4) a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ II - 2I \\ III + I \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ III - \frac{1}{2} I \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \frac{1}{2} x_3 = \frac{1}{2}$

$\underline{x_3 = 1}$ $\qquad -2x_2 + 1 = 3$

$-2x_2 = 2$

$\underline{x_2 = -1}$ $\qquad x_1 - 2 + 1 = 0$

$\underline{x_1 = 1}$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$R = U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

5) a)

$$A = \begin{pmatrix} R & v \\ u^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & v_1 \\ 0 & r_{22} & \cdots & v_2 \\ 0 & 0 & \cdots & v_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & v_4 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & \vdots \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_{n+1} \end{pmatrix}$$

(LU Block Decomposition: $A = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}$

Probieren:

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ IV - \frac{1}{3} II \end{array} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$0 \rightarrow$ Fix, für alle R, v, u

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ IV - 6III \end{array} \sim R_L = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

speziell

5) a) ...

- die letzte Zeile von L ist $u^T R^{-1} = (0, \frac{1}{3}\ -6)$ mit einer 1 am Ende noch

- R_L entspricht bis auf das letzte Element

$$\begin{pmatrix} R & v \\ 0 & ? \end{pmatrix}$$ — letztes Element an $(n+1, n+1)$

Das Element können wir mit $-u^T R^{-1} v$ berechnen (erst mit ML gesehen)

$$\Rightarrow \quad lu(A) = \underbrace{\begin{pmatrix} I & 0 \\ u^T R_A^{-1} & 1 \end{pmatrix}}_{=L} \underbrace{\begin{pmatrix} R_A & v \\ 0 & -u^T R^{-1} v \end{pmatrix}}_{=R}$$

5) b) A ist regulär $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(L)\det(R) \neq 0$

$\Leftrightarrow \det(R) \neq 0 \Leftrightarrow$ diag(R) darf keine 0 enthalten

$\Leftrightarrow u^T R^{-1} v \neq 0$ #

6) a)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & c_1 & & \\ & a_2 & & & c_2 & \\ & & a_3 & & & c_3 \\ c_1 & & & b_1 & & \\ & c_2 & & & b_2 & \\ & & c_3 & & & b_3 \end{pmatrix}$$

6) b)

A eine 6 × 6 Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & i \\ g & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

D_1, C, C, D_2

freie Felder $(\tilde{A}_i)$

$$\tilde{A} = \begin{matrix} a & g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & f \end{matrix}$$

PAP^T ← Spaltentausch

↑ Zeilentausch

Idee: Immer die Zeilen zusammenlegen, die Elemente in den gleichen Spalten haben.

Zeilentausch:

$\tilde{A}$-Zeile	↔ A-Zeile	
1	1	(a)
2	4	(g)
3	2	(b)
4	5	(h)
5	3	(c)
6	6	(i)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PA = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PAP' = \begin{bmatrix} a & g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & f \end{bmatrix}$$ ✓

→ nächste Seite

6) b) Algo um $\tilde{A}$ zu erhalten:

Zeilentausch:
- 1. Zeile nehmen als 1. in $\tilde{A}_1$
- n+1. Zeile nehmen als 2. in $\tilde{A}_1$
- 2. Zeile nehmen als 3. in $\tilde{A}_1$
- n+2. Zeile nehmen als 4. in $\tilde{A}_1$

$\vdots$

Spaltentausch:
- 1. Spalte aus $\tilde{A}_1$ als 1. Spalte in $\tilde{A}$
- n+1. Spalte aus $\tilde{A}_1$ als 2. Spalte in $\tilde{A}$
- 2. Spalte aus $\tilde{A}_1$ als 3. Spalte in $\tilde{A}$
- n+2. Spalte aus $\tilde{A}_1$ als 4. Spalte in $\tilde{A}$

$\vdots$

6) c)

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

~~$a_1 \; a_2 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0$~~

~~$R = U = 0 \; a_4 \; a_2$~~

~~$U(A) \; 0 \; 0$~~

~~$\tilde{A} = LU = 0 \; U$~~

$$\tilde{A} = LU = \begin{pmatrix} L(A)^{2\times 2} & 0 & 0 \\ 0 & L(B)^{2\times 2} & 0 \\ 0 & 0 & L(C) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U(A)^{2\times 2} & 0 & 0 \\ 0 & U(B) & 0 \\ 0 & 0 & U(C) \end{pmatrix} \Rightarrow \ldots$$

6) c) ... sei $L(A)$ die L-Matrix der LU-Zerlegung von A
sei $U(A)$ die U-Matrix der LU-Zerlegung von A

$U(A)$: 2x2 Matrix
$L(A)$: 2x2 Matrix
O_2 : Nullmatrix 2x2

$$lu(\hat{A}) = \begin{pmatrix} L(A) & O_2 & O_2 \\ O_2 & L(B) & O_2 \\ O_2 & O_2 & L(C) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(A) & 0 & 0 \\ 0 & U(B) & 0 \\ 0 & 0 & U(C) \end{pmatrix}$$

6) d)

$$lu(A) = lu\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}}_{L(A)} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{c \cdot b}{a} \end{pmatrix}}_{U(A)}$$

...???

e) ML-Code verwendet:
$O(n)$, da bloss eine Schleife, in der von n unabhängig viele Operationen ausgeführt werden