

Informatyczne Systemy Sterowania

Ćwiczenie 1: Podstawy tworzenia opisów i modelowania obiektów sterowania

Krzysztof Przybylski 239266

13 stycznia 2019

1 Wstęp

Tworzenie opisów (modeli) matematycznych obiektów sterowania, a także wykorzystanie tych opisów do badania i analizy (modelowania) obiektów – są istotnymi czynnościami w trakcie projektowania informatycznych systemów sterowania. Do realizacji tych czynności w praktyce inżynierskiej powszechnie stosuje się narzędzie informatyczne Matlab wraz ze specjalistycznym oprogramowaniem dodatkowym (tzw. toolbox'y) oraz nakładką Simulink.

2 Zadanie 1 *Tworzenie modeli matematycznych*

- Człon proporcjonalny

- Równanie różniczkowe

$$y(t) = k_p * u(t) \quad (1)$$

- Transmitancja

$$G(s) = k \quad (2)$$

- Wektor stanu i opis w przestrzeni stanu

Nie istnieje wektor stanu i opis w przestrzeni stanu - zerowy rząd równania różniczkowego.

- Człon różniczkujący

- Równanie różniczkowe

$$y(t) = k * \dot{u}(t) \quad (3)$$

- Transmitancja

$$G(s) = k * s \quad (4)$$

- Wektor stanu i opis w przestrzeni stanu

Nie istnieje wektor stanu i opis w przestrzeni stanu - zerowy rząd równania różniczkowego.

- Człon całkujący

- Równanie różniczkowe

$$y(t) = k_i * \int_0^t u(t) dt \quad (5)$$

- Transmitancja

$$G(s) = \frac{k}{s} \quad (6)$$

- Wektor stanu i opis w przestrzeni stanu
Wykorzystując wektor stanu równy:

$$x(t) = [y(t)] \quad (7)$$

oraz powyższe równanie różniczkowe, można wyznaczyć opis przestrzeni stanu:

$$\begin{aligned} y(t) &= k_i * \int_0^t u(t) dt \iff \dot{y}(t) = k_i u(t) \\ \dot{x}(t) &= \dot{y}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

Z ogólnego równania stanu:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (9)$$

oraz opisu przestrzeni:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= k * u(t) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned} \quad (10)$$

wyznaczam macierze:

$$A = [0] \quad B = [k] \quad C = [1] \quad D = [0] \quad (11)$$

- Opis przy pomocy Matlab
Aby uzyskać opis przy pomocy Matlab wykorzystałem funkcję zmiany transformaty do równania przestrzeni stanu

$$[A, B, C, D] = tf2ss(b, a) \quad (12)$$

Dla $k = 1, T = 2$

Otrzymałem wynik: $A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 0.5]$

Parametry zwrócone przez Matlab różnią się od obliczonych przez nas prawdopodobnie dlatego, że Matlab przyjął inny wektor $x(t)$ na samym początku. Jednak oba opisy są równoważne, ponieważ można przedstawić je w taki sposób:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -0.5x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1 \\ y(t) = 0.5x(t) \end{cases} \quad \begin{aligned} \ddot{y}(t) &= 0.5\ddot{x}_2(t) \\ \ddot{y}(t) &= 0.5\dot{x}_1(t) \\ \ddot{y}(t) &= -0.25x_1(t) + 0.5u(t) \\ \ddot{y}(t) &= -0.5\dot{y}(t) + 0.5u(t) \\ 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) &= u(t) \end{aligned} \quad (13)$$

Po porównaniu wyniku przekształceń widzimy, że $k = 1, T = 2$, czyli tak jak założyliśmy.

