群？若是，验证其满足群定义；若不是，说明理由。

其中Z为整数集，N为自然数集

答： $\{N,+\}$ **不是群；**

对于$\forall a \in N$，且$a \neq 0$,$-a \notin N$,不满足逆的性质要求。因此不是群。

三 验证向量叉乘的李代数性质

我们说向量和叉乘运算构成了李代数，现在请你验证它。书中对李代数的定义为：李代数由一个集合，V，一个数域 F 和一个二元运算 [,] 组成。如果它们满足以下集几条性质，称$(V,F,[,])$ 为一个李代数，记作g。

1. 封闭性 $\forall X,Y \in V, [X,Y] \in V.$
2. 双线性 $\forall X,Y,Z \in V, a,b \in F$, 有:
$$[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z],[Z,aX+bY]=a[Z,X]+b[Z,Y].$$
3. 自反性 $\forall X \in V, [X,X]=0.$
4. 雅可比等价 $\forall X,Y,Z \in V, [X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0.$

其中二元运算被称为李括号。

现取集合$V=R^3$，数域$F=R$，李括号为:

$$[a,b]=a\times b$$

请验证$g=(R^3,R,\times)$构成李代数。

验证：

1. 封闭性

对于$\forall X,Y\in R^3$，$X\times Y$依然是一个向量，即$X\times Y\in R^3$,因此满足封闭性条件。

2. 双线性

对于$\forall X,Y,Z\in R^3$，$a,b\in R$，向量叉乘运算满足分配律和线性性，因此有：

$(aX+bY)\times Z=aX\times Z+bY\times Z=a(X\times Z)+b(Y\times Z)$

$Z\times(aX+bY)=aZ\times X+bZ\times Y=a(Z\times X)+b(Z\times Y)$

因此满足双线性

3. 自反性

对于 $\forall X\in R^3$,$|X\times X|=|X||X|sin0=0$，因此$X\times X=0$,满足自反性。

4. 雅可比等价

向量的叉乘运算满足一下性质：

对于$\forall X,Y,Z\in R^3$，

- （$X\times Y$） $\times Z=(XZ)Y-(YZ)X$
- $X\times(Y\times Z)=(XZ)Y-(XY)Z$

因此

$$\begin{gathered}X\times(Y\times Z)+Y\times(Z\times X)+Z\times(X\times Y)\\=X(YZ)-Z(XY)+(YX)Z-(YZ)X+(ZY)X-(ZX)Y\\=0\end{gathered}$$

因此向量的叉乘运算满足雅可比恒等式。

综上所述，$g=(R^3,R,\times)$构成李代数

四 推导 SE(3) 的指数映射

课上给出了 SO(3) 的指数映射推导，但对于 SE(3)，仅介绍了结论，没有给出详细推导。请你完成SE(3)指数映射部分，有关左雅可比的详细推导。

设$\xi=[\rho,\phi]^T\in se(3)$，它的指数映射为：

$$\exp\left(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right)=\begin{bmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)^{n} & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)^{n}\boldsymbol{\rho}\\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1\end{bmatrix}$$

令$\phi=\theta a$,那么：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\left(\phi^{\wedge}\right)^{n}=\frac{\sin\theta}{\theta}I+\left(1-\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{T}+\frac{1-\cos\theta}{\theta}\boldsymbol{a}^{\wedge}\triangleq\boldsymbol{J}.$$

这也正是课件里提到的左雅可比。

答： 令$\phi = \theta a$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\theta a^\wedge)^n \\
&= I + \frac{1}{2!}(\theta a^\wedge) + \frac{1}{3!}(\theta a^\wedge)^2 + \frac{1}{4!}(\theta a^\wedge)^3 + \frac{1}{5!}(\theta a^\wedge)^4 + \ldots \\
&= I + \frac{1}{2!}\theta a^\wedge + \frac{1}{3!}\theta^2 a^{\wedge 2} + \frac{1}{4!}\theta^3 a^{\wedge 3} + \frac{1}{5!}\theta^4 a^{\wedge 4} + \ldots
\end{aligned}
$$

