

## LFSAB1508 : Projet 4 Electricité

### Radar Doppler

---

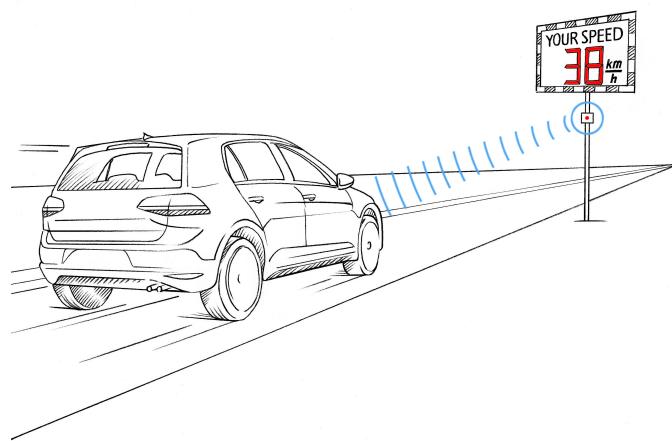
Auteurs (Groupe 10) :

DEHON Tanguy - 2469-16-00  
DELSART Thomas - 4166-16-00  
ROTSART DE HERTAING Gauthier - 4416-16-00

Etudiants en ingénieur civil, option électricité  
FSA13BA

Professeurs encadrants :

VANDENDORPE Luc - CRAEYE Christophe - OESTGES Claude



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Définitions et principe de fonctionnement du radar Doppler</b>	<b>2</b>
1.1 Radar utilisé . . . . .	2
1.2 Effet Doppler . . . . .	2
1.3 Signal émis par le radar . . . . .	2
1.4 Schéma bloc du radar . . . . .	3
1.5 Fonctionnement du mélangeur . . . . .	3
1.6 Signal reçu . . . . .	5
<b>2 Détermination de la distance et de la vitesse</b>	<b>6</b>
2.1 Analyse du signal reçu filtré $r_f[n]$ et obtention de sa fonction de densité de probabilité $T_{r_f}(r \theta)$ . . . . .	6
2.2 Optimisation de la corrélation donnant la distance et la vitesse d'une cible . . . . .	7
2.2.1 Expression de la corrélation . . . . .	7
2.2.2 Estimation de la distance et de la vitesse . . . . .	9
2.3 Ambiguïtés apparentes . . . . .	9
2.3.1 Ambiguïté sur la distance . . . . .	9
2.3.2 Ambiguïté sur la vitesse . . . . .	10
2.3.3 Simulations montrant les ambiguïtés sur la distance et la vitesse . . . . .	11
<b>3 Micro-Doppler</b>	<b>12</b>
3.1 Définition et principe . . . . .	12
3.2 Expression analytique du spectre micro-Doppler d'un véhicule . . . . .	12
3.3 Applications du spectre micro-Doppler . . . . .	15
3.4 Conséquences pratiques . . . . .	16
<b>4 Détermination des angles</b>	<b>17</b>
4.1 Optimisation de la corrélation donnant les angles d'azimut et d'élévation d'une cible par rapport au radar . . . . .	17
4.1.1 Expression de la corrélation . . . . .	17
4.1.2 Lien avec une transformée de Fourier discrète . . . . .	18
4.1.3 Utilisation de poids . . . . .	18
4.1.4 Estimation des angles d'azimut et d'élévation . . . . .	21
4.2 Ambiguïtés angulaires . . . . .	21
4.2.1 Expression des ambiguïtés à partir de la transformée de Fourier discrète . . . . .	21
4.2.2 Représentation des ambiguïtés . . . . .	22
4.2.3 Comment éviter l'apparition d'ambiguïtés ? . . . . .	23
4.3 Erreur liée au Hardware . . . . .	25
<b>5 Défi : extension au radar à 77,5 [GHz]</b>	<b>26</b>
5.1 Objectif du challenge . . . . .	26
5.2 Comparaison avec le radar à 24 [GHz] . . . . .	26
5.3 Justification et implémentation de l'algorithme utilisé . . . . .	27
5.4 Améliorations . . . . .	28
5.4.1 Données aberrantes . . . . .	28
5.4.2 Filtre médian . . . . .	29
5.4.3 Lissage des données . . . . .	29
5.4.4 Limitation de la zone d'évaluation de la corrélation . . . . .	29
5.4.5 Déphasage lié au Hardware . . . . .	29
5.4.6 Position entre le radar et l'appareil de mesure . . . . .	30
5.4.7 Discussion des résultats . . . . .	30

<b>6 Spécifications des radars utilisés</b>	<b>31</b>
<b>Conclusion</b>	<b>32</b>
<b>A Bibliographie</b>	<b>34</b>
<b>B Glossaire</b>	<b>34</b>
<b>C Annexes</b>	<b>35</b>
C.1 Expression analytique de l'enveloppe complexe d'une impulsion "chirp" . . . . .	35
C.2 Expression de l'enveloppe complexe du signal reçu et filtré $r_f[n]$ . . . . .	36
C.3 Calcul de la moyenne du signal reçu filtré $r_f[n]$ . . . . .	37
C.4 Calcul de la variance du signal reçu filtré $r_f[n]$ . . . . .	37

## Introduction

Le Projet P4 en électricité, cours de troisième année de Bachelier Ingénieur Civil, est dédié aux radars numériques. Toutes les analyses effectuées et résultats obtenus se basent sur des notions avancées de télécommunications et de traitement de signal. Plus concrètement, il permet dans un premier temps l'étude d'un type précis de radar (K-MD2), de ses composants et de son fonctionnement. Dans un second temps, il s'occupe de la partie traitement de signal avec une analyse très détaillée du signal reçu par le radar. Au final, le but du projet est d'amener les étudiants à être capables de déterminer la position d'une cible dans un espace quatre dimensions, par une estimation de la distance, vitesse et position angulaire d'une certaine cible.

En terme d'estimation de distance, l'utilisation d'une modulation "chirp" fournit au système une bonne résolution en profondeur. Du côté de l'estimation des angles azimutal et d'élévation, les antennes multiples du radar à la réception permettent une certaine résolution angulaire, qui sera améliorée. De plus, les outils mathématiques utilisés pour le traitement de signal impliquent des ambiguïtés sur les données reçues, source d'une réelle confusion entre la position réelle et ambiguë de la cible. Cette confusion sera discutée, et des solutions seront apportées. Le radar utilise l'effet Doppler provenant de l'écho d'un signal dans ses calculs. On va découvrir qu'un autre type de phénomène Doppler, appelé micro-Doppler, rentre également en jeu lorsque le signal capté par le radar correspond à un élément en rotation. Il faut également se rendre compte que le signal capté est perturbé par du bruit. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle on effectue du traitement de signal sophistiqué et non pas l'utilisation de formules physiques engendrant des résultats peu précises.

Ce rapport commence par une discussion sur le principe de fonctionnement du radar. La technique de détermination de la distance et de la vitesse et les ambiguïtés liées à celles-ci sont ensuite abordées. Puis, un détour est pris afin d'en apprendre davantage sur le spectre micro-Doppler d'un véhicule. La même méthodologie que précédemment est par la suite utilisée pour déterminer les angles d'azimut et d'élévation et leurs ambiguïtés. Finalement, on discute de la réalisation d'un challenge qui nous a été proposé en fin de quadrimestre et des spécifications propres aux radars utilisés.

# 1 Définitions et principe de fonctionnement du radar Doppler

## 1.1 Radar utilisé

On considère un radar Doppler K-MD2 de RFbeam, représenté à la Figure (1), composé d'une antenne émettrice et de trois antennes réceptrices.

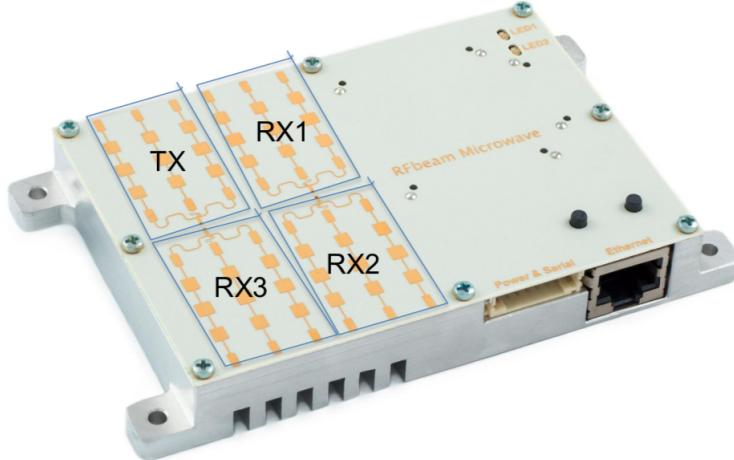


FIGURE 1: K-MD2, RFbeam

## 1.2 Effet Doppler

Le radar, comme son nom l'indique, est un appareil qui utilise notamment l'effet Doppler afin de mesurer la vitesse d'une cible. En connaissant la vitesse d'une onde, approximée par celle de la lumière  $c$ , la fréquence d'émission du signal  $f_p$  et la fréquence de réception de ce même signal  $f_{rec}$ , il est possible de déterminer la vitesse d'un objet, notée  $v_{cible}$ .

$$f_{rec} = \frac{c - v_{cible}}{c + v_{cible}} f_p \Leftrightarrow v_{cible} \simeq \frac{f_{rec} c}{2 f_p} \quad (1)$$

Comme nous le constaterons par la suite, sur base des signaux reçus, il sera possible de déterminer la distance à vol d'oiseau entre l'antenne émettrice et la cible, ainsi que la vitesse de la cible.

## 1.3 Signal émis par le radar

Le signal émis correspond à un train d'impulsions de type "chirp". Celui-ci est représenté à la Figure (2), avec les paramètres  $\alpha = \frac{2d}{c}$  et  $\beta = \frac{2v}{c}$ . Un "chirp" est, par définition, un signal dont la fréquence dépend linéairement du temps. Soit  $s_0(t)$  une impulsion "chirp", et  $e_c(t)$  son enveloppe complexe.

$$s_0(t) = A \cos \left( \left( \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} + \frac{\Delta\omega t}{2T} \right) rect_T(t) \right) \quad (2)$$

$$= A \Re \{ e^{j(-\frac{\Delta\omega}{2} + \frac{\Delta\omega t}{2T})t} e^{j\omega_0 t} \} rect_T(t) \quad (3)$$

$$= A \Re \{ e_c(t) e^{j\omega_0 t} \} rect_T(t) \quad (4)$$

On obtient donc :

$$e_c(t) = e^{j(-\frac{\Delta\omega}{2} + \frac{\Delta\omega t}{2T})t} \quad (5)$$

Notez que la démonstration de ce résultat est développée en annexe à la Section C.1. A l'aide de celui-ci, nous sommes en mesure de déterminer le signal émis par l'antenne émettrice.

Soit  $s(t)$  le signal émis et  $e_s(t)$  son enveloppe complexe.

$$s(t) = \sum_{p=0}^{P-1} s_0(t - pT_r) \quad (6)$$

$$= A\mathcal{R}\left\{\sum_{p=0}^{P-1} e_c(t - pT_r)e^{-j\omega_0 p T_r} \text{rect}_T(t - pT_r)e^{j\omega_0 t}\right\} \quad (7)$$

$$= A\mathcal{R}\{e_s(t)e^{j\omega_0 t}\} \quad (8)$$

$$(9)$$

Donc, l'enveloppe complexe  $e_s(t)$  est donnée par :

$$e_s(t) = \sum_{p=0}^{P-1} e_c(t - pT_r)e^{-j\omega_0 p T_r} \text{rect}_T(t - pT_r) \quad (10)$$

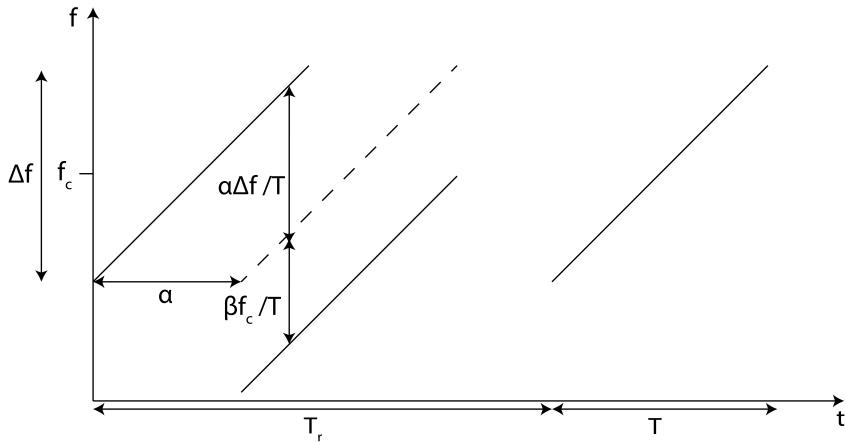


FIGURE 2: Représentation de deux "chirps" dans le plan  $(t, f)$

#### 1.4 Schéma bloc du radar

Le radar K-MD2 comprend trois blocs principaux. Le premier est le bloc oscillateur. Il est alimenté en DC et fournit un signal dont la fréquence centrale est  $f_c = 24 [GHz]$  et qui varie linéairement sur une bande de fréquences de  $250 [MHz]$  sur une durée  $T$  (voir Figure (2)). Il est suivi d'un amplificateur de puissance et le signal est ainsi émis. Il sert à fournir un signal à l'antenne d'émission mais également au bloc mélangeur.

