LaTex Lab-1

GrosseRiese

19 oktober 2021

1 Induktionsbevis

1.1 Strategi för induktionsbevis

Om man vill visa att ett påstående är sant för alla heltal $n \geq a$, så kan man göra på följande sätt:

- **Induktionsbas:** Visa att påståendet är sant för $n = a$.
- **Induktionsantagande:** Anta att påståendet är sant för ett visst värde på n, t.ex. $n = p$, dvs. anta att $VL_p = HL_p$
- **Induktionssteg:** Visa med hjälp av induktionsantagandet att påståendet där är sant även för $n = p + 1$, dvs.att $VL_{p+1} = HL_{p+1}$
- **Slutsats:** Eftersom påståendet är sant för $n = a$ och för två på varandra följande tal, så är påståendet sant för alla tal $n \geq a$.

1.2 Uppgiften:

Visa att :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Min lösning för denna upgift så här:

- För $n = 1$, får vi (induktionsbas):

  $VL =$
  $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$$
  $HL =$
  $$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$
  $\therefore VL = HL, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$

- Nu antar vi att påståendet är sant för ett visst värde av n, vi kallar det värdet för p. Alltså antar vi att för $n = p$ gäller $\frac{1}{p(p+1)} = \frac{p}{p+1}$. (induktionsantagande)

$$(1)$$

- Vi ska nu undersöka om detta medför att påståendet är sant även för nästa värde på n,dvs. för $n = (p+1)$:
  Vi sätter in $(n = p+1)$ i HL.

  $$VL_{(p+1)} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = (\frac{p+1}{p+2}) = HL_{(p+1)}$$

  Från (1) (induktionsantagande):

  $VL_{(p+1)}$

  $$\begin{aligned} &= \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} \\ &= \frac{p(p+2)+1}{(p+1)(p+2)} \\ &= \frac{p^2+2p+1}{(p+1)(p+2)} \\ &= \frac{(p+1)(p+1)}{(p+1)(p+2)} \\ &= \frac{(p+1)}{(p+2)} = HL_{(p+1)} \end{aligned}$$

  Alltså är $VL_{(p+1)} = HL_{(p+1)}$, dvs.$VL = HL$ även för $p+1$.

- Jag har nu visat att påståendet är sant för $n = 1$, så är det också sant för nästa tal $p+1$. Detta gör att vi kan dra slutsatsen att påståendet också är sant för alla positiva heltal

  $$\therefore \forall n \in \mathbb{Z}_+$$