

# Dial-A-Ride Problem

## Modélisation PLNE

Clara Gros  
Pauline Vaillant  
Clémence David  
Camil Zarrouk  
Marouane Abia

March 2020

### Contents

<b>1</b>	<b>Présentation du problème</b>	<b>2</b>
1.1	Objectifs . . . . .	2
1.2	Contraintes . . . . .	2
1.3	Illustration du problème . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Modèle mathématique</b>	<b>4</b>
2.1	Notations . . . . .	4
2.1.1	Modélisation par un graphe . . . . .	4
2.1.2	Paramètres du problème . . . . .	4
2.2	Variables de décision . . . . .	5
2.3	Contraintes . . . . .	5
2.4	Fonction objectif . . . . .	7
2.5	Linéarisation des contraintes . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Programme linéaire</b>	<b>8</b>

# 1 Présentation du problème

## 1.1 Objectifs

Ce problème vise à trouver une solution optimale vis à vis de deux objectifs  $c1$  et  $c2$  avec  $c1 \succ c2$  :

- (c1) Affecter le plus de courses possibles aux chauffeurs
- (c2) Minimiser le temps total de trajet pour les chauffeurs

On se retrouve avec un problème bi-objectif et l'on va se ramener à un problème mono-objectif (voir équation 0) en utilisant la méthode lexicographique sachant que le critère 1 est prioritaire sur le critère 2.

## 1.2 Contraintes

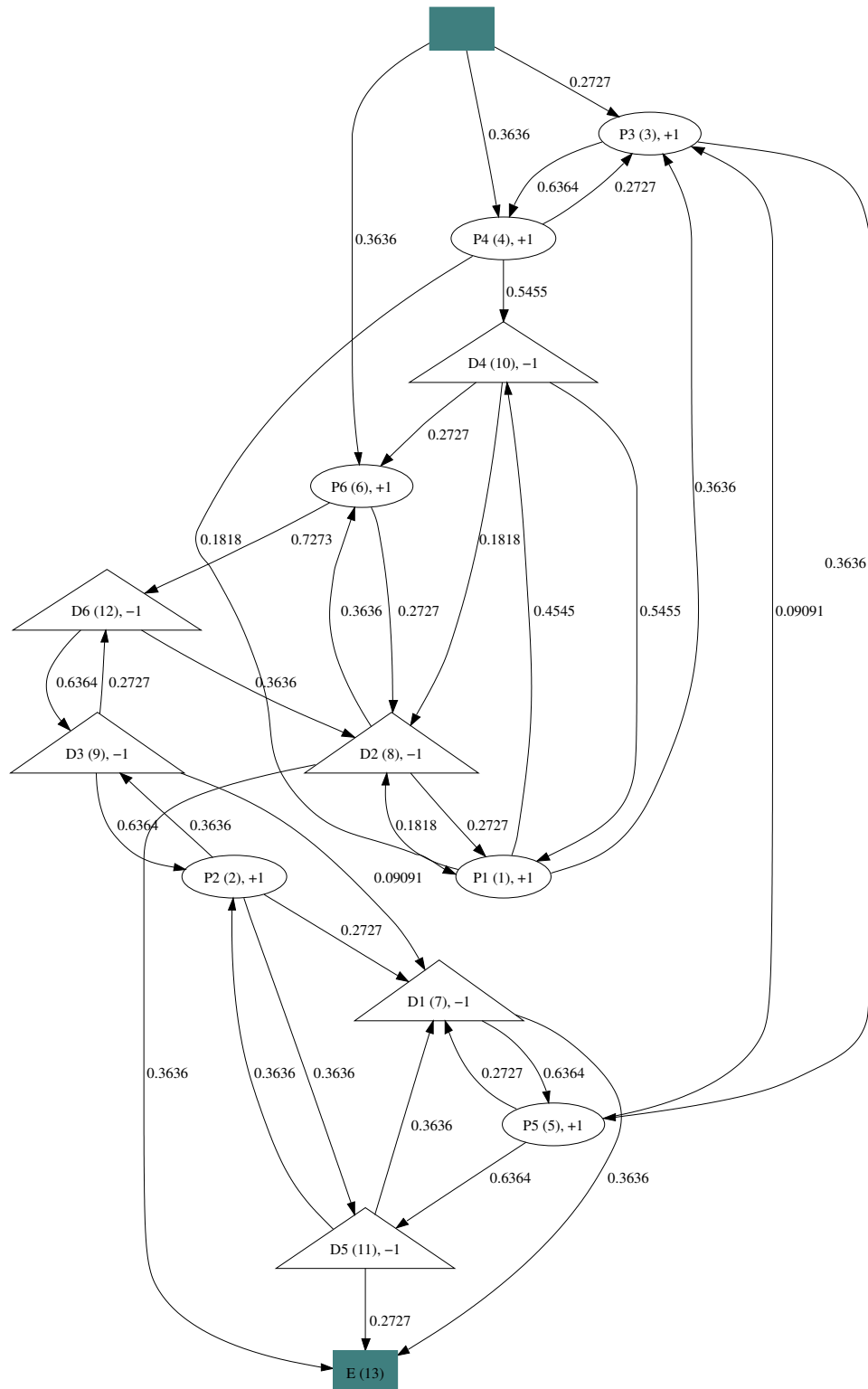
Ci-dessous une liste exhaustive des contraintes littérales imposées par le problème:

- Revenu maximal de chaque chauffeur
- Durée maximale de chaque course
- Capacité des véhicules des chauffeurs
- Fenêtres de temps pour chaque prise et dépose
- Début et fin de service de chaque chauffeur
- Temps de trajet entre le dépôt, les prises et les déposes

## 1.3 Illustration du problème

Voir page suivante.

# The dial a ride problem (DARP)



## 2 Modèle mathématique

### 2.1 Notations

#### 2.1.1 Modélisation par un graphe

Sur une journée, notons  $n \in \mathbb{N}$  le nombre total de requêtes. Une requête (course) peut être faite par un ou plusieurs utilisateurs. Le DARP peut donc être défini sur un graphe orienté.

$$G = (V, E), \text{ où } V = P \cup D \cup \{0, 2n+1\}, P \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{ et } D \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$$

Les sous-ensembles  $P$  et  $D$  contiennent respectivement les nœuds de ramassage (pick up) et de dépôt (drop off), tandis que les nœuds 0 et  $2n+1$  représentent les dépôts d'origine et de destination des véhicules de la flotte (confondus dans notre cas). À chaque utilisateur  $i$  est donc associé un nœud d'origine  $i$  et un nœud de destination  $n+i$ . L'ensemble des arcs est défini comme suit :  $E = \{(i, j) : i = 0, j \in P \text{ ou } (i, j) \in P \cup D, i \neq j \text{ et } i \neq n+j, \text{ ou } i \in D, j = 2n+1\}$ .

Concrètement, une arête  $(i, j)$ ,  $i = 0, j \in P$  traduit le fait qu'un bus qui part vide de l'entrepôt passe forcément en premier par une station de prise pour récupérer des gens. De même, une arête  $(i, j)$ ,  $i \in D, j = 2n+1$  traduit le fait qu'un bus qui rentre à l'entrepôt en fin de tournée ne peut pas passer juste avant par une station de prise pour prendre des gens. Enfin, les arêtes de type  $(i, j)$ ,  $(i, j) \in P \cup D, i \neq j$  et  $i \neq n+j$  représentent les chemins que peut emprunter un bus au cours de sa tournée. La condition  $i \neq j$  signifie qu'il n'y a pas d'arête bouclant sur un même nœud : un chemin faisable va d'une station à une autre bien distincte. Quant à la condition  $i \neq n+j$ ,  $\forall (i, j) \in P$ , elle traduit le fait que, pour une requête  $i$  donnée, passer d'abord par la station de dépôt  $n+i$  puis par la station de prise  $i$  n'a pas de sens.

