

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE LOUVAIN  
FACULTÉ DE L'UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN

ANNÉE ACADÉMIQUE 2018 – 2019

---

## Rapport de projet – Radar numérique

---

**Groupe 12**

DE SOUSA Kevin 4246-1600  
HAUPTMANN Thibaud 2178-1600  
HEUSCHLING Thomas 2887-1600  
LECLERC Morgan 3607-1600

*Enseignants :*

CRAEYE Christophe  
OESTGES Claude  
VANDENDORPE Luc  
FEUILLEN Thomas  
PAIRON Thomas

Remis le 8 mai 2019

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Spécification du système</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Etude physique du système</b>	<b>2</b>
3.1	Micro-Doppler . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Détermination de la distance et de la vitesse</b>	<b>7</b>
4.1	Modèle pour le signal émis/reçu . . . . .	7
4.2	Estimation du maximum de vraisemblance . . . . .	8
4.3	Résolution et ambiguïté . . . . .	10
4.3.1	Résolution de la corrélation en 2D . . . . .	10
4.3.2	Ambiguïté sur la distance . . . . .	11
4.3.3	Ambiguïté sur la vitesse . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Détermination des angles</b>	<b>12</b>
5.1	Développement théorique . . . . .	12
5.2	En pratique . . . . .	13
5.2.1	Méthode 1 . . . . .	13
5.2.2	Méthode 2 . . . . .	14
5.3	Source d'incertitudes . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Défi</b>	<b>17</b>
6.1	Développement théorique . . . . .	18
6.2	En pratique . . . . .	18
6.3	Comparaison des caractéristiques des radars . . . . .	18
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>20</b>
<b>8</b>	<b>Annexes</b>	<b>21</b>
8.1	Spectre d'un véhicule avec prise en compte du type de jantes . . . . .	21
8.2	Mouvement harmonique du bras . . . . .	23
8.3	Propriété signal . . . . .	23
8.3.1	Moyenne du bruit filtré . . . . .	23
8.3.2	Variance du bruit filtré . . . . .	24
8.3.3	Caractère décorrélé . . . . .	24
8.4	Établissement de la corrélation . . . . .	25
8.5	Ambiguïté sur l'angle . . . . .	25
8.5.1	Solution 1 . . . . .	25
8.5.2	Solution 2 . . . . .	26
8.6	Codes Matlab . . . . .	26
8.6.1	Corrélation distance-vitesse . . . . .	26
8.6.2	Corrélation sur les angles . . . . .	27
<b>9</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>28</b>

## 1 Introduction

Selon l'encyclopédie Universalis *"On désigne sous le nom de radar (Radio Detection and Ranging) un système qui illumine une portion de l'espace avec une onde électromagnétique et reçoit les ondes réfléchies par les objets qui s'y trouvent, ce qui permet de détecter leur existence et de déterminer certaines caractéristiques de ces objets. Ces caractéristiques sont variables : il peut s'agir de la position horizontale des objets, de leur altitude, de leur vitesse et parfois de leur forme, la détermination de ces données permettant au radar de renseigner l'utilisateur, mais aussi d'éliminer un grand nombre d'objets indésirables pour ne conserver que les « cibles » intéressantes."*[2]

Cette définition résume l'objectif du cours LFSAB Projet 4 Electricité[1] qui consiste à comprendre les notions mathématiques et physiques se cachant derrière un radar et à pouvoir analyser des données brutes afin d'en sortir des informations sur les objets qui nous intéressent.

C'est dans ce but que le groupe 12 a écrit ce rapport : afin d'y consigner toutes les connaissances acquises durant ce quadrimestre. Ce document indiquera d'abord toutes les contraintes du matériel utilisé ainsi que les données de base à notre disposition, et nous aborderons ensuite un phénomène étant apparu lors des prises de mesures : l'effet Micro-Doppler. Suivra le développement d'un modèle et sa mise en pratique dans un algorithme permettant de trouver la distance, vitesse et la direction dont provient la cible par rapport au radar. Pour finir, nous montrerons l'adaptation de ces algorithmes en passant d'un radar 24 GHz à un autre à 77 GHz et comparerons leurs caractéristiques.

## 2 Spécification du système

Pour l'étude des radars routiers numériques, on utilise le radar K-MD2 de la marque *RF-Beam* pour prendre les mesures expérimentales. Celui-ci comporte :

- 1 antenne émettrice : TX
- 3 antennes réceptrices : RX1, RX2, RX3

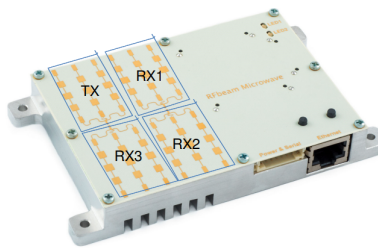


FIGURE 1 – Radar FMCW

Les spécifications de notre système sont :

- La fréquence centrale est de 24 [GHz].
- Le radar a une bande-passante de 250 [MHz].
- Les données de chaque antenne réceptrice sont stockées en matrices de 256x256, où 256 est le nombre d'échantillons de rampes et 256 nombres d'échantillons mesurés par rampe.
- La vitesse maximale détectable est 150 [km/h].

### 3 Etude physique du système

Le radar utilisé dans le cadre de notre projet est un radar FMCW (Frequency-Modulated Continuous-Wave Radar). Ce type de radar envoie des signaux de type "chirp", impulsions dont la fréquence augmente ou diminue avec le temps (augmente dans notre cas). Lorsque le radar envoie une impulsion et que celle-ci est réfléchiée par l'objet, deux différents décalages de fréquence existent. En effet, le signal reçu fait un aller-retour, cette distance prend un certain temps à être parcourue (délai). Lorsque l'on compare au temps  $t$  la fréquence du signal envoyé et reçu on observe un décalage de fréquence  $\Delta f$ . Le second décalage de fréquence  $f_d$  est lui causé par le phénomène Doppler<sup>1</sup>

Plus précisément la loi de Doppler est régie par la loi suivante dans le domaine relativiste :

$$\frac{f_{rec}}{f_{em}} = \frac{v_{onde} - v_{rec}}{v_{onde} - v_{em}} \quad (1)$$

où  $v_{rec}$  est la vitesse de la cible recevant le signal,  $v_{em}$  la vitesse de la source ayant émis le signal et  $v_{onde}$  la vitesse de l'onde du signal envoyé. Cependant dans notre cas  $v_{onde} \gg v_{rec}, v_{em}$ , puisque  $v_{onde} = c$  la vitesse de la lumière

$$\Rightarrow \frac{f_{rec} - f_{em}}{f_{em}} = \frac{v_{em} - v_{rec}}{v_{onde}} \quad (2)$$

avec  $v_{em}, v_{rec} > 0$  si l'émetteur se déplace vers le récepteur.

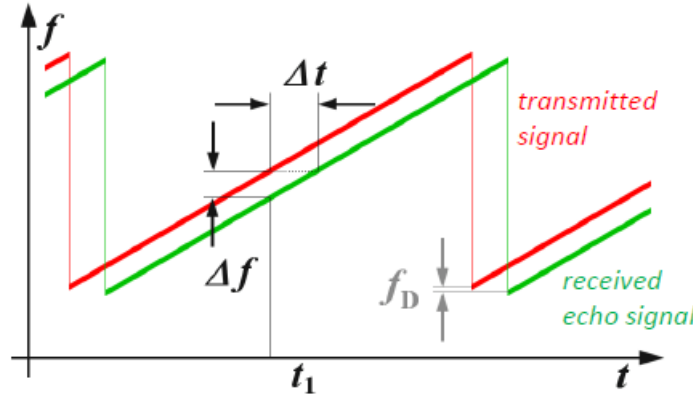


FIGURE 2 – Contenu fréquentiel et temporel

L'impulsion chirp envoyé par le radar s'écrit sous la forme suivante :

$$s_0(t) = A \cos\left[\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} + \frac{\Delta\omega t}{2T}\right)\right] \text{rect}_T(t) \quad (3)$$

$$s_0(t) = A \Re[e^{j(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} + \frac{\Delta\omega t}{2T})} e^{j\omega_0 t}] \text{rect}_T(t) \quad (4)$$

$$s_0(t) = A \Re[e_c(t) e^{j\omega_0 t}] \text{rect}_T(t) \quad (5)$$

$$(6)$$

Où  $e_c$  est l'enveloppe complexe du signal et  $\text{rect}_T(t)$  est la fenêtre rectangulaire qui contient l'impulsion.

1. L'effet Doppler est le décalage de fréquence d'une onde observé entre les mesures à l'émission et à la réception, car la vitesse de la cible modifie la fréquence du signal réfléchi.

### 3.1 Micro-Doppler

Par ailleurs, lors des mesures, nous constatons un phénomène étrange : des lignes horizontales apparaissent lors de l’affichage des données traitées (Figure 6). Après recherche, nous avons appris que ce phénomène s’appelait l’effet Micro-Doppler et nous avons étudié son origine et si celui-ci nous permettait de fournir des informations supplémentaires sur la ou les cibles dont le signal provient.

Pour faire l’étude du Micro-Doppler, on analyse la situation suivante :

- la roue effectue uniquement un mouvement de rotation
- Un point sur le périmètre d’une roue tournant à une vitesse angulaire  $\Omega$ .
- On utilise l’hypothèse du champs lointain.
- Le radar est monochromatique.
- Le radar se trouve dans le plan de la roue.
- le signal reçu  $s(\theta)$  est de la forme suivante  $\frac{A}{R(\theta)^2} e^{-jkR(\theta)}$

Définissons les notations présentes sur la figure 3 :  $R(\theta)$  est la distance du point de la roue par rapport au radar au point P.  $R_0$  est la distance par rapport au centre de la roue et  $a$  est le rayon de la roue.  $\theta$  est l’angle formé par le rayon de la roue au point de départ et son point à un instant T donnée.

