Sprawozdanie ISS

Ćwiczenie 1: Podstawy tworzenia opisów i modelowania obiektów sterowania

Krzysztof Przybylski 239266

12 stycznia 2019

1 Wstęp

Tworzenie opisów (modeli) matematycznych obiektów sterowania, a także wykorzystanie tych opisów do badania i analizy (modelowania) obiektów – są istotnymi czynnościami w trakcie projektowania informatycznych systemów sterowania. Do realizacji tych czynności w praktyce inżynierskiej powszechnie stosuje się narzędzie informatyczne Matlab wraz ze specjalistycznym oprogramowaniem dodatkowym (tzw. toolbox'y) oraz nakładką Simulink.

2 Zadanie 1 *Tworzenie modeli matematycznych*

- Człon proporcjonalny
  - Równanie różniczkowe
    $$y(t) = k_{\mathrm{p}} * u(t) \tag{1}$$
  - Transmitancja
    $$G(s) = k \tag{2}$$
  - Wektor stanu i opis w przestrzeni stanu
    Nie istnieje wektor stanu i opis w przestrzeni stanu - zerowy rząd równania różniczkowego.
- Człon różniczkujący
  - Równanie różniczkowe
    $$y(t) = k * \dot{u}(t) \tag{3}$$
  - Transmitancja
    $$G(s) = k * s \tag{4}$$
  - Wektor stanu i opis w przestrzeni stanu
    Nie istnieje wektor stanu i opis w przestrzeni stanu - zerowy rząd równania różniczkowego.
- Człon całkujący
  - Równanie różniczkowe
    $$y(t) = k_{\mathrm{i}} * \int_0^t u(t)dt \tag{5}$$
  - Transmitancja
    $$G(s) = \frac{k}{s} \tag{6}$$

- Wektor stanu i opis w przestrzeni stanu
  Wykorzystując wektor stanu równy:

$$x(t) = [y(t)] \tag{7}$$

oraz powyższe równanie różniczkowe, można wyznaczyć opis przestrzeni stanu:

$$\begin{aligned} &y(t) = k_\mathrm{i} * \int_0^t u(t)dt \iff \dot{y}(t) = k_\mathrm{i} u(t) \\ &\dot{x}(t) = \dot{y}(t) \end{aligned} \tag{8}$$

Z ogólnego równania stanu:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{9}$$

oraz opisu przestrzeni:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = k * u(t) \\ y(t) = x(t) \end{aligned} \tag{10}$$

wyznaczam macierze:

$$A = \big[0\big]\ B = \big[k\big]\ C = \big[1\big]\ D = \big[0\big] \tag{11}$$

- Opis przy pomocy Matlaba
  Aby uzyskać opis przy pomocy Matlaba wykorzystałem funkcję zmiany transformaty do równania przestrzeni stanu

$$[A, B, C, D] = tf2ss(b, a) \tag{12}$$

Dla $k = 1$, $T = 2$
Otrzymałem wynik: $A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \end{bmatrix}$

Parametry zwrócone przez Matlaba różnią się od obliczonych przez nas prawdopodobnie dlatego, że Matlab przyjął inny wektor x(t) na samym początku. Jednak oba opisy są równoważne, ponieważ można przedstawić je w taki sposób:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \dot{x_1}(t) = -0.5x_1(t) + u(t) \\ \dot{x_2}(t) = x_1 \\ y(t) = 0.5x(t) \end{cases} \\ \ddot{y}(t) &= 0.5\ddot{x_2}(t) \\ \ddot{y}(t) &= 0.5\dot{x_1}(t) \\ \ddot{y}(t) &= -0.25x_1(t) + 0.5u(t) \\ \ddot{y}(t) &= -0,5\dot{y}(t) + 0.5u(t) \\ 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) &= u(t) \end{aligned} \tag{13}$$

Po porównaniu wyniku przekształceń widzimy, że $k = 1$, $T = 2$, czyli tak jak założyliśmy.

- Człon inercyjny I rzędu

  - Równanie różniczkowe

$$T\dot{y}(t) + y(t) = k_\mathrm{I} * u(t) \tag{14}$$

– Transmitancja

$$G(s) = \frac{k}{T * s + 1} \tag{15}$$

– Wektor stanu i opis w przestrzeni stanu
Przyjmując wektor stanu równy:

$$x(t) = [y(t)]$$

oraz powyższe równanie różniczkowe, można wyznaczyć opis przestrzeni stanu:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -\frac{x(t)}{T} + \frac{ku(t)}{T} \\ \dot{x}(t) &= \dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) &= -\frac{x(t)}{T} + \frac{ku(t)}{T} \\ y(t) &= x(t) \end{aligned} \tag{16}$$

wyznaczyć można następujące macierze:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \frac{k}{T} \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

– Opis przy pomocy Matlaba
W celu uzyskania opisu przy pomocy Matlaba wykorzystam funkcję

$$[A, B, C, D] = tf2ss(b, a) \tag{18}$$

Ustalam wartość k = 8 i T = 2. Mając te dane wyliczam:

$$\begin{aligned} &[A, B, C, D] = tf2ss(8, \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}) \\ &A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &B = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\ &C = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \\ &D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{19}$$

Możemy udowodnić równoważność wyników z Matlaba oraz wcześniej wyliczonych. Wykorzystuję funkcję ss2tf. Otrzymane wyniki wyglądają następująco:

$$\begin{aligned} &[b, a] = ss2tf(A, B, C, D) \\ &b = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix} \\ &a = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

Korzystając z wyżej wymienionych parametrów otrzymuję następującą transmitancję operatorową:

$$G(s) = \frac{4}{s + \frac{1}{2}} = \frac{8}{2s + 1} \tag{21}$$

Zarówno ręcznie wyliczone opisy przestrzeni stanu jak i te wyliczone przez Matlaba wskazują na ten sam człon.

