コンピュータ応用演習課題 (樫森)

◎常微分方程式をルンゲ・クッタ法~~で~~を用いて数値的に解を求める.

Runge-Kutta 法

◆ **Runge-Kutta 法のアルゴリズム**　定理 4.2 より精度 p の高い近似解法ほど誤差が小さかった．精度 4 をもつ 1 段階法として Runge-Kutta (ルンゲ・クッタ) 法がある．この方法は初期値問題の近似解法として広く用いられている．初期値問題

$$y' = f(x, y), \qquad y(a) = y_0$$

を区間 $[a, b]$ で解くために,

$$h = (b-a)/n, \qquad x_0 = a, \qquad x_{i+1} = x_i + h \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

としたとき, Runge-Kutta 法はつぎのアルゴリズムで示される:

$$Y_0 = y_0, \qquad Y_{i+1} = Y_i + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

ただし,
$$k_1 = f(x_i, Y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + (1/2)h, \ Y_i + (1/2)hk_1)$$
$$k_3 = f(x_i + (1/2)h, \ Y_i + (1/2)hk_2)$$
$$k_4 = f(x_i + h, \ Y_i + hk_3)$$

◆ **Runge-Kutta 法の計算ステップ**

ステップ 1　a, b, n, y_0 の値を読み込む.

ステップ 2　$h = (b-a)/n$ を計算し, $h/2 \to hh$ (hh は 1 つの変数名[1]) とおく.
　$x = a$, $y = y_0$, $i = 0$ とおく.

ステップ 3　i, x, y の値を書き出す.

ステップ 4
　$i+1 \to i$ とし, $i > n$ ⇨ ステップ 7 へ
　　　　　　$i \leq n$ ⇨ ステップ 5 へ

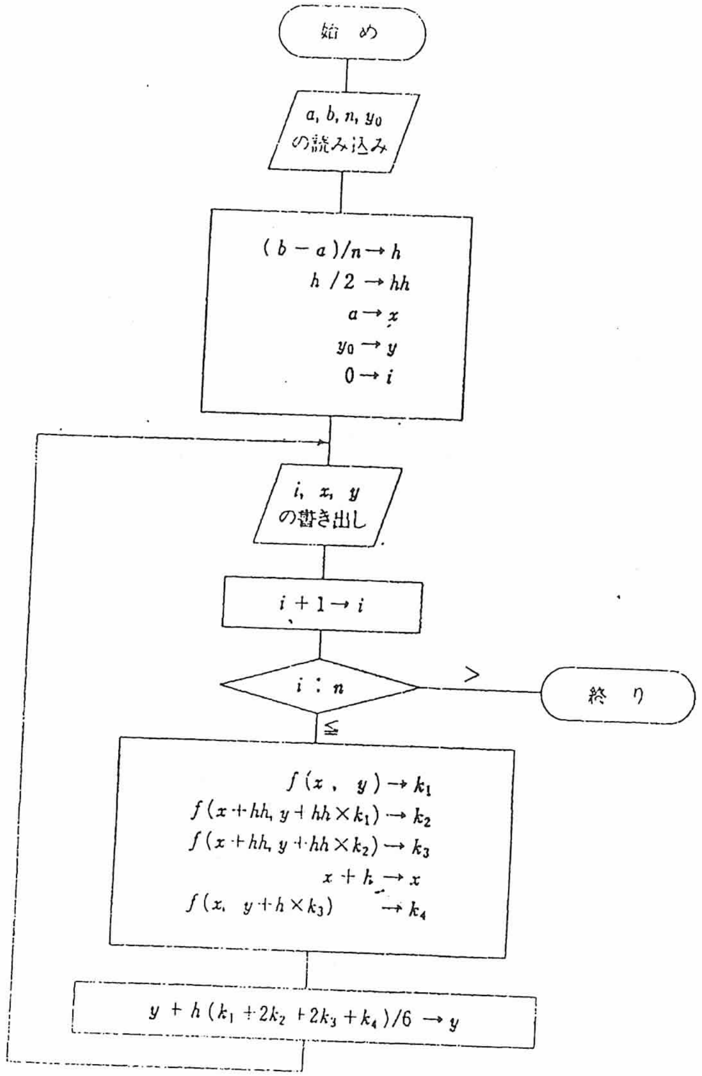
ステップ 5　k_1, k_2, k_3, k_4 の値を次の順序で求める.
　$k_1 = f(x, y)$
　$k_2 = f(x + hh, \ y + hh \times k_1)$
　$k_3 = f(x + hh, \ y + hh \times k_2)$
　$x + h \to x$ として
　$k_4 = f(x, y + h \times k_3)$

ステップ 6　$y + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \to y$
　として, ステップ 3 に戻る.