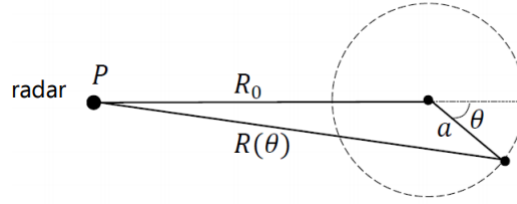


FIGURE 3 – Radar CW avec une ligne de vue dans le plan de la roue

L’expression de  $R(\theta)$  est donnée par l’équation suivante :

$$R(\theta) = \sqrt{R_o^2 + a^2 + 2aR_o \cos(\theta)} \quad (7)$$

Afin de faciliter les calculs, on pose  $\frac{a}{R_o} = m$

$$R(\theta) = R_o \sqrt{1 + m^2 + 2m \cos(\theta)}$$

En imposant l’hypothèse du champs lointain de telle manière qu’on puisse établir l’inégalité suivante  $R_o \gg a$  et donc  $m \approx 0$ . En effectuant le développement de Taylor de  $m$  autour de 0 pour l’ordre 1 :

$$R_T(\theta) = R(\theta)|_{m=0} + m \frac{\partial R(\theta)}{\partial m} \Big|_{m=0} \quad (8)$$

$$\text{où } \frac{\partial R}{\partial m} = R_o \frac{m + \cos(\theta)}{\sqrt{1 + m^2 + 2m \cos(\theta)}}$$

On obtient l’expression

$$\Rightarrow R_T(\theta) = R_o + R_o m \cos(\theta) = R_o + a \cos(\theta) \quad (9)$$

En reprenant l'expression du signal reçu  $s(\theta)$  et en y injectant  $R_T$  dedans, on trouve :

$$s(\theta) = \frac{A}{(R_o + a \cos(\theta))^2} e^{-jk(R_o + a \cos(\theta))} \quad (10)$$

Puisque nous sommes en hypothèse de champs lointain, le terme  $R_o$  domine le dénominateur et on peut séparer l'exponentielle en 2 parties l'une constante avec  $R_o$  et l'autre variant avec  $a \cos(\theta)$  On obtient donc l'expression :

$$\Rightarrow s(\theta) = \frac{A}{(R_o)^2} e^{-jk(R_o + a \cos(\theta))} = A' e^{-jk a \cos(\theta)} \quad (11)$$

Ce signal (11) peut être décomposé en série de Fourier complexe  $s_N(\theta)$  en identifiant l'équation (12) comme la fonction de Bessel pour simplifier la relation.

$$\int_0^{2\pi} e^{-j x \cos(\theta)} e^{-j n \theta} d\theta = 2\pi j^n J_n(x) \quad (12)$$

Il faut d'abord décomposer le signal (11) en sa partie réelle et imaginaire :

$$c_{Rn} = \frac{1}{P} \int_{x_0}^{x_0+P} \Re\{s(x)\} e^{-j \frac{2\pi n x}{P}} dx \quad c_{In} = \frac{1}{P} \int_{x_0}^{x_0+P} \Im\{s(x)\} e^{-j \frac{2\pi n x}{P}} dx \quad (13)$$

$$= \frac{A'}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-2jka \cos(\theta)} + e^{2jka \cos(\theta)}}{2} e^{-j n \theta} d\theta \quad = \frac{A'}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-2jka \cos(\theta)} - e^{2jka \cos(\theta)}}{2j} e^{-j n \theta} d\theta \quad (14)$$

$$= \frac{A'}{2} j^n (J_n(2ka) + J_n(-2ka)) \quad = \frac{A'}{2} j^{n-1} (J_n(2ka) - J_n(-2ka)) \quad (15)$$

$$\Rightarrow s_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_{Rn} \cdot e^{j \frac{2\pi n x}{P}} + j \cdot \sum_{n=-N}^N c_{In} \cdot e^{j \frac{2\pi n x}{P}} \quad (16)$$

$$= \sum_{n=-N}^N (c_{Rn} + j \cdot c_{In}) \cdot e^{j \frac{2\pi n x}{P}} \quad (17)$$

$$\Rightarrow s_N(\theta) = A' \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n J_n(2ka) \cdot e^{j n \theta} \quad (18)$$

En fréquentiel, le signal  $s_N(\theta)$  (18) est une somme infinie de delta symétriques par rapport à la fréquence centrale (ici 0) et dont la fréquence est multiple de  $\Omega$ .

$$S(\omega) = A' \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^n J_n(2ka) \cdot \delta(\omega - n\Omega) \quad (19)$$

On voit dans la formule ci-dessus (19) que l'amplitude de chaque delta dépend de la fonction de Bessel d'ordre  $n$  au point  $2ka$ . On peut donc déduire le rayon des roues à partir de n'importe laquelle de ces amplitudes. Cette méthode introduit une ambiguïté : il existe plusieurs rayons possibles pour lesquels la fonction de Bessel prendra la même valeur, néanmoins il existe deux manières de s'en débarrasser :

- On peut comparer les rayons pour des fonctions de Bessel d'ordre différents.
- On peut comparer les rayons obtenus par Bessel avec les rayon existants.

La largeur du spectre est approximée par la formule de Carson :

$$BW = 2(\Delta f_{max} + f_m) \quad (20)$$

$$BW = 2\left(\frac{2a\Omega}{\lambda} + \Omega\right) \quad (21)$$

$$\frac{2a}{\lambda} \gg 1 \Rightarrow BW = \frac{4a\Omega}{\lambda} = \frac{4v}{\lambda} \quad (22)$$

Nous ne pouvons pas en déterminer le rayon de la roue car la largeur de bande BW dépend donc uniquement de la vitesse du mobile. Pour une vitesse de 50 km/h, nous obtenons une largeur de bande d'environ 14.7 kHz et de 30 kHz pour 100 km/h.

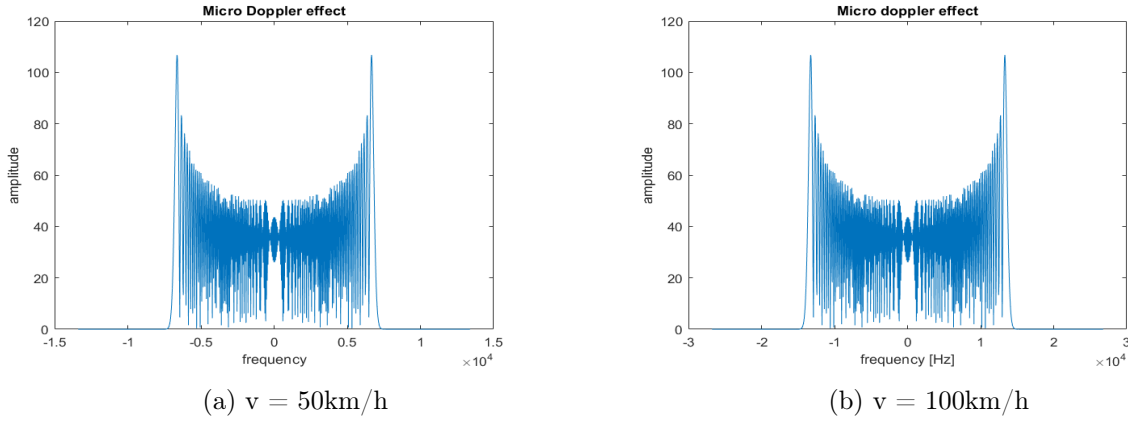


FIGURE 4 – Spectre micro-Doppler

Cet effet pourrait apparaître dans n'importe quel mouvement harmonique. En annexe dans la section 8.1 on aborde le cas d'un véhicule équipé d'un châssis et de 2 roues avec des jantes spéciales ou encore un piéton qui effectue un mouvement harmonique avec son bras.

Supposons maintenant que le radar et la roue ne soit plus aligné, on introduit donc un nouveau repère sur la figure 5.

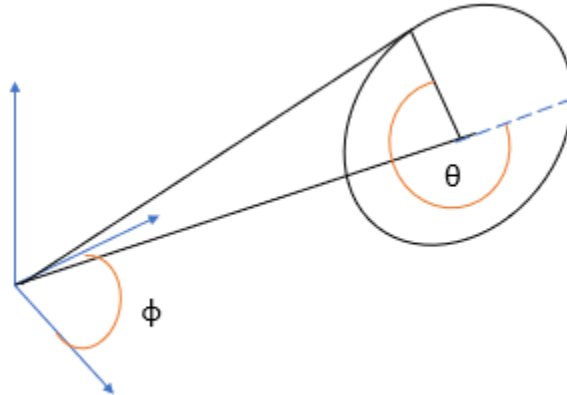


FIGURE 5 – Repère

Si on remplace le terme en  $R(\theta)$  par  $R(\theta, \phi)$  et en utilisant l'hypothèse du champ lointain, on

trouve

$$R(\phi, \theta) = \sqrt{R_o^2 + a^2 + 2aR_o \cos(\theta) \cos(\phi)}$$

$$s(\theta, \phi) = \frac{A'}{(R_o)^2} e^{-jk(R_o + a \cos(\theta) \cos(\phi))}$$

En suivant le même raisonnement que pour le radar aligné avec la roue, le signal peut s'écrire sous la forme

$$s_N(\theta, \phi) = A' \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n J_n(2ka) \cdot e^{jn\theta} \cdot \cos(\phi) \quad (23)$$

en supposant que  $\phi$  est une variable connue. Son spectre sera

$$S(\omega, \phi) = A' \cos(\phi) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^n J_n(2ka) \cos(\phi) \cdot \delta(\omega - n\Omega) \quad (24)$$

L'image suivante représente l'évolution du signal traité en fonction du temps : Le véhicule part du bas de l'image (proche du radar) et fini en haut (loin du radar). De plus, on peut remarquer que la largeur de bande du micro-Doppler s'atténue en s'éloignant du radar, ce qui est en concordance avec l'équation (24).

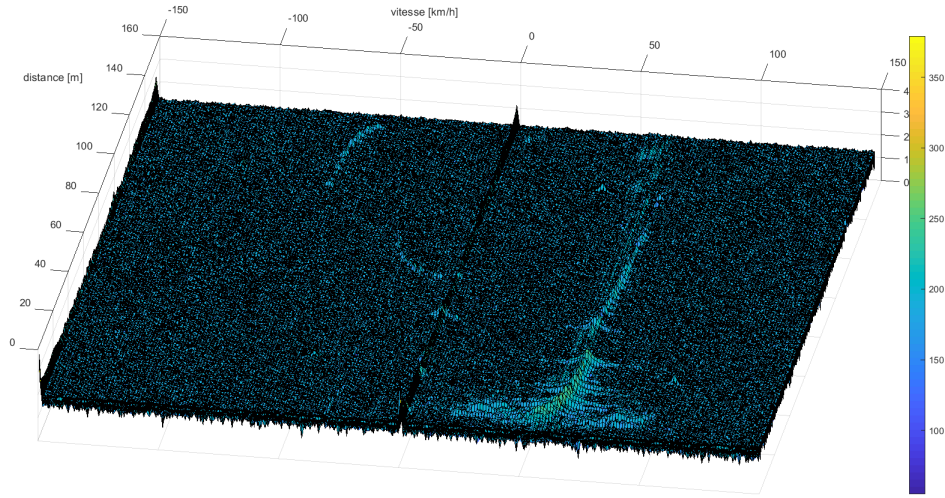


FIGURE 6 – Effet micro-Doppler

Il y a plusieurs cas particuliers observables( on ne considère que les cas où les cibles se trouvent sur le sol) :

- $\phi = 0$ , dans ce cas le radar est aligné avec la roue et nous nous retrouvons avec l'hypothèse de départ
- $\phi = 90$ , dans ce cas, le radar est perpendiculaire au plan de la roue et l'effet Micro-Doppler ne sera pas visible.