- Człon oscylacyjny

– Równanie różniczkowe

$${T_{\mathrm{n}}}^2\ddot{y}(t) + 2\zeta T_{\mathrm{n}}\dot{y}(t) + y(t) = ku \tag{22}$$

– Transmitancja

$$G(s) = \frac{k}{{T_{\mathrm{n}}}^2 s^2 + 2\zeta T_{\mathrm{n}} s + 1} \tag{23}$$

– Wektor stanu i opis w przestrzeni stanu
Przyjmując wektor stanu równy:

$$x = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} \tag{24}$$

oraz wyżej wymienione równanie różniczkowe, można wyznaczyć opis przestrzeni stanu:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \\ {T_\mathrm{n}}^2\dot{x}_2(t) + 2\zeta T_\mathrm{n} x_2(t) + x_1(t) &= ku \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{2\zeta T_\mathrm{n}}{{T_\mathrm{n}}^2}x_2(t) - \frac{1}{{T_\mathrm{n}}^2}x_1(t) + \frac{k}{{T_\mathrm{n}}^2}u \end{aligned} \tag{25}$$

oraz macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{{T_\mathrm{n}}^2} & -\frac{2\zeta T_\mathrm{n}}{{T_\mathrm{n}}^2} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{{T_\mathrm{n}}^2} \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

– Opis przy pomocy Matlaba W celu uzyskania opisu przy pomocy Matlaba wykorzystam funkcję

$$[A, B, C, D] = tf2ss(b, a) \tag{27}$$

oraz przyjmę następujące wartości:

$$\begin{aligned} T_\mathrm{n} &= 3 \\ k &= 5 \\ \zeta &= 2 \end{aligned} \tag{28}$$

Wtedy macierze będą wyglądały następująco:

$$\begin{aligned} &[A, B, C, D] = tf2ss(5, \begin{bmatrix} 9 & 12 & 1 \end{bmatrix}) \\ &A = \begin{bmatrix} -1\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{9} \end{bmatrix} \\ &D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{29}$$

Dowód równoważności wyników wyliczonych oraz tych z Matlaba.

Macierze wyliczone ręcznie oraz otrzymane przy pomocy programu Matlab wydają się bardzo różne. Macierz A przeszła transformacją, tak samo jak macierz B. Macierz C ma więcej kolumn. Macierze D są takie same.
Wykorzystuję powtórnie funkcję ss2tf. Otrzymane wyniki prezentują się następująco:

$$\begin{aligned} &[b, a] = ss2tf(A, B, C, D) \\ &b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{9} \end{bmatrix} \\ &a = \begin{bmatrix} 1 & 1\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{30}$$

Korzystając z wyżej wymienionych parametrów otrzymamy następującą transmitancję operatorową:

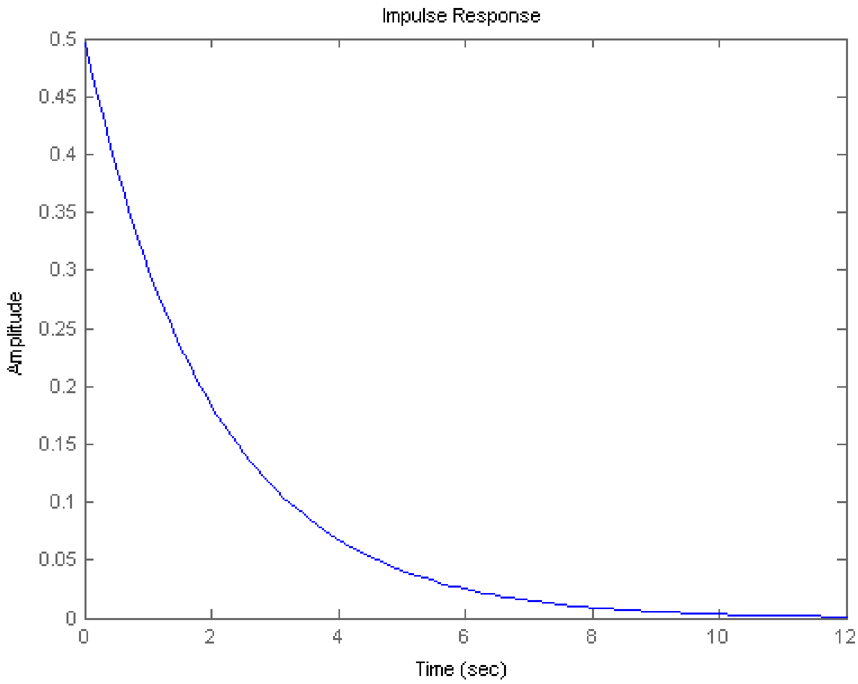
$$G(s) = \frac{5}{9s^2 + 12s + 1} = \frac{\frac{5}{9}}{1s^2 + 1\frac{1}{3}s + \frac{1}{9}} \tag{31}$$

Z czego wynika, że obydwa zapisy przestrzeni stanu są poprawne.

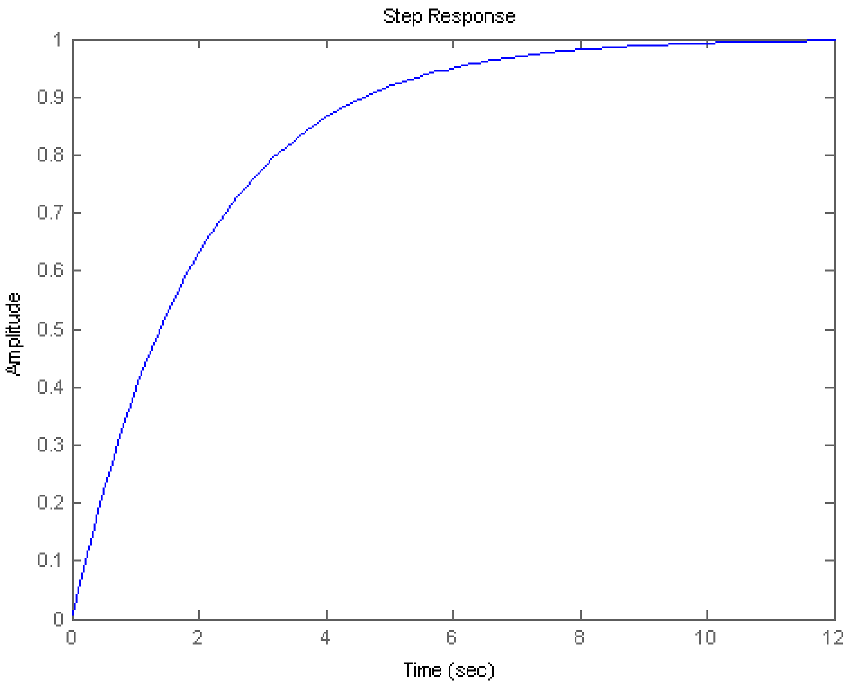
- Człon opóźniający
  - Równanie różniczkowe
  $$y(t) = k_o u(t - T_0) \tag{32}$$
  - Transmitancja
  $$G(s) = ke^{-sT_0} \tag{33}$$
  - Wektor stanu i opis w przestrzeni stanu
  Nie istnieje wektor stanu i opis w przestrzeni stanu - zerowy rząd równania różniczkowego.