ステップ 7　計算終了.

1　数学では通常変数は $x, y, z, \cdots$ のように 1 文字で表わすが, FORTRAN では英字で始まる 6 文字以内の英数字を変数名に使用できるので, 今後 2 文字以上の変数名をときどき用いる.

◆ **Runge-Kutta 法の流れ図**



流れ図 4.1　4 次の Runge-Kutta 法

ルンゲ・クッタ法の計算原理

として、繰り返し演算をすれば数値的に微分方程式を解くことができる。
以上の計算原理を図解すると、

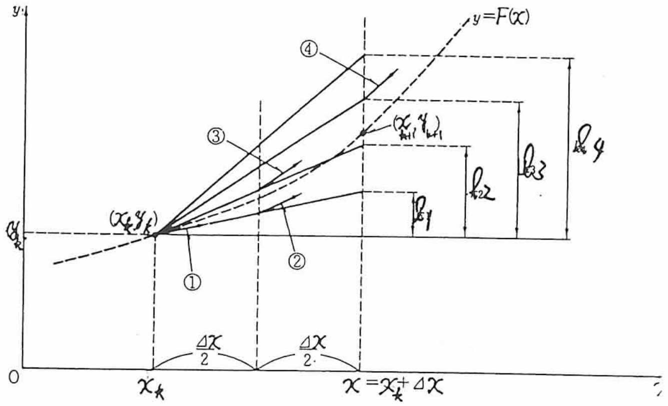
i. 図の①は点(x_k, y_k)における曲線の接線を表しており、xがΔx増加したときのyの増加量がl_1である。

ii. ②は、$x_k+\Delta x/2$での接線の傾きを表し、l_2はその傾き$f(x_k+\Delta x/2, y_k+l_1/2)$で$x$が$\Delta x$増加したときの$y$の増加量をあらわす。

iii. ③は②の傾きでxが$x_k+\Delta x/2$になったときの接線を表し、l_3はその傾き$f(x_k+\Delta x/2, y_k+l_2/2)$で$x$が$\Delta x$増加したときの$y$の増加量を表す。

iv. ④は③の傾きでxが$x_k+\Delta x$のときの接線を表し、l_4はその傾き$f(x_k+\Delta x, y_k+l_3)$でxがΔx増加したときのyの増加量を表す。

v. 以上の4種類のyの増加量l_1からl_4までを求め、それらを 1:2:2:1 の割合で重みをつけて平均した量$\frac{1}{6}(l_1+2l_2+2l_3+l_4)$を繰り返し加算していく。



ルンゲ・クッタ法の原理

以上が一階の微分方程式をルンゲ・クッタ法で数値的に解く原理である。

参考文献：戸川隼人 「数値計算」 岩波書店

20.4. 連立方程式でのルンゲ-クッタ法　n個の未知関数$y_1, \cdots, y_n$をきめる連立常微分方程式

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \cdots, y_n) \quad (i = 1, \cdots, n)$$

の場合は$y_1, \cdots, y_n$をベクトル$Y(y_1, \cdots, y_n)$として取扱うことによって1元のときとまったく同じやり方が適用できる．また高階の常微分方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

の場合には

$$y_1 = y, \quad y_2 = \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy}{dx}, \cdots, y_n = \frac{dy_{n-1}}{dx} = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