其中：

$$
(a^\wedge)^n = \begin{cases} \pm(a^\wedge) & \text{n为奇数} \\ \pm(aa^T - I) & \text{n为偶数} \end{cases}
$$

所以：

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n &= I + \frac{1}{2!}\theta a^\wedge + \frac{1}{3!}\theta^2 a^{\wedge 2} + \frac{1}{4!}\theta^3 a^{\wedge 3} + \frac{1}{5!}\theta^4 a^{\wedge 4} + \ldots \\
&= I + (\frac{1}{2!}\theta - \frac{1}{4!}\theta^3 + \ldots)a^\wedge + (\frac{1}{3!}\theta^2 - \frac{1}{5!}\theta^4 + \ldots)(aa^T - I) \\
&= I + \frac{1}{\theta}(\frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{4!}\theta^4 + \ldots)a^\wedge + \frac{1}{\theta}(\frac{1}{3!}\theta^3 - \frac{1}{5!}\theta^5 + \ldots)(aa^T - I) \\
&= I + \frac{1}{\theta}(\frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{4!}\theta^4 + \ldots)a^\wedge + \frac{1}{\theta}(\frac{1}{3!}\theta^3 - \frac{1}{5!}\theta^5 + \ldots)(aa^T - I) \\
&= \frac{1}{\theta}(\frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{4!}\theta^4 + \ldots)a^\wedge + \frac{1}{\theta}(\frac{1}{3!}\theta^3 - \frac{1}{5!}\theta^5 + \ldots)aa^T + \frac{1}{\theta}(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \ldots)I \\
&= \frac{1 - cos\theta}{\theta}a^\wedge + \frac{1}{\theta}(\theta - sin\theta)aa^T + \frac{sin\theta}{\theta}I
\end{aligned}
$$

即：

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n = \frac{1 - cos\theta}{\theta}a^\wedge + \frac{1}{\theta}(\theta - sin\theta)aa^T + \frac{sin\theta}{\theta}I
$$

五 伴随

在`SO(3)`和`SE(3)`上，有一个东西称为伴随（Adjoint）。下面请你证明SO(3) 伴随的性质。
对于`SO(3)`，有：

$$
R\exp(p^\wedge)R^T = \exp((Rp)^\wedge)
$$

此时称`Ad(R) = R`。
提示：首先你需要证明$\forall a \in R^3, Ra^\wedge R^T = (Ra)^\wedge$，页面提示了一种简洁的途径。
对于SE(3)，有：

$$
T\exp(\xi^\wedge)T^{-1} = \exp((Ad(T)\xi^\wedge)
$$

其中`Ad(T)`定义为：

$$
Ad(T) = \begin{bmatrix} R & t^\wedge R \\ 0 & R \end{bmatrix}
$$

这个性质将在后文的Pose Graph 优化中用到。但是SE(3) 的证明较为复杂，不作要求。
完整的SO(3) 和SE(3) 性质见1和2。

证明：

我们先来证明$Ra^\wedge R^T=(Ra)^\wedge$，过程如下：·

$$a^\wedge v = a\times v$$

我们可以通过使等式的RHS作用于任意向量v来证明该等式：

$$\begin{aligned}(Ra)^\wedge v &= (Ra)\times v\\ &= (Ra)\times(RR^{-1}v) \qquad (RR^{-1}=I)\\ &= R[a\times(R^{-1}v)] \qquad (\text{分配律})\\ &= Ra^\wedge R^{-1}v \qquad (\text{结合律})\end{aligned}$$