3 Zadanie 2 ***Wyznaczanie charakterystyk czasowych***

- Przy użyciu funkcji impulse(...) i step(...) w programie Matlab
  - Inercyjny I rzędu

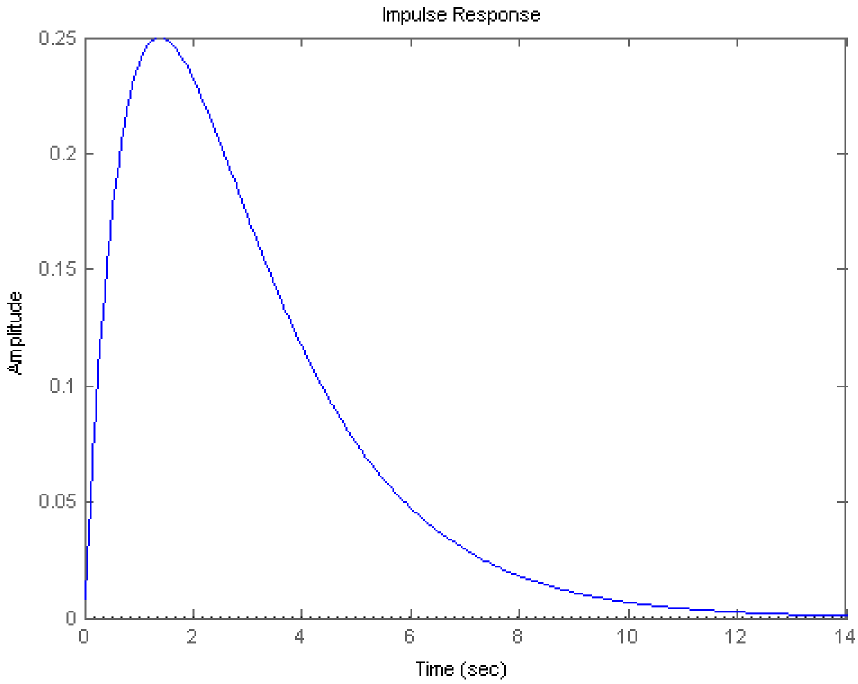


Charakterystyka impulsowa

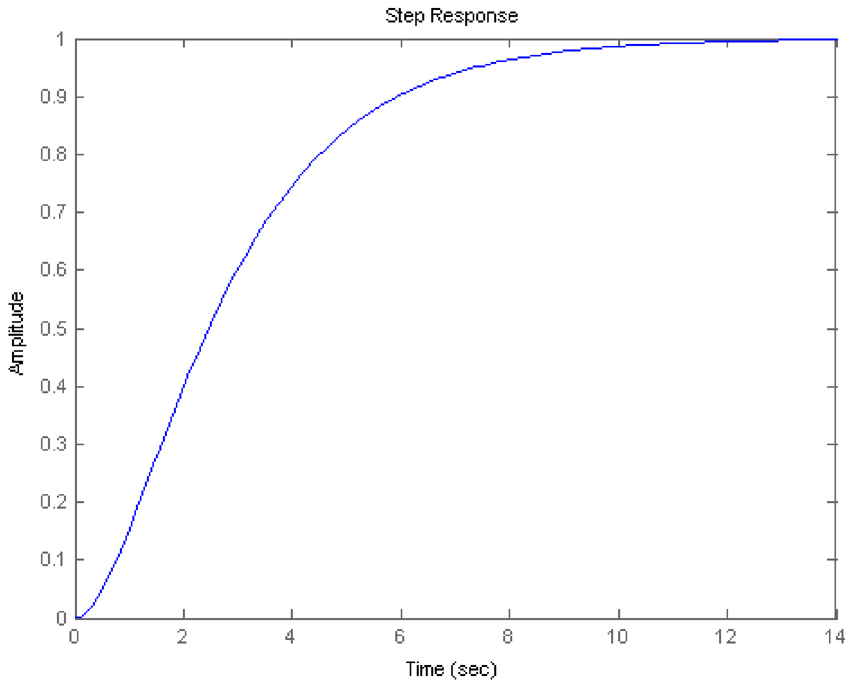


Charakterystyka skokowa

– Inercyjny II rzędu

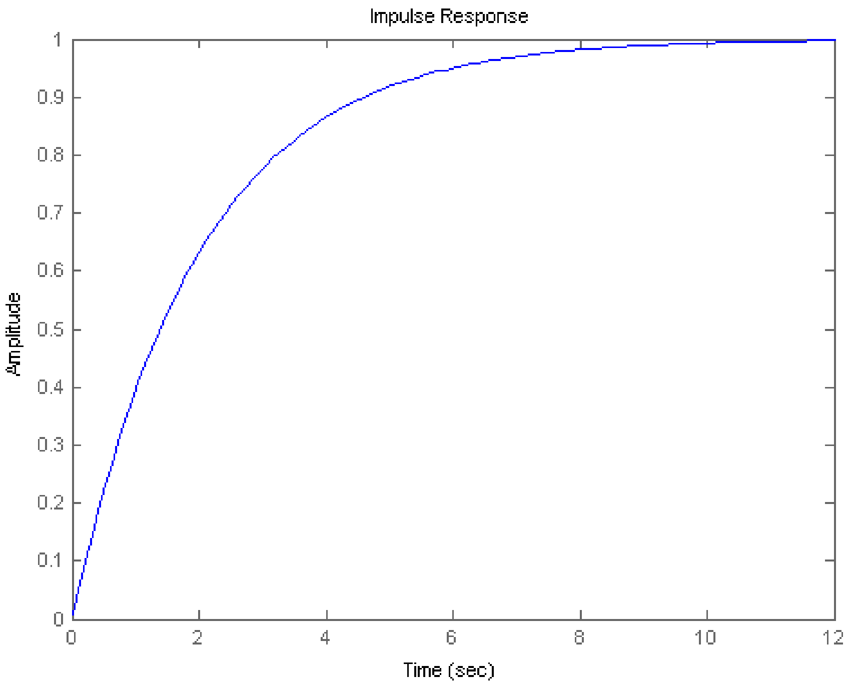


Charakterystyka impulsowa

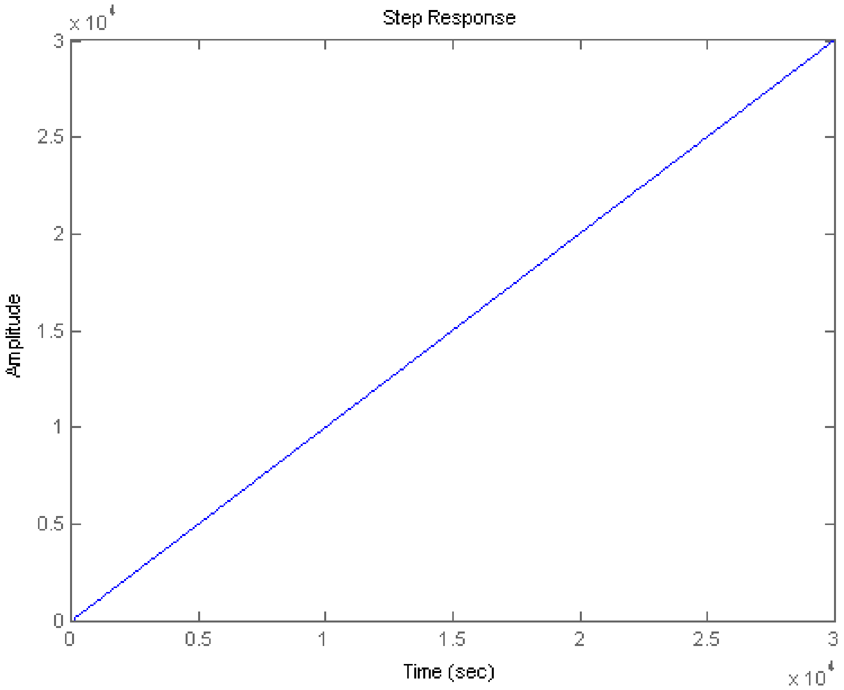


Charakterystyka skokowa

– Całkujący rzeczywisty

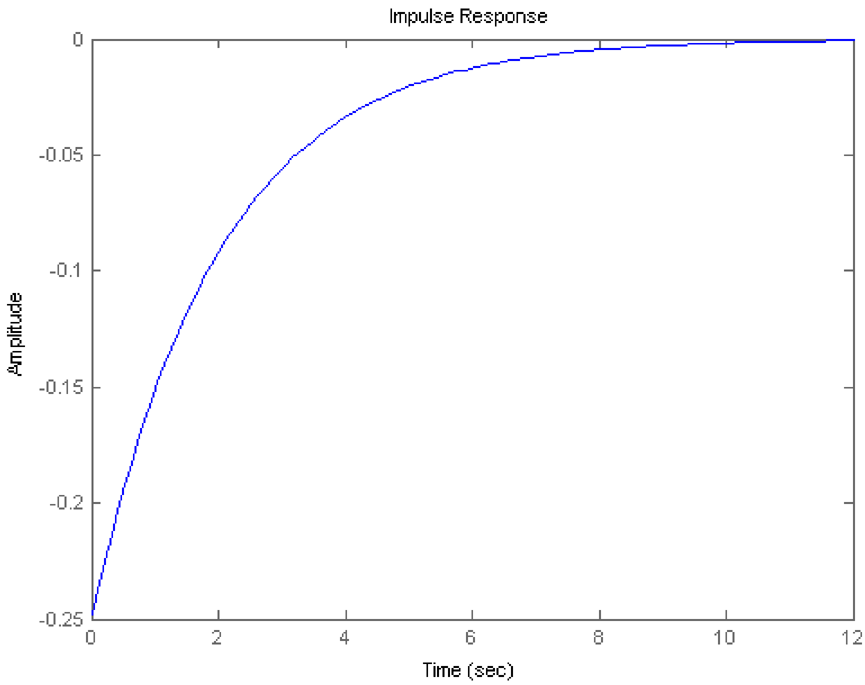


Charakterystyka impulsowa

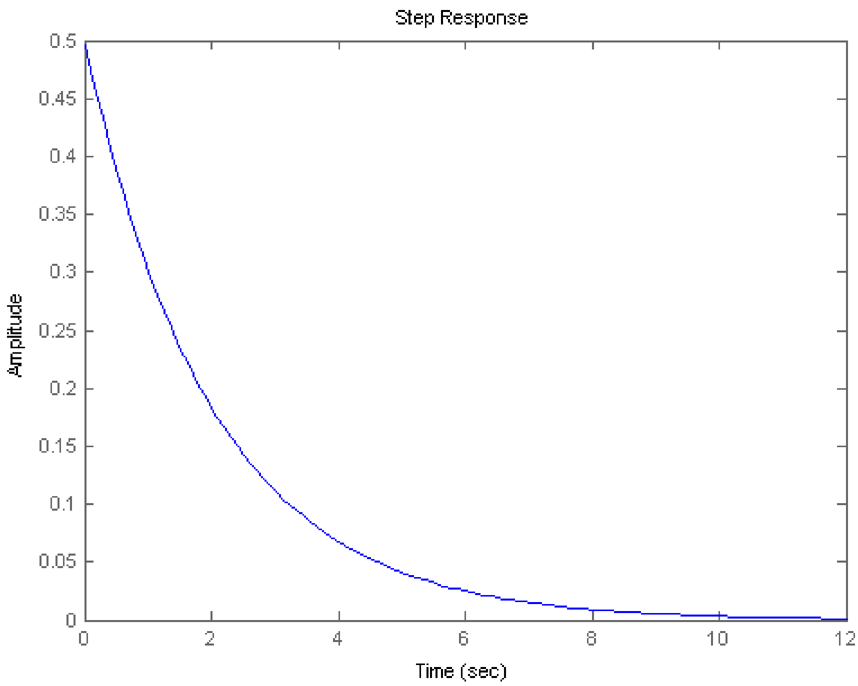


Charakterystyka skokowa

– Różniczkujący rzeczywisty

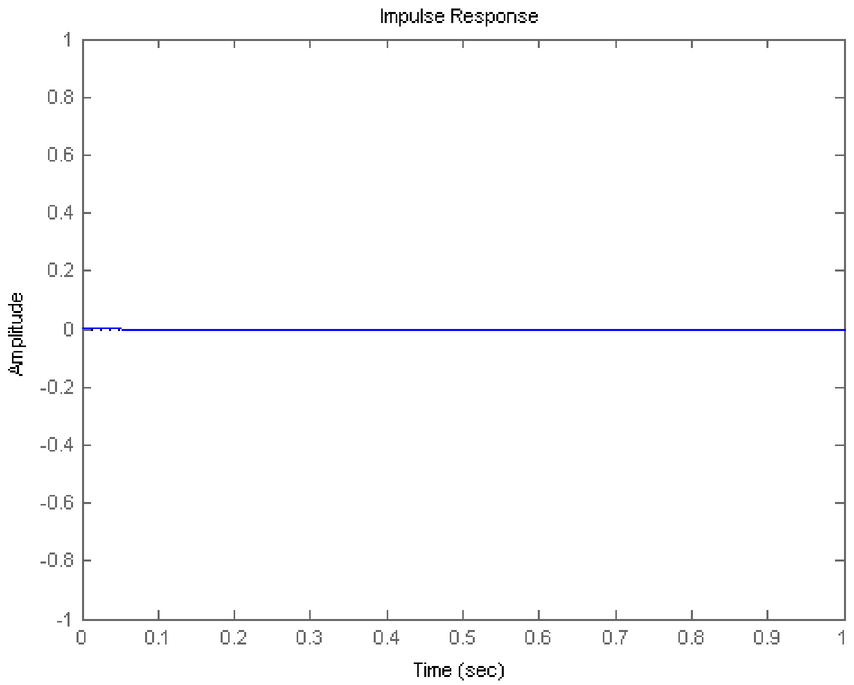


Charakterystyka impulsowa