のようにおいて，この$y_1, \cdots, y_n$についての連立方程式として処理すればよい．

簡単のため2元のときについて計算のひとつひとつの手順を示すとつぎのようである．問題は

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z)$$

を初期条件；$x = x_0$のとき$y = y_0, z = z_0$で解くことである．

$$y(x_0+h) - y(x_0) = \bar{k}, \quad z(x_0+h) - z(x_0) = \bar{l}$$

はつぎのようにしてきめられる．

$$k_1 = hf(x_0, y_0, z_0) \qquad l_1 = hg(x_0, y_0, z_0)$$

$$k_2 = hf\left(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{k_1}{2}, z_0+\frac{l_1}{2}\right) \qquad l_2 = hg\left(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{k_1}{2}, z_0+\frac{l_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{k_2}{2}, z_0+\frac{l_2}{2}\right) \qquad l_3 = hg\left(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{k_2}{2}, z_0+\frac{l_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_0+h, y_0+k_3, z_0+l_3) \qquad l_4 = hg(x_0+h, y_0+k_3, z_0+l_3)$$

$$\bar{k} = \frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4) \qquad \bar{l} = \frac{1}{6}(l_1+2l_2+2l_3+l_4).$$

ジル法などについても同様であって要するに1元のときのy, k, qなどをそのままベクトルの形と考えて適用すればよい．

〈ルンゲ・クッタ法の応用〉

カオスを描く

非線形バネの強制振動

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \underbrace{ax^3}_{\text{nonlinear}} - \gamma\frac{dx}{dt} + b\cos(\omega t) \qquad (1)$$

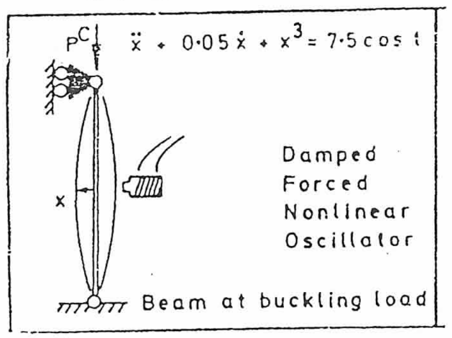
Duffing's equation

$$\ddot{x} + K\dot{x} + x^3 = B\cos t \qquad (2)$$

$$(\dot{x} = \frac{d}{dt})$$

K, B の値を変えることにより、x(t) の時間依存性は、周期、非周期（カオス）とさまざまに変化する。周期解でも初期条件のちがいによって、2－5 種類の周期を持つ状態に引き込まれるなどさまざまな状態が出現する。これが、非線形現象のおもしろさである。

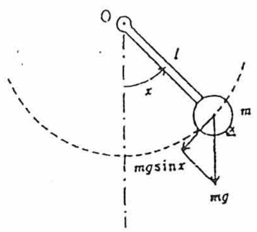
図 3-1



$k = 0, \quad a/m = 1, \quad K = \gamma/m$

$B \equiv b/m, \quad \omega = 1$

3次の項



$$ml\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin x$$

図 3-2

振り子の運動：

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}\sin x$$

$$= -\frac{g}{l}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots\right)$$