因此得到：

$$(Ra)^\wedge = Ra^\wedge R^{-1}$$

而R是正交矩阵，因此

$$(Ra)^\wedge = Ra^\wedge R^T$$

令$\rho=\theta a$

$$\begin{aligned}R\exp(\theta a^\wedge)R^T &= R(\cos\theta I+(1-\cos\theta)aa^T+\sin\theta a^\wedge)R^T\\ &= \cos\theta I+(1-cos\theta)Ra(Ra)^T+sin\theta Ra^\wedge R^T\\ &= \cos\theta I+(1-cos\theta)Ra(Ra)^T+sin\theta(Ra)^\wedge\\ &= \exp(\theta(Ra)^\wedge)\\ &= \exp((R\rho)^\wedge)\end{aligned}$$

证毕。

拓展：**伴随表示**

在数学中，一个李群 *G* 的**伴随表示**（adjoint representation）或**伴随作用**（adjoint action）是 *G* 在它自身的李代数上的自然表示。这个表示是群 *G* 在自身上的共轭作用的线性化形式。

六 轨迹的描绘

我们通常会记录机器人的运动轨迹，来观察它的运动是否符合预期。大部分数据集都会提供标准轨迹以供参考，如 `kitti`、`TUM-RGBD` 等。这些文件会有各自的格式，但首先你要理解它的内容。记世界坐标系为 `W`，机器人坐标系为 `C`，那么机器人的运动可以用 T_{WC} 或 T_{CW} 来描述。现在，我们希望画出机器人在世界当中的运动轨迹，请回答以下问题：

1. 事实上，T_{WC} 的平移部分即构成了机器人的轨迹。它的物理意义是什么？为何画出 T_{WC} 的平移部分就得到了机器人的轨迹？

   答:物理意义: T_{WC}指的是从世界坐标系原点到相机中心的平移向量;

   世界坐标系不随相机运动变化,因此可以认为T_{wc}是机器人相对于原点坐标在移动, 移动可视化在观察者眼中就是是机器人的运动轨迹

2. 我为你准备了一个轨迹文件（code/trajectory.txt）。该文件的每一行由若干个数据组成，格式为

   $$[t, t_x, t_y, t_z, q_x, q_y, q_z, q_w]$$

   其中 t 为时间，tx, ty, tz 为 T_{WC} 的平移部分，q_x, q_y, q_z, q_w 是四元数表示的 T_{WC} 的旋转部分，q_w为四元数实部。同时，我为你提供了画图程序 `draw_trajectory.cpp` 文件。该文件提供了画图部分的代码，请你完成数据读取部分的代码，然后书写 `CMakeLists.txt` 以让此程序运行起来。注意我们需要用到 `Pangolin` 库来画图，所以你需要事先安装 `Pangolin`（如果你做了第一

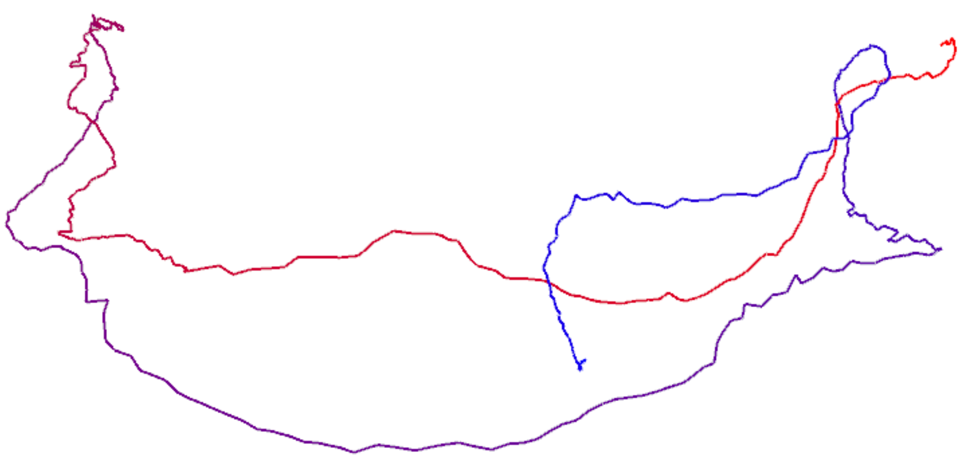
次作业，那么现在已经安装了）。`CMakeLists.txt` 可以参照 `ORB-SLAM2` 部分。

答:实现过程:使用fstream读取文件中的数据,在编译的时候遇到一点小bug,不过都解决了.