#### 2.1.2 Paramètres du problème

- $M$  représente le nombre total de chauffeurs (véhicules) de la flotte.
- $\forall (i, j) \in V^2$ ,  $t_{ij}$  représente le temps de trajet entre les stations  $i$  et  $j$ .
- $\forall i \in V$ ,  $e_i$  représente la durée d'exécution à la station  $i$  (e.g le temps d'arrêt à la station pour embarquer ou débarquer des gens). On pose par convention  $e_0 = e_{2n+1} = 0$ .
- $\forall i \in P$ ,  $m_i$  représente le temps de trajet maximal de la course  $i$ .
- $\forall i \in V$ ,  $q_i$  représente le nombre de personnes chargées dans le véhicule au nœud  $i$ . Il va de soi que  $q_0 = q_{2n+1} = 0$  car aucune personne ne monte ni ne descend à l'entrepôt des véhicules et  $\forall i \in P$ ,  $q_i = -q_{n+i}$  car toutes les personnes qui montent dans le véhicule à la station  $i$  (requête  $i$ ) descendent à leur station d'arrivée  $n+i$ .

- $\forall i \in P$ ,  $r_i$  représente le coût de la course  $i$ .
- $\forall k \in M$ ,  $C_k$  représente la capacité maximale du véhicule  $k$ .
- $\forall k \in M$ ,  $(L_k, U_k)$  représentent respectivement la date minimale (maximale) de départ (d'arrivée) du véhicule  $k$  à l'entrepôt.
- $\forall i \in V$ ,  $(l_i, u_i)$  représente la fenêtre de temps à la station  $i$ .  
Les fenêtres de temps à l'entrepôt (stations 0 et  $2n + 1$ ) représentent la date la plus tôt à laquelle le véhicule devrait partir de l'entrepôt pour servir les clients et la date la plus tard à laquelle il doit retourner au dépôt. Ainsi,  $l_0 = \min(\min(l_i - t_{0i}), \min(L_k))$  et  $l_{2n+1} = \min(\min(l_i - t_{2n+1,i}), \min(L_k))$  signifie que nous prenons la première heure de départ nécessaire comme heure de début de la fenêtre temporelle au dépôt, et de même, on prend  $u_0 = \max(\max(u_j - t_{j,0}), \max(U_k))$  et  $u_{2n+1} = \max(\max(u_j - t_{j,2n+1}), \max(U_k))$  comme étant le dernier moment de la fenêtre temporelle au dépôt.
- $\forall k \in M$ ,  $R_k$  représente le revenu maximal que le chauffeur  $k$  peut toucher en une tournée.

## 2.2 Variables de décision

- $\forall (i, j) \in V^2$ ,  $\forall k \in M$ ,  $x_{ij}^k$  illustre le fait que le véhicule  $k$  se déplace ou non du nœud  $i$  au nœud  $j$ .

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{si le chauffeur } k \text{ passe par } (i, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : Si  $(i, j) \notin E$ ,  $x_{ij}^k = 0$ .

- $\forall (i, k) \in V \times M$ ,  $u_i^k$  représente l'heure à laquelle le chauffeur  $k$  arrive à la station  $i$ .
- $\forall (i, k) \in P \times M$ ,  $m_i^k$  représente le temps de trajet total de la course  $i$  dans le véhicule  $k$ .
- $\forall (i, k) \in V \times M$ ,  $q_i^k$  représente la charge du véhicule  $k$  en partant de la station  $i$ .