- Człon inercyjny I rzędu
 - Równanie różniczkowe

$$T\dot{y}(t) + y(t) = k_I * u(t) \quad (14)$$

- Transmitancja

$$G(s) = \frac{k}{T * s + 1} \quad (15)$$

- Wektor stanu i opis w przestrzeni stanu
Przyjmując wektor stanu równy:

$$x(t) = [y(t)]$$

oraz powyższe równanie różniczkowe, można wyznaczyć opis przestrzeni stanu:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -\frac{x(t)}{T} + \frac{ku(t)}{T} \\ \dot{x}(t) &= \dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) &= -\frac{x(t)}{T} + \frac{ku(t)}{T} \\ y(t) &= x(t) \end{aligned} \quad (16)$$

wyznaczyć można następujące macierze:

$$A = [-\frac{1}{T}] \quad B = [\frac{k}{T}] \quad C = [1] \quad D = [0] \quad (17)$$

- Opis przy pomocy Matlaba
W celu uzyskania opisu przy pomocy Matlaba wykorzystam funkcję

$$[A, B, C, D] = tf2ss(b, a) \quad (18)$$

Ustalam wartość $k = 8$ i $T = 2$. Mając te dane wyliczam:

$$\begin{aligned} [A, B, C, D] &= tf2ss(8, [2 \quad 1]) \\ A &= [-\frac{1}{2}] \\ B &= [1] \\ C &= [4] \\ D &= [0] \end{aligned} \quad (19)$$

Możemy udowodnić równoważność wyników z Matlaba oraz wcześniej wyliczonych. Wykorzystuję funkcję `ss2tf`. Otrzymane wyniki wyglądają następująco:

$$\begin{aligned} [b, a] &= ss2tf(A, B, C, D) \\ b &= [0 \quad 4] \\ a &= [1 \quad 1/2] \end{aligned} \quad (20)$$

Korzystając z wyżej wymienionych parametrów otrzymuję następującą transmitancję operatorową:

$$G(s) = \frac{4}{s + \frac{1}{2}} = \frac{8}{2s + 1} \quad (21)$$

Zarówno ręcznie wyliczone opisy przestrzeni stanu jak i te wyliczone przez Matlaba wskazują na ten sam człon.

- Człon oscylacyjny

- Równanie różniczkowe

$$T_n^2 \ddot{y}(t) + 2\zeta T_n \dot{y}(t) + y(t) = ku \quad (22)$$

- Transmitancja

$$G(s) = \frac{k}{T_n^2 s^2 + 2\zeta T_n s + 1} \quad (23)$$

- Wektor stanu i opis w przestrzeni stanu
Przyjmując wektor stanu równy:

$$x = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} \quad (24)$$

oraz wyżej wymienione równanie różniczkowe, można wyznaczyć opis przestrzeni stanu:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \\ T_n^2 \dot{x}_2(t) + 2\zeta T_n x_2(t) + x_1(t) &= ku \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{2\zeta T_n}{T_n^2} x_2(t) - \frac{1}{T_n^2} x_1(t) + \frac{k}{T_n^2} u \end{aligned} \quad (25)$$

oraz macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_n^2} & -\frac{2\zeta T_n}{T_n^2} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{T_n^2} \end{bmatrix} C = [1] D = [0] \quad (26)$$

- Opis przy pomocy Matlaba W celu uzyskania opisu przy pomocy Matlaba wykorzystam funkcję

$$[A, B, C, D] = tf2ss(b, a) \quad (27)$$

oraz przyjmę następujące wartości:

$$\begin{aligned} T_n &= 3 \\ k &= 5 \\ \zeta &= 2 \end{aligned} \quad (28)$$

Wtedy macierze będą wyglądały następująco:

$$\begin{aligned} [A, B, C, D] &= tf2ss(5, [9 \quad 12 \quad 1]) \\ A &= \begin{bmatrix} -1\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= [0 \quad \frac{5}{9}] \\ D &= [0] \end{aligned} \quad (29)$$

Dowód równoważności wyników wyliczonych oraz tych z Matlaba.

Macierze wyliczone ręcznie oraz otrzymane przy pomocy programu Matlab wydają się bardzo różne. Macierz A przeszła transformacją, tak samo jak macierz B. Macierz C ma więcej kolumn. Macierze D są takie same.