$$\ddot{x} + 0.05\dot{x} + x^3 = 7.5\cos t$$

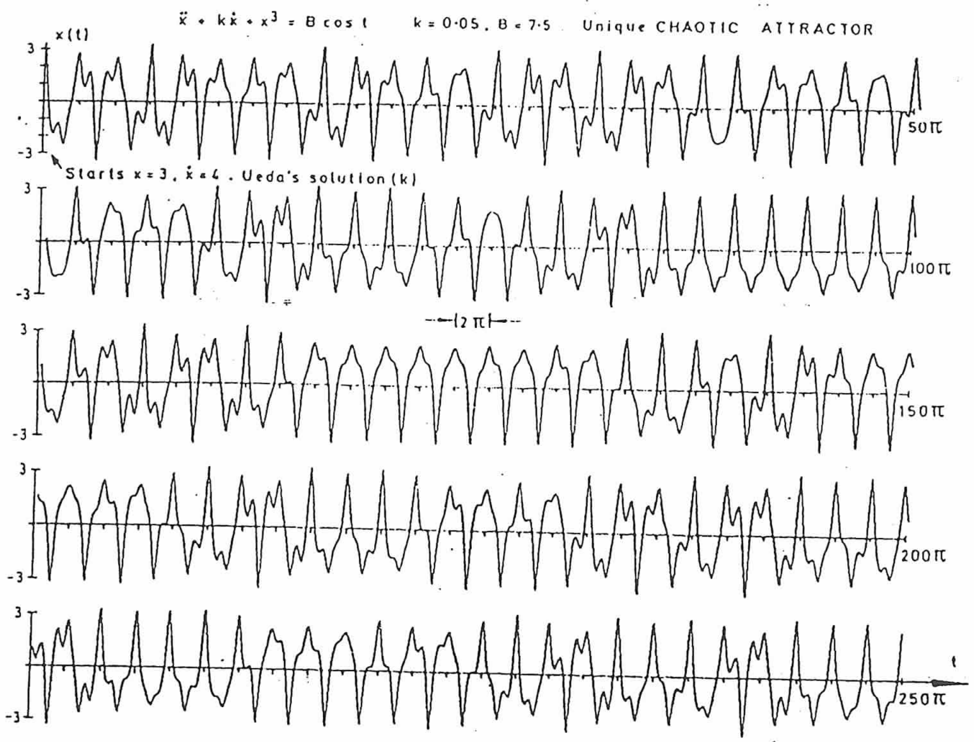


図 3−3 Time series of a steady-state chaotic response

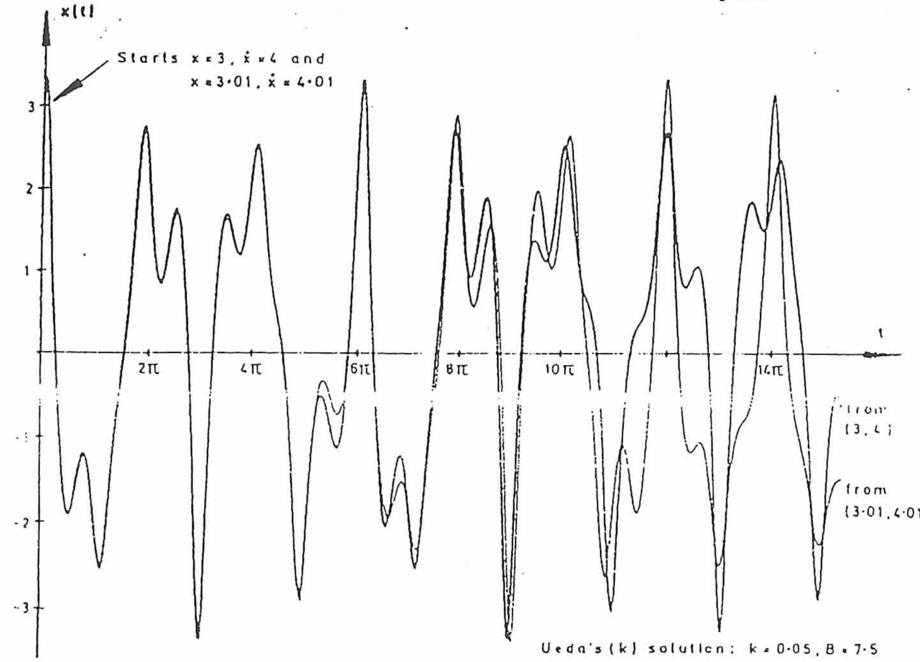


図 3−4 Divergence from adjacent starts: waveforms