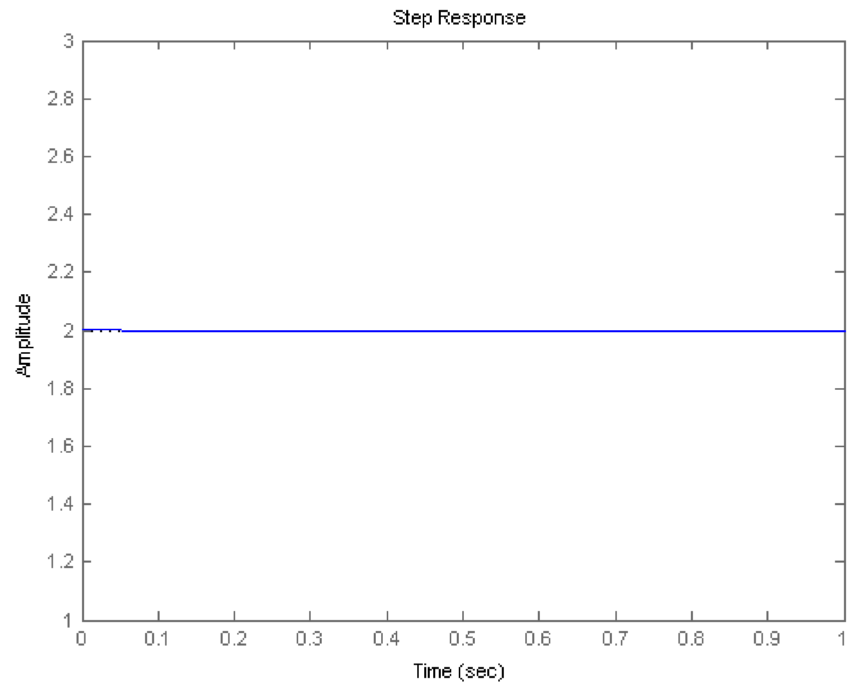


Charakterystyka skokowa

– Proporcjonalny



Charakterystyka impulsowa



Charakterystyka skokowa

- Przy użyciu własnych funkcji mImpulse(...) i mStep(...)

$$\dot{x}(t = n\Delta t) = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} \tag{34}$$

$$x_n = x(t = n\Delta t) \tag{35}$$

$$u_n = u(t = n\Delta t) \tag{36}$$

$$y_n = y(t = n\Delta t) \tag{37}$$

Dodatkowo korzystamy z:

$$\dot{x}_n = Ax_n + Bu_n y_n = Cx_n$$

Otrzymujemy układ dyskretny:

$$x_{n+1} = (Ax_n + Bu_n)\Delta t + x_n y_n = Cx_n$$

Taki układ można już zastosować do napisania funkcji:

```
function p=mImpulse(A,B,C,D,dt,n)
    y = zeros(1,n);
    x = zeros(size(A),n);
    x(1,1)=1;
    t = 0:dt:dt*(n-1);
    u=1;
    for i=1:n