## 4 Détermination de la distance et de la vitesse

### 4.1 Modèle pour le signal émis/reçu

Pour localiser les cibles, il faut procéder au traitement mathématique des signaux reçus et en extraire les données voulues c'est-à-dire la distance et la vitesse. On s'intéresse donc au signal émis  $s(t; \theta)$  et reçu, altéré par son interaction avec la cible,  $r(t)$ .<sup>2</sup>

Au signal réfléchis par la cible s'additionne un bruit blanc gaussien additif  $N(t)$  :

$$r(t) = s(t; \theta) + N(t) \quad (25)$$

En l'occurrence, deux paramètres nous intéressent : la vitesse  $v$  de la cible et sa distance au radar  $d$ . La distance de la cible va créer un délai dans la réception du signal, tandis que sa vitesse va induire un effet Doppler. Si on combine les deux, le signal émis s'écrit :<sup>3</sup>

$$s(t; \theta) = s\left(\frac{t - \frac{2d}{c}}{1 + \frac{2v}{c}}\right) \quad (26)$$

Pour simplifier, on définit  $\alpha = \frac{2d}{c}$  et  $\beta = \frac{2v}{c}$ , correspondant respectivement au délai et au coefficient de décalage en fréquence dû à l'effet Doppler.

Dans notre cas,  $v \ll c \Rightarrow \beta \ll 1$ , on peut établir les approximations suivantes :

$$\frac{\alpha}{1 + \beta} \simeq \alpha \quad \frac{t}{1 + \beta} \simeq t(1 - \beta) \quad (27)$$

$$\Rightarrow s(t) \simeq s(t(1 - \beta) - \alpha) \quad (28)$$

Une étape supplémentaire de simplification peut être faite si on écrit le signal en fonction de son enveloppe complexe :

$$s(t) = \Re \left\{ e_s(t(1 - \beta) - \alpha) e^{j\omega_0(t(1 - \beta) - \alpha)} \right\} \quad (29)$$

Avec  $\Delta\omega$  la bande de  $e_r(t)$ , on peut négliger le terme  $\beta t$  de l'enveloppe sous l'hypothèse que :<sup>4</sup>

$$\beta T \ll \Delta\omega^{-1} \Leftrightarrow v \ll \frac{c}{2T\Delta\omega} \quad (30)$$

De cette manière, les informations pour la distance se retrouvent sur l'enveloppe et le Doppler sur la porteuse :

$$r(t) = \Re \left\{ e^{j\omega_0(t(1 - \beta) - \alpha)} e_s(t - \alpha) e^{-j\omega_0\alpha} \right\} + N(t) \quad (31)$$

Il nous faut donc maintenant trouver une expression analytique de l'enveloppe du signal émis. C'est un train d'impulsion chirp, il peut donc s'écrire comme la somme de plusieurs impulsions chirp à la suite, on se base donc sur l'équation (5) :

2.  $\theta$  représente un paramètre à estimer, son estimation est le sujet de la section 4.2.

3. Où  $c$  est la vitesse de la lumière.

4. Où  $T$  est la durée totale du signal.

$$s(t) = \sum_{p=0}^{P-1} s_0(t - pT_r) \quad (32)$$

$$\Rightarrow e_s(t) = \sum_{p=0}^{P-1} e^{j\left(\frac{\Delta\omega}{2}(t-pT_r) + \frac{\Delta\omega}{2T}(t-pT_r)^2\right)} e^{-j\omega_0 pT_r} \text{rect}_T(t - pT_r) \quad (33)$$

Ce signal, une fois échantillonné aux temps  $n_1 N_r T_s + n_2 T_s$  (où  $N_r$  est le nombre d'échantillon par chirp et  $T_s$  la période d'échantillonnage, on a donc  $n_1 = p$ ), prend la forme :

$$s[n] = s(n_1 N_r T_s + n_2 T_s) = A e^{-j\omega_0 \alpha} e^{-j\omega_0 \beta (n_1 N_r T_s + n_2 T_s)} e^{j\Delta\omega \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2T} - \frac{n_2 T_s \alpha}{T}\right)} \quad (34)$$

Il nous reste un dernier détail à régler pour finaliser notre modèle du signal reçu. Avant d'être traité, le signal  $r(t)$  passe dans un filtre passe-bas idéal à fréquence de coupure  $\frac{1}{2T_s}$  afin d'éviter un recouvrement spectral. Ensuite, il est échantillonné à la fréquence  $f_c$  (Figure 7).

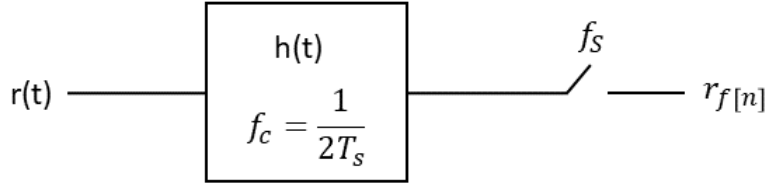


FIGURE 7 – Filtre passe bas + échantillonnage

Ce signal filtré s'écrit donc sous la forme suivante :

$$r_f[n] = s[n; \theta] + N_f[n] = s(nT_s; \theta) + N_f(nT_s) \quad (35)$$

Le bruit  $N(t)$  est un bruit blanc gaussien additif (c'est à dire modélisé par une fonction aléatoire à densité de probabilité centrée et gaussienne), centré (de moyenne nulle) et sa densité spectrale vaut  $N_0/2$ . En vertu des propriétés linéaires du filtre idéal, le bruit filtré  $N_f(t)$  ainsi que son échantillonnage restent des fonctions aléatoires centrée gaussienne, de variance  $\sigma_{r_f}^2 = 2N_0/T_s$  (voir annexes 8.3.1 et 8.3.2)

Une distribution gaussienne implique une série de propriétés qui nous seront utiles pour l'estimation du maximum de vraisemblance : les échantillons successifs sont décorrélés, de même que les composantes de Rice (voir annexe 8.3.3).

## 4.2 Estimation du maximum de vraisemblance

Nous avons maintenant un modèle pour  $r[n] = s[n; \theta] + N_f[n]$ . Notre but est de trouver  $\hat{\theta}$ , une estimation de  $\theta$ , tel que la probabilité d'observer le signal récolté est maximale, si on avait envoyé le signal  $s[n; \hat{\theta}]$ . Cette probabilité est appelé la "vraisemblance".

Les signaux  $r_f[n]$  sont décorrélés entre eux, donc nous pouvons dire qu'elles sont indépendantes puisque ce sont des valeurs aléatoires. Notons aussi que  $\sigma_{r_f[n]}^2$  est la variance complexe de  $r[n]$  qui peut se réécrire :

$$\sigma_{r_f}^2 = E[|r_f - s|^2] = E[r_{f,r} - s_r] + E[r_{f,i} - s_i] = \sigma_{r_{f,r}}^2 + \sigma_{r_{f,i}}^2 \quad (36)$$

La probabilité  $T_r(\mathbf{r}|\theta)$  d'observer un vecteur  $\mathbf{r}$  avec les paramètres  $\theta$  (ou encore, la probabilité jointe de chaque élément de  $\mathbf{r}$ ) vaut donc le produit des probabilité d'obtenir individuellement un élément complexe  $r_f[n]$ .

Par définition, une densité de probabilité gaussienne est de la forme :

$$T_r(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (37)$$

Où dans notre cas  $\mu = s[n; \theta]$  ;  $\sigma_{r_f}^2 = \frac{2N_0}{T_s}$  ;  $x = r_f[n]$

$$\Rightarrow T_r(\mathbf{r}|\theta) = \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma_{r_f}^2}} \exp\left(-\frac{|r_f[n] - s[n; \theta]|^2}{\sigma_{r_f}^2}\right) \quad (38)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma_{r_f}^2}}\right)^N \exp\left(-\sum_{n=1}^N \frac{|r_f[n] - s[n; \theta]|^2}{2\sigma_{r_f}^2}\right) \quad (39)$$

La densité de probabilité complexe  $T_r(\mathbf{r}|\theta)$  du vecteur  $\mathbf{r}$  peut être décomposée comme le produit de sa partie réelle par sa partie imaginaire où indice  $r$  et  $i$  correspondent respectivement à la partie réelle et imaginaire des signaux. En effet pour un signal à bande étroite pris en un moment donnée, ses composantes de Rice sont décorrélées. Comme  $N_f$  est gaussien, les composantes de Rice sont indépendantes l'une de l'autre, donc :

$$T_r(\mathbf{r}|\theta) = T_{r_{f,i}}(\mathbf{r}_{f,i}|\theta) \cdot T_{r_{f,r}}(\mathbf{r}_{f,r}|\theta) \quad (40)$$

L'estimation  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  au sens du maximum de vraisemblance est la valeur qui maximise  $T_r(r|\theta)$ ,  $\hat{\theta}$  est obtenu comme (voir annexe 8.4) :

$$= \operatorname{argmax}_{\theta} \left\{ \int_0^{NT_s} \Re\{r_f(t)s^*(t; \theta)\} dt \right\} \quad (41)$$

Cette corrélation peut s'interpréter comme la maximisation de la distance euclidienne afin de trouver  $re^{(j\hat{\theta})}$  telle que  $\Re(re^{j\hat{\theta}})$  soit le plus proche de  $\mathbf{r}$  que possible. A partir de (34) et (41), on peut écrire la corrélation comme suit :

$$C(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \left| \sum_{n_2=0}^{N_{2,max}-1} e^{j\hat{\alpha}\Delta\omega \frac{n_2 T_s}{T}} e^{jn_2 T_s \omega_0 \hat{\beta}} \times \sum_{n_1=0}^{N_{1,max}-1} e^{jn_1 T_r \omega_0 \hat{\beta}} r_e[n_1 T_r + n_2] \right|^2 \quad (42)$$

$$= \left| \sum_{n_2=0}^{N_{2,max}-1} e^{j\hat{\alpha}\Delta\omega \frac{n_2 T_s}{T} \left(1 + \frac{\omega_0 \hat{\beta}}{\hat{\alpha}\Delta\omega}\right)} \times \sum_{n_1=0}^{N_{1,max}-1} e^{jn_1 T_r \omega_0 \hat{\beta}} r_e[n_1 T_r + n_2] \right|^2 \quad (43)$$