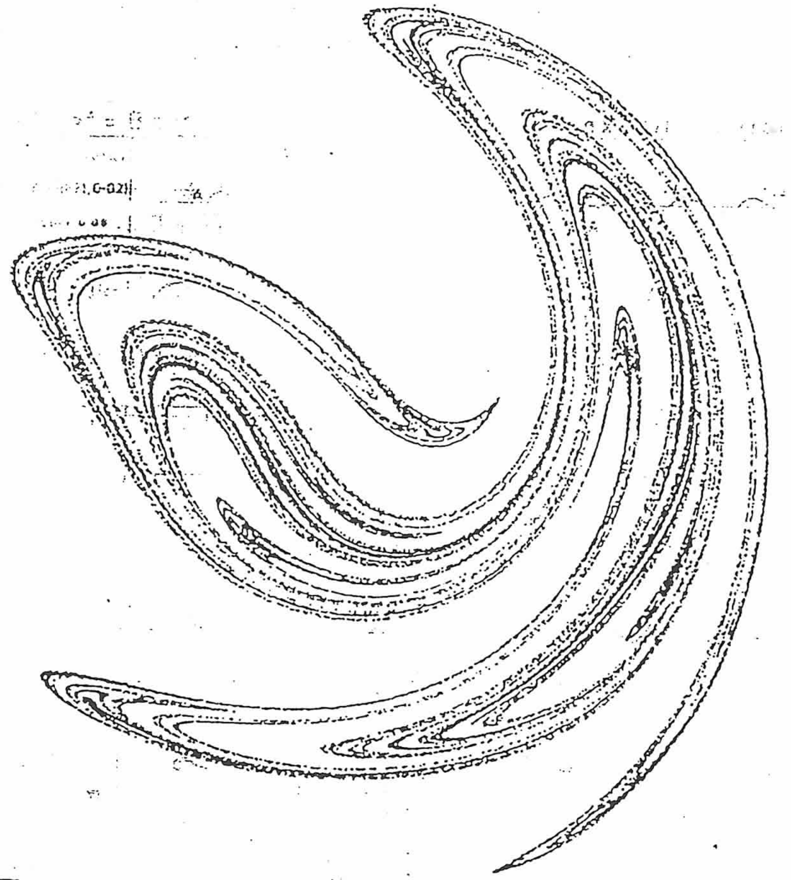


図 3-7. High-resolution Poincaré section of one of Ueda's chaotic attractors

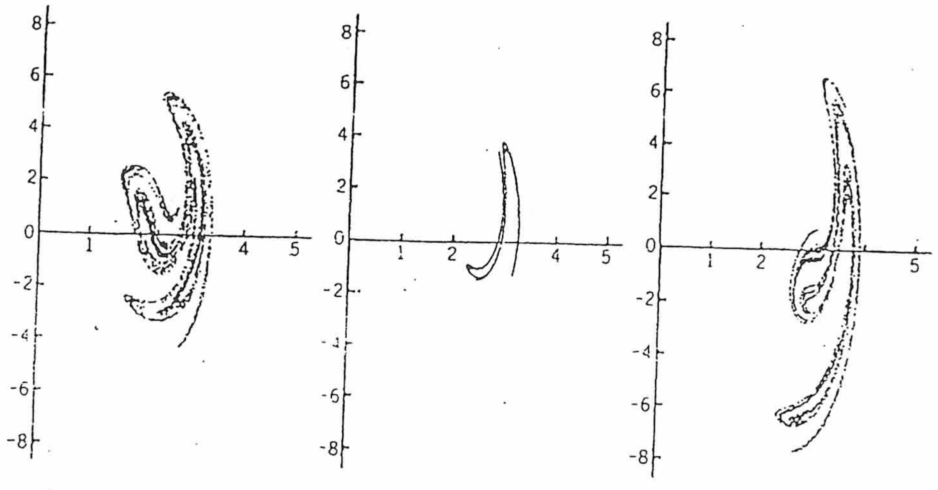


図 3-8. Poincaré sections in the $(x, \dot{x})$ plane for three of Ueda's chaotic attractors.

