

Dial-A-Ride Problem

Modélisation PLNE

Clara Gros
Pauline Vaillant
Clémence David
Camil Zarrouk
Marouane Abia

March 2020

Contents

1	Présentation du problème	2
1.1	Objectifs	2
1.2	Contraintes	2
1.3	Illustration du problème	2
2	Modèle mathématique	4
2.1	Notations	4
2.1.1	Modélisation par un graphe	4
2.1.2	Paramètres du problème	4
2.2	Variables de décision	5
2.3	Contraintes	5
2.4	Fonction objectif	7
2.5	Linéarisation des contraintes	7
3	Programme linéaire	8

1 Présentation du problème

1.1 Objectifs

Ce problème vise à trouver une solution optimale vis à vis de deux objectifs $c1$ et $c2$ avec $c1 \succ c2$:

- (c1) Affecter le plus de courses possibles aux chauffeurs
- (c2) Minimiser le temps total de trajet pour les chauffeurs

On se retrouve avec un problème bi-objectif et l'on va se ramener à un problème mono-objectif (voir équation 0) en utilisant la méthode lexicographique sachant que le critère 1 est prioritaire sur le critère 2.

1.2 Contraintes

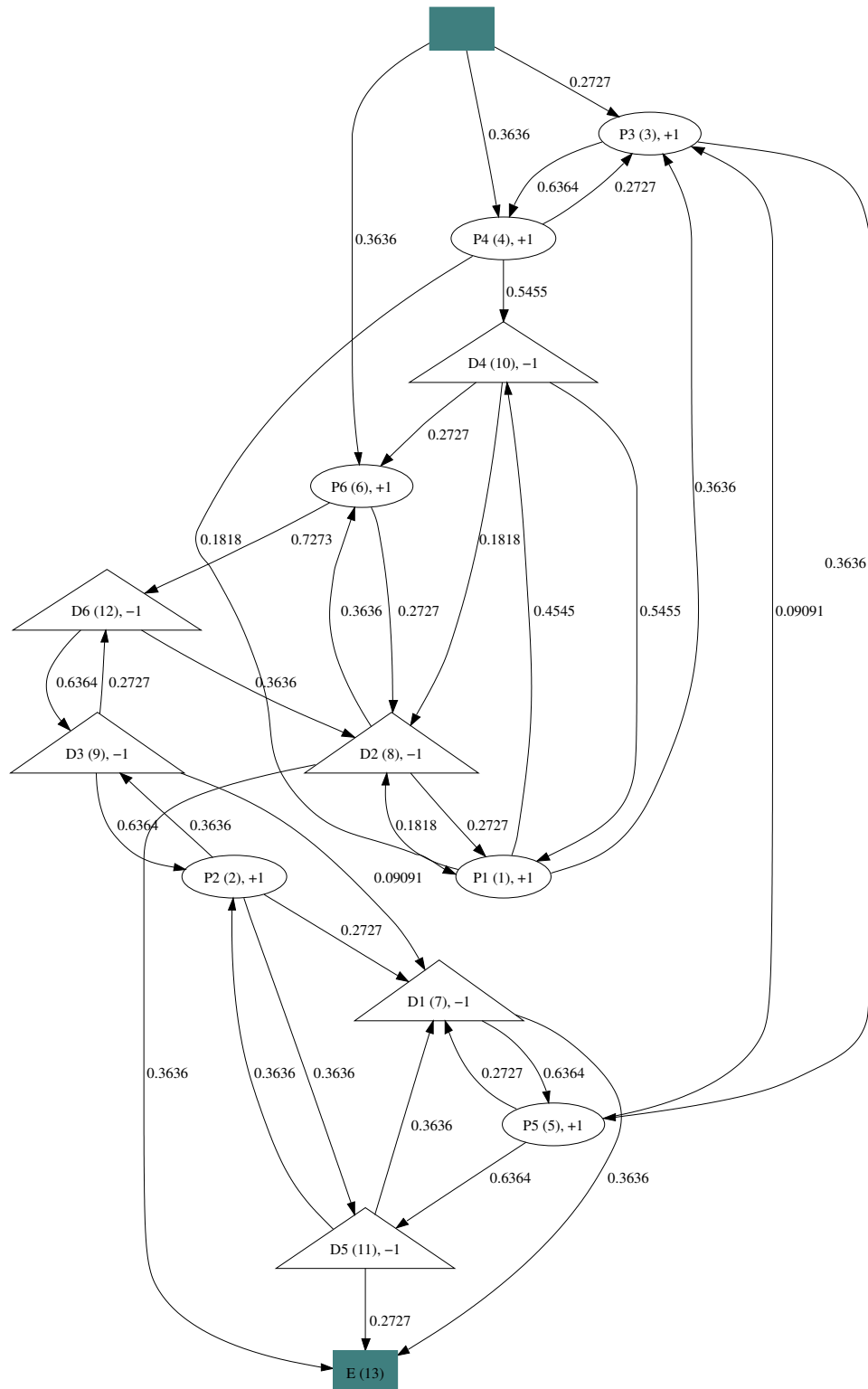
Ci-dessous une liste exhaustive des contraintes littérales imposées par le problème:

- Revenu maximal de chaque chauffeur
- Durée maximale de chaque course
- Capacité des véhicules des chauffeurs
- Fenêtres de temps pour chaque prise et dépose
- Début et fin de service de chaque chauffeur
- Temps de trajet entre le dépôt, les prises et les déposes

1.3 Illustration du problème

Voir page suivante.

The dial a ride problem (DARP)



2 Modèle mathématique

2.1 Notations

2.1.1 Modélisation par un graphe

Sur une journée, notons $n \in \mathbb{N}$ le nombre total de requêtes. Une requête (course) peut être faite par un ou plusieurs utilisateurs. Le DARP peut donc être défini sur un graphe orienté.

$$G = (V, E), \text{ où } V = P \cup D \cup \{0, 2n+1\}, P \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{ et } D \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$$

Les sous-ensembles P et D contiennent respectivement les nœuds de ramassage (pick up) et de dépôt (drop off), tandis que les nœuds 0 et $2n+1$ représentent les dépôts d'origine et de destination des véhicules de la flotte (confondus dans notre cas). À chaque utilisateur i est donc associé un nœud d'origine i et un nœud de destination $n+i$. L'ensemble des arcs est défini comme suit : $E = \{(i, j) : i = 0, j \in P \text{ ou } (i, j) \in P \cup D, i \neq j \text{ et } i \neq n+j, \text{ ou } i \in D, j = 2n+1\}$.

Concrètement, une arête (i, j) , $i = 0, j \in P$ traduit le fait qu'un bus qui part vide de l'entrepôt passe forcément en premier par une station de prise pour récupérer des gens. De même, une arête (i, j) , $i \in D, j = 2n+1$ traduit le fait qu'un bus qui rentre à l'entrepôt en fin de tournée ne peut pas passer juste avant par une station de prise pour prendre des gens. Enfin, les arêtes de type (i, j) , $(i, j) \in P \cup D, i \neq j$ et $i \neq n+j$ représentent les chemins que peut emprunter un bus au cours de sa tournée. La condition $i \neq j$ signifie qu'il n'y a pas d'arête bouclant sur un même nœud : un chemin faisable va d'une station à une autre bien distincte. Quant à la condition $i \neq n+j$, $\forall (i, j) \in P$, elle traduit le fait que, pour une requête i donnée, passer d'abord par la station de dépôt $n+i$ puis par la station de prise i n'a pas de sens.

2.1.2 Paramètres du problème

- M représente le nombre total de chauffeurs (véhicules) de la flotte.
- $\forall (i, j) \in V^2$, t_{ij} représente le temps de trajet entre les stations i et j .
- $\forall i \in V$, e_i représente la durée d'exécution à la station i (e.g le temps d'arrêt à la station pour embarquer ou débarquer des gens). On pose par convention $e_0 = e_{2n+1} = 0$.
- $\forall i \in P$, m_i représente le temps de trajet maximal de la course i .
- $\forall i \in V$, q_i représente le nombre de personnes chargées dans le véhicule au nœud i . Il va de soi que $q_0 = q_{2n+1} = 0$ car aucune personne ne monte ni ne descend à l'entrepôt des véhicules et $\forall i \in P$, $q_i = -q_{n+i}$ car toutes les personnes qui montent dans le véhicule à la station i (requête i) descendent à leur station d'arrivée $n+i$.