Wykorzystuję powtórnie funkcję ss2tf. Otrzymane wyniki prezentują się następująco:

$$\begin{aligned} [b, a] &= ss2tf(A, B, C, D) \\ b &= [0 \quad 0 \quad \frac{5}{9}] \\ a &= [1 \quad 1\frac{1}{3} \quad \frac{1}{9}] \end{aligned} \quad (30)$$

Korzystając z wyżej wymienionych parametrów otrzymamy następującą transmi-tancję operatorową:

$$G(s) = \frac{5}{9s^2 + 12s + 1} = \frac{\frac{5}{9}}{1s^2 + 1\frac{1}{3}s + \frac{1}{9}} \quad (31)$$

Z czego wynika, że obydwa zapisy przestrzeni stanu są poprawne.

- Człon opóźniający

- Równanie różniczkowe

$$y(t) = k_o u(t - T_0) \quad (32)$$

- Transmitancja

$$G(s) = k e^{-sT_0} \quad (33)$$

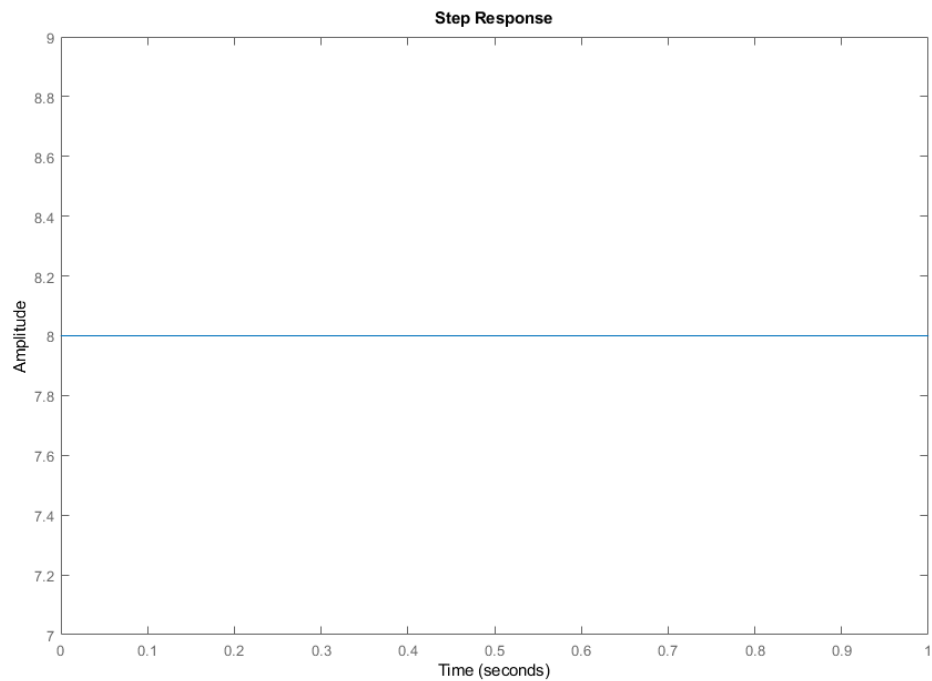
- Wektor stanu i opis w przestrzeni stanu