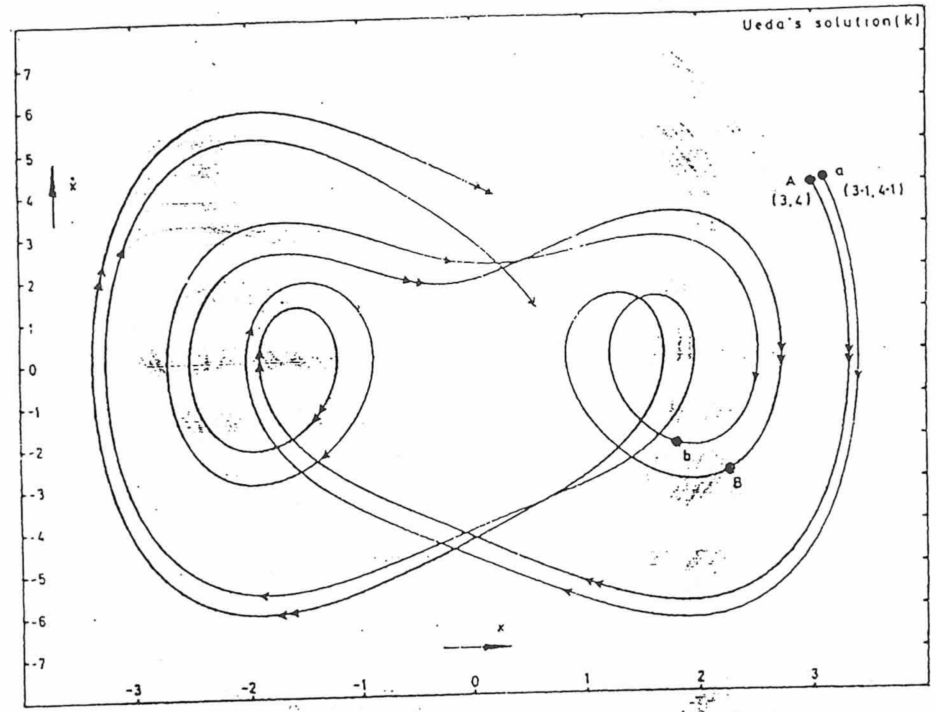


図 3-5. Divergence from adjacent starts: phase projections

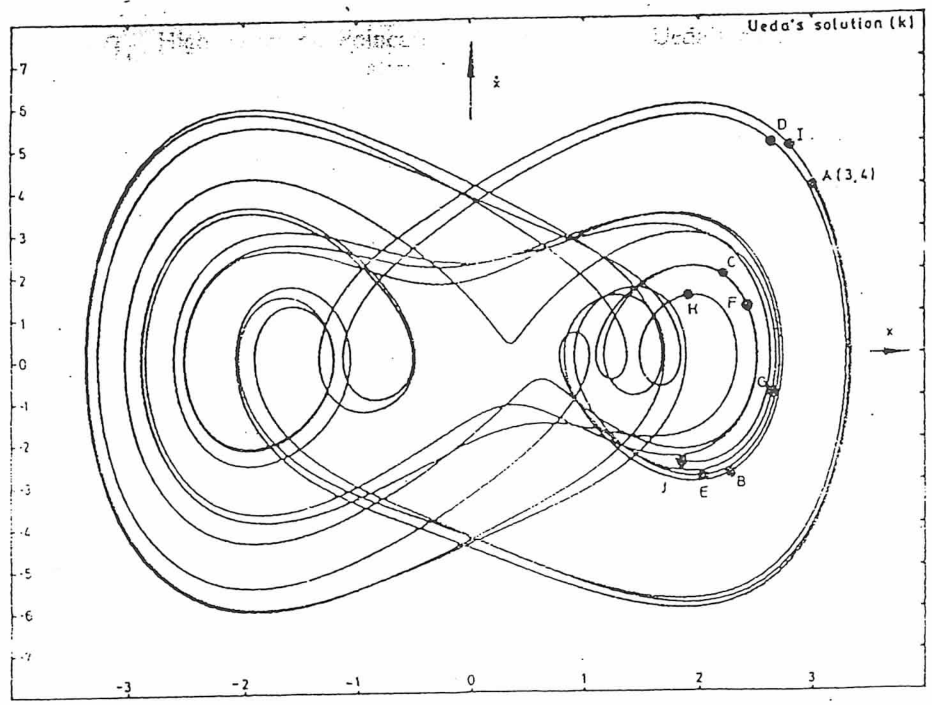


図 3-6. Phase projection with a sequence of points in a Poincaré section

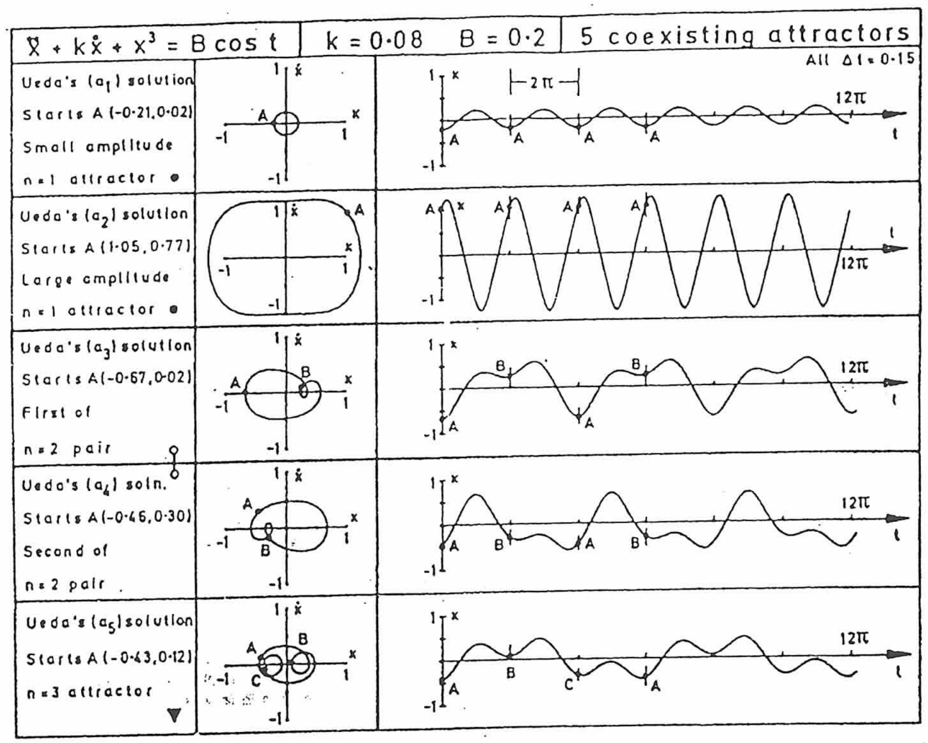


図3-9. Long-term behaviour of Duffing's equation with forcing: coexisting periodic attractors

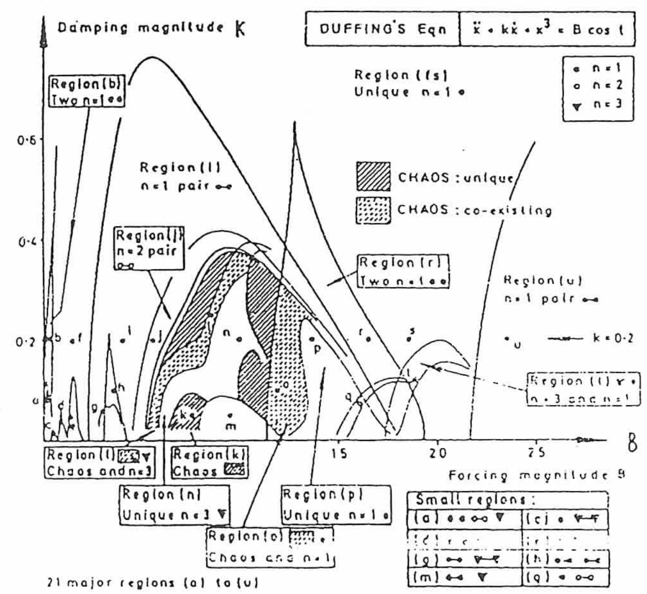


図3-10.
相図

Regimes of the various long-term behaviours of Duffing's equation as mapped by Ueda, as a function of damping k and forcing B. *From Ueda (1980a), with permission of SIAM*

演習問題

常微分方程式の数値解法とその応用