Avec les hypothèses faites précédemment en (27) et (30), on peut négliger le terme  $\frac{\omega_0 \hat{\beta}}{\hat{\alpha} \Delta \omega}$  :

$$C(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \left| \sum_{n_2=0}^{N_{2,max}-1} e^{j\hat{\alpha}\Delta\omega\frac{n_2 T_s}{T}} \times \sum_{n_1=0}^{N_{1,max}-1} e^{jn_1 T_r \omega_0 \hat{\beta}} r_e[n_1 T_r + n_2] \right|^2 \quad (44)$$

### 4.3 Résolution et ambiguïté

#### 4.3.1 Résolution de la corrélation en 2D

De l'équation de corrélation (44), nous identifions les termes :

$$\Omega_{\hat{\alpha}} = \Delta\omega \frac{T_s}{T} \hat{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{N_{2,Max}} \hat{\alpha} \quad \Omega_{\hat{\beta}} = N_r T_s \omega_0 \hat{\beta} = T_r \omega_0 \hat{\beta} \quad (45)$$

On a donc :

$$C(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \left| \sum_{n_2=0}^{N_{2,max}-1} e^{j\Omega_{\hat{\alpha}} n_2} \times \sum_{n_1=0}^{N_{1,max}-1} e^{j\Omega_{\hat{\beta}} n_1} r_e[n_1 T_r + n_2] \right|^2 \quad (46)$$

Cette expression est celle d'une transformée de Fourier discrète (DFT) en deux dimensions, le long de  $\Omega_{\hat{\alpha}}$  et  $\Omega_{\hat{\beta}}$ . On a donc une manière simple de calculer notre fonction de corrélation en utilisant les algorithmes de FFT.

L'image suivante est la représentation de données après traitement par la formule précédente. On y observe deux maxima (représentant des cibles) : L'un se trouvant à 20 mètres tandis que l'autre se trouve à 40 mètres, les deux se déplaçant à 40 km/h. Les axes ont été remis à l'échelle en utilisant les résolutions de distance et vitesse calculées à la section 4.3.2 et 4.3.3.

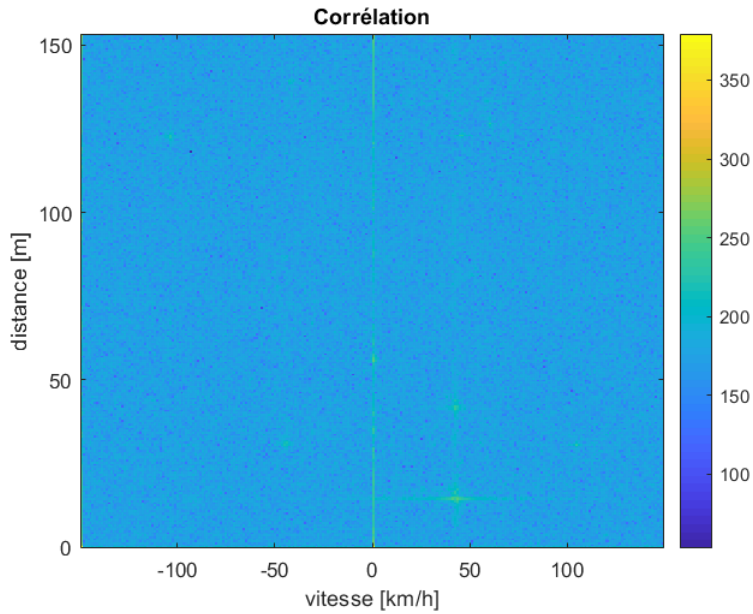


FIGURE 8 – Exemple Corrélation vitesse-distance

### 4.3.2 Ambiguïté sur la distance

On impose  $0 < \Omega_{\hat{\alpha}} < 2\pi$ , car ce terme est l'argument d'une exponentielle complexe. De plus, une distance nulle induisant un décalage temporel nul, donc  $\Omega_{\hat{\alpha}} = 0$ , il est naturel de prendre cet intervalle.<sup>5</sup>

$$0 < \Omega_{\hat{\alpha}} < 2\pi \quad (47)$$

$$0 < \hat{\alpha} < \frac{2\pi N_{2,Max}}{\Delta w} \quad (48)$$

or  $\frac{2\pi}{\Delta w} = \frac{1}{BW}$ , et  $\hat{\alpha} = \frac{2\hat{d}}{c}$ , donc :

$$\frac{2\hat{d}}{c} < \frac{N_{2,max}}{BW} \quad (49)$$

$$\hat{d} < \frac{cN_{2,max}}{2BW} \quad (50)$$

Pour trouver la résolution  $\Delta d$ , il faut diviser la distance par le nombre d'échantillons pris par chirp  $\Delta d = \frac{d_{max}}{N_{2,max}}$ . La résolution de la distance correspond à la capacité de distinguer 2 cibles à partir du signal reçu. Si  $\Delta d$  est inférieur à  $\hat{d}$ , alors l'algorithme (46) confondra 2 cibles.

On peut remarquer que pour augmenter la distance limite de détection (avec le même radar, donc à bande passante, fréquence porteuse et fréquence d'échantillonnage constante), il nous faudrait augmenter  $N_{2,max}$ , c'est à dire le nombre de point par rampe. À fréquence d'échantillonnage constante, cela signifie allonger  $T_r$ , le temps d'émission d'une impulsion chirp. Comme on le verra à la section suivante 4.3.3, cela posera un dilemme entre augmenter la distance maximale mesurable, et la vitesse maximale mesurable.

### 4.3.3 Ambiguïté sur la vitesse

Ce terme se trouvant dans une exponentielle complexe, on impose que  $\Omega_{\hat{\beta}}$  varie de  $-\pi$  à  $\pi$  pour éviter toute ambiguïté et prendre les vitesses positives et négatives en compte.

$$-\pi < \Omega_{\hat{\beta}} < \pi \quad (51)$$

$$|\hat{\beta}| < \frac{\pi}{N_r T_s w_0} \quad (52)$$

$$|\hat{\beta}| < \frac{\pi}{T_r w_0} \quad (53)$$

or  $\beta = \frac{2v}{c}$  et  $w_0 = 2\pi f_0$  où est la fréquence de la porteuse émise par le radar .

$$\hat{v} < \frac{c}{4f_0 T_r} \quad (54)$$

La résolution de la vitesse  $\Delta v$  se calcule en divisant la vitesse maximale mesurable par le nombre de chirp  $N_{2,max}$ . Elle correspond à la capacité de distinguer 2 cibles à des vitesses différentes à partir du signal reçu. Si  $\Delta v$  est inférieur à  $\hat{v}$ , alors l'algorithme (46) ne détectera qu'une cible.

$$\Delta v = \frac{v_{max}}{N_{1,max}}$$

---

5. BW représente la bande passante.

On peut remarquer, comme dis à la section précédente 4.3.2, que pour augmenter la vitesse maximale mesurable, il faut cette fois diminuer  $T_r$ .

## 5 Détermination des angles

La cibles observée par le radar ne se trouve pas en face du radar. L'angle de la cible doit être tenu en compte pour trouver l'emplacement de la cible. Dans nos calculs, nous définissons l'angle azimutal  $\phi$  et d'élévation  $\theta$  dans le système de coordonnées défini par la figure 9.

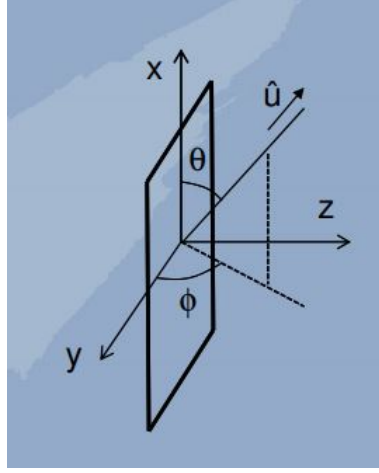


FIGURE 9 – Système de coordonnées

### 5.1 Développement théorique

Nous travaillons avec l'hypothèse du champs lointain : le front d'onde reçu par le signal est considéré comme plane, car la cible se trouve un distance  $d$  très grand par rapport à  $\lambda$ .

Nous travaillons avec la corrélation (voir équation 55) où

- $\hat{u}$  est la direction de la cible par rapport à une origine défini.
- $A$  est l'aire de la cible où le signal a été réfléchi.
- $F(\hat{u})$  l'intensité du signal reçu qui varie selon la direction  $\hat{u}$ .
- $r_f(m)$  est le signal capté par l'antenne  $m$ .
- $\vec{r}_m$  est la distance de l'antenne  $m$  par rapport à une origine définie commune à toutes les antennes.
- $k = \frac{2\pi * f}{c}$  est le nombre d'onde et  $c$  la vitesse de la lumière.

$$C(\hat{u}) = \sum_m |r_f(m) - AF(\hat{u})e^{jk\hat{u}\cdot\vec{r}_m}|^2 \quad (55)$$

$$= \sum_m \{|r_f(m)|^2 + |A|^2|F(\hat{u})|^2 - 2\Re\{r_f(m)A^*F^*(\hat{u})e^{jk\hat{u}\cdot\vec{r}_m}\}\} \quad (56)$$

Physiquement cette équation de corrélation correspond à la minimisation de la distance euclidienne du signal  $r_f$  reçu et le signal "idéal"  $AF(\hat{u})e^{jk\hat{u}\cdot\vec{r}_m}$ . Cependant dans cette relation développée (voir

équation 56), les valeurs  $A$  et  $F(\hat{u})$  ne sont pas connues lors de la réception et minimiser les données complexes  $r_f$  captés par le radar n'amène aucun résultat intéressant. Dés lors, il ne reste plus que

$$C(\hat{u}) = \sum_m -2\Re\{r_f(m)A^*F^*(\hat{u})e^{jk\hat{u} \cdot \vec{r}_m}\} \quad (57)$$

Dans l'équation 57 les termes  $A^*F^*$  sont indéterminées, il reste cependant possible de minimiser  $\sum_m -\Re\{r_f(m)e^{jk\hat{u} \cdot \vec{r}_m}\}$  ou encore maximiser  $\sum_m \Re\{r_f(m)\hat{u}\}e^{jk\hat{u} \cdot \vec{r}_m}\}$

La relation à maximiser est donc l'équation 58

$$\max_{\hat{u}} \sum_m \Re\{r_f(m)e^{-jk\hat{u} \cdot \vec{r}_m}\} \quad (58)$$

## 5.2 En pratique

En reprenant l'équation 58, et en l'appliquant au radar K-MD2, nous devons maximiser l'équation suivante

$$\max_{\hat{u}} \sum_{m=1}^3 r_f(m)e^{-jk\hat{u} \cdot \vec{r}_m} = \max_{\hat{u}} \{r_f(1)e^{-jk\hat{u} \cdot \vec{r}_1} + r_f(2)e^{-jk\hat{u} \cdot \vec{r}_2} + r_f(3)e^{-jk\hat{u} \cdot \vec{r}_3}\} \quad (59)$$

En décomposant le produit scalaire  $k\hat{u} \cdot r_m$  selon les axes cartésiennes, on obtient  $ku_x r_x(m) + ku_y r_y(m)$ , où  $u_x$  et  $u_y$  représentent respectivement la projection orthogonale de  $\hat{u}$  sur les axes x et y.