        y(1,i) = C*x(:,i) + D*u;
        x(:,i+1) = (A*x(:,i)+B*u)*dt + x(:,i);
        u = 0;
    end
    p=plot(t,y(1,:))
end
```

Listing 1: funkcja mImpulse.m

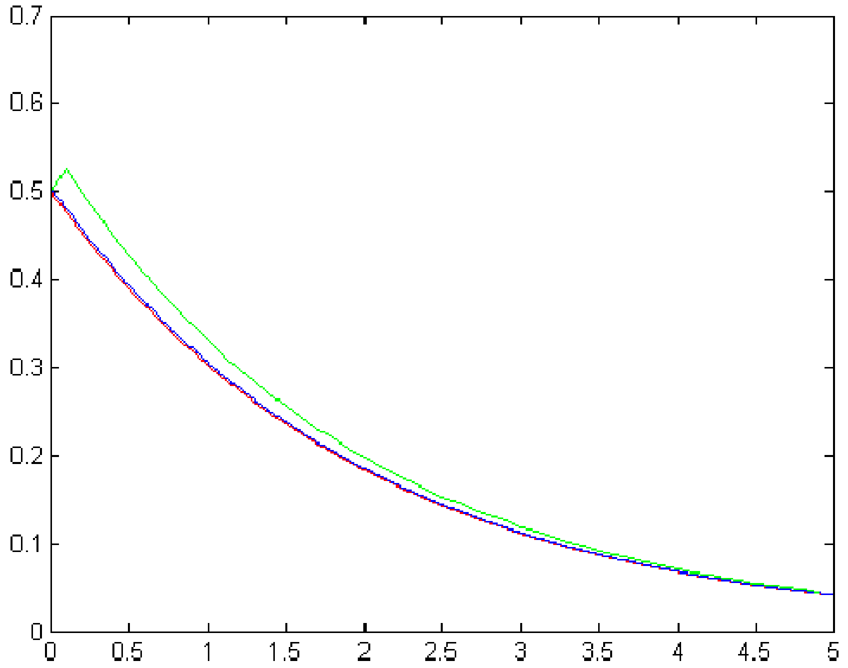
Nasz funkcja tworzy wykres charakterystyki impulsowej na podstawie parametrów A,B,C i D będących parametrami równania stanu (obliczonymi w poprzednim zadaniu) oraz długość kroku i ich ilość. Po pierwszej iteracji u jest zamienione z 1 na 0 tak aby zasymulować impuls.

```
function p=mStep(A,B,C,D,dt,n)
    y = zeros(1,n);
    x = zeros(size(A),n);
    t = 0:dt:dt*(n-1);
    u=1;
    for i=1:n
        y(1,i) = C*x(:,i) + D*u;
        x(:,i+1) = (A*x(:,i)+B*u)*dt + x(:,i);
    end
    p=plot(t,y(1,:))
end
```