1．　次の一階常微分方程式を与えられた初期条件でルンゲークッタ法によって解け。プログラムのチェックのため、解析解を求め、相対誤差も計算せよ。

(i) $dy/dx = ax^2y$, $y(0)=1.0$ ($0 \leqq x \leqq 1$, $\Delta x = 0.1, 0.05$)
($a = -2 - 2$, ~~$\Delta a = 0.1$~~) aの値は −2〜2の間で1つ決める

(ii) $dy/dx = y - x + a$, $y(0) = 0$, ($0 \leqq x \leqq 1$, $\Delta x = 0.1, 0.05$)

2．次の連立一階常微分方程式を１．と同様にして解け。

(i) $dx/dt = \pi y$, $dy/dt = -\pi x$; $x(0)=1, y(0)=0$
$-\pi/2 \leqq t \leqq \pi/2$, $\Delta t = 0.1, 0.05$

(ii) $dx/dt = -x + y$, $dy/dt = -x - y + 1$; $x(0)=1, y(0)=-1$
$0 \leqq t \leqq 1$, $t = 0.1, 0.05$

3．次の２階微分方程式を、１と同様にして解け。

(i) $d^2y/dx^2 + 3\,dy/dx + 2y = 0$, $y(0)=1$, $dy/dx\big|_{x=0}=0$, $0 \leqq x \leqq 1$
$\Delta x = 0.1, 0.05$