Après avoir traité les données à l'aide de la formule 8, on identifie le signal reçu par chaque antenne. Cela se fait en deux étapes. D'abord on considère que le signal potentiel reçu par chaque antenne est la valeur de la corrélation maximale obtenue. Cependant, cette valeur correspond à une vitesse et une position qui peuvent différer en fonction de l'antenne. On décide donc de comparer les signaux ainsi obtenus de chaque antennes et de trouver celui dont l'amplitude est la plus grande ainsi que la vitesse et la position qui y correspondent. La deuxième étape est de récupérer pour chaque antenne le signal correspondant à la vitesse et à la position précédemment obtenues.

Enfin, on applique la relation de corrélation (59). On effectue donc une transformée de Fourier sur  $A^6$ , ce qui revient en effet à tester différentes valeurs de  $\hat{u}$  afin de maximiser la relation. Cette action est effectuée plusieurs fois sur chacune des antennes à chaque pas de temps. Le résultat de la corrélation pour des données exemple est affichée à la figure 10 .

$$u_x = \cos(\phi)\cos(\theta) \quad (60)$$

$$u_y = \sin(\theta)\cos(\phi) \quad (61)$$

Nous disposons de deux moyens pour trouver les directions  $u_x$  et  $u_y$  décrits ci-dessous

### 5.2.1 Méthode 1

La première méthode consiste à injecter "toutes" les valeurs possibles de  $u_x$  et  $u_y$  c'est-à-dire de -1 à 1 dans l'équation 58 et à observer les maximums trouvés. Pour choisir quel signal  $r_{fm}$  à utiliser dans la relation, nous reprenons les signaux se trouvant au même instant que le signal max trouvé lors de la détermination de la distance et la vitesse.

Cependant cette opération est très lente et, dû à la géométrie des antennes, des ambiguïtés apparaissent. Cette notion d'ambiguïté est expliquée dans la section 5.3.

---

6. Voir section 5.2.2 Méthode 2

### 5.2.2 Méthode 2

La seconde méthode possible consiste à utiliser la transformée de Fourier. En appliquant celle-ci dans l'équation 58, l'équation devient

$$\max_{\hat{u}} \sum_{m=1}^3 r_f(m) \delta(w - k\hat{u} \cdot \vec{r}_m) \quad (62)$$

Il ne reste plus qu'à voir où les valeurs sont maximales. Cette opération est plus rapide puisque qu'on utilise les transformés de Fourier. Les ambiguïtés restent par contre présentes. Il faut aller à la section 5.3 pour comprendre ce phénomène. Voici ci-dessous la fonction de corrélation lors d'une situation réelle dans le cadre de notre laboratoire( figure 10).

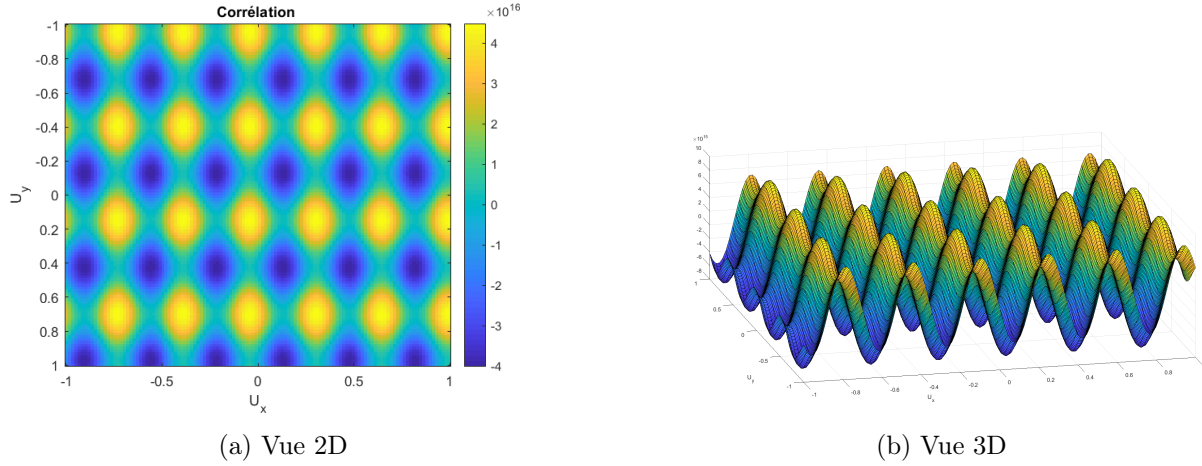


FIGURE 10 – Différente vue de la corrélation

### 5.3 Source d'incertitudes

On sait que le signal reçu par chaque antenne est le signal reçu par une autre antenne déphasé par facteur  $e^{j\Delta\phi_m}$ . Ce déphasage est dû à la différence de distance entre l'émetteur et le récepteur pour les deux antennes. On peut donc écrire :

$$\Delta\phi_m = \Delta dk \quad (63)$$

$$(64)$$

où  $\Delta\phi_m$  est le déphasage entre deux antennes,  $\Delta d$  est la différence entre la distance parcourue par l'onde pour atteindre une antenne et l'autre et  $k$  est la vitesse de phase. On sait qu'une phase est définie à  $2\pi$  près :

$$\Delta\phi_m + 2\pi n = \Delta d'k \quad (65)$$

$$\Delta\phi_m = \Delta d'k - 2\pi n \quad (66)$$

$$\Delta\phi_m = (\Delta d' - \lambda n)k \quad (67)$$

En d'autres mots la différence de distance n'est définie qu'à un nombre entier de longueurs d'onde près. Cette différence de distance permet de déterminer l'angle  $\phi$  (Le raisonnement est effectué pour



$\phi$  mais est aussi valable pour  $\theta$ , les seules différences étant le nom des variables et les constantes, comme la distance entre les antennes) selon la formule :

$$\Delta d - \lambda n = d_{antenne} \cos(\phi) \quad (68)$$

$$\frac{\Delta d}{d_{antenne}} - \frac{\lambda n}{d_{antenne}} = \cos(\phi) \quad (69)$$

où  $d_{antenne}$  est la distance entre deux antennes et  $\phi$  est l'angle entre la normale aux antennes et la direction de propagation de l'onde. Cette formule met en évidence l'ambiguïté de  $\phi$  puisque l'on voit qu'elle dépend d'un paramètre  $n$ . Dédouons donc les valeurs que ce paramètre peut prendre. On sait qu'un cosinus est toujours compris entre -1 et 1 :

$$\frac{\Delta d}{d_{antenne}} - \frac{\lambda n_{\min}}{d_{antenne}} = \pm 1 \quad (70)$$

$$n_{\min} = (\mp 1 + \frac{\Delta d}{d_{antenne}}) \frac{d_{antenne}}{\lambda} \quad (71)$$

$$n_{\min} = \text{ceil}(\frac{\Delta d - d_{antenne}}{\lambda}) \quad (72)$$

$$n_{\max} = \text{floor}(\frac{\Delta d + d_{antenne}}{\lambda}) \quad (73)$$

On peut en déduire les cas dans lesquels il n'y a pas d'ambiguïté. C'est-à-dire les cas pour lesquels  $n_{\min} = n_{\max} = 0$ .

$$-\frac{d_{antenne}}{\lambda} + \frac{\Delta d_{non-ambigu}}{\lambda} > -1 \quad (74)$$

$$\Delta d_{non-ambigu} > -\lambda + d_{antenne} \quad (75)$$

et

$$\frac{d_{antenne}}{\lambda} + \frac{\Delta d_{non-ambigu}}{\lambda} < 1 \quad (76)$$

$$\Delta d_{non-ambigu} < \lambda - d_{antenne} \quad (77)$$

$$\Rightarrow \lambda - d_{antenne} > \Delta d_{non-ambigu} > -(\lambda - d_{antenne}) \quad (78)$$

$$|\Delta d_{non-ambigu}| < \lambda - d_{antenne} \quad (79)$$

Il faut donc réduire la distance entre les antennes pour augmenter la région de non-ambiguïté. Sachant que  $\Delta d$  est toujours compris entre  $-d_{antenne}$  et  $d_{antenne}$ , la limite est :

$$\lambda - d_{antenne} > d_{antenne} \quad (80)$$

$$d_{antenne} < \frac{\lambda}{2} \quad (81)$$

Si cette condition est respectée, il n'existera aucune ambiguïté dans aucune direction. Nous pouvons aussi en déduire les valeurs de  $\phi$  correspondantes :

$$\frac{\Delta d_{non-ambigu}}{d_{antenne}} - \frac{\lambda n}{d_{antenne}} = \sin(90 - \phi_{non-ambigu}) \quad (82)$$

$$\frac{\Delta d_{non-ambigu}}{d_{antenne}} = \sin(90 - \phi_{non-ambigu}) \quad (83)$$

$$90 - \phi_{non-ambigu} = \text{asin}\left(\frac{\Delta d_{non-ambigu}}{d_{antenne}}\right) \quad (84)$$