## 2.3 Contraintes

Chaque demande est réalisée au plus une fois : seulement un véhicule peut arriver à une station de prise donnée et il n'y repart que par un seul chemin.

$$\sum_{k \in M} \sum_{j \in V} x_{ij}^k \leq 1 \quad \forall i \in P \quad (1)$$

Un même véhicule qui entre dans un nœud quitte obligatoirement le nœud.

$$\sum_{j \in V} x_{ij}^k - \sum_{j \in V} x_{ji}^k = 0 \quad \forall i \in P \cup D, \forall k \in M \quad (2)$$

Les contraintes 3 et 4 garantissent que l'itinéraire de chaque véhicule  $k$  commence au dépôt d'origine et se termine au même dépôt, si le véhicule fait au moins une course (dans le cas où le véhicule ne quitte pas l'entrepôt,  $x_{0,2n+1}^k = 1$ ).

$$\sum_{j \in V} x_{0j}^k = 1 \quad \forall k \in M \quad (3)$$

$$\sum_{i \in V} x_{i,2n+1}^k = 1 \quad \forall k \in M \quad (4)$$

Les nœuds d'origine et de destination sont visités par le même véhicule.

$$\sum_{j \in V} x_{ij}^k - \sum_{j \in V} x_{n+i,j}^k = 0 \quad \forall i \in P, \forall k \in M \quad (5)$$

**Visit time** La cohérence des variables de temps est assurée par la contrainte 6 et la contrainte 7 impose des fenêtres de temps définies par chaque utilisateur.

$$u_j^k \geq (u_i^k + e_i + t_{ij})x_{ij}^k \quad \forall (i, j) \in V^2, \forall k \in M \quad (6)$$

$$l_i \leq u_i^k \leq u_i \quad \forall i \in P \cup D, \forall k \in M \quad (7)$$

**Ride time** L' égalité 8 définit le temps de parcours de chaque utilisateur, qui est limité par les contraintes 9.

$$m_i^k = u_{n+i}^k - (u_i^k + e_i) \quad \forall i \in P, \forall k \in M \quad (8)$$

$$t_{i,n+i} \leq m_i^k \leq m_i \quad \forall i \in P, \forall k \in M \quad (9)$$

**Load constraints** La cohérence des variables de charge est assurée par la contrainte 10 et la contrainte 11 impose des contraintes de capacités définies pour chaque véhicule.

$$q_j^k \geq (q_i^k + q_j)x_{ij}^k \quad \forall (i, j) \in V^2, \forall k \in M \quad (10)$$

$$\max(0, q_i) \leq q_i^k \leq \min(C_k, C_k + q_i) \quad \forall i \in V, \forall k \in M \quad (11)$$

**Vehicles tour constraints** Les contraintes 12 et 13 imposent respectivement une date de début et une date de fin de la tournée d'un véhicule.

$$u_0^k \geq L_k \quad \forall k \in M \quad (12)$$

$$u_{2n+1}^k \leq U_k \quad \forall k \in M \quad (13)$$

**Cost constraint** La contrainte 14 limite le revenu maximal de chaque chauffeur.

$$\sum_{j \in V} \sum_{i \in P} r_i x_{ij}^k \leq R_k, \quad \forall k \in M \quad (14)$$

Avoid loop on one station :

$$\sum_{k \in M} \sum_{i \in V} x_{ii}^k = 0 \quad (15)$$

## 2.4 Fonction objectif

Pour établir la fonction multi objectif, de la forme

$$\max \sum_{k \in M} \sum_{(i,j) \in P \times V} x_{ij}^k - \epsilon \sum_{k \in M} \sum_{(i,j) \in V^2} t_{ij} x_{ij}^k \quad (0)$$

il faut choisir la valeur du paramètre  $\epsilon$  afin de garantir que les objectifs sont bien optimisés en priorisant le nombre de courses par rapport au temps de trajet. On choisit  $\epsilon$  de sorte que  $\epsilon \sum_{k \in M} \sum_{(i,j) \in V^2} t_{ij} x_{ij}^k \leq 1$ . Pour se faire, on imagine le pire des cas où toutes les routes possibles seraient empruntées par un véhicule : c'est à dire le cas où le graphe est complet. Alors en prenant  $\epsilon = 1 / \sum_{(i,j) \in V^2} t_{ij}$ , on s'assure que la quantité précédente sera toujours inférieure à 1. En effet, on veut maximiser la quantité  $n - \epsilon d$ , avec  $n$  le nombre de courses et  $d$  la distance parcourue par l'ensemble des véhicules de la flotte. Si on note  $N$  le nombre de courses maximales et que l'on s'assure que  $\epsilon d \leq 1$ , alors on est sûr que pour une configuration où  $n = N$ , on aura  $n - \epsilon d > N - 1$  et si  $n \leq N - 1$ , alors  $n - \epsilon d \leq N - 1$ . Cela montre bien que la meilleure configuration sera forcément une configuration où  $n = N$ . On est donc bien sûr de maximiser en priorité sur le nombre de courses. La fonction objectif devient :