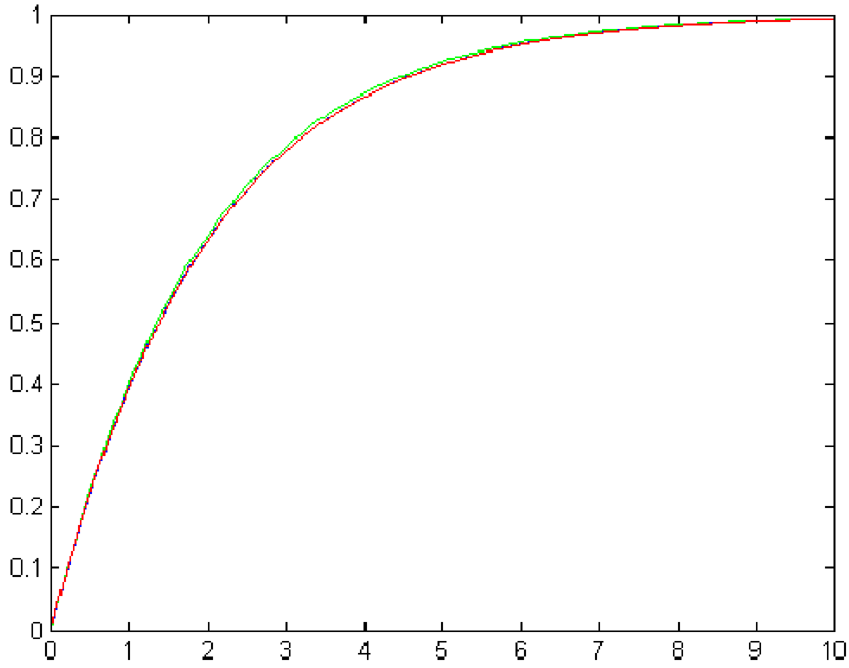
Listing 2: funkcja mStep.m

Nasz funkcja tworzy wykres charakterystyki skokowej na podstawie parametrów A,B,C i D będących parametrami równania stanu (obliczonymi w poprzednim zadaniu) oraz długość kroku i ich ilość. Wartość u jest zawsze równa 1 symulując funkcję jednostkową.