- $\forall i \in V$, r_i représente le coût de la course i . Ainsi, $\forall i \in V \setminus P$, $r_i = 0$ car le coût de la course est encaissé par le chauffeur dès la prise des passagers et le chauffeur ne gagne donc pas d'argent à l'entrepôt ni aux stations de dépôt des clients.
- $\forall k \in M$, C_k représente la capacité maximale du véhicule k .
- $\forall k \in M$, (L_k, U_k) représentent respectivement la date minimale (maximale) de départ (d'arrivée) du véhicule k à l'entrepôt.
- $\forall i \in V$, (l_i, u_i) représente la fenêtre de temps à la station i .
Les fenêtres de temps à l'entrepôt (stations 0 et $2n + 1$) représentent la date la plus tôt à laquelle le véhicule devrait partir de l'entrepôt pour servir les clients et la date la plus tard à laquelle il doit retourner au dépôt. Ainsi, $l_0 = \min(\min(l_i - t_{0i}), \min(L_k))$ et $l_{2n+1} = \min(\min(l_i - t_{2n+1,i}), \min(L_k))$ signifie que nous prenons la première heure de départ nécessaire comme heure de début de la fenêtre temporelle au dépôt, et de même, on prend $u_0 = \max(\max(u_j - t_{j,0}), \max(U_k))$ et $u_{2n+1} = \max(\max(u_j - t_{j,2n+1}), \max(U_k))$ comme étant le dernier moment de la fenêtre temporelle au dépôt.
- $\forall k \in M$, R_k représente le revenu maximal que le chauffeur k peut toucher en une tournée.

2.2 Variables de décision

- $\forall (i, j) \in V^2$, $\forall k \in M$, x_{ij}^k illustre le fait que le véhicule k se déplace ou non du nœud i au nœud j .

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{si le chauffeur } k \text{ passe par } (i, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : Si $(i, j) \notin E$, $x_{ij}^k = 0$.

- $\forall (i, k) \in V \times M$, u_i^k représente l'heure à laquelle le chauffeur k arrive à la station i .
- $\forall (i, k) \in P \times M$, m_i^k représente le temps de trajet total de la course i dans le véhicule k .
- $\forall (i, k) \in V \times M$, q_i^k représente la charge du véhicule k en partant de la station i .

2.3 Contraintes

Chaque demande est réalisée au plus une fois : seulement un véhicule peut arriver à une station de prise donnée et il n'y repart que par un seul chemin.

$$\sum_{k \in M} \sum_{j \in V} x_{ij}^k \leq 1 \quad \forall i \in P \quad (1)$$

Un même véhicule qui entre dans un nœud quitte obligatoirement le nœud.

$$\sum_{j \in V} x_{ij}^k - \sum_{j \in V} x_{ji}^k = 0 \quad \forall i \in P \cup D, \forall k \in M \quad (2)$$

Les contraintes 3 et 4 garantissent que l'itinéraire de chaque véhicule k commence au dépôt d'origine et se termine au même dépôt, si le véhicule fait au moins une course.

$$\sum_{j \in V} x_{0j}^k \leq 1 \quad \forall k \in M \quad (3)$$

$$\sum_{i \in V} x_{i,2n+1}^k \leq 1 \quad \forall k \in M \quad (4)$$

Les nœuds d'origine et de destination sont visités par le même véhicule.

$$\sum_{j \in V} x_{ij}^k - \sum_{j \in V} x_{n+i,j}^k = 0 \quad \forall i \in P, \forall k \in M \quad (5)$$

Visit time La cohérence des variables de temps est assurée par la contrainte 6 et la contrainte 7 impose des fenêtres de temps définies par chaque utilisateur.

$$u_j^k \geq (u_i^k + e_i + t_{ij})x_{ij}^k \quad \forall (i, j) \in V^2, \forall k \in M \quad (6)$$

$$l_i \leq u_i^k \leq u_i \quad \forall i \in P \cup D, \forall k \in M \quad (7)$$

Ride time L'égalité 8 définit le temps de parcours de chaque utilisateur, qui est limité par les contraintes 9.

$$m_i^k = u_{n+i}^k - (u_i^k + e_i) \quad \forall i \in P, \forall k \in M \quad (8)$$

$$t_{i,n+i} \leq m_i^k \leq m_i \quad \forall i \in P, \forall k \in M \quad (9)$$

Load constraints La cohérence des variables de charge est assurée par la contrainte 10 et la contrainte 11 impose des contraintes de capacités définies pour chaque véhicule.