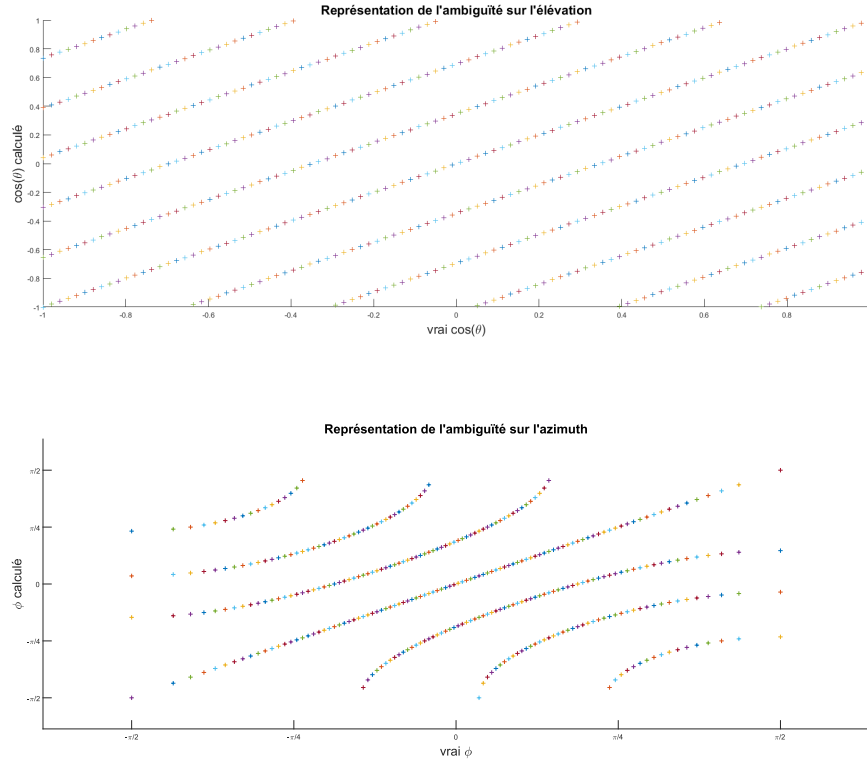
$$|90 - \phi_{non-ambigu}| < \text{asin}\left(\frac{\lambda - d_{antenne}}{d_{antenne}}\right) \quad (85)$$

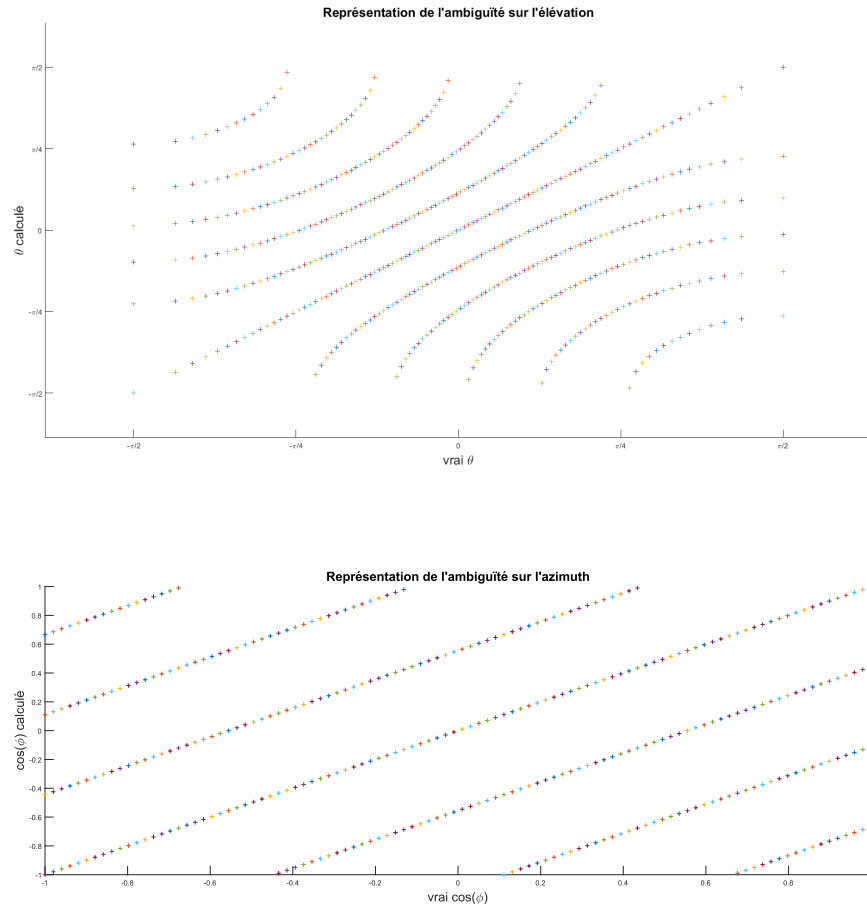
$$|90 - \phi_{non-ambigu}| < \text{asin}\left(\frac{\lambda}{d_{antenne}} - 1\right) \quad (86)$$

On peut d'ailleurs inverser l'équation 86 pour obtenir une version affinée de l'équation 81 :

$$d_{antenne} = \frac{\lambda}{|\cos(\phi_{non-ambigu})| + 1} \quad (87)$$

Dans certaines conditions, l'ambiguïté peut être levée (cfr Annexe 8.5). Les quatre images suivantes sont des représentations des ambiguïtés sur l'élévation et l'azimut pour notre antenne. L'axe des abscisses représente le vrai angle/le cosinus du vrai angle et les valeurs en ordonnées représentent les différentes valeurs qui peuvent être obtenues avec les formules précédentes.

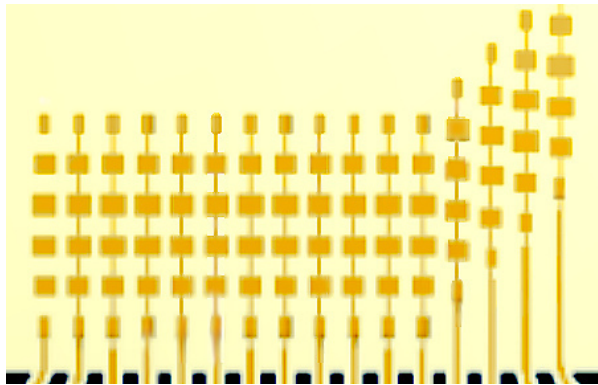




## 6 Défi

Pour vérifier l'exactitude de nos implémentations, un autre radar présentant des caractéristiques différentes nous a été fourni. notamment une fréquence (nominale différente) de 77 GHz avec une bande-passante a été fourni Celui-ci présente les caractéristiques suivantes :

- C'est un radar 77 GHz.
- Celui-ci a 16 antennes dont la disposition spatiale est donnée à la figure 11.
- Il émet des rampes allant de 76-79 Ghz.
- Le temps d'une rampe  $T_r$  est de  $400 \mu s$ .
- Les données reçues sont données sous la forme d'une matrice  $200 \times 128 \times 16$ , où 200 est le nombre de rampes, 128 le nombre d'échantillons pris par rampe et 16 le nombre d'antennes différentes.



Antenne	Position en $x$	Position en $y$
RX1	0.00	0.00
RX2	1.95	0.00
RX3	3.90	0.00
RX4	5.85	0.00
RX5	7.80	0.00
RX6	9.75	0.00
RX7	11.70	0.00
RX8	13.65	0.00
RX9	15.60	0.00
RX10	17.55	0.00
RX11	19.50	0.00
RX12	21.45	0.00
RX13	23.40	1.95
RX14	25.35	3.90
RX15	27.30	5.85
RX16	29.25	7.80

FIGURE 11 – Position des antennes

## 6.1 Développement théorique

Nous utilisons les mêmes principes que ceux utilisés à la section 4 et 5.3 dont le code se trouve à l'annexe 8.6

## 6.2 En pratique

## 6.3 Comparaison des caractéristiques des radars

Sur la table 1, nous pouvons observer les différentes caractéristiques des radars et 77 GHz.

radar	24 GHz	77 GHz
$v_{max}$ km/h	150	8.71
$d_{max}$ [m]	153.6	6.4
$\Delta v$ [m/s]	0.33	0.012
$\Delta d$ [m]	0.6	0.05
$nombre_{ambiguïté_{max}}$	5	0

TABLE 1 – Comparaison des caractéristiques

La fréquence du deuxième radar est trois fois plus grande que celle du premier tandis que la distance inter-antennes est entre 10 et 20 fois plus petite (en fonction de la paire d'antenne pour le premier radar) ce qui a pour effet, comme expliqué dans la section 5.3, de grandement réduire les ambiguïtés. On observe d'ailleurs sur la figure 12 qu'un seul point correspondant à une direction de la cible. Cependant l'équation 86 nous indique qu'il existe une ambiguïté si la cible se trouve à un angle supérieur à  $86,38^\circ$  par rapport à la normale.