– Inercyjny I rzędu

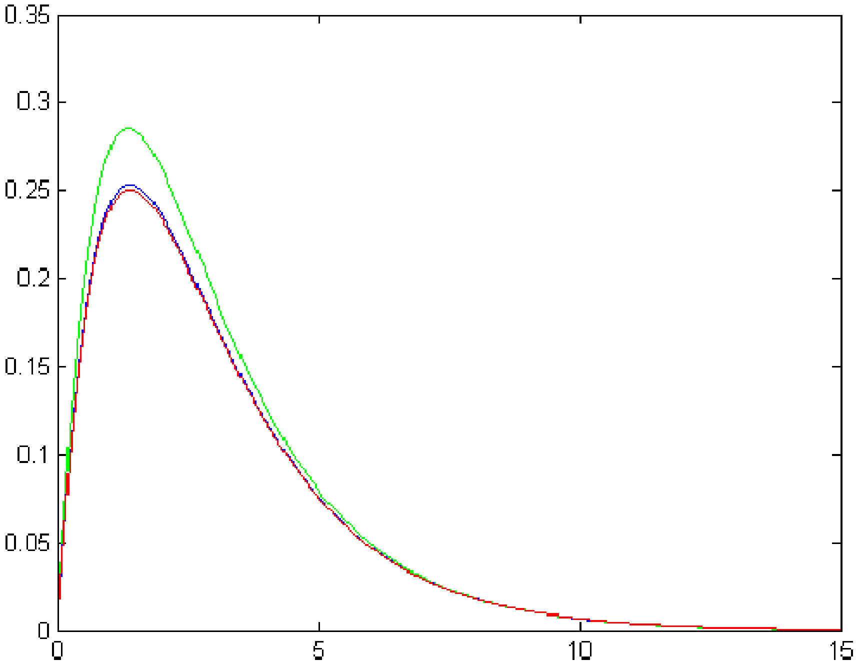


Charakterystyka impulsowa

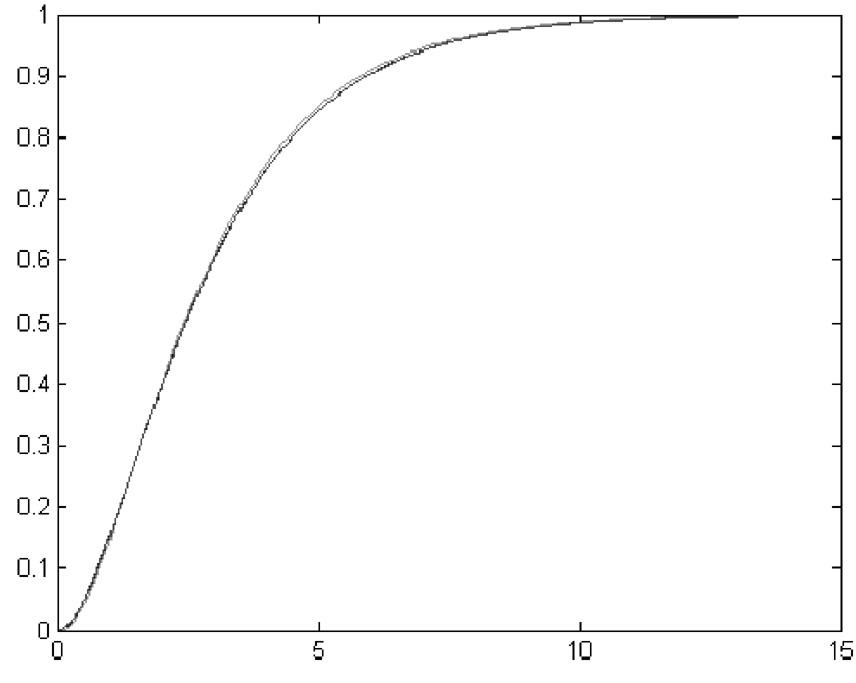


Charakterystyka skokowa

– Inercyjny II rzędu

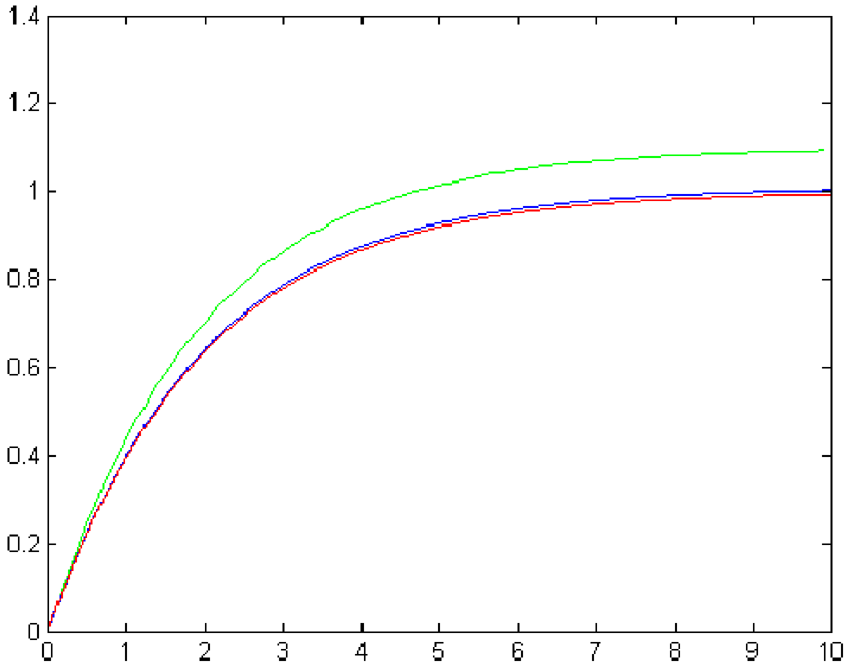


Charakterystyka impulsowa

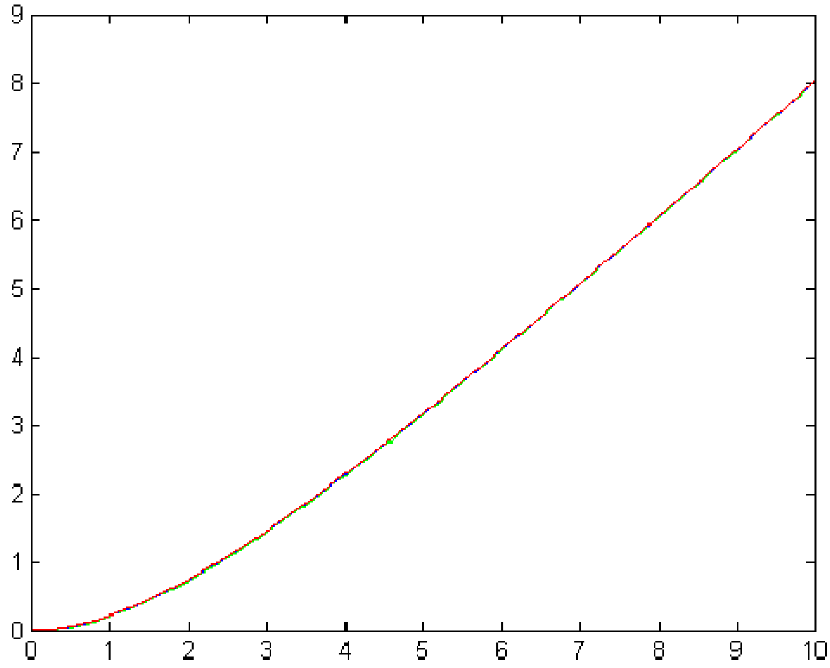


Charakterystyka skokowa

– Całkujący rzeczywisty

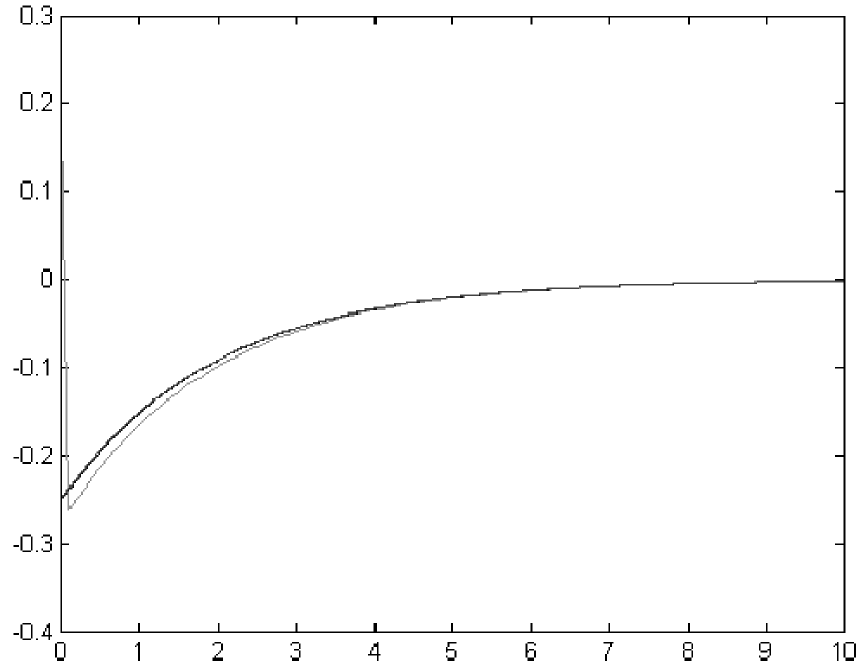


Charakterystyka impulsowa

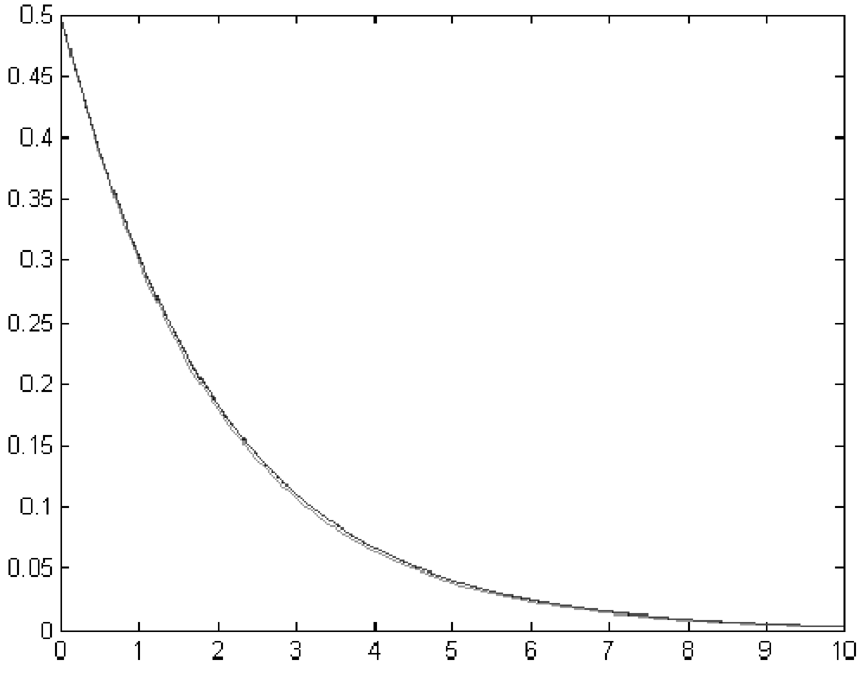


Charakterystyka skokowa

– Różniczkujący rzeczywisty

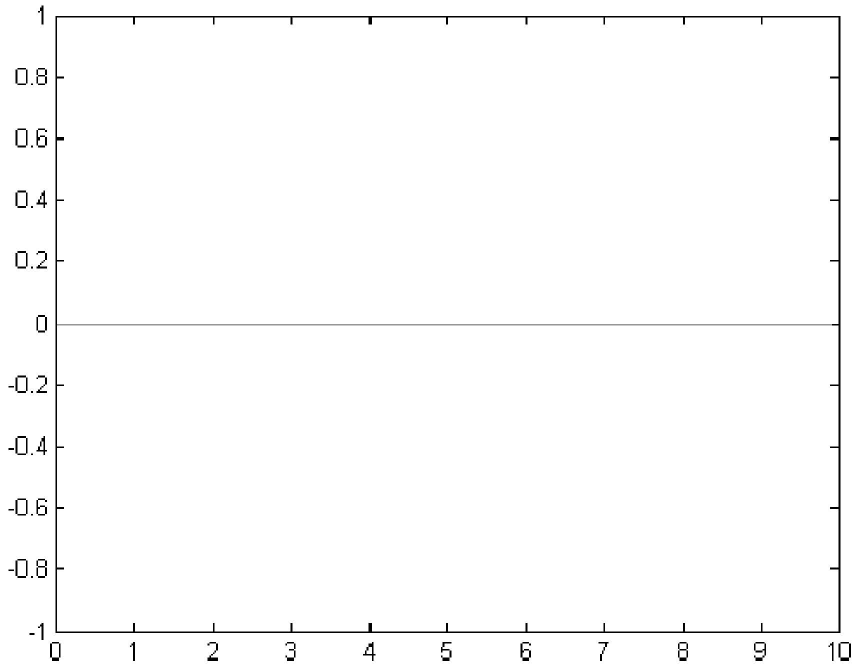


Charakterystyka impulsowa

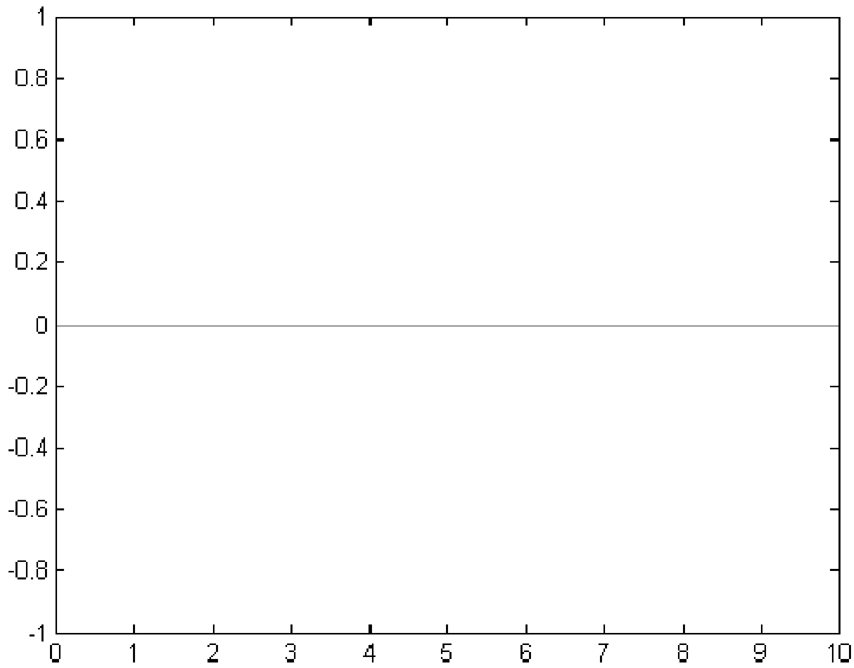


Charakterystyka skokowa

– Proporcjonalny



Charakterystyka impulsowa



Charakterystyka skokowa

4 Zadanie 3 *Wyznaczanie parametrów członów dynamicznych*

Przepisane dla inercyjnego:

$$g(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \tag{38}$$

Aby odczytać wartość k i T postępujemy w następujący sposób: Wyliczamy dla punktu t=0:

$$g(0) = \frac{k}{T} \tag{39}$$

Liczymy pochodną:

$$\dot{g}(t) = -\frac{k}{T^2} e^{-\frac{t}{T}} \tag{40}$$

Obliczamy wartość pochodnej w punkcie t=0

$$\dot{g}(0) = -\frac{k}{T^2} = -\frac{1}{T^2} g(0) \tag{41}$$