$$q_j^k \geq (q_i^k + q_j)x_{ij}^k \quad \forall (i, j) \in V^2, \forall k \in M \quad (10)$$

$$\max(0, q_i) \leq q_i^k \leq \min(C_k, C_k + q_i) \quad \forall i \in V, \forall k \in M \quad (11)$$

Vehicles tour constraints Les contraintes 12 et 13 imposent respectivement une date de début et une date de fin de la tournée d'un véhicule.

$$u_0^k \geq L_k \quad \forall k \in M \quad (12)$$

$$u_{2n+1}^k \leq U_k \quad \forall k \in M \quad (13)$$

Cost constraint La contrainte 14 limite le revenu maximal de chaque chauffeur.

$$\sum_{j \in V} \sum_{i \in V} r_i x_{ij}^k \leq R_k, \forall k \in M \quad (14)$$

Avoid loop on one station :

$$\sum_{k \in M} \sum_{i \in V} x_{ii}^k = 0 \quad (15)$$

2.4 Fonction objectif

$$\max \sum_{k \in M} \sum_{(i,j) \in V^2} x_{ij}^k - \epsilon \sum_{k \in M} \sum_{(i,j) \in V^2} t_{ij} x_{ij}^k \quad (0)$$

2.5 Linéarisation des contraintes

La formulation des contraintes ci-dessus est non linéaire en raison des contraintes 6 et 10. En introduisant les constantes M_{ij} et Q_i^k , ces contraintes peuvent toutefois être linéarisées comme suit :

$$u_j^k \geq u_i^k + e_i + t_{ij} - M_{ij}(1 - x_{ij}^k) \quad \forall (i, j) \in V^2, \forall k \in M \quad (6.1)$$

avec

$$M_{ij} = \max(0, e_i + t_{ij} + u_i - l_j) \quad \forall (i, j) \in V^2 \quad (6.2)$$

$$q_j^k \geq (q_i^k + q_j) - Q_i^k(1 - x_{ij}^k) \quad \forall (i, j) \in V^2, \forall k \in M \quad (10.1)$$

avec

$$Q_i^k = \min(C_k, C_k + q_i) \quad \forall i \in V, \forall k \in M \quad (10.2)$$

3 Programme linéaire

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{k \in M} \sum_{(i,j) \in V^2} x_{ij}^k - \epsilon \sum_{k \in M} \sum_{(i,j) \in V^2} t_{ij} x_{ij}^k \\
 \text{s.t. } & \left\{ \begin{array}{ll}
 \sum_{k \in M} \sum_{j \in V} x_{ij}^k \leq 1 & \forall i \in P \\
 \sum_{j \in V} x_{ij}^k - \sum_{j \in V} x_{ji}^k = 0 & \forall i \in P \cup D, \forall k \in M \\
 \sum_{j \in V} x_{0j}^k \leq 1 & \forall k \in M \\
 \sum_{i \in V} x_{i,2n+1}^k \leq 1 & \forall k \in M \\
 \sum_{j \in V} x_{ij}^k - \sum_{j \in V} x_{n+i,j}^k = 0 & \forall i \in P, \forall k \in M \\
 u_j^k \geq u_i^k + e_i + t_{ij} - M_{ij}(1 - x_{ij}^k) \forall (i,j) \in V^2, \forall k \in M \\
 l_i \leq u_i^k \leq u_i & \forall i \in P \cup D, \forall k \in M \\
 m_i^k = u_{n+i}^k - (u_i^k + e_i) & \forall i \in P, \forall k \in M \\
 t_{i,n+i} \leq m_i^k \leq m_i & \forall i \in P, \forall k \in M \\
 q_j^k \geq (q_i^k + q_j) - Q_i^k(1 - x_{ij}^k) & \forall (i,j) \in V^2, \forall k \in M \\
 \max(0, q_i) \leq q_i^k \leq \min(C_k, C_k + q_i) & \forall i \in V, \forall k \in M \\
 u_0^k \geq L_k & \forall k \in M \\
 u_{2n+1}^k \leq U_k & \forall k \in M \\
 \sum_{j \in V} \sum_{i \in V} r_i x_{ij}^k \leq R_k & \forall k \in M \\
 \sum_{k \in M} \sum_{i \in V} x_{ii}^k = 0 & \\
 x_{ij}^k \in \{0, 1\} & \forall (i,j) \in V^2, \forall k \in M
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$