Le second bloc est le bloc amplificateur faible bruit. Le signal reçu étant de faible amplitude, il l'amplifie en minimisant la dégradation du rapport signal à bruit.

Le dernier bloc est le bloc mélangeur, transformant le signal reçu et amplifié par l'antenne de réception en composantes I et Q à basses fréquences (fréquence intermédiaire), qui seront ensuite échantillonnées.

Ces différentes informations permettent d'obtenir le schéma simplifié représenté à la Figure (3a) et une brève explication est donnée pour le bloc mélangeur de par sa grande importance.

#### 1.5 Fonctionnement du mélangeur

Ce composant essentiel, que l'on peut retrouver partout sur le marché, est un élément qui permet la conversion d'un signal hautes fréquences en basses fréquences et réciproquement. Dans notre cas,

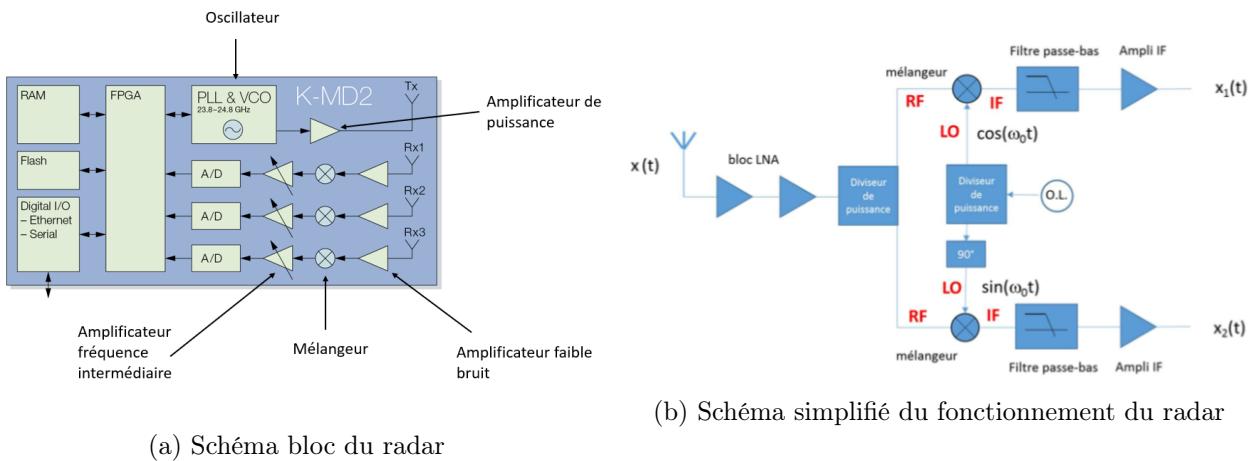


FIGURE 3: Schémas blocs du radar [1]

le signal reçu est à une fréquence centrale,  $f_{RF}$ , de 24 [GHz]. Notre but est de convertir, grâce au mélangeur, le signal reçu en basses fréquences, aussi nommée fréquence IF. La raison est simple et fondamentale. On veut en effet, au sein du radar, effectuer du traitement de signal, ce qui signifie entre autre échantillonner le signal reçu. Si celui-ci est situé à une fréquence centrale de 24 [GHz], on doit utiliser une fréquence d'échantillonnage minimale de 48 [GHz] selon le théorème de Nyquist-Shannon<sup>1</sup>. Cette fréquence d'échantillonnage signifie qu'on doit être capable de gérer 48 milliards d'opérations par seconde et aucun ordinateur, à l'heure actuelle, n'est capable de résoudre une telle demande<sup>2</sup>. Si maintenant le signal était converti en basses fréquences à une fréquence centrale de 2 [MHz] par exemple, la fréquence d'échantillonnage ne serait plus que de 4 [MHz]. Fort heureusement, les ordinateurs sont capables de résoudre 4 millions d'opérations par seconde.

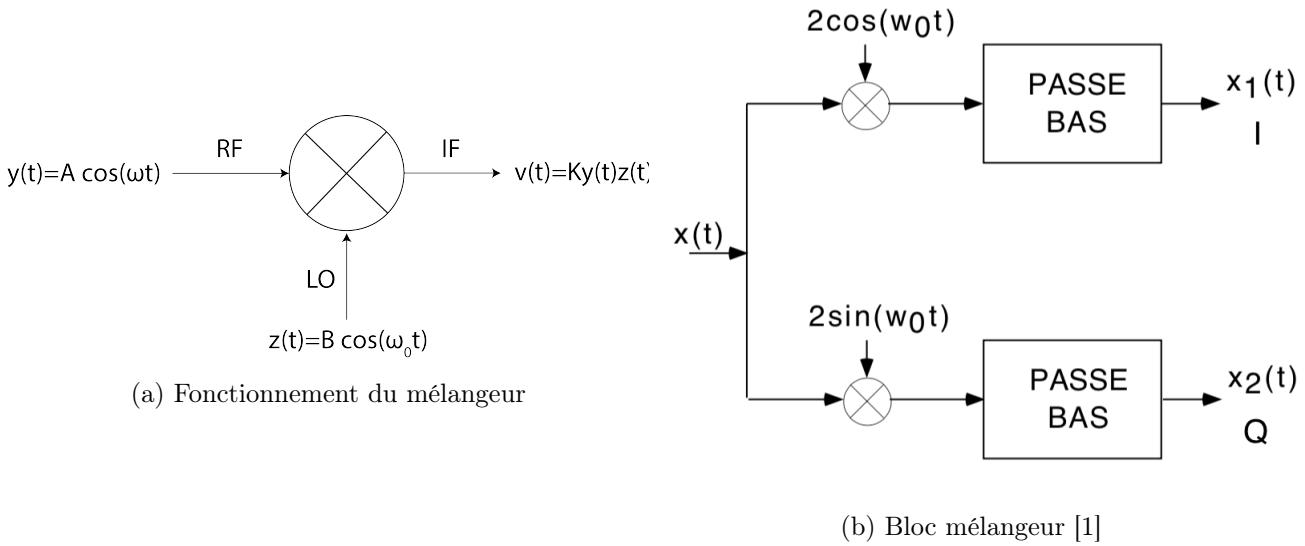


FIGURE 4: Mélangeur

Le fonctionnement du mélangeur est simple : on multiplie le signal à hautes fréquences et le signal créé par l'oscillateur local. Concrètement, si l'on note le signal reçu comme  $A \cos(\omega t)$  et le signal créé

1. Aussi appelé théorème d'échantillonnage.
2. En réalité, certains ordinateurs surpuissants peuvent se le permettre mais ce n'est pas rentable.

par le VCO<sup>3</sup> comme  $B \cos(\omega_o t)$ , on obtient à la sortie du mélangeur :

$$v(t) = A \cos(\omega t) B \cos(\omega_o t) \quad (11)$$

$$= \frac{AB}{2} [\cos(\omega + \omega_0) + \cos(\omega - \omega_0)] \quad (12)$$

En passant le signal de sortie du mélangeur dans un filtre passe-bas, on ne garde seulement que le signal à basses fréquences. Ce principe est utilisé au sein de notre radar pour obtenir les composantes de Rice du signal de départ, tel que montré à la Figure (4b).

## 1.6 Signal reçu

Puisque le signal émis correspond à un train d'impulsions, le signal reçu par le radar est également de même nature, à savoir un train d'impulsions "chirps". Le radar étant doté intrinsèquement d'un filtre passe-bande centré sur la fréquence centrale  $\omega_0$ , chaque signal reçu a donc un contenu fréquentiel limité. Par conséquent, ceci signifie que chaque impulsion reçue peut être considérée comme un signal à bande étroite.

Dès lors, vu qu'un tel signal peut être entièrement décrit par son enveloppe complexe, nous ne considérons que des signaux reçus situés en bande de base, qui sont ensuite filtrés à travers un filtre passe-bas et échantillonnés à une fréquence  $f_s$  qui aura toute son importance dans la suite de ce texte.

En réalité, il serait idéaliste de supposer que le signal reçu est un signal purement utile. En effet, chaque impulsion reçue est corrompue par du bruit que nous considérons comme du bruit blanc gaussien additif, communément appelé BBGA. Le signal reçu et filtré est donc du type :

$$r_f[n] = s[n; \theta] + N_f[n] \quad r_f(t) = s(t; \theta) + N_f(t) \text{ où } s[n; \theta] \text{ est la composante utile du signal et } N_f[n] \text{ le bruit filtré.} \quad (13)$$

Comme montré en annexe à la Section C.2 en raison de l'algèbre fastidieuse et inutile, l'expression analytique de l'enveloppe complexe du signal reçu et filtré est donnée par :

$$e_{r_f}(t) = A \sum_{p=0}^{P-1} e^{j(\frac{\Delta\omega}{2}\alpha - \frac{\Delta\omega}{T}t\alpha + \frac{\Delta\omega}{2T}\alpha^2 + \frac{\Delta\omega}{T}\alpha p T_r)} e^{-j\omega_0(t\beta + \alpha)} \text{rect}_T(t - \alpha - pT_r) + n_I(t) - jn_Q(t) \quad (14)$$

---

3. VCO = Voltage Controller Oscillator

## 2 Détermination de la distance et de la vitesse

### 2.1 Analyse du signal reçu filtré $r_f[n]$ et obtention de sa fonction de densité de probabilité $T_{r_f}(r|\theta)$

Le bruit est un signal purement aléatoire et le signal utile  $s[n; \theta]$  est une constante vis-à-vis du signal reçu  $r_f[n]$  pour chaque échantillon  $n$ . Comme le bruit est par hypothèse une variable aléatoire complexe gaussienne et que nous réalisons une opération linéaire avec cette variable pour obtenir le signal filtré, le train d'impulsions reçu est donc lui aussi un signal aléatoire gaussien<sup>4</sup>. Un tel signal est entièrement décrit par sa fonction de densité de probabilité  $T_{r_f}(r|\theta)$  qui dépend de deux paramètres :  $\mu_f$ , qui correspond à la moyenne du signal  $r_f[n]$ , et  $\sigma_f^2$  qui correspond à la variance de ce même signal. Ceux-ci valent respectivement  $\mu_f = s[n; \theta]$  et  $\sigma_f^2 = \frac{2N_0}{T_s}$ . Pour les plus intéressés, la démonstration permettant de trouver la valeur de ces deux paramètres est montrée en annexe, aux Sections C.3 et C.4.

Afin de calculer la fonction de densité de probabilité du signal reçu filtré  $r_f[n]$ , il suffit de montrer que chaque échantillon  $n$  est décorrélé par rapport à un autre échantillon  $n'$ . En effet, un signal gaussien à valeurs décorrélées est un signal à valeurs indépendantes. Par conséquent, la fonction de densité de probabilité  $T_{r_f}(r|\theta)$  correspond au produit des fonctions de densité de probabilité de chaque échantillon  $n$ . Ceux-ci suivent une loi normale  $N(\mu_f, \sigma_f^2)$  et il est donc aisément de trouver  $T_{r_f}(r|\theta)$ .

Pour montrer que  $r_f[n]$  est décorrélé à  $r_f[n']$  (pour  $n \neq n'$ ), nous allons montrer que la covariance du signal filtré échantillonné centré  $r_f[n] - s[n; \theta]$  est nulle. Par conséquent, il faut que l'espérance suivante soit nulle :

$$\mathbb{E}(N_f(nT_s)N_f(n'T_s)) = 0 \quad (15)$$

Comme dit précédemment, avant échantillonnage, le signal reçu passe dans un filtre passe-bas. En supposant que ce filtre ne touche pas à la partie utile du signal reçu, ceci signifie que nous multiplions du bruit par une fenêtre rectangulaire dans le domaine fréquentiel (puisque le filtre passe-bas est supposé parfait). Une convolution du bruit  $N(t)$  par un  $\frac{\sin(x)}{x}$  est donc effectuée dans le domaine temporel. Dès lors, l'ensemble des valeurs aléatoires à tout instant qui composent le signal reçu (qui est lui aussi aléatoire) sont corrélées entre elles. Néanmoins, comme nous allons le constater avec ce qui suit, l'échantillonnage du signal reçu va impliquer une décorrélation des  $N$  échantillons.

- Pour  $n > 0$ , nous allons échantillonner aux valeurs où les lobes secondaires du  $\frac{\sin(x)}{x}$  s'annulent. Ainsi, le résultat de la convolution est nul et l'équation (15) est satisfaite.
- Pour  $n = 0$ , on échantillonne à l'endroit où le lobe principal du  $\frac{\sin(x)}{x}$  est maximal. Or, pour  $n \neq n'$ , nous aurons donc une valeur  $n'$  non-nulle, c'est-à-dire la valeur  $n$  correspondant à un temps où un lobe secondaire est nul. A nouveau, le résultat de la convolution est nul et l'équation (15) est satisfaite.