读取数据的代码块如下:

```
    double t,t_x,t_y,t_z,q_x,q_y,q_z,q_w;
    while(!inFILE.eof())
    {
        inFILE>>t;
        inFILE>>t_x;
        inFILE>>t_y;
        inFILE>>t_z;
        inFILE>>q_x;
        inFILE>>q_y;
        inFILE>>q_z;
        inFILE>>q_w;
 poses.push_back(Sophus::SE3(Eigen::Quaterniond(q_w,q_x,q_y,q_z),Eigen::Vector3d(t_x,t_y,t_z)));
    }
```

运行结果如下所示;



该图中:轨迹首尾颜色不一样,通过观察,发现是着色函数设置的颜色随位置变化.

附加题 七 轨迹的误差

除了画出真实轨迹以外，我们经常需要把 SLAM 估计的轨迹与真实轨迹相比较。下面说明比较的原理，请你完成比较部分的代码实现。

设真实轨迹（ground-truth）为 T_g，估计轨迹 T_e。它们都以 T_{WC} 的形式存储，格式同上题。现在，你需要计算估计轨迹的误差。我们假设每一个 T_g 都与给定的 T_e 对应。那么，对于任意第 i 个位姿，它的误差可定义为：

$$e_i = ||\log(T_{gi}^{-1}T_{ei})^{\vee}||_2.$$

即两个位姿之差的李代数二范数。于是，可以定义两条轨迹的均方根（Root-Mean-Square-Error, RMSE）误差为：

$$RMSE(g,e) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2}$$

我为你准备了 `code/ground-truth.txt` 和 `code/estimate.txt` 两条轨迹。请你根据上面公式，实现 RMSE的计算代码，给出最后的 RMSE 结果。作为验算，参考答案为：2.207。

注:

1. 实际当中的轨迹比较还要更复杂一些。通常 `ground-truth` 由其他传感器记录（如 vicon），它的采样频率通常高于相机的频率，所以在处理之前还需要按照时间戳对齐。另外，由于传感器坐标系不一致，还需要计算两个坐标系之间的差异。这件事也可以用 ICP 解得，我们将在后面的课程中讲到。
2. 你可以用上题的画图程序将两条轨迹画在同一个图里，看看它们相差多少。

答：添加的代码主要包括三部分:

1. 读取两个文件`ground-truth.txt`和`estimate.txt`，该部分与上一题中的相同。
2. 计算rmse，对于已经得到的两个pose集合，可以通过以下代码计算。

```
double calculateRMSE(vector<Sophus::SE3, Eigen::aligned_allocator<Sophus::SE3>> truth_poses,vector<Sophus::SE3, Eigen::aligned_allocator<Sophus::SE3>> estimated_poses)
{
    double rmse=0.0;
    for(int i = 0;i<truth_poses.size();i++)
    {
        Eigen::Matrix<double ,6,1> se3;
        se3 = (truth_poses[i].inverse()*estimated_poses[i]).log(); //这里是通过一个把其中一个变换乘以一个逆变换得到一个差矩阵，再通过.log()可以转换为向量形式
        rmse+=se3.squaredNorm();
    }
    rmse = sqrt(rmse/(double)truth_poses.size());
    return rmse;
}
```