（ヒント；この式は、$dy/dx = z$, $dz/dx = -3z - 2y$の連立方程式として解ける）

(ii) $d^2y/dx^2 + 2\,dy/dx + y = 0$, $y(0)=0$, $dy/dx\big|_{x=0}=1$
($0 \leqq x \leqq 1$, $\Delta x = 0.1, 0.05$)

4．１で求めた結果を図にplotせよ。(y vs. x)

5．Duffing方程式の　Kと Bを変えて次の図をplotせよ。

(i) x(t) vs. t

(ii) (x, ẋ) phase projection (ex. fig. 3-5,3-6)

(iii)Poincare section (period T = 2π)

↳ 2πで(x, ẋ)をplotした断面

(a) (K, B) = (0.1, 0)

(b) (K, B) = (0.1, 13.0)

(c) (K, B) = (0.08, 0.2) (initial conditionを変えて、５つの周期解を出してみる。)

(d) (K, B) =(0.05, 7.50)

(e) Fig. 3-10 の相図から適当な(K, B)の値を選んでいろいろな状態を調べよ。

(*)出力例

dy/dx=0.2*x y, y(0)=1.0

x	y(x)	dy
0	....	....
0.1	....	....
0.2	....	....
0.3	....	....

注 グラフは gnuplot を使って、それを print outすること

◎レポート提出の注意事項

A．演習問題について

(1)Ｎｏ．１１のプログラムは、それぞれ演習問題１(i)、２(ii)の Runge-Kutta 法のところの関数プログラムである。(1)~(13)の空欄を埋めて、関数プログラムを完成した後、これらに対応する main プログラムを作って、全体のプログラムを完成せよ。main プログラムの中では、パラメータ値、きざみ、初期値、相対誤差などが 計算できるようにせよ。

(2) 他の演習問題も、(1)のならって解け。

(3) ４、５でグラフを作成しますが、これは、データをファイルに保存して、それを gnuplot を使って、図を作ります。Gnuplot の使用方法は、第２週めに説明します。

(3)相対誤差は５を除いてすべての問題について求めよ。それには、解析解をもとめることが必要。

B．レポート提出について

1．レポートは e-mail ではなく、紙で出力して提出してください。

2．提出課題は、上の問題の
   問題１、２、３の各プログラムと出力結果
   問題４のグラフ
   問題５の(a)～(d),
   (c)のどれか一つの場合

3．　レポート提出の締め切りは、この課題が終了してから一週間以内に提出してください。課題が不完全な人も、いったん提出してから、残りを再提出する。

演習問題 1-(i), 2-(ii) のルンゲ・クッタ法の関数のプログラム例

((1) ～ (13) のところ を適切にうめて完成させよ)

演習 1-(i) の内 Runge-Kuttaの部分

```
void runge_kutta(double *x, double *y)
{
    double dx, k1, k2, k3, k4, k;
    dx=0.05;

     k1=dx*f(*x, *y);
     k2=  (1)
     k3=  (2)
     k4=dx*f(*x+dx, *y+k3);
     k=   (3)          /6.0;
     *x+=dx;  (4)
}

double f( double x1, double y1)
{
 double a=1.3;
 return a*x1*x1*y1;
}
```

演習 2-(ii) の Runge-Kuttaの部分

```
void runge_kutta(~~x, y, t~~ double *x, double *y, double *t)
{
          (10)    (11)
    double k[ ], l[ ], kk, ll, dt=0.1;

    k[1]=dt*f(*x, *y);
    l[1]=  (5)
    k[2]=dt*f(*x+k[1]/2.0, *y+l[1]/2.0);
    l[2]=  (6)
    k[3]=dt*f(*x+k[2]/2.0, *y+l[2]/2.0);
    l[3]=  (7)
    k[4]=dt*f(*x+k[3], *y+l[3]);
    l[4]=  (8)

    kk=(k[1]+2.0*(k[2]+k[3])+k[4])/6.0;
    ll=      (9)          )/6.0;
    *x+=kk;*y+=ll;*t+=dt;
}

double f(x,y)
double x,y;
{
   return -x+y;
}

double  (12)
double x,y;
{
return  (13)
}
```