Par conséquent, nous recevons bien un signal gaussien dont chaque instant est décorrélé. Il s'agit donc d'un signal dont chaque instant est indépendant par rapport aux autres. Nous avons ainsi tous les ingrédients pour déterminer la fonction de densité de probabilité. En effet, chaque échantillon du signal reçu filtré suit une loi normale  $N(\mu_f, \sigma_f^2)$  et a donc une fonction de densité de probabilité de la forme :

$$T_r(n|\theta) = \frac{1}{\sigma_f \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{n-\mu_f}{\sigma_f} \right)^2} \quad (16)$$

Comme dit précédemment, puisque le signal  $r_f[n]$  est un signal à valeurs indépendantes,  $T_{r_f}(r|\theta)$  correspond au produit des  $n$  fonctions de densité de probabilité  $T_r(n|\theta)$  de chaque échantillon. On en

---

4. En effet, une propriété importante stipule que toute variable aléatoire gaussienne qui subit une opération linéaire reste gaussienne.

déduit donc :

$$T_{r_f}(r|\theta) = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sigma_f \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2} \left| \frac{r_f[n] - s[n;\theta]}{\sigma_f} \right|^2} \quad (17)$$

$$= \left( \frac{1}{\sigma_f \sqrt{2\pi}} \right)^N e^{\frac{-1}{2\sigma_f^2} \sum_{n=0}^{N-1} |r_f[n] - s[n;\theta]|^2} \quad (18)$$

Comme le signal reçu  $r_f[n]$  est complexe, nous pouvons décomposer la quantité  $\frac{r_f[n] - s[n;\theta]}{\sigma_f}$  en une partie réelle et une partie imaginaire. De même, en toute généralité, la variance d'une quantité complexe peut alors s'écrire en fonction des variances des parties réelle et imaginaire de cette même quantité. On a :

$$\sigma_f^2 = \sigma_r^2 + \sigma_i^2 \text{ avec } \sigma_f^2 = 2\sigma_r^2 = 2\sigma_i^2 = \frac{2N_0}{T_s} \quad (19)$$

Puisque les parties réelle et imaginaire du signal  $r_f[n]$  sont indépendantes, nous avons (en prenant  $N = 1$  pour simplifier les notations dans un premier temps) :

$$T_{r_f}(r|\theta) = \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2} \left( \frac{r_{fr}[n] - s_r[n;\theta]}{\sigma_r} \right)^2} \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2} \left( \frac{r_{fi}[n] - s_i[n;\theta]}{\sigma_i} \right)^2} \quad (20)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_r\sigma_i} e^{\frac{-1}{2\sigma_r\sigma_i} ((r_{fr}[n] - s_r[n;\theta])^2 + (r_{fi}[n] - s_i[n;\theta])^2)} \quad (21)$$

Dans cette expression ci-dessus, nous remarquons que l'argument de l'exponentielle correspond au carré du module de la quantité complexe  $r_f[n] - s[n;\theta]$ . On en déduit donc, toujours pour  $N = 1$  :

$$T_{r_f}(r|\theta) = \frac{1}{\pi\sigma_f^2} e^{\frac{-1}{\sigma_f^2} (|r_f[n] - s[n;\theta]|^2)} \text{ où } \sigma_f^2 = \frac{2N_0}{T_s} \quad (22)$$

Etant donné que nous avons  $N$  échantillons, nous pouvons répéter ce processus  $N$  fois. Il est donc évident que le terme qui multiplie l'exponentielle va se retrouver à la puissance  $N$  et qu'il y aura une somme de  $N$  termes dans l'argument de cette exponentielle. Autrement dit, nous pouvons en conclure que la fonction de densité du vecteur  $r_f[n]$  s'écrit sous la forme suivante :

$$T_{r_f}(r|\theta) = \left( \frac{1}{\pi\sigma_f^2} \right)^N e^{\frac{-1}{\sigma_f^2} \sum_{n=0}^{N-1} (|r_f[n] - s[n;\theta]|^2)} \quad (23)$$

$$= \left( \frac{1}{\pi\sigma_f^2} \right)^N e^{\frac{-1}{2N_0} \sum_{n=0}^{N-1} (|r_f[n] - s[n;\theta]|^2 T_s)} \quad (24)$$

Si on suppose que la période d'échantillonnage  $T_s$  est suffisamment petite, c'est-à-dire que la fréquence d'échantillonnage  $f_s$  est suffisamment grande, nous pouvons alors approximer la somme par une intégrale à l'aide de la méthode des rectangles. Nous obtenons donc le résultat final suivant :

$$T_{r_f}(r|\theta) = \left( \frac{1}{\pi\sigma_f^2} \right)^N e^{\frac{-1}{2N_0} \int_0^{NT_s} |r_f(t) - s(t;\theta)|^2 dt} \quad (25)$$

## 2.2 Optimisation de la corrélation donnant la distance et la vitesse d'une cible

### 2.2.1 Expression de la corrélation

Pour obtenir la distance entre l'antenne émettrice et la cible ainsi que la vitesse de la cible, nous allons optimiser une corrélation. Pour obtenir celle-ci, il est décidé d'utiliser le principe du maximum de vraisemblance. De plus, étant donné que la fonction de densité de probabilité  $T_{r_f}(r|\theta)$  est une fonction

monotone, il est tout à fait équivalent d'utiliser la quantité  $\log(T_{r_f}(r|\theta))$ . Mathématiquement, ceci revient à optimiser l'argument de l'exponentielle au sens des moindres carrés. On cherche donc :

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin}_{\theta} \left[ \int_0^{NT_s} |r_f(t) - s(t; \theta)|^2 dt \right] \quad (26)$$

Puisque le signal  $r_f(t)$  est un signal complexe, la quantité  $r_f(t) - s(t; \theta)$  est également complexe. En se rappelant que le carré du module d'un nombre complexe correspond au produit entre ce nombre et son complexe conjugué, nous en déduisons :

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin}_{\theta} \left[ -2 \int_0^{NT_s} \Re(r_f(t)s^*(t; \theta)) dt + \int_0^{NT_s} |s(t; \theta)|^2 dt \right] \quad (27)$$

Nous pouvons encore réaliser une dernière simplification avant d'obtenir la corrélation finale à optimiser. En effet, le signal utile  $s(t; \theta)$  peut s'écrire sous la forme générale d'une exponentielle complexe  $Ae^{j(\theta+\phi)}$ . En prenant le carré du module de cette quantité complexe, nous obtenons une quantité indépendante du paramètre  $\theta$ , ce qui peut donc sortir de la corrélation à optimiser. On a bien :

$$\begin{aligned} |Ae^{j(\theta+\phi)}|^2 &= A^2(\cos(\theta + \phi) + j \sin(\theta + \phi))^2 \\ &= A^2(\cos^2(\theta + \phi) + \sin^2(\theta + \phi)) \\ &= A^2 \end{aligned} \quad (28)$$

Ainsi, la corrélation à optimiser est donc :

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin}_{\theta} \left[ -2 \int_0^{NT_s} \Re(r_f(t)s^*(t; \theta)) dt \right] \quad (29)$$

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta} \left[ \int_0^{NT_s} \Re(r_f(t)s^*(t; \theta)) dt \right] \quad (30)$$

On maximise donc une corrélation entre le signal reçu et le signal utile. Ceci revient à passer le signal reçu dans un filtre adapté au signal utile. On sait également par une propriété importante du cours de Télécommunications que le filtre adapté à été obtenu par maximisation du rapport signal à bruit. On peut donc en conclure que la corrélation trouvée est optimale pour ressortir le signal utile par rapport au bruit BBGA.

En pratique, le paramètre  $\theta$  contient deux paramètres cachés :  $\alpha$  et  $\beta$ . Ce premier contient l'information sur la distance entre l'antenne émettrice et la cible tandis que le deuxième paramètre contient l'information sur la vitesse de la cible. On décide alors d'utiliser la fonction de corrélation  $C(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$  suivante :

$$C(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \left| \sum_{n_2=0}^{N_{2,max}-1} e^{j\frac{\Delta\omega}{T}\hat{\alpha}n_2 T_s} \sum_{n_1=0}^{N_{1,max}-1} e^{jn_1 N_r T_s \omega_0 \hat{\beta}} e_r(n_1 N_r + n_2) \right|^2 \quad (31)$$

En posant  $\Omega_{\hat{\alpha}} = \frac{\Delta\omega}{T} T_s \hat{\alpha}$  et  $\Omega_{\hat{\beta}} = N_r T_s \omega_0 \hat{\beta}$ , la corrélation à maximiser devient :

$$C(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \left| \sum_{n_2=0}^{N_{2,max}-1} e^{jn_2 \Omega_{\hat{\alpha}}} \sum_{n_1=0}^{N_{1,max}-1} e^{jn_1 \Omega_{\hat{\beta}}} e_r(n_1 N_r + n_2) \right|^2 \quad (32)$$

Cette corrélation est obtenue sur base de l'équation (30) en remarquant que l'intégrant correspond au produit des enveloppes complexes de respectivement  $r_f(t)$  et  $s(t; \theta)$ . En effet, comme dit précédemment, les deux signaux sont à bande étroite et peuvent être définis par leur enveloppe complexe. L'équation (32) est donc obtenue en remplaçant le signal reçu et filtré  $r_f(t)$  par  $e_r(t)$ , qui est l'enveloppe complexe du signal reçu et filtré, et le signal utile  $s(t; \theta)$  par  $e_s(t)$ , qui est l'enveloppe complexe du train d'impulsions théoriquement captés par le radar. Les expressions analytiques de ces deux enveloppes complexes sont déterminées aux équations (10) et (14).

Suite à la corrélation définie par l'équation (32), on se rend compte qu'optimiser cette corrélation revient à réaliser une transformée de Fourier discrète dans deux dimensions : une dimension pour la distance et une dimension pour la vitesse.

### 2.2.2 Estimation de la distance et de la vitesse

Sur base de ce qui précède, nous avons maintenant tous les outils en main pour déterminer la distance entre une cible et l'antenne d'émission ainsi que la vitesse d'une cible. Pour ce faire, il suffit de résoudre la corrélation (32) à l'aide d'un logiciel de simulation, à l'instar de Matlab. Concrètement, la maximisation de la corrélation consiste à tester un grand nombre de valeurs de  $\alpha$  et de  $\beta$  et d'en retirer le  $\alpha$  et le  $\beta$  pour lesquels la valeur de la corrélation est maximale. Chaque transformée de Fourier discrète 1D teste le nombre de points qu'elle possède comme valeurs possibles, à savoir  $N_{1,max}$  et  $N_{2,max}$  dans notre cas, c'est-à-dire qu'on teste  $N_{1,max}$  valeurs dans une direction et  $N_{2,max}$  dans l'autre. On peut donc voir la corrélation comme un test de  $N_{1,max} \times N_{2,max}$  valeurs. Quelques résultats vous sont présentés ci-dessous aux Figures (5a) et (5b).

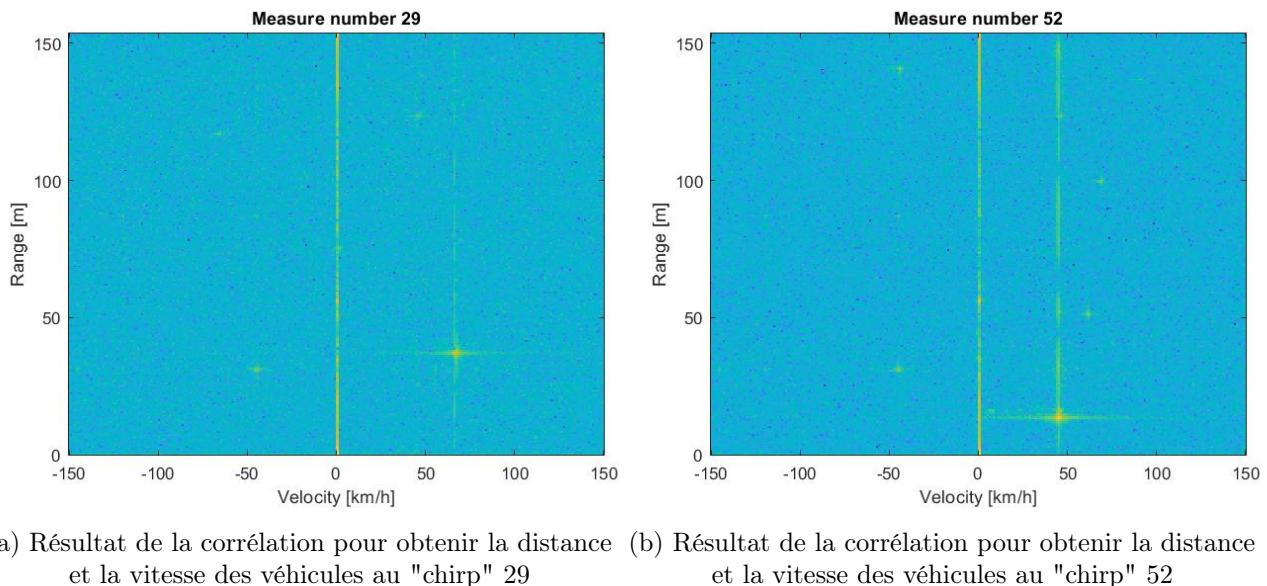


FIGURE 5: Représentation de la corrélation

Nous pouvons clairement distinguer les "amas" ou "points" plus clairs représentant les voitures caractérisées par une distance par rapport au radar et une vitesse. Par ailleurs, au niveau des imperfections, nous remarquons différents phénomènes. Tout d'abord, on peut noter la présence de deux points immobiles, appelés "clutter", et correspondant à deux échos non-souhaités. On observe aussi un étalement du spectre Doppler au niveau des vitesses qui sera décrit plus tard dans ce texte. Il y a également du bruit engendrant des points plus ou moins gros.