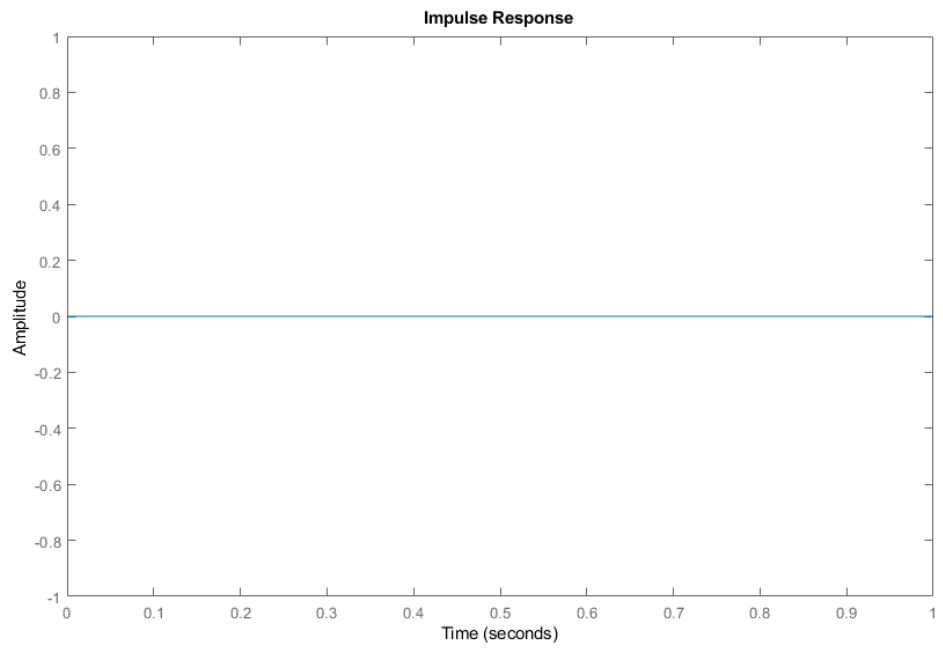
Nie istnieje wektor stanu i opis w przestrzeni stanu - zerowy rząd równania różniczkowego.