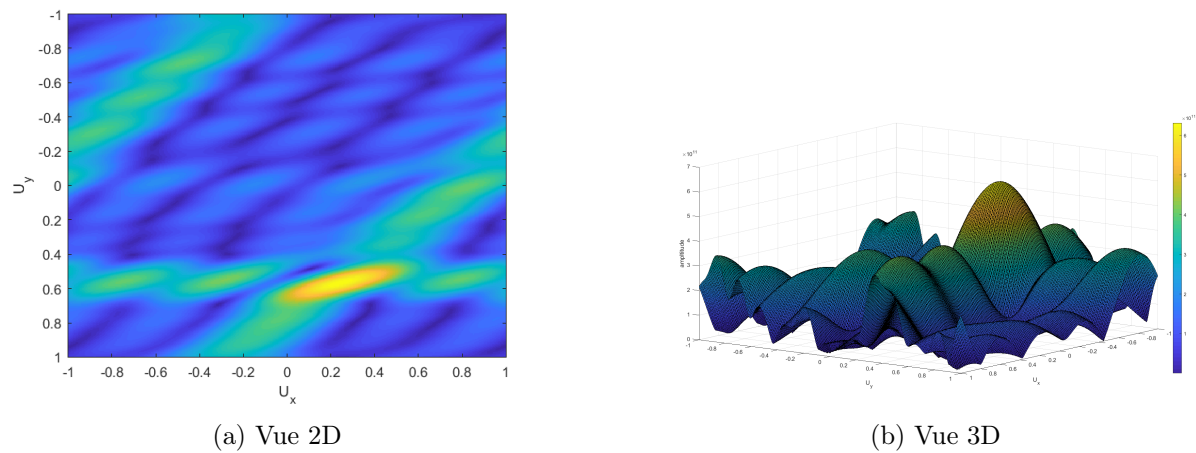


FIGURE 12 – Corrélation sur les angles

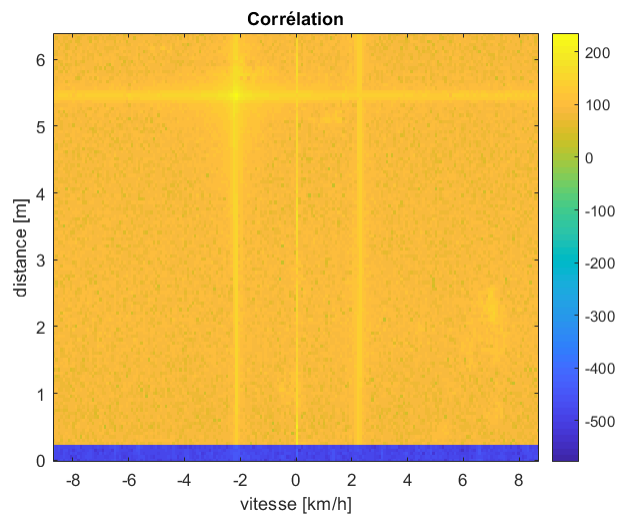


FIGURE 13 – Corrélation vitesse-distance

## 7 Conclusion

Nous avons développé un algorithme permettant d'obtenir toutes les données nécessaire pour déterminer la position d'une ou plusieurs cibles dans l'espace, ainsi que leur vitesse. Un des concepts importants auquel nous avons été familiarisés est le parallélisme entre les transformées de Fourier et de la maximisation de la fonction de corrélation. Notre système et le modèle que nous avons construits imposent cependant certaines limites : les ambiguïtés apparaissant au niveau des angles d'élévation/d'azimuth et le problème de résolution rentre aussi en jeu. Nous avons ensuite pu pousser plus loin l'étude, notamment avec l'approfondissement du phénomène de micro-Doppler et d'analyser son spectre en fonction du type de jantes, de voitures.

Nous avons également pu comparer deux radars émettant à deux fréquences de base différentes, nous donnant l'occasion de comparer leurs capacités et tester plus en profondeur la validité de notre modèle (ambiguïtés, distances et vitesses maximales). Un des gros points d'amélioration envisageables serait de pouvoir distinguer plusieurs cibles en même temps, notre algorithme tel qu'il est conçu suppose qu'il n'y a qu'une seule cible.

## 8 Annexes

### 8.1 Spectre d'un véhicule avec prise en compte du type de jantes



FIGURE 14 – Roue avec différentes formes de jantes

On estime l'effet que les jantes d'une roue peuvent avoir sur le micro-Doppler. En commençant par une roue avec une branche en tant que jante jusqu'à 3 branches comme représenté sur la figure 14.

$$\begin{aligned} S_{1\text{branche}}(\omega) &= A' \int_0^a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^n J_n(2ka') \cdot \delta(\omega - n\Omega) da' \\ &= A' \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^n \int_0^a J_n(2ka') da' \cdot \delta(\omega - n\Omega) \end{aligned}$$

Considérons une autre branche se trouvant à un angle  $\theta' = \theta + \phi$ . Son signal est de la forme :

$$\begin{aligned} s_N(\theta') &= A' \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n J_n(2ka) \cdot e^{jn\theta'} \\ &= A' \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n J_n(2ka) \cdot e^{jn(\Omega t + \phi)} \end{aligned}$$

Autrement dit, il est juste déphasé par rapport au premier.

$$s_N(\theta') = A' \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n \int_0^a J_n(2ka') da' \cdot e^{jn\Omega t} \cdot e^{jn\phi}$$

$$\begin{aligned} s_N(\theta') &= A' \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n \int_0^a J_n(2ka') da' \cdot e^{jn\Omega t} \quad \phi = 90 \\ &= A' \cdot \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{2n} \int_0^a J_{2n}(2ka') da' \cdot e^{j2n\Omega t} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{(2n+1)} \int_0^a J_{2n+1}(2ka') da' \cdot e^{j(2n+1)\Omega t} \right] \end{aligned}$$

L'effet que produira l'ajout d'une autre branche déphasée de  $90^\circ$  est donc d'annuler tous les termes pour  $n$  impair et de les doubler pour  $n$  pair.

$$\begin{aligned} s_N(\theta) + s_N(\theta') &= 2A' \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{2n} \int_0^a J_{2n}(2ka') da' \cdot e^{j2n\Omega t} \\ S_{2\text{branche}}(\omega) &= S_{N,\theta}(\omega) + S_{N,\theta'}(\omega) = 2A' \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{2n} \int_0^a J_{2n}(2ka') da' \cdot \delta(\omega - 2n\Omega) \end{aligned}$$

Finalement, si la roue a trois branches, son spectre sera de la forme :

$$\begin{aligned}
 s_{3branches}(\theta) &= A' \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n \int_0^a J_n(2ka') da' \cdot e^{jn\Omega t} \cdot e^{jn0} \\
 &+ A' \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n \int_0^a J_n(2ka') da' \cdot e^{jn\Omega t} \cdot e^{jn\frac{2\pi}{3}} \\
 &+ A' \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n \int_0^a J_n(2ka') da' \cdot e^{jn\Omega t} \cdot e^{jn\frac{4\pi}{3}} \\
 s_{3branches}(\theta) &= A' \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(1)^n + (e^{jn\frac{2\pi}{3}})^n + (e^{jn\frac{4\pi}{3}})^n] j^n \int_0^a J_n(2ka') da' \cdot e^{jn\Omega t}
 \end{aligned}$$

On remarque que  $(e^{jn\frac{2\pi}{3}})^n + (e^{jn\frac{4\pi}{3}})^n$  est un terme constant puisque  $(e^{jn\frac{2\pi}{3}})^2 = (e^{jn\frac{4\pi}{3}})$  et  $(e^{jn\frac{4\pi}{3}})^2 = (e^{jn\frac{2\pi}{3}})$ . l'équation se simplifie donc :

$$\begin{aligned}
 s_{3branches}(\theta) &= A' \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} [1 + e^{jn\frac{2\pi}{3}} + e^{jn\frac{4\pi}{3}}] j^n \int_0^a J_n(2ka') da' \cdot e^{jn\Omega t} \\
 &+ A' \cdot [1 + 1 + 1] j^0 \int_0^a J_0(2ka') da' \cdot e^{j0\Omega t} \\
 &= A' \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} [1 + (-0.5 + i0.866) + (-0.5 - i0.866)] j^n \int_0^a J_n(2ka') da' \cdot e^{jn\Omega t} \\
 &+ 3A' \cdot \int_0^a J_0(2ka') da' \\
 &= A' \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} [0] j^n \int_0^a J_n(2ka') da' \cdot e^{jn\Omega t} + 3A' \cdot \int_0^a J_0(2ka') da' \\
 &= 0 + 3A' \cdot \int_0^a J_0(2ka') da' \\
 S_{3branches}(\omega) &= 3A' \cdot \int_0^a J_0(2ka') da' \delta(\omega)
 \end{aligned}$$

Si la roue se déplace (à la même vitesse que le châssis), l'effet Doppler propre au déplacement vient se rajouter dans l'argument du delta :

$$\begin{aligned}
 S_{1branche}(\omega) &= A' \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^n \int_0^a J_n(2ka') da' \cdot \delta(\omega - \omega_{chassis} - n\Omega) \\
 S_{2branche}(\omega) &= 2A' \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{2n} \int_0^a J_{2n}(2ka') da' \cdot \delta(\omega - \omega_{chassis} - 2n\Omega) \\
 S_{3branches}(\omega) &= 3A' \cdot \int_0^a J_0(2ka') da' \delta(\omega - \omega_{chassis})
 \end{aligned}$$

Deux roues à des distances différentes, sous l'hypothèse de champ lointain, produiront un spectre identique. La seule différence pouvant apparaître étant le facteur  $e^{jn\phi}$ . En supposant que les branches des roues soient parallèles, on obtiens

$$S_{2Roues}(\omega) = 2S_{1Roue}(\omega)$$



Finalement pour tenir compte du châssis, il suffit de rajouter un delta. (L'expression complète serait une intégrale sur tout le châssis de deltas, chacun déphasé, comme les roues, mais, comme le spectre du châssis ne varie pas en fonction du temps, tous ces deltas se superposent :

$$S_{Observ} = 2S_{1Roue}(\omega) + \delta(\omega - \omega_{chassis})$$

## 8.2 Mouvement harmonique du bras

Le mouvement harmonique du bras peut être modélisé de façon simplifiée :

$$R(\theta) = A \cdot \cos(\Omega t) + R_0$$

Le signal  $S(\theta)$  est le même mais  $\Omega$  n'est pas constant. De plus, dans ce cas ci il n'y a plus d'approximation de Taylor du premier ordre. Il est donc possible d'établir le spectre micro-Doppler d'un piéton marchant.

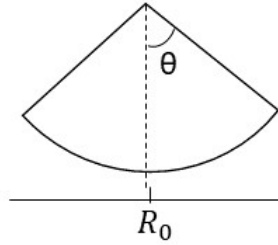


FIGURE 15 – Schéma-bras

## 8.3 Propriété signal

### 8.3.1 Moyenne du bruit filtré

On peut modéliser un signal BBGA comme une fonction aléatoire dont la densité de probabilité est une gaussienne centrée :

$$T_{X_{BBGA}(t)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

On sait qu'appliquer une opération linéaire sur une fonction aléatoire gaussienne ne change pas sa nature gaussienne. La transformée de Fourier et le filtrage idéal étant des opérations linéaires,  $T_{N_f(t)}$  reste une fonction aléatoire à densité de probabilité gaussienne.