### 2.3 Ambiguïtés apparentes

#### 2.3.1 Ambiguïté sur la distance

Des ambiguïtés peuvent être observées par le radar sur la distance. On parlera donc de distance maximale. Il faut noter qu'il ne s'agit pas de la distance maximale observable par le radar, mais bien de la distance maximale déterminable par le radar. Cette notion provient directement de la transformée de Fourier discrète. En effet, celle-ci est périodique de période  $2\pi$ . Afin d'éviter un phénomène de repli spectral, il faut limiter le domaine de définition du paramètre  $\Omega_{\hat{\alpha}}$  de telle sorte qu'il ne soit défini que

sur une période. Etant donné qu'une distance est positive, la condition suivante doit être satisfaite :

$$0 \leq \Omega_{\hat{\alpha}} < 2\pi \quad (33)$$

$$\Leftrightarrow \Omega_{\hat{\alpha}} = \Delta\omega \frac{T_s}{T} \hat{\alpha} = \Delta\omega \text{ car } N_{2,max} \text{ est défini par } N_{2,max} = \frac{T}{T_s} \frac{\hat{\alpha}}{N_{2,max}} < 2\pi \quad (34)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2d_{max}}{c} < \frac{N_{2,max}}{\Delta f} \quad (35)$$

$$\Leftrightarrow d_{max} < \frac{cN_{2,max}}{2\Delta f} = 153,6 [m] \quad (36)$$

Grâce à cette distance maximale, la résolution du radar peut se calculer de la manière suivante :

$$res_d = \frac{d_{max}}{N_{2,max}} = \frac{153,6}{256} = 0,6 [m] \quad (37)$$

Cette résolution s'apparente à une notion de précision qui signifie que lorsque deux cibles se trouvent à une distance l'une de l'autre comprise dans l'intervalle  $[0; 0,6] [m]$ , le radar n'est pas capable de faire la distinction entre elles. Autrement dit, ces deux cibles seront considérées comme étant au même endroit bien qu'en réalité elles soient distantes de quelques dizaines de centimètres.

Sur base de l'équation (36), la distance maximale calculable par le radar a été définie de telle sorte qu'il n'y ait pas de repli spectral. Néanmoins, puisqu'une onde électromagnétique se déplace à la vitesse de la lumière, il s'agit d'une bien petite distance. Dès lors, il est bien possible que, pour une raison ou une autre, le radar capte une cible à une distance plus éloignée que la distance maximale. Ainsi, pour une cible située à une distance  $d > 153,6 [m]$ , le radar fera comme si cette cible était en fait située dans l'intervalle  $[0; 153,6] [m]$ . Ainsi, une cible située à  $203,6 [m]$  de l'antenne émettrice sera considérée par le radar comme étant à  $50 [m]$  de l'antenne d'émission. Ainsi, et comme nous pourrons le constater par la suite, la notion d'ambiguïté est omniprésente dans le radar Doppler. Il n'existe cependant pas de méthode pour les lever, ce qui montre toute la complexité pour déterminer la position exacte d'une cible.

### 2.3.2 Ambiguïté sur la vitesse

Etant donné qu'il faut réaliser une transformée de Fourier discrète dans la dimension de la vitesse pour obtenir la vitesse d'une cible, il n'est pas étonnant qu'il y ait à nouveau la possibilité d'avoir du recouvrement spectral. Pour éviter cela, et puisqu'une vitesse peut être positive ou négative, il faut :

$$-\pi \leq \Omega_{\hat{\beta}} < \pi \quad (38)$$

$$\Leftrightarrow \Omega_{\hat{\beta}} = N_r T_s \omega_0 \hat{\beta} = T_r \omega_0 \hat{\beta} < \pi \quad (39)$$

$$\Leftrightarrow T_r < \frac{c}{4v_{max}f_0} = 75 [\mu s] \quad (40)$$

Dans ce cas-ci, la vitesse maximale est connue et vaut  $v_{max} = 150 [km/h]$ . Il est donc possible d'obtenir le temps d'envoi  $T_r$  entre deux impulsions de sorte qu'il n'y ait pas d'ambiguïté. Dès lors, le radar ne peut donc capter des véhicules à une vitesse supérieure ou égale à  $150 [km/h]$  que s'il envoie des impulsions à une fréquence centrale supérieure à  $24 [GHz]$ . Le principe inverse est d'application : il peut capter des véhicules à plus de  $150 [km/h]$  s'il émet des signaux "chirps" à une fréquence centrale inférieure à  $24 [GHz]$ .

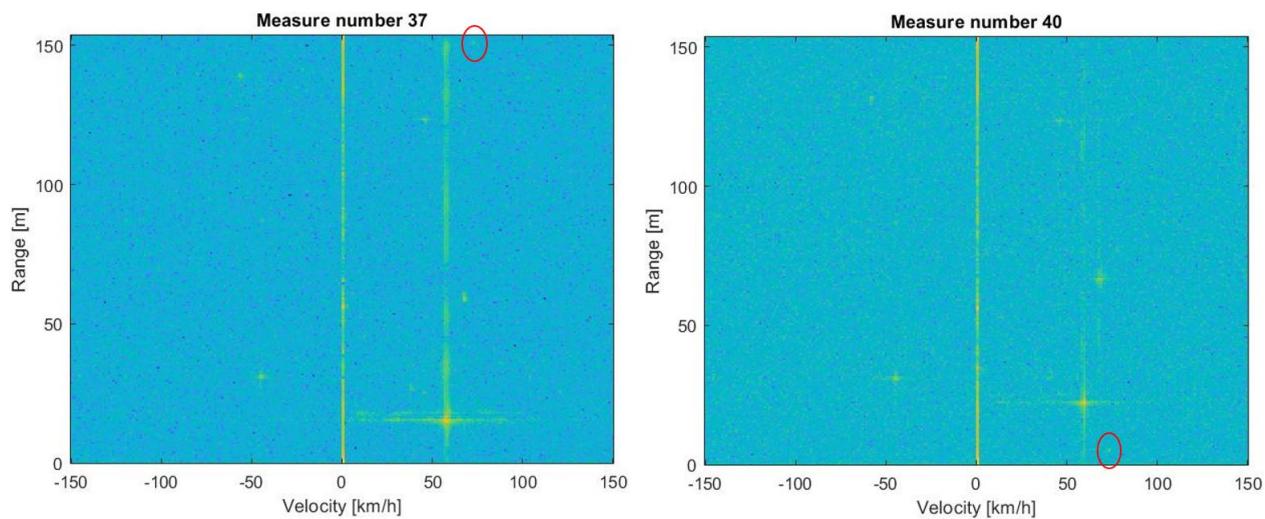
Par ailleurs, il y a également une ambiguïté liée à la vitesse de la cible. En effet, pour une cible se déplaçant à une vitesse positive légèrement supérieure à  $150 [km/h]$ , le radar la considérera comme se déplaçant à une vitesse négative légèrement supérieure à  $-150 [km/h]$ .

De la même façon qu'à la Section 2.3.1, la résolution du radar relative à la vitesse est donnée par :

$$res_v = \frac{2.v_{max}}{256} = 1,17 \left[ \frac{km}{h} \right] \quad (41)$$

Ainsi, lorsque deux véhicules ont une différence de vitesse comprise dans l'intervalle  $[0; 1, 17]$   $\left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right]$ , le radar ne peut pas faire la distinction. Par ailleurs, on travaille dans ce cas-ci avec une transformée de Fourier discrète qui échantillonne 256 valeurs<sup>5</sup>. On pourrait se dire qu'augmenter le nombre d'échantillons à 2048 par exemple devrait être bénéfique pour la résolution de la vitesse vu qu'on diminue fortement le pas de temps de l'échantillonnage. Ceci se vérifie à l'aide de l'équation (41) : augmenter le pas de temps de l'échantillonnage équivaut à augmenter  $N_{2,max}$ , ce qui diminue bien la résolution et améliore donc l'efficacité du radar. En réalité, une hypothèse assez grossière est faite : la vitesse du véhicule est supposée inchangée lors de l'envoi complet d'un train d'impulsions. Cette hypothèse tient la route à partir du moment où le nombre de signaux à envoyer n'est pas trop grand. Si l'on commence à augmenter celui-ci, la période totale d'émission augmente, et pourrait bien dépasser la seconde. Il est alors logique de dire que la vitesse d'un véhicule pourrait être modifiée avec un pas de temps aussi grand. On ne peut donc pas augmenter de trop le nombre d'impulsions à envoyer sans quoi, les mesures seront faussées.

### 2.3.3 Simulations montrant les ambiguïtés sur la distance et la vitesse



(a) Résultat de la corrélation pour le "chirp" 37

(b) Résultat de la corrélation pour le "chirp" 40

FIGURE 6: Représentation de la corrélation pour montrer les ambiguïtés

Ci-dessus est représentée l'ambiguïté sur la distance. On voit que, sur l'image de gauche, le véhicule au Nord du graphe repasse tout en-dessous au "chirp" suivant, comme montré sur l'image de droite, en raison de l'ambiguïté sur la distance. L'ambiguïté liée à la vitesse est identique mais dans les directions Ouest-Est.

5. On travaillera très souvent avec des puissances de 2 du fait que la transformée de Fourier discrète y est optimisée en terme de rapidité de calcul.

### 3 Micro-Doppler

#### 3.1 Définition et principe

En observant les résultats obtenus dans la Section précédente pour la distance et la vitesse, on remarque un phénomène d'étalement du spectre le long de l'axe des vitesses (axe lié à la fréquence) autour du point central. Ce phénomène est plus communément appelé spectre micro-Doppler et est montré à la Figure (7).

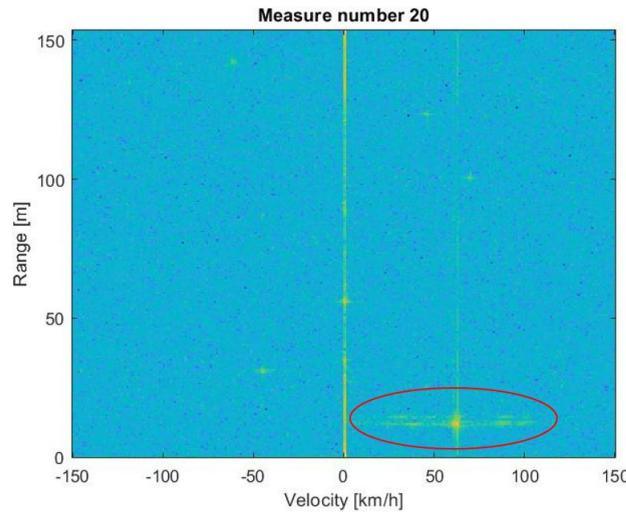


FIGURE 7: Un certain "chirp" qui permet de visualiser le micro-Doppler

Concrètement, ce phénomène est physique et se produit donc dans un cas précis. Il suffit que le radar capte un signal dû à la rotation d'un élément de la cible pour l'observer. Il peut donc intervenir dans un tas d'applications, que ce soit la rotation d'une roue d'une voiture ou encore le mouvement harmonique du bras d'un piéton. De par son apparition courante, ce phénomène est étudié en profondeur, tant au niveau de son spectre et de ses caractéristiques que de ses implications pour les ingénieurs. Rappelons tout de même que le point central sur la Figure (7) est le spectre Doppler de la cible, lié par exemple au châssis d'une voiture ou au corps d'une personne se déplaçant.

#### 3.2 Expression analytique du spectre micro-Doppler d'un véhicule

Afin de déterminer l'expression analytique du spectre micro-Doppler d'un véhicule dans le cas général, c'est-à-dire quand l'axe du radar n'est pas aligné avec celui de la roue (voir Figure (8) pour une représentation du problème et une notation des variables utilisées), quelques hypothèses sont effectuées pour simplifier les calculs :

1. L'hypothèse de champ lointain implique  $a \ll R_0$
2. L'hypothèse d'un radar monochromatique (CW) est utilisée, ce qui implique que le signal d'une roue reçu par le radar dans notre cas général est donné par  $s(\theta, \phi) = s(\Omega t, \phi) = \frac{A}{R^2(\theta, \phi)} e^{-2jkR(\theta, \phi)}$  avec  $A$  une constante complexe,  $k$  le nombre d'onde et  $R(\theta, \phi)$  la distance entre le radar et un point de la roue situé à une distance égale au rayon de la roue.