$$\begin{aligned} \max \sum_{k \in M} \sum_{(i,j) \in P \times V} x_{ij}^k - \epsilon \sum_{k \in M} \sum_{(i,j) \in V^2} t_{ij} x_{ij}^k \\ \text{with } \{ \epsilon = 1 / \sum_{(i,j) \in V^2} t_{ij} \end{aligned}$$

## 2.5 Linéarisation des contraintes

La formulation des contraintes ci-dessus est non linéaire en raison des contraintes 6 et 10. En introduisant les constantes  $M_{ij}$  et  $Q_i^k$ , ces contraintes peuvent toutefois être linéarisées comme suit :

$$u_j^k \geq u_i^k + e_i + t_{ij} - M_{ij}(1 - x_{ij}^k) \quad \forall (i,j) \in V^2, \forall k \in M \quad (6.1)$$

avec

$$M_{ij} = \max(0, e_i + t_{ij} + u_i - l_j) \quad \forall (i,j) \in V^2 \quad (6.2)$$

$$q_j^k \geq (q_i^k + q_j) - Q_i^k(1 - x_{ij}^k) \quad \forall (i,j) \in V^2, \forall k \in M \quad (10.1)$$

avec

$$Q_i^k = \min(C_k, C_k + q_i) \quad \forall i \in V, \forall k \in M \quad (10.2)$$

### 3 Programme linéaire

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{k \in M} \sum_{(i,j) \in P \times V} x_{ij}^k - \epsilon \sum_{k \in M} \sum_{(i,j) \in V^2} t_{ij} x_{ij}^k \\
 \text{s.t. } & \left\{ \begin{array}{ll}
 \sum_{k \in M} \sum_{j \in V} x_{ij}^k \leq 1 & \forall i \in P \\
 \sum_{j \in V} x_{ij}^k - \sum_{j \in V} x_{ji}^k = 0 & \forall i \in P \cup D, \forall k \in M \\
 \sum_{j \in V} x_{0j}^k = 1 & \forall k \in M \\
 \sum_{i \in V} x_{i,2n+1}^k = 1 & \forall k \in M \\
 \sum_{j \in V} x_{ij}^k - \sum_{j \in V} x_{n+i,j}^k = 0 & \forall i \in P, \forall k \in M \\
 u_j^k \geq u_i^k + e_i + t_{ij} - M_{ij}(1 - x_{ij}^k) \forall (i,j) \in V^2, \forall k \in M \\
 l_i \leq u_i^k \leq u_i & \forall i \in P \cup D, \forall k \in M \\
 m_i^k = u_{n+i}^k - (u_i^k + e_i) & \forall i \in P, \forall k \in M \\
 t_{i,n+i} \leq m_i^k \leq m_i & \forall i \in P, \forall k \in M \\
 q_j^k \geq (q_i^k + q_j) - Q_i^k(1 - x_{ij}^k) & \forall (i,j) \in V^2, \forall k \in M \\
 \max(0, q_i) \leq q_i^k \leq \min(C_k, C_k + q_i) & \forall i \in V, \forall k \in M \\
 u_0^k \geq L_k & \forall k \in M \\
 u_{2n+1}^k \leq U_k & \forall k \in M \\
 \sum_{j \in V} \sum_{i \in P} r_i x_{ij}^k \leq R_k & \forall k \in M \\
 \sum_{k \in M} \sum_{i \in V} x_{ii}^k = 0 & \\
 x_{ij}^k \in \{0, 1\} & \forall (i,j) \in V^2, \forall k \in M
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$