La linéarité de ces opérations implique également que cette distribution restera centrée, en effet :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[N_f(\omega)] &= \mathbb{E}[|H(\omega)|N(\omega)] \\
 &= \mathbb{E}\left[|H(\omega)| \int_{-\infty}^{+\infty} N(t)e^{-j\omega t} dt\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[|H(\omega)| \int_{-\infty}^{+\infty} N(t)e^{-j\omega t} dt\right] \\
 &= |H(\omega)| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[N(t)]e^{-j\omega t} dt = 0 \quad \text{Puisque } \mathbb{E}[N(t)] = 0
 \end{aligned}$$

### 8.3.2 Variance du bruit filtré

Afin de le caractériser, nous avons besoin de la variance du bruit filtré  $\sigma_{r_f}^2$ . On sait que la densité spectrale bilatérale du bruit vaut  $\gamma_N = N_0/2$ , donc :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r_f}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{X_a}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-f_s/2}^{f_s/2} \gamma_{X_a}(\omega) d\omega \\
 &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{f_s/2} \gamma_{X_a}(\omega) d\omega \\
 &= \frac{2 \times 2\pi}{2\pi} \int_0^{f_s/2} 4\gamma_X(f) df \\
 &= 8\left(\frac{N_0}{4T_s} - 0\right) = \frac{2N_0}{T_s}
 \end{aligned}$$

### 8.3.3 Caractère décorrélé

Pour prouver que  $r_f[n]$  est décorrélé de  $r_f[n']$ , il faut que leur covariance soit nulle soit :

$$E[r_f(n) \cdot r_f(n')] = 0$$

Or  $r_f(n) = N_f[n] + s[n; \theta]$ . Puisque  $s[n; \theta]$  n'est pas une fonction aléatoire, sa variance est nulle. La moyenne de  $r_f[n]$  vaut alors  $[n; \theta]$  puisque  $N[n]$  est centré. Lors de l'échantillonnage,  $N_f[n]$  passe par un filtre passe-bas de fonction rectangulaire. En fréquentiel, cela revient à multiplier par un sinus cardinal.

$$\begin{aligned}
 N_f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{-1}{2T_s}}^{\frac{1}{2T_s}} e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{\sin(\frac{\pi t}{T_s})}{\pi t} \\
 \Rightarrow N_f[nT_s] &= \frac{\sin(\pi n)}{\pi n T_s} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}) \\
 N_f[nT_s] &= 0
 \end{aligned}$$

On observe que pour des valeurs de n entiers,  $N_f[n]$  est nulle.

$$E[N_f[n] \cdot N_f[n']] = 0$$

La covariance est nulle, ce qui prouve que  $r_f[n]$  et  $r_f[n']$  sont décorrélés.

## 8.4 Établissement de la corrélation

En repartant de : (36) et (39) :

$$\begin{aligned}
 T_r(\mathbf{r}_f|\theta) &= T_{r_{f,i}}(\mathbf{r}_{f,i}|\theta) \cdot T_{r_{f,r}}(\mathbf{r}_{f,r}|\theta) \\
 &= \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{r_{f,i}}} \exp\left(-\sum_{n=1}^N \frac{((r_{f,i}[n] - s_i[n;\theta]))^2}{2\sigma_{r_{f,i}}^2}\right) \\
 &\quad \cdot \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{r_{f,r}}} \exp\left(-\sum_{n=1}^N \frac{(r_{f,r}[n] - s_r[n;\theta])^2}{2\sigma_{r_{f,r}}^2}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_{r_{f,i}}\sigma_{r_{f,r}}}\right)^N \exp\left(-\sum_{n=1}^N \frac{(r_{f,i}[n] - s_i[n;\theta])^2}{2\sigma_{r_{f,i}}^2} + \frac{(r_{f,r}[n] - s_r[n;\theta])^2}{2\sigma_{r_{f,r}}^2}\right) \\
 \text{or } \sigma_{r_f}^2 &= \frac{1}{2}\sigma_{r_{f,r}}^2 = \frac{1}{2}\sigma_{r_{f,i}}^2 = \frac{N_0}{T_s}
 \end{aligned}$$

$$T_r(\mathbf{r}_f|\theta) = \left(\frac{1}{\pi\sigma^2}\right)^N \exp\left(-\sum_{n=1}^N \frac{|r_{f,i}[n] - s_i[n;\theta]|^2}{2\sigma^2}\right)$$

Maximiser  $T_r(\mathbf{r}_f|\theta)$  revient donc à maximiser une exponentiel. Puisque c'est une fonction croissante monotone, la maximiser revient à maximiser son argument :

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta} \left\{ -\sum_{n=1}^N |r_f(t) - s(t;\theta)|^2 \right\}$$

On peut observer que cette somme ressemble à une somme de Riemman. On pourrait donc l'approximer par l'intégrale suivante :

$$\simeq \operatorname{argmin}_{\theta} \left\{ \int_0^{NT_s} |r_f(t) - s(t;\theta)|^2 dt \right\}$$

On peut utiliser les propriétés du produit de complexes conjugués pour mettre un terme représentant l'énergie du signal émis en évidence :

$$= \operatorname{argmin}_{\theta} \left\{ -2 \int_0^{NT_s} \Re\{r_f(t)s^*(t;\theta)\} dt + \int_0^{NT_s} |s^*(t;\theta)|^2 dt \right\}$$

Puisque ce terme est une exponentielle complexe dont seul l'argument dépend de  $\theta$ , son module carré ne participe plus à la corrélation et on peut s'en débarrasser. Nous avons donc maintenant l'expression finale (non développée) de notre corrélation :

$$= \operatorname{argmax}_{\theta} \left\{ \int_0^{NT_s} \Re\{r_f(t)s^*(t;\theta)\} dt \right\}$$

## 8.5 Ambiguïté sur l'angle

### 8.5.1 Solution 1

Une possibilité pour lever l'ambiguïté est de répéter la mesure avec une fréquence différente. Changer la fréquence changera la longueur d'onde ce qui, comme on le voit à l'équation (10) ne change l'angle mesuré que pour  $n \neq 0$ . Il faut donc garder la valeur d'angle qui est "strictement" (plus exactement celle qui s'éloignera le moins possible de la précédente puisque le bruit, les approximations dues au calcul numérique et les non idéalités des composants électroniques peuvent la faire varier)

la même pour chaque mesure. Cette méthode a l'avantage qu'elle ne rajoute que peu de calculs puisque les calculs d'angles à d'autres fréquences seront de toute manière effectués à cause du fait que notre signal est un chirp. Il existe cependant deux inconvénients. Le premier est qu'il faut laisser le temps à la fréquence de changer pour observer une différence significative. le temps requis pour déterminer un angle dépendra donc de  $\frac{B}{T}$ , le rapport entre la bande passante et le temps mis à la parcourir. Le deuxième inconvénient est que, si la bande passante est trop étroite, bien qu'il y aura toujours une variation de longueur d'onde, elle sera trop petite pour être détectée.

## 8.5.2 Solution 2

Une autre possibilité est de d'utiliser des paires d'antennes dont les espacement ne sont pas multiples les uns des autres. ( $d_{antenne_{12}} \neq n \cdot d_{antenne_{23}}$ ) Cela permettra d'obtenir un nouveau jeu d'angles potentiels à comparer avec le premier. Si les distances inter-antennes sont bien choisies, un seul angle sera identique pour les deux antennes.

## 8.6 Codes Matlab

### 8.6.1 Corrélacion distance-vitesse

```

load('calibration.mat');
2 a_1_cal = a_1;
a_2_cal = a_2;
4 a_3_cal = a_3;
clear a_1 a_2 a_3;
6 f_s = 3.413e6;
f_0=24e9;
8 N_s=256;
f_r=22.1 ;
10 c = 3e8;
F = dir('*.mat');
12 figure;
X_cal1 = fft2(a_1_cal');
14 w_0 = 2*pi*24e9;
BW = 250e6;
16 f_n1= (0:1:length(X_cal1)-1)*(c*256/(2*BW*256)) ; % -> range
f_n2= (0:1:length(X_cal1)-1)*(c*pi*f_s*3.6*2/(2*w_0*N_s*256)); % -> doppler, speed
18 f_n2=(f_n2-(f_n2(end)/2));

20 for ii = 2:length(F)
    fid = fopen(F(ii).name);
22    load(F(ii).name);
    X1 = fft(fftshift(fft(a_1).'));
24    T = mag2db(abs(X_cal1-X1).^2);
    surf((f_n2),(f_n1),T); set(gca,'YDir','normal');
26    colorbar;
    hold on;
28    M = getframe(gcf);
    fclose(fid);
30 end

```

### 8.6.2 Corrélation sur les angles

```

function [Max, FINALE] = MS1_code()
2 close all;
load('Calibration.mat');
4 a_1_cal = a_1;
a_2_cal = a_2;
6 a_3_cal = a_3;
clear a_1 a_2 a_3;
8 F = dir('*.mat');

10 X_cal1 = fft2(a_1_cal');
X_cal2 = fft2(a_2_cal');
12 X_cal3 = fft2(a_3_cal');
AMP = zeros(length(F),3);
14 for ii = 1:length(F)
    fid = fopen(F(ii).name);
16    load(F(ii).name);
    X1 = fft2(a_1');
18    X2 = fft2(a_2');
    X3 = fft2(a_3');
20    T1 = ((flip(fftshift((X_cal1-X1),2),1)).^2);
    T2 = ((flip(fftshift((X_cal2-X2),2),1)).^2);
22    T3 = ((flip(fftshift((X_cal3-X3),2),1)).^2);
    T1bis = abs(T1);
24    T2bis = abs(T2);
    T3bis = abs(T3);

26    A1 = max(max(T1bis));
    [x1,y1]=find(T1bis==A1); I1T = 256*(y1-1)+x1;
    A2= max(max(T2bis));
30    [x2,y2]=find(T2bis==A2); I2T = 256*(y2-1)+x2;
    A3= max(max(T3bis));
32    [x3,y3]=find(T3bis==A3); I3T = 256*(y3-1)+x3;
    A = [A1 A2 A3];
34    IFbis = [I1T I2T I3T];
    [AF,IFT] = max(A);
36    IF = IFbis(IFT);
    AMP(ii,:) = [T1(IF) T2(IF) T3(IF)];
38    fclose(fid);
end
40 lambda = 3e8/24.125e9;
lambda = 2*pi/lambda;
42 Ux = linspace(-1,1,length(F));
Uy = linspace(-1,1,length(F));
44 Q = zeros(length(F)^2,length(F));

46 for k=1:length(F)
    for i=1:length(F)
48        for l=1:length(F)
            Q(length(F)*(l-1)+i,k) = AMP(k,1).*exp(-1i*lambda*(Uy(l)*36e-3)) ...
50                +AMP(k,2) ...
                +AMP(k,3).*exp(-1i*lambda*(Ux(i)*22.5e-3));
52        end
    end
54 end
plotter(Q,length(F));
56 end

```

```
58 function ploter(F,L)
    Ux = linspace(-1,1,L);
60    Uy = linspace(-1,1,L);

62    figure
    count = 0;
64    for ii = 1:L
        surf(Ux,Uy,real(reshape(F(:,ii),[L L])));
66        M = getframe(gcf);
        pause(0.3);
68    end
end
```

## 9 Bibliographie

### Références

- [1] Projet p4 elec 2018-2019 : "radar numérique". <https://moodleucl.uclouvain.be/course/view.php?id=8884> Visité le 8 mai 2019.
- [2] Michel-Henri CARPENTIER. *RADAR*. Encyclopædia Universalis [en ligne]. Disponible sur : <http://www.universalis-edu.com/encyclopedia/radar/>, Visité le 8 mai 2019.