Ceci étant dit, pour obtenir l'expression analytique du spectre micro-Doppler du véhicule, on ré-exprime le signal de la roue reçu par le radar à l'aide d'un développement en séries de Taylor.

A l'aide d'un peu de trigonométrie élémentaire,  $R(\theta, \phi)$  est donné comme suit :

$$R(\theta, \phi) = R_0 \sqrt{\frac{1}{\cos^2(\phi)} + \frac{a^2}{R_0^2} + \frac{2a}{R_0 \cos(\phi)} \cos(\theta + \phi)} \quad (42)$$

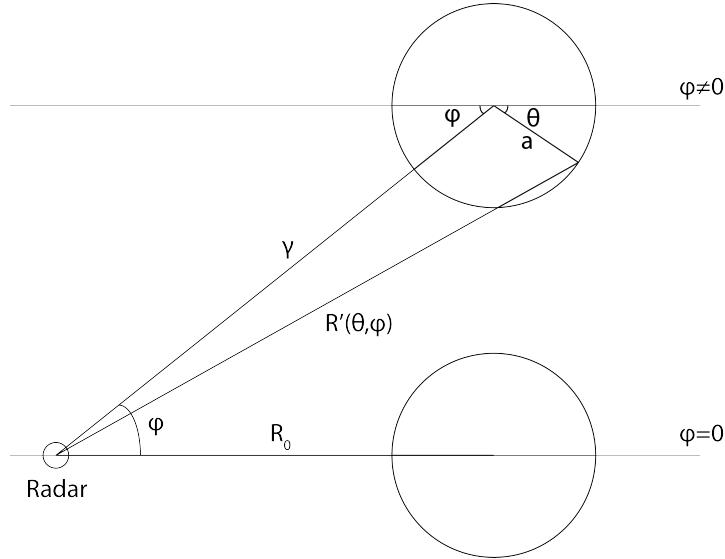


FIGURE 8: Représentation du problème étudié

Si on pose  $x = \frac{a}{R_0}$ , on peut écrire  $R(\theta, \phi)$  comme une fonction de  $x$  :  $f(x)$ . On a donc :

$$f(x) = R_0 \sqrt{\frac{1}{\cos^2(\phi)} + \frac{2x}{\cos(\phi)} \cos(\theta + \phi) + x^2} \quad (43)$$

Sous l'hypothèse de champ lointain,  $x$  tend vers 0. On peut donc légitimement réaliser un développement en séries de Taylor de la fonction  $f(x)$  autour de  $x = 0$  tronqué à l'ordre 1. On a :

$$f(x) \approx R_0 \left( \frac{1}{\cos(\phi)} + x \cos(\theta + \phi) \right) \quad (44)$$

De même,  $R^2(\theta, \phi)$  peut aussi s'écrire sous la forme d'une fonction de  $x$  :  $g(x)$  et peut donc également être approximée par une série de Taylor autour de  $x = 0$  tronqué à l'ordre 1. On a :

$$g(x) \approx \frac{R_0^2}{\cos^2(\phi)} (1 + 2x \cos(\phi) \cos(\theta + \phi)) \quad (45)$$

En développant l'expression analytique de cette fonction, on a :

$$g(x) \approx \frac{R_0^2}{\cos^2(\phi)} + 2R_0^2 x \frac{\cos(\theta + \phi)}{\cos(\phi)} \quad (46)$$

On remarque alors que, sous l'hypothèse de champ lointain, cette expression peut encore se simplifier. En effet, vu que  $x$  tend vers 0 et que le cosinus de  $\theta + \phi$  est borné entre -1 et 1, le second terme de l'expression est négligeable par rapport au premier. Par conséquent,  $\frac{R_0^2}{\cos^2(\phi)}$  est le terme dominant de l'expression et on a :

$$g(x) \approx \frac{R_0^2}{\cos^2(\phi)} \quad (47)$$

Par ailleurs, on sait par hypothèse que l'enveloppe complexe du signal reçu par le radar est donnée par :

$$s(\theta, \phi) = \frac{A}{R^2(\theta, \phi)} e^{-2jkR(\theta, \phi)} \quad (48)$$

En remplaçant  $R(\theta, \phi)$  (respectivement  $R^2(\theta, \phi)$ ) par la série de Taylor de  $f(x)$  (respectivement  $g(x)$ ) , on a :

$$s(\theta, \phi) = \frac{A \cos^2(\phi)}{R_0^2} e^{-2jk(R_0(\frac{1}{\cos(\phi)}) + \frac{a}{R_0} \cos(\theta+\phi))} \quad (49)$$

$$= \frac{A \cos^2(\phi)}{R_0^2} e^{-2jk \frac{R_0}{\cos(\phi)}} e^{-2jka \cos(\theta+\phi)} \quad (50)$$

En posant  $A' = \frac{A \cos^2(\phi)}{R_0^2} e^{-2jk \frac{R_0}{\cos(\phi)}}$ , on a :

$$s(\theta, \phi) \approx A' e^{-2jka \cos(\theta+\phi)} \quad (51)$$

Ceci étant fait, sur base de l'expression analytique de  $s(\theta, \phi)$ , on sait que l'exponentielle complexe est périodique de période  $2\pi$ . Par conséquent, on peut déterminer la série de Fourier de  $s(\theta, \phi)$ .

La série de Fourier d'une fonction périodique de  $T$  est par définition<sup>6</sup> donnée par :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{2\pi j n x}{T}} \text{ où } C_n \text{ est défini par } C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-\frac{2\pi j n x}{T}} dx = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-\frac{2\pi j n x}{T}} dx \quad (52)$$

$$s(\theta, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{2\pi j n \theta}{T}} \quad (53)$$

Les coefficients de la série de Fourier se calculent comme suit :

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(\theta) e^{-\frac{2\pi j n \theta}{T}} d\theta \quad (54)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T A' e^{-2jka \cos(\theta+\phi)} e^{-\frac{2\pi j n \theta}{T}} d\theta \quad (55)$$

Or, sur base de tables d'intégrales, on sait que :

$$\int_0^{2\pi} e^{x \cos \theta + y \sin \theta} e^{-jn\theta} d\theta = 2\pi j^n J_n(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (56)$$

Par conséquent, et en notant que  $J_n(x)$  est la fonction de Bessel d'ordre  $n$  évaluée en  $x$  :

$$s(\theta, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A' j^n J_n(2ka) e^{jn\theta} \quad \text{où} \quad A' = \frac{A \cos^2(\phi)}{R_0^2} e^{-2jk \frac{R_0}{\cos(\phi)}} \quad (57)$$

A partir de la série de Fourier d'un signal, il est aisément de trouver son spectre. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle on passe par cet artifice mathématique plutôt que par la transformée de Fourier du signal de base. Le spectre est un train de deltas modulés en amplitude par le coefficient de Fourier correspondant à un facteur  $2\pi$  près.

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A' j^n J_n(2ka)}{2\pi} \delta(\omega_0 - n\Omega) \quad (58)$$

En analysant les équations (57) et (58), on remarque que :

1. L'amplitude de chaque delta dépend en réalité de la valeur que prend chaque fonction de Bessel d'ordre différent au point  $x = 2ka$ .
  2. Le spectre obtenu est un spectre de raies à des pulsations régulières  $n\Omega$ .
- 
6. En prenant donc en compte des valeurs complexes.

3. La largeur du spectre est finie et la bande passante peut être exprimée comme  $BW = 4kv$ .

On peut également analyser deux cas particuliers au cas général présenté à la Figure (8). Soient :

- **Cas 1** :  $\phi = 0 \rightarrow$  Nous sommes dans le cas du radar aligné avec l'axe de rotation de la roue.
- En modifiant l'équation (51) du cas général, on obtient :

$$s(\theta) \approx \frac{A}{R_0^2} e^{-2jkR_0} e^{-2jka \cos \theta} \quad (59)$$

En effectuant la transformation en séries de Fourier et en connaissant la formule suivante :

$$\int_0^{2\pi} e^{-jx \cos(\theta)} e^{-jn\theta} d\theta = 2\pi j^n J_n(x) \quad (60)$$

On obtient le signal d'une roue reçu par le radar :

$$s(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A}{R_0^2} e^{-2jkR_0} j^n J_n(2ka) e^{jn\theta} \quad (61)$$

Le spectre micro-Doppler du véhicule s'écrit donc :

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{B' j^n J_n(2ka)}{2\pi} \delta(\omega_0 - n\Omega) \quad \text{avec } B' = \frac{A}{R_0^2} e^{-2jkR_0} \quad (62)$$

En d'autres mots, dans le cas où le radar est aligné avec l'axe de la roue, le train de deltas est identique au train du spectre du cas non-aligné mais l'amplitude qui règle chaque delta est différente.

- **Cas 2** :  $\phi = \frac{\pi}{2} \rightarrow$  Le radar est parfaitement perpendiculaire aux roues du véhicule et on a  $\cos \phi = 0$ . Dès lors, on a :

$$s(\theta) = 0 \times e^{-\infty} = 0 \quad (63)$$

Ceci signifie donc que l'on ne reçoit aucun signal en retour.

### 3.3 Applications du spectre micro-Doppler

Ce phénomène vient d'être étudié en long et en large pour un véhicule. Il est intéressant de savoir que si le véhicule possède une jante, le spectre micro-Doppler est influencé en fonction de la forme de celle-ci<sup>7</sup>. Ce phénomène est très présent dans la vie de tous les jours et on peut également faire la représentation du spectre micro-Doppler d'un piéton dont le bras subit un mouvement harmonique.

Le calcul du spectre micro-Doppler d'un piéton est analogue à celui d'une roue, à l'exception que l'angle  $\theta$  ne varie plus entre 0 et  $2\pi$  mais entre 2 angles  $\alpha$  et  $\beta$ . En supposant qu'il s'agit d'un mouvement en arc de cercle et que  $\phi = 0$ ,  $R(\theta)$  est donné par :

$$R(\theta) = R_0 \sqrt{1 + \frac{a^2}{R_0^2} + 2 \frac{a}{R_0} \cos \theta} \quad (64)$$

Ce qui va donc changer par rapport au cas d'une roue de voiture est le calcul des coefficients de Fourier. On a en effet :

$$C_n = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} A' e^{-2jka \cos \theta} e^{\frac{-2\pi j n \theta}{\beta - \alpha}} d\theta \quad (65)$$

7. Ceci n'est cependant pas démontré dans ce texte.

Donc, le signal reçu aura comme expression analytique :

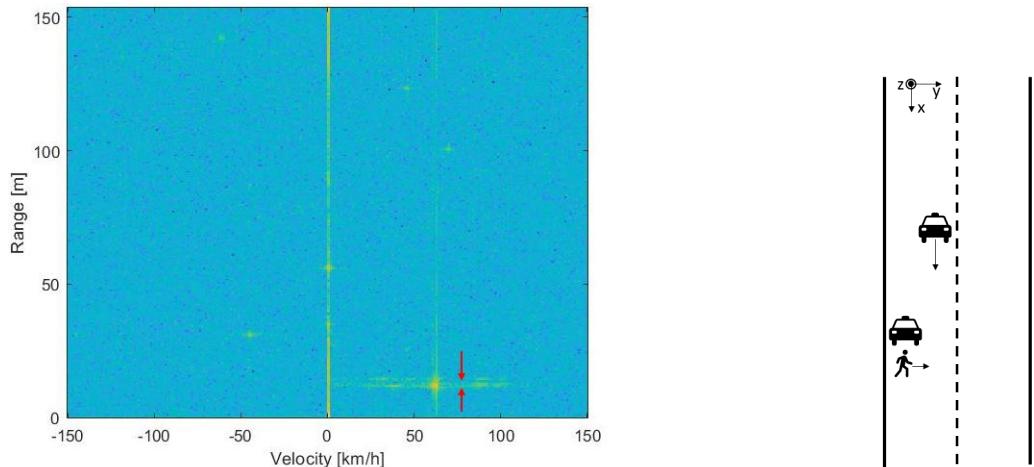
$$s(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\theta} \text{ en temporel} \quad (66)$$

$$S(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \delta(\omega_0 - n\theta) \text{ en fréquentiel} \quad (67)$$

Où les coefficients des séries de Fourier  $C_n$  ont été calculés tel que expliqué précédemment.

### 3.4 Conséquences pratiques

Le spectre micro-Doppler peut permettre de connaître certaines caractéristiques propre au véhicule capté. Plus précisément, on est par exemple en mesure de déterminer la distance inter-essieu à l'aide des résultats de la corrélation (32). Ceci est montré à la Figure (9a). Le radar capte le signal des roues arrières mais également celui des roues avant. Par conséquent, on distingue deux spectres micro-Doppler et la distance entre les deux est approximativement égale à la distance inter-essieu. La signature micro-Doppler d'une roue en rotation peut donc être utilisée comme un critère de classification.



(a) Chirp correspondant en réalité à la mesure sur une Opel Corsa - La distance inter-essieu mesurée est de 5 [m] - La vraie distance inter-essieu est de 4,02 [m] [3]

(b) Situation de la vie de tous les jours [4]

FIGURE 9: Conséquences pratiques

On a également démontré précédemment que chaque élément en rotation possédait un spectre micro-Doppler qui lui était propre et ceci a des conséquences indéniables. Considérons par exemple la situation suivante représentée à la Figure (9b).