3 Zadanie 2 *Wyznaczanie charakterystyk czasowych*

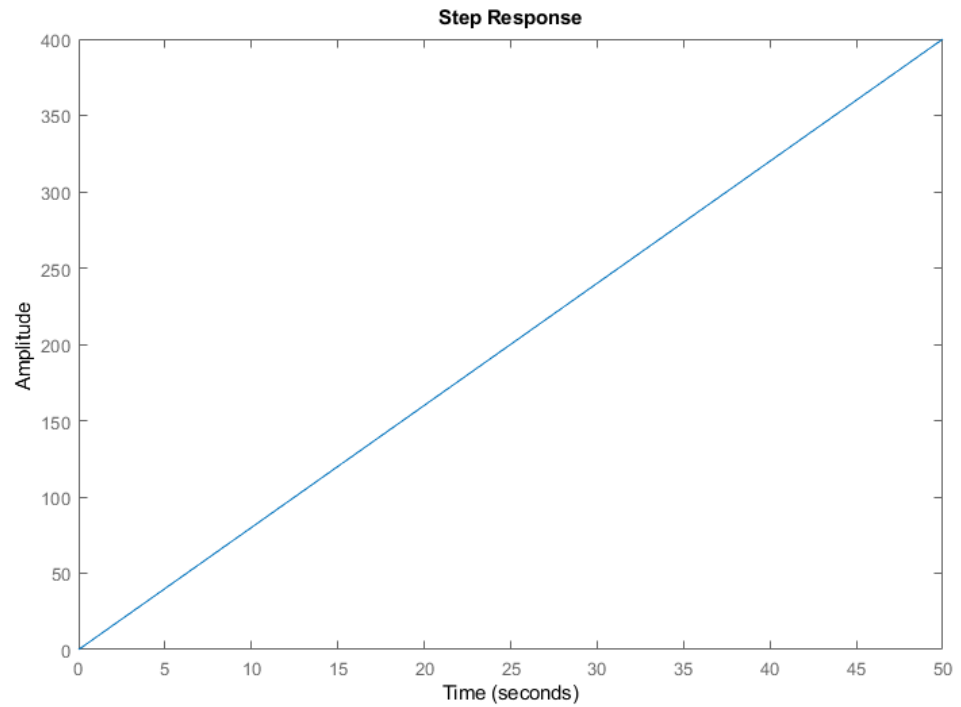
- Człon proporcjonalny

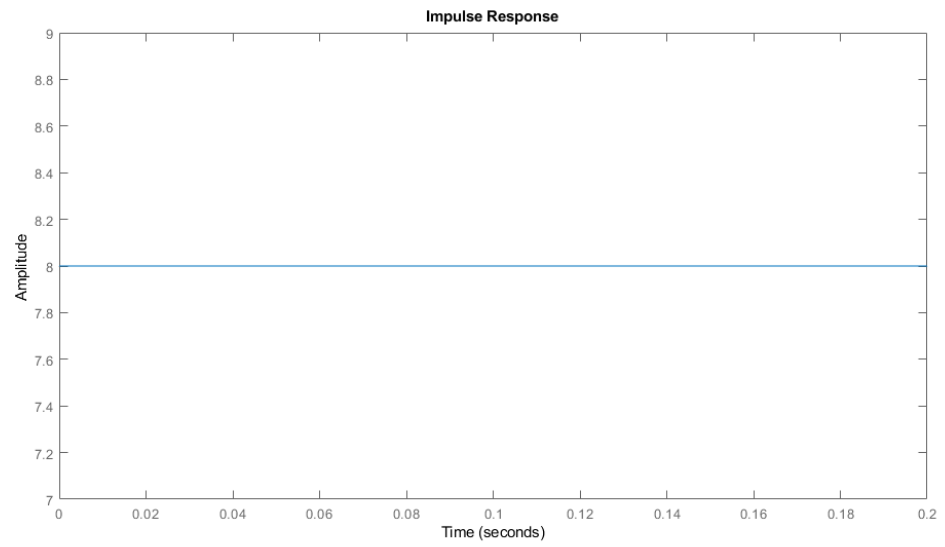
Przyjąłem $k = 8$



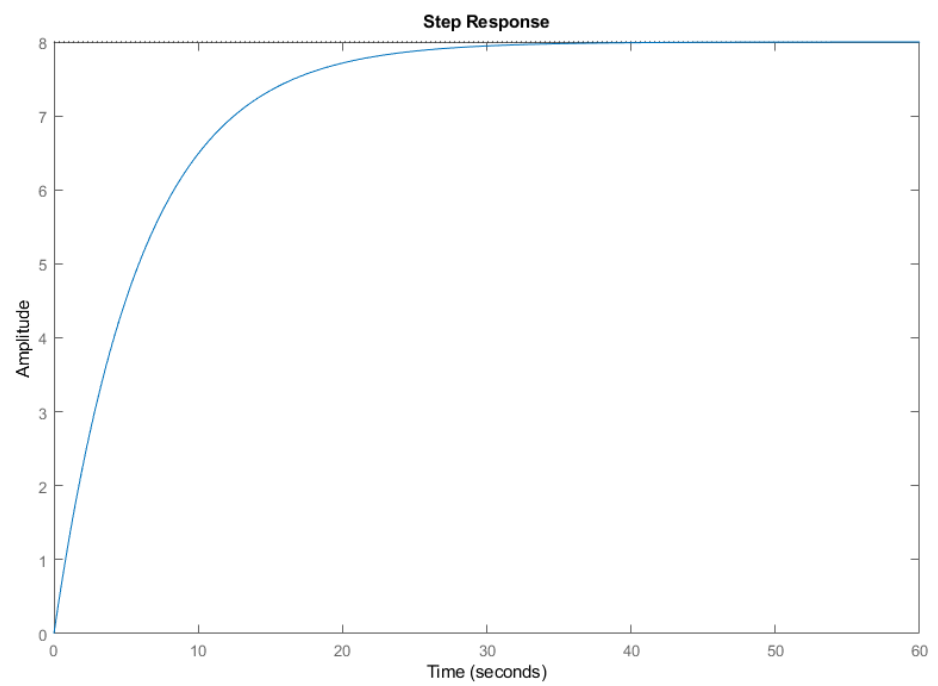


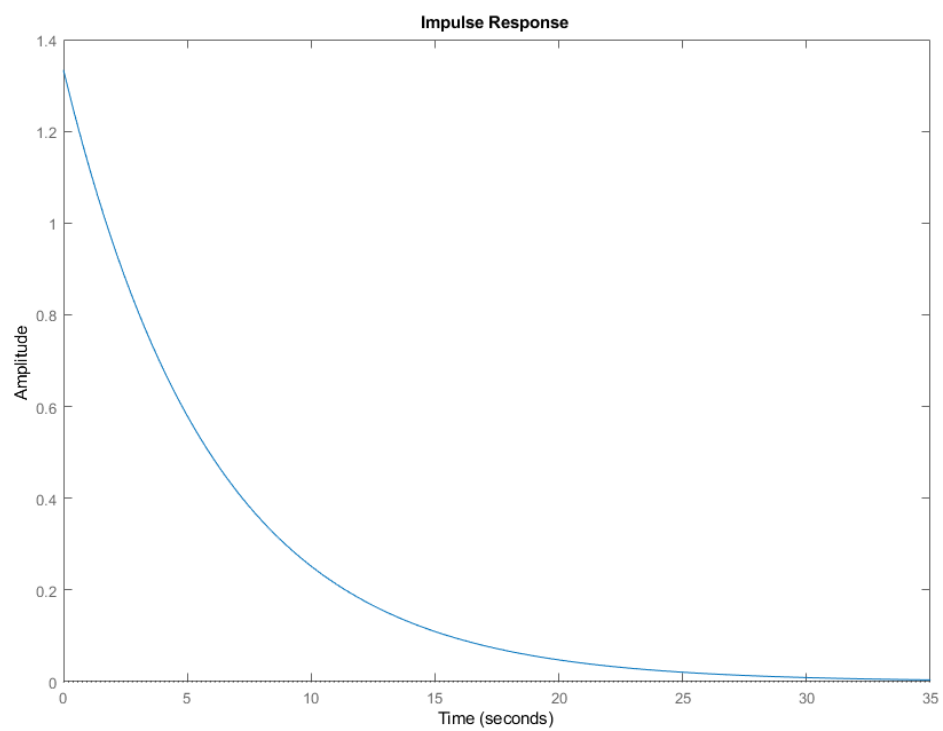
- Człon całkujący
Przyjąłem $k = 8$





- Człon inercyjny I rzędu
Przyjąłem $k = 8$ oraz $T = 6$

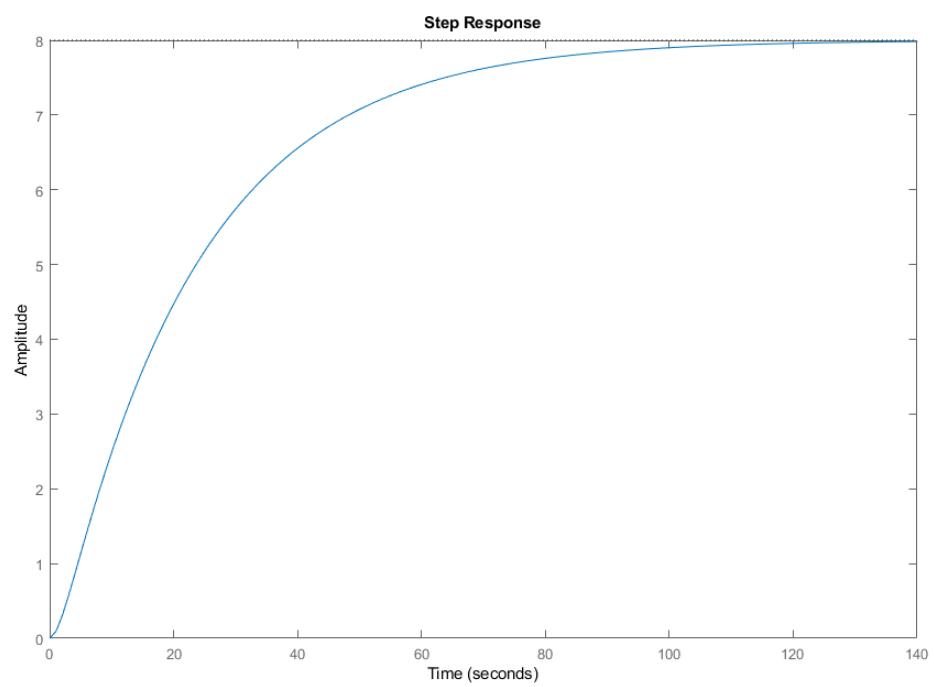


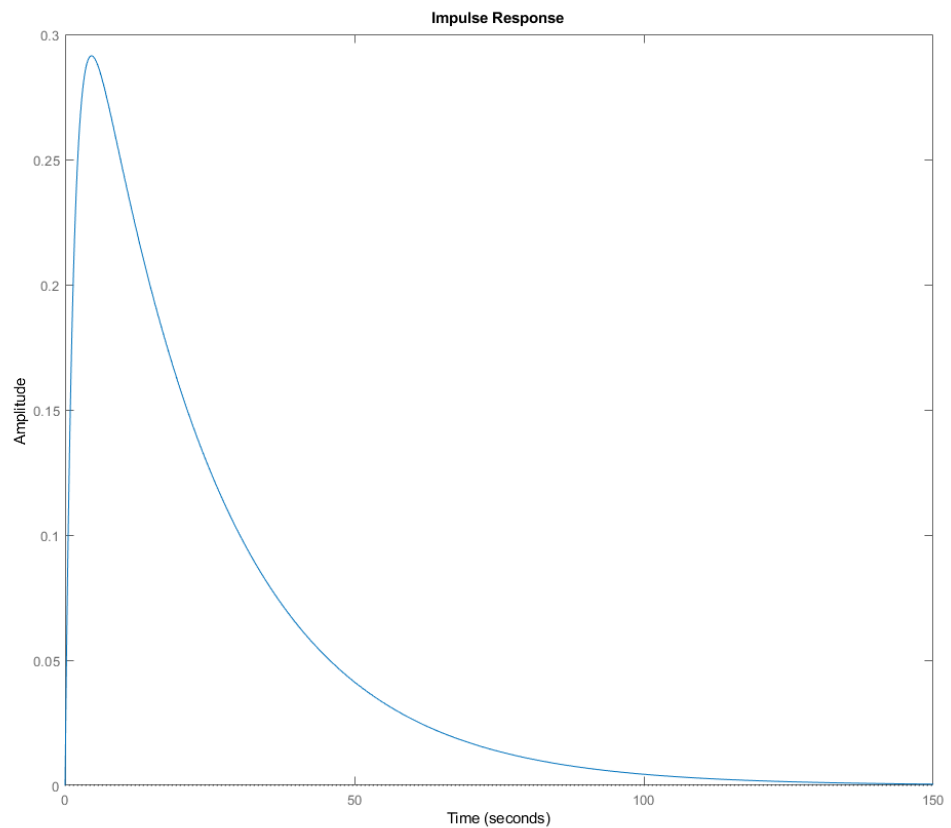


- Człon oscylacyjny

Przyjąłem:

$$k = 8, T_n = 6, \zeta = 2 \quad (34)$$





4 Zadanie 3 *Wyznaczanie parametrów członów dynamicznych*

- Człon proporcjonalny

Charakterystyka skokowa w dziedzinie czasu opisana jest wzorem:

$$h(t) = k * 1(t) \quad (35)$$

Na wykresie widać, że niezależnie od czasu wykres przyjmuje wartość 8. Z tego wynika $k = 8$.

Taka sama stała została wykorzystana do wyrysowania wykresów.

- Człon całkujący

- Charakterystyka skokowa

Charakterystyka skokowa w dziedzinie czasu opisana jest wzorem:

$$h(t) = k * t \quad (36)$$

Na wykresie widać że wartość funkcji w 10 sekundzie wynosi 80:

$$h(10) = 80 \quad (37)$$

Z tego wynika $k = 8$

- Charakterystyka impulsowa

Charakterystyka impulsowa w dziedzinie czasu opisana jest wzorem:

$$g(t) = k * 1(t) \quad (38)$$

Z wykresu odczytujemy że niezależnie od czasu wartość funkcji wynosi 8, zatem $k = 8$.

Wyniki z odczytu wykresów obu tych charakterystyk są równe.