3. 画图，修改轨迹绘制代码，函数部分代码如下所示：

```
while (pangolin::ShouldQuit() == false) {
    glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT | GL_DEPTH_BUFFER_BIT);

    d_cam.Activate(s_cam);
    glClearColor(1.0f, 1.0f, 1.0f, 1.0f);

    glLineWidth(2);
    for (size_t i = 0; i < truth_poses.size() - 1; i++) {
        glColor3f(1.0f, 0.0f, 0.0f);
        glBegin(GL_LINES);
        auto p1 = truth_poses[i], p2 = truth_poses[i + 1];
        glVertex3d(p1.translation()[0], p1.translation()[1], p1.translation()[2]);
        glVertex3d(p2.translation()[0], p2.translation()[1], p2.translation()[2]);
```

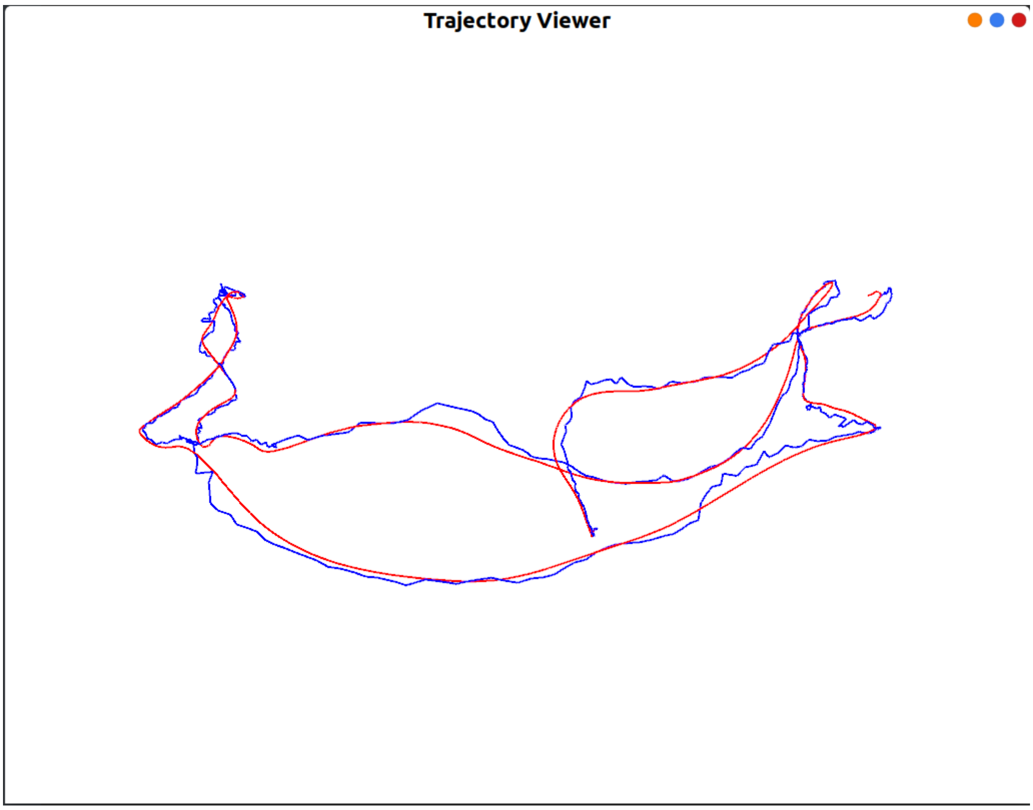
```
        glEnd();

        glColor3f(0.0f, 0.0f, 1.0f);
        glBegin(GL_LINES);
        p1 = estimated_poses[i], p2 = estimated_poses[i + 1];
        glVertex3d(p1.translation()[0], p1.translation()[1], p1.translation()[2]);
        glVertex3d(p2.translation()[0], p2.translation()[1], p2.translation()[2]);
        glEnd();

    }
    pangolin::FinishFrame();
    usleep(5000);   // sleep 5 ms
}
```

最后运行结果如下：

```
/home/guoben/Project/SLAM-homework/ch3/draw_trajectory/bin/drawtraj
rmse:2.20727
```



其中，红色轨迹表示真值，蓝色轨迹表示估计值