Przedstawiamy pochodną dla t=0 jako współczynnik kierunkowy stycznej (s(t)). Załóżmy, że dla t' dana styczna osiąga wartość 0 (przecina oś Ot). Wartość tego współczynnika ma wartość (wiemy także, że s(0)=g(0)):

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{s(t') - s(0)}{t' - 0} = \frac{s(0)}{t'} = \frac{g(0)}{t'} \tag{42}$$

Podstawiając:

$$-\frac{g(0)}{t'} = -\frac{1}{T} g(0) \tag{43}$$

Wychodzi:

$$T = t' \tag{44}$$

Interpretacja: wartość parametru T odczytujemy jako argument przecięcia się interpolowanej stycznej w punkcie t=0 z osią Ot. Mając T wyliczamy k ze wzoru:

$$k = g(0)T \tag{45}$$

Charakterystyka skokowa:

$$h(t) = k(1 - e^{-\frac{1}{T}}) \tag{46}$$

Aby odczytać wartość k i T postępujemy w następujący sposób: Bierzemy granicę wartości funkcji

$$\lim_{t \to \infty} h(t) = \lim_{t \to \infty} k(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \tag{47}$$

A więc wartość k odpowiada równaniu asymptoty poziomej w nieskończoności y(t)=k Aby obliczyć T obliczamy pochodną h(t)

$$\dot{h}(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \tag{48}$$

5 Wnioski

1. parametry opisu stanu mogą być różne, a dalej równoznaczne 2.