Une voiture possédant à son bord un radar, du type étudié dans ce texte, roule sur une section de la route. Un peu plus en aval, un autre véhicule est garé et un piéton imprudent décide de traverser la route sans se soucier du reste. La situation est critique mais, heureusement, à l'aide de l'effet micro-Doppler, le radar est capable de détecter le piéton caché derrière le véhicule garé et un signal de détresse est transmis au conducteur. Celui-ci peut donc s'arrêter d'urgence et éviter la catastrophe.

## 4 Détermination des angles

Le nombre non-unitaire d'antennes réceptrices que comporte le radar permet de mesurer une caractéristique importante d'une cible, sa position angulaire. Ceci peut être utile à différentes applications. En effet, la direction angulaire permet par exemple de déterminer sur quelle bande une voiture se déplace. Ceci permet de verbaliser non seulement les voitures, mais également les bus ou les taxis, pouvant rouler sur une bande prioritaire ayant une vitesse maximum autorisée amoindrie. On peut également estimer l'endroit où se trouve une personne dans une pièce. Le radar peut donc être utilisé comme un détecteur, activant par exemple une lampe lorsque cette personne est proche de celle-ci. On utilise donc une estimation des angles et de la distance et ce scénario est représenté à la Figure (10).

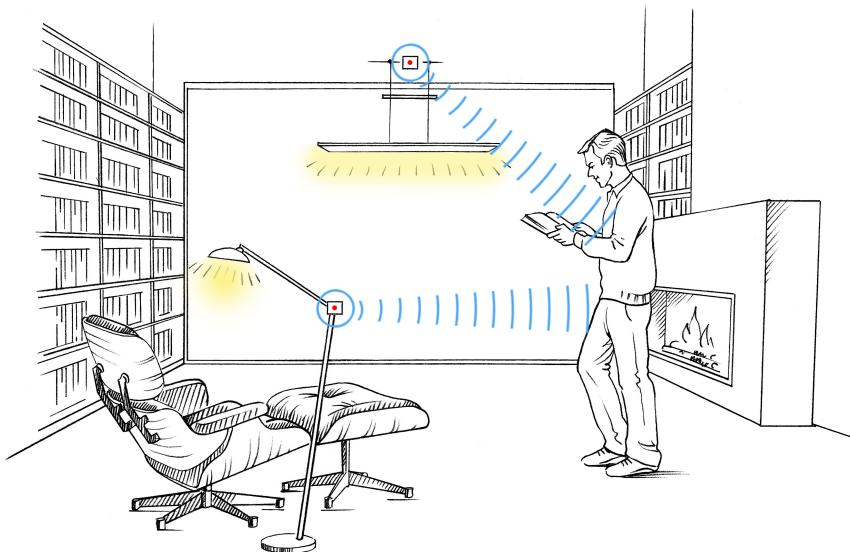


FIGURE 10: Utilisation de la direction angulaire comme interrupteur [7]

De plus, cette information d'angle, combinée à la distance, permet de donner une estimation de la position dans un repère cartésien, et donc d'augmenter la vision du radar à 4 dimensions ( $x, y, z, t$ ). Ceci est une étape cruciale à l'élargissement des domaines dans lesquels le radar est applicable. Tout ceci est rendu possible grâce aux temps de trajet différents des ondes électromagnétiques entre la cible et chaque antenne, engendrant un déphasage entre les signaux reçus. Dans la suite du rapport, l'algorithme d'estimation des angles d'azimut et d'élévation est d'abord énoncé, pour ensuite développer les différentes ambiguïtés angulaires qui peuvent apparaître ainsi que des solutions pour contourner ces ambiguïtés. Finalement, on termine par une discussion sur les erreurs liées au hardware du radar.

### 4.1 Optimisation de la corrélation donnant les angles d'azimut et d'élévation d'une cible par rapport au radar

#### 4.1.1 Expression de la corrélation

Pour estimer la position angulaire d'une cible, une corrélation a été optimisée entre l'enveloppe complexe du signal reçu et le modèle théorique du signal.

Notons  $r_f(m)$  l'enveloppe complexe du signal mesuré,  $\hat{u}$  le vecteur unitaire directeur orienté vers la cible,  $(u_x, u_y, u_z)$  ses coordonnées dans le plan cartésien du radar,  $\vec{r_m}$  le vecteur position de chaque antenne et  $F(\hat{u})$  le diagramme de rayonnement des antennes. Le signal reçu peut se modéliser comme :

$$r_f(m) = AF(\hat{u})e^{jk\hat{u} \cdot \vec{r_m}} \quad (68)$$

Si  $AF(\hat{u})$  est connu, il est possible d'isoler le vecteur directeur  $\vec{r_m}$  et de l'obtenir directement à partir de l'équation (68). Cependant, il est impossible de déterminer avec exactitude  $A$ , correspondant

à la section de la cible. En effet, cette section est généralement variable. Par exemple, dans une application routière, il est impossible pour le radar de savoir s'il détecte une petite voiture, un SUV ou même un camion. Le produit entre la section de la cible et le diagramme de rayonnement  $F(\hat{u})$  est donc inconnu.

Il est dès lors nécessaire d'opérer différemment. Soit la corrélation (69) minimisant la différence entre le signal reçu et le modèle au sens des moindres carrés.

$$C(\hat{u}) = \sum_m |r_f(m) - AF(\hat{u})e^{jk\hat{u} \cdot r_m^*}|^2 \quad (69)$$

En minimisant cette corrélation, pour toutes les valeurs possibles de  $\hat{u}$ , il est possible d'estimer la direction angulaire dans laquelle se trouve la cible. Cette corrélation va néanmoins pouvoir être simplifiée. En effet, on peut développer le carré et utiliser la propriété (28). Ensuite, on remarque que  $|A|^2|F(\hat{u})|^2$  peut être supprimé car il est constant et inconnu, de même que la constante multiplicatrice  $A^*F^*(\hat{u})$ . La corrélation (71) est obtenue :

$$C(\hat{u}) = \sum_m \{|r_f(m)|^2 + |A|^2|F(\hat{u})|^2 - 2\operatorname{Re}\{r_f(m)A^*F^*(\hat{u})e^{-jk\hat{u} \cdot r_m^*}\}\} \quad (70)$$

$$= \sum_m \{|r_f(m)|^2 - 2\operatorname{Re}\{r_f(m)e^{-jk\hat{u} \cdot r_m^*}\}\} \quad (71)$$

Ensuite, étant donné que  $r_f(m)$  est constant lorsque la corrélation est minimisée pour  $\hat{u}$  variable, il peut également être éliminé de la corrélation. Finalement, le  $-2$  peut être supprimé, faisant passer la minimisation à une maximisation. Étant donné que la maximisation de la somme de la partie réelle d'un signal est équivalente à la maximisation du module de la somme des signaux, la corrélation (72) est obtenue :

$$C(\hat{u}) = \max_{\hat{u}} \left| \sum_m r_f(m)e^{-jk\hat{u} \cdot r_m^*} \right| \quad (72)$$

#### 4.1.2 Lien avec une transformée de Fourier discrète

A partir de la corrélation (72), un lien important peut-être mis en évidence avec la transformée de Fourier discrète. Cette corrélation correspond à une transformée de Fourier discrète à deux dimensions, étant donné la position relative des antennes, représentée à la Figure (11).

Cette transformée à deux dimensions appliquée au problème est de la forme :

$$C_b(x, y) = \max_{(x,y)} \sum_x \sum_y F(x, y)K(x, y, k_x, k_y) \quad (73)$$

Le produit scalaire  $\hat{u} \cdot r_m^*$  peut être réécrit en négligeant la composante  $u_z$ , étant donné que toutes les antennes se trouvent dans le plan  $z = 0$  et que  $r_z = 0$  pour chaque antenne. Ceci permet d'obtenir la corrélation (74) composée d'une transformée de Fourier discrète à deux dimensions, ou encore deux transformées de Fourier discrètes à une dimension.

$$C_f(\hat{u}_x, \hat{u}_y) = \max_{(\hat{u}_x, \hat{u}_y)} \left| \sum_x \sum_y r_f(m)e^{-jk(u_x r_x + u_y r_y)} \right| \quad (74)$$

#### 4.1.3 Utilisation de poids

Dans cette Section, nous allons prouver qu'il est possible de ré-exprimer cette recherche de l'optimum comme l'utilisation de poids à chaque antenne avant addition des signaux. Considérons un réseau comprenant une antenne émettrice, et un réseau linéaire de  $m$  antennes réceptrices équidistantes. Tout

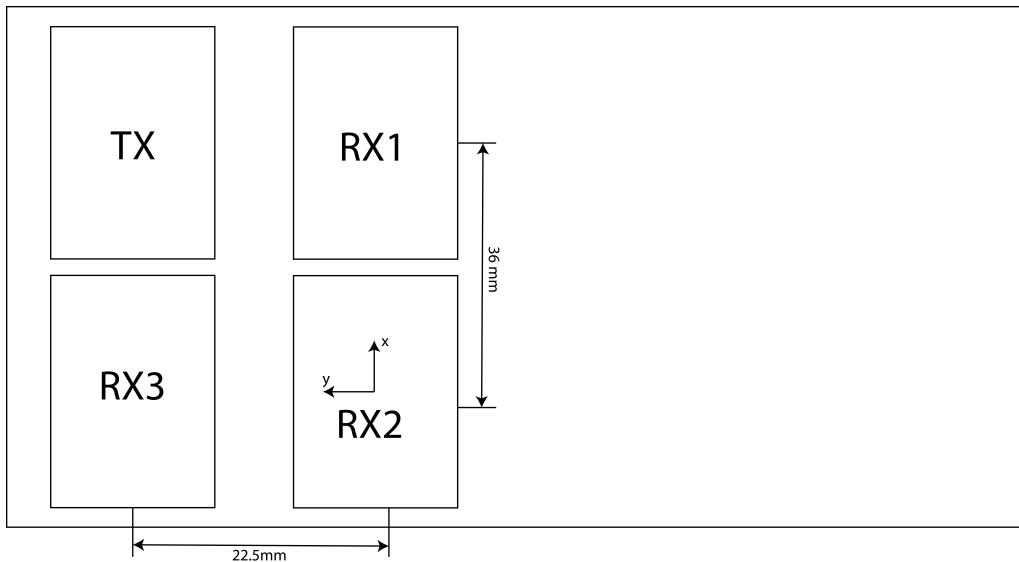


FIGURE 11: Représentation physique du radar 24 [GHz], de la position du repère et des antennes

d'abord, notons que l'onde émise par le radar est sphérique. Néanmoins, pour une distance suffisamment grande, il est autorisé d'approximer cette onde par une onde plane. C'est une hypothèse totalement acceptable car on peut considérer que l'on se trouve en champ lointain à partir du moment où l'inéquation (75) est respectée, avec  $x_l$  la distance entre le radar et la cible et  $d$  la distance entre chaque antenne.

$$x_l > \frac{2d^2}{\lambda} \quad (75)$$

C'est le cas ici car on mesure des distances de l'ordre de plusieurs dizaines de mètres par rapport à  $\frac{2d^2}{\lambda}$  qui vaut approximativement un ordre de grandeur en moins. Cela veut donc dire que sur le schéma à la Figure (12), l'angle  $\phi$  est identique pour les  $m$  antennes.

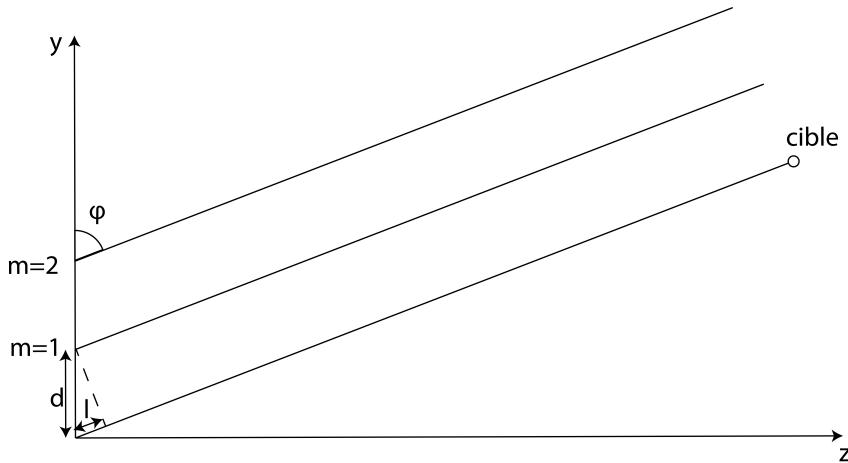


FIGURE 12: Représentation des distances caractéristiques pour un réseau de 2 antennes ( $m = \{1; 2\}$ )

Dès lors, nous pouvons remarquer que l'antenne  $m+1$  va réceptionner plus vite l'onde que l'antenne  $m$  étant donné qu'elle doit parcourir une distance  $l$  en moins. Par trigonométrie, cette distance peut se définir de la façon suivante :

$$l = md \cos \phi \quad (76)$$

A la réception, nous souhaitons que chaque antenne reçoive des ondes en phase. Nous allons donc devoir tenir compte d'un certain déphasage  $\Delta\psi = \omega\Delta t$  afin de pouvoir sommer le champ électrique

reçu relatif à chaque antenne. Pour ce faire, en première approximation, la réception se fait à la fréquence centrale  $\omega_0$  et non sur toute une bande de fréquences.

Puisque le déphasage rajouté est dû au fait que l'onde arrivant à l'antenne  $m + 1$  parcourt une distance  $l$  en moins définie par l'équation (76), le déphasage  $\Delta\psi$  peut se réécrire de la manière suivante à l'aide des données du problème :

$$\Delta\psi = \omega\Delta t \quad (77)$$

$$= \omega \frac{l}{c} \quad (78)$$

$$= \omega \frac{md \cos \phi}{c} \quad (79)$$

Puisqu'une onde est représentée par son champ électrique  $\vec{E}$ , on cherche donc à réaliser la somme suivante :

$$\vec{E}_{(0)} + \vec{E}_{(1)} + \dots + \vec{E}_{(m-1)} \text{ où } \vec{E}_{(i)} \text{ est le champ électrique de l'antenne } i \quad (80)$$

En définissant un poids  $W_m = e^{j\Delta\psi}$  pour chaque onde reçue, ceci revient à calculer la somme des  $m$  termes de la suite géométrique suivante :

$$\sum_{k=0}^{m-1} E e^{jk\Delta\psi} \quad (81)$$

Etant donné que l'approximation de champ lointain est acceptable, l'amplitude du champ électrique  $E$  parvenant à chaque antenne peut être considérée comme constante. Il reste donc à calculer :

$$\sum_{k=0}^{m-1} E e^{jk\Delta\psi} = E \sum_{k=0}^{m-1} e^{jk\Delta\psi} \quad (82)$$

$$= E \times S \quad (83)$$

La somme  $S$  correspond à la somme de  $m$  termes d'une suite géométrique de raison  $q = e^{j\Delta\psi}$ . Elle se calcule de la façon suivante :

$$S = \frac{1 - q^m}{1 - q} = \frac{1 - e^{jm\Delta\psi}}{1 - e^{j\Delta\psi}} \quad (84)$$

$$= \frac{e^{j\frac{m\Delta\psi}{2}} (e^{j\frac{m\Delta\psi}{2}} - e^{-j\frac{m\Delta\psi}{2}})}{e^{j\frac{\Delta\psi}{2}} (e^{j\frac{\Delta\psi}{2}} - e^{-j\frac{\Delta\psi}{2}})} \quad (85)$$

$$= e^{j\frac{\Delta\psi}{2}(m-1)} \frac{\sin \frac{m\Delta\psi}{2}}{\sin \frac{\Delta\psi}{2}} \quad (86)$$

Notons que sur base de l'équation (79), cette dernière équation peut encore se réécrire à l'aide des données du problème.

En pratique, le modèle du signal reçu par l'antenne  $m$  est donné par :

$$E(\vec{r}_m) = AF(\hat{u}) e^{jk\hat{u} \cdot \vec{r}_m} \quad (87)$$

Par conséquent, le champ électrique total est donné par

$$E_{tot}(\vec{r}_m) = \sum_{k=0}^{m-1} AF(\hat{u}) e^{jk\hat{u} \cdot \vec{r}_m} \quad (88)$$

$$= AF(\hat{u}) \sum_{k=0}^{m-1} e^{jk\hat{u} \cdot \vec{r}_m} \quad (89)$$

En effectuant une identification terme à terme, on remarque que  $S = \sum_{k=0}^{m-1} e^{jk\hat{u} \cdot \vec{r}_m}$ . L'amplitude du champ électrique est donc donnée par  $E = AF(\hat{u})$ . Ainsi, le champ électrique total est donné par l'équation suivante :

$$E_{tot} = AF(\hat{u})e^{j\frac{\Delta\psi}{2}(m-1)} \frac{\sin \frac{m\Delta\psi}{2}}{\sin \frac{\Delta\psi}{2}} \text{ où } \Delta\psi = \omega \frac{md \cos \phi}{c} \quad (90)$$

Ainsi, le terme  $e^{-jk\hat{u} \cdot \vec{r}_m}$  présent dans la corrélation (72) correspond au poids  $W_m$  à rajouter afin que les ondes reçues aux différentes antennes soient toutes en phase.

#### 4.1.4 Estimation des angles d'azimut et d'élévation

A partir des estimations de  $u_x$  et de  $u_y$  obtenues par la corrélation (72), à l'aide de la trigonométrie et en se basant sur le repère utilisé (voir Figure (13)), il est possible de calculer l'angle azimutal  $\phi$  et l'angle d'élévation  $\theta$ . Ceci permet d'avoir la direction angulaire d'une cible.

$$\begin{cases} \theta = \arccos(u_x) \\ \phi = \arccos(u_y) \end{cases} \quad (91)$$

Malheureusement, il n'est à notre échelle possible que d'estimer la position angulaire d'une seule cible. En effet, notre algorithme détecte le maximum de la corrélation (72). S'il existe plusieurs cibles, il va exister plusieurs "maxima" dans la corrélation, avec un qui sera probablement plus élevé que les autres. Celui-ci sera le maximum détecté par la corrélation et les autres cibles ne seront donc pas déterminées. Pouvoir capter plusieurs cibles est un fait important qui sera abordé dans les améliorations possibles. Il suffit en soit de changer d'algorithme de détection.

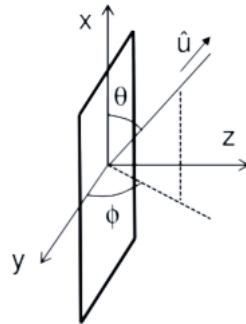


FIGURE 13: Repère utilisé - le rectangle en perspective représente une antenne

## 4.2 Ambiguïtés angulaires

### 4.2.1 Expression des ambiguïtés à partir de la transformée de Fourier discrète

Étant donné que la transformée de Fourier discrète est périodique de période  $2\pi$ , et que l'exponentielle complexe nous donne la même valeur à  $2\pi$  près dans l'argument, il est possible de représenter l'ambiguïté sur l'angle  $\phi$  et donc sur  $u_y$ . Soit  $r_{y,m} = md_y$  la position en  $y$  de l'antenne  $m$ .

$$\sum_m r_f(m) e^{-jkr_{y,m}\hat{u}_y} = \sum_m r_f(m) e^{-jm\Omega} = \sum_m r_f(m) e^{-jm(\Omega+2q\pi)} \quad (92)$$

Soit  $u_{y,0}$  le cosinus directeur correspondant à la vraie position angulaire de la cible, et  $u_y$  l'estimation obtenue de ce cosinus directeur. A partir de la dernière équation, on comprend que la valeur estimée de  $\Omega$  peut correspondre à la vraie valeur de  $\Omega$  incrémentée de  $2q\pi$ , avec  $q$  un entier.

$$kd_y\hat{u}_y + 2q\pi = kd_yu_{y,0} \quad (93)$$

$$u_{y,0} = \hat{u}_y + \frac{2q\pi}{kd_y} \quad (94)$$

Cette équation va nous donner des informations importantes relatives aux ambiguïtés. En effet, on peut obtenir la largeur des intervalles ne comportant pas de direction ambiguë dans le plan des cosinus directeur, notée  $\Delta u_y$ .

$$\Delta u_y = \frac{2\pi}{kd_y} = \frac{\lambda}{d_y} = 0,56 \text{ [rad]} \quad (95)$$

La largeur de l'ouverture centrée en  $\phi = 90^\circ$  et ne contenant pas d'ambiguïté est donc obtenue comme suit, avec  $d_y = 0,0225 \text{ [m]}$ .

$$\Delta\phi_{non-amb} = 90 - \arccos\left(\frac{\lambda}{d_y}\right) = 33,74^\circ \quad (96)$$

En appliquant ces équations au radar fourni pour estimer l'angle d'azimut, nous réduisons notre domaine d'analyse à l'intervalle (97).

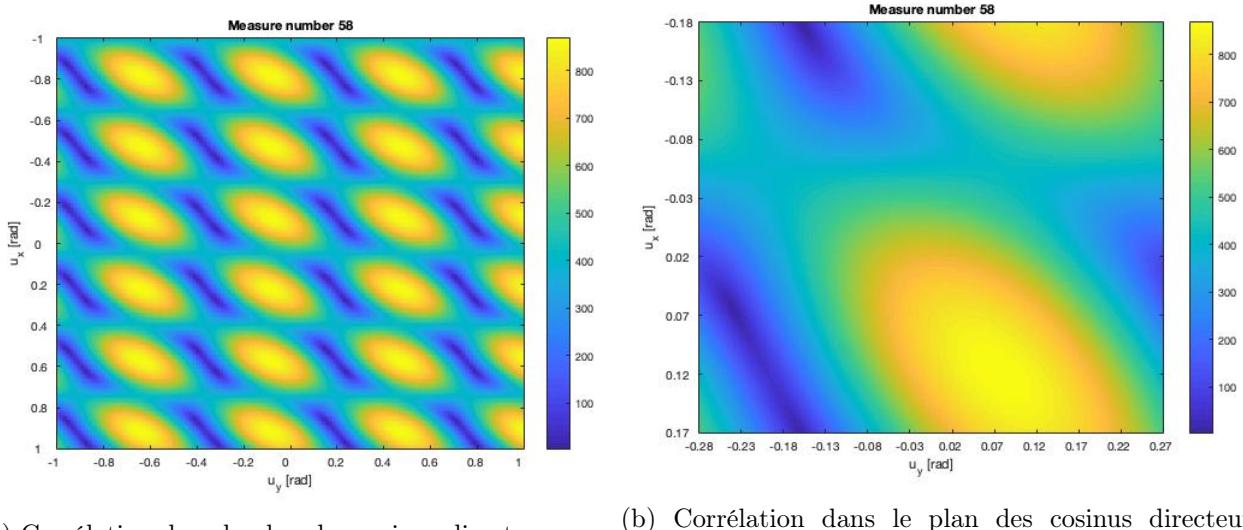
$$\phi \in [73, 13; 106, 87]^\circ \text{ et } u_y \in [-0, 28; 0, 28] \text{ [rad]} \quad (97)$$

Par un raisonnement similaire sur l'angle d'élévation  $\theta$ , étant donné que  $d_x = 0,036 \text{ [m]}$ , on obtient l'intervalle (98) :

$$\theta \in [79, 84^\circ; 100, 16^\circ] \text{ et } u_x \in [-0, 18; 0, 18] \text{ [rad]} \quad (98)$$

#### 4.2.2 Représentation des ambiguïtés

Tout d'abord, il est possible de représenter la corrélation (74) dans le plan des cosinus directeurs  $(u_y, u_x)$ . On obtient la Figure (14a).



(a) Corrélation dans le plan des cosinus directeurs  $(u_y, u_x)$

(b) Corrélation dans le plan des cosinus directeurs  $(u_y, u_x)$  avec limitation des recherches de cosinus directeurs

FIGURE 14: Représentation de la corrélation

Les points jaunes correspondent aux maxima de la corrélation. On remarque bien qu'il y en a 6 dans la directions  $u_x$ , correspondant à  $\theta$ , et 3 voire 4 dans la direction  $u_y$ , correspondant à  $\phi$ . Si le domaine de recherche n'est pas limité aux intervalles (97) et (98), environ 24 maxima seront obtenus à partir de la corrélation. L'information sera donc inexploitable. En limitant les recherches aux intervalles discutés précédemment, on obtient une corrélation représentée à la Figure (14b). Cette corrélation contient un seul et unique maximum, correspondant à l'angle estimé. Notez qu'un autre maximum est très proche de l'intervalle évalué mais tout de même en dehors.

Pour représenter les ambiguïtés, il est aussi possible d'afficher l'équation (94) appliquée à  $u_x$  et  $u_y$ , pour différentes valeurs de l'entier  $q$ . On obtient les Figures (15a), pour  $u_y$  et (15b), pour  $u_x$ . On y observe que pour chaque estimation d'angle, il existe plusieurs possibilités d'angles réels. Cependant, en limitant l'intervalle de recherche, il est possible d'avoir une relation bijective entre l'angle estimé et l'angle réel, représentée aux Figures (16a) et (16b).

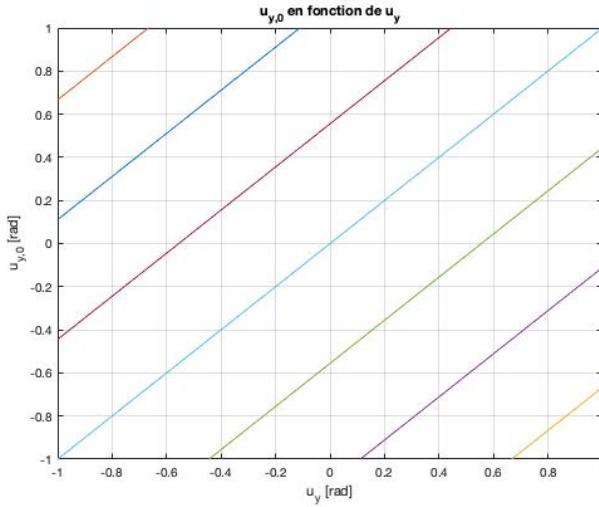
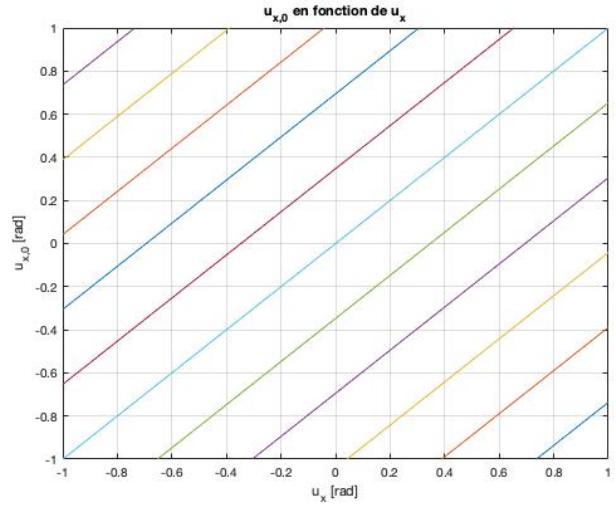
(a) Ambiguïtés sur  $u_y$ (b) Ambiguïtés sur  $u_x$ 

FIGURE 15: Représentation des ambiguïtés angulaires

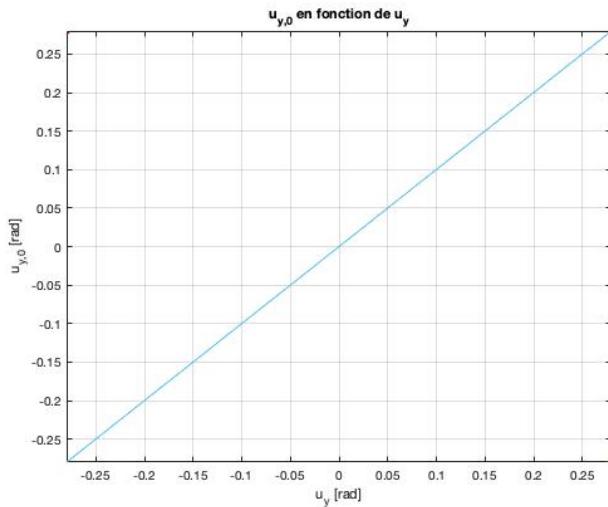
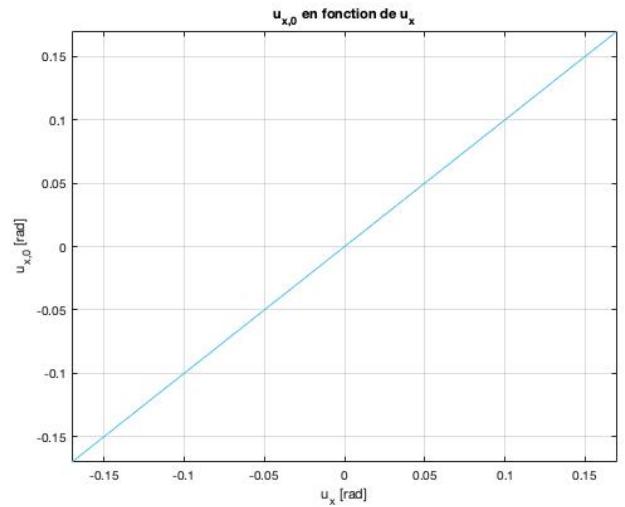
(a) Relation bijective entre  $u_{y,0}$  et  $u_y$ (b) Relation bijective entre  $u_{x,0}$  et  $u_x$ 

FIGURE 16: Représentation de l'inexistence des ambiguïtés si les intervalles de recherche de cosinus directeurs sont limités

Notez que l'on remarque à l'aide de ces graphes qu'il y a entre 3 et 4 directions ambiguës pour  $u_y$  et entre 5 et 6 pour  $u_x$ . On remarque donc bien que le nombre de directions ambiguës dépend de la position angulaire de la cible.

#### 4.2.3 Comment éviter l'apparition d'ambiguïtés ?

Pour un radar fonctionnant à une fréquence de 24 [GHz] et ayant une bande passante de 250 [MHz], le nombre de directions ambiguës est assez élevé. Ceci est plutôt embêtant, car cette contrainte diminue

les libertés de mesure. En effet, pour un angle  $\phi$  estimé, il existe jusqu'à quatre possibilités d'angle réel, mais bien évidemment, seulement une seule est correcte. Il est donc intéressant de réfléchir à différentes possibilités permettant d'éviter les problèmes liés aux ambiguïtés.

Premièrement, il est possible de diminuer la distance entre les antennes. En effet, il serait idéal que  $\phi$  et  $\theta$  puissent être compris entre  $0 [^\circ]$  et  $180 [^\circ]$  sans ambiguïté, pour éviter de devoir les évaluer dans des intervalles restreints. Autrement dit, il est intéressant de trouver la distance maximale entre les antennes pour que les directions ambiguës apparaissent au pire en  $\phi = \{0, 180\} [^\circ]$  et en  $\theta = \{0, 180\} [^\circ]$ . Pour cela, on se base sur l'équation (95). En posant  $\phi = 0$ , on trouve :

$$0 = \arccos\left(\frac{\lambda}{2d_{max}}\right) \Leftrightarrow d_{max} = \frac{\lambda}{2} = 0,0063 [m] \quad (99)$$

Pour  $\phi = 180 [^\circ]$ , la distance est la même à un signe moins près. Le raisonnement ainsi que la valeur pour  $d_{max}$  est évidemment le même pour  $\theta$ .

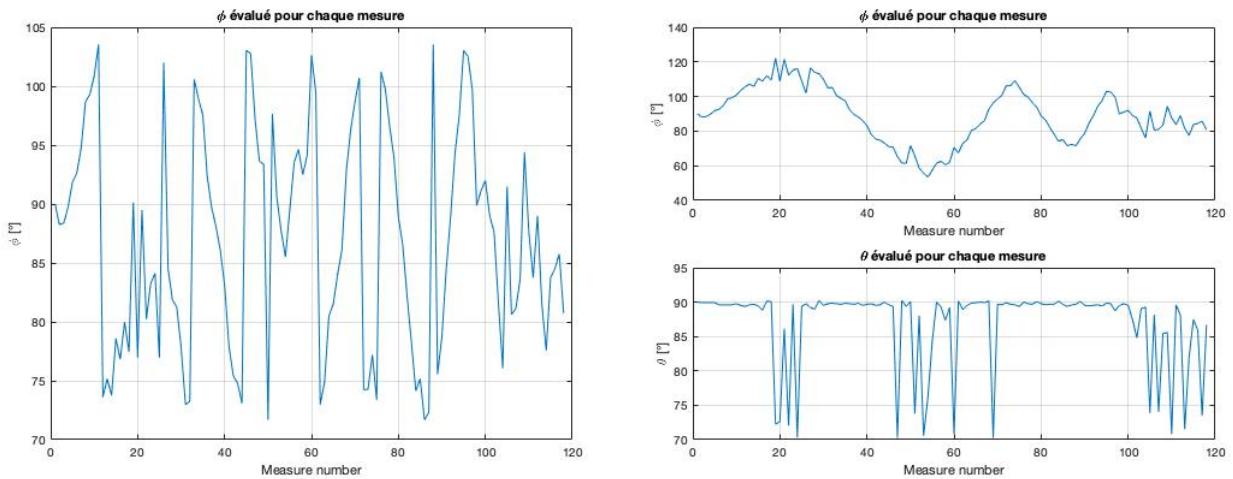
Il est intéressant de se rendre compte que ce raisonnement est un peu extrême. En effet, il n'est généralement pas nécessaire de pouvoir mesurer les cibles avec une ouverture de  $180 [^\circ]$ . Une distance plus élevée entre les antennes est donc acceptable. De plus, des antennes respectant les valeurs des distances inter-antennes citées dans l'équation (99) sont très coûteuses.

Une deuxième possibilité pour éviter les ambiguïtés est de connaître la direction angulaire initiale de la cible. En effet, les intervalles ne comprenant pas d'ambiguïté sont connus. En connaissant la direction angulaire initiale, chaque passage entre deux intervalles peut être corrigé lors de l'exploitation des données. En effet, il est possible de créer un algorithme de détection de ces grandes variations d'angles et, si elles apparaissent, d'estimer qu'elles correspondent aux ambiguïtés, et d'augmenter ou de diminuer alors toutes les mesures suivantes de  $33,74 [^\circ]$  pour ce qui est de  $\phi$ , et  $20,31 [^\circ]$  pour  $\theta$ .

L'estimation de l'angle  $\phi$ , sans correction des ambiguïtés, est représentée à la Figure (17a). On remarque entre certaines mesures de grosses variations, correspondant au passage par une direction ambiguë. Sur le haut de la Figure (17b), le  $\phi$  a été corrigé grâce à l'algorithme expliqué précédemment. Notez que l'on remarque que pour  $\phi > 110 [^\circ]$  et lorsque  $\phi < 70 [^\circ]$ , les mesures sont moins précises, avec l'apparition d'outliers visibles dans l'estimation de  $\theta$  correspondante et représentée sur le bas de la Figure (17b)<sup>8</sup>. Ceci est dû à un rayonnement plus faible, engendrant des maxima pour la corrélation plus faibles, pouvant être confondus avec d'autres bruits parasites.

---

8. Notez que sur ces simulations, seules les ambiguïtés ont été gérées. Ceci est possible étant donné la position angulaire initiale  $(\phi, \theta) = (0, 0) [^\circ]$  connue. Une élimination des outliers ainsi qu'une amélioration des données sera discutée dans la Section 5

(a) Estimation de l'angle  $\phi$  sans correction des ambiguïtés(b) Estimation de l'angle  $\theta$  et de l'angle  $\phi$  avec correction des ambiguïtésFIGURE 17: Estimation de  $\phi$  et  $\theta$  (données "azimut")

### 4.3 Erreur liée au Hardware

Théoriquement, les signaux après addition sont en phase et cela permet, à l'aide de la corrélation à maximiser, de trouver les angles  $\phi$  et  $\theta$  de la cible. En réalité, les choses ne se présentent pas aussi facilement. Nous mesurons toujours<sup>9</sup> une erreur de phase due au hardware du radar. En effet, la longueur des lignes de transmission diffère pour chaque antenne, ce qui entraîne un déphasage temporel des signaux reçu par chaque antenne. Si une ligne de transmission est plus courte dans une antenne que dans une autre, le signal a une distance plus faible à parcourir, et vu que les ondes se déplacent toutes à la même vitesse (en faisant l'hypothèse que le milieu dans lequel les ondes se propagent ne change pas d'une antenne à une autre), le temps sera plus court. Vu qu'on ne peut pas changer le hardware du radar, il est illogique de raisonner la dessus et il faut donc supprimer cette erreur de phase d'une manière différente.

En pratique, pour se rendre compte de cette erreur de phase, il est possible d'effectuer une mesure d'une cible se trouvant parfaitement en face du radar, c'est-à-dire à des angles  $(\phi, \theta) = (90, 90)$  [°], qu'on appellera la mesure de calibration. Le radar nous fournira des données qui nous indiqueront un certain angle  $\phi$  et un certain angle  $\theta$ . De par notre mesure, nous savons avec certitude que les angles doivent être égaux à 90 [°] chacun. Par conséquent, l'angle  $\frac{\pi}{2} - \phi$  (respectivement  $\frac{\pi}{2} - \theta$ ) déterminé par le radar est égal à l'erreur de phase due à cet angle. Connaissant maintenant les deux erreurs de phases, il nous suffit dans le software de multiplier notre signal mesuré par  $e^{j\phi_{error}}$ .

Grâce à la mesure "phi\_0theta\_0", on observe un déphasage dû au hardware pour  $\phi$  d'environ  $-2,2^\circ$  et pour  $\theta$  d'environ  $9,5^\circ$ .

9. Il est quasi impossible de créer dans les différentes antennes des lignes de transmission de longueur parfaitement égales au vu de la précision requise. De plus, la précision requise est de l'ordre de la longueur d'onde, et donc le déphasage dû à cette imprécision est grand.

## 5 Défi : extension au radar à 77,5 [GHz]

### 5.1 Objectif du challenge

Le but de ce challenge est de mettre en application tous les concepts vus et expliqués précédemment afin de déterminer, avec exactitude, la position d'une cible dans l'espace 4D<sup>10</sup>. Il faut donc être capable dans un premier temps de déterminer la distance à vol d'oiseau en utilisant la corrélation (32). Ensuite, il est également nécessaire d'utiliser la corrélation (74) afin de déterminer les angles d'azimut et d'élévation. Une fois ces paramètres estimés, il suffit d'effectuer de la trigonométrie élémentaire en repère sphérique afin d'obtenir les positions  $x$ ,  $y$  et  $z$  du plan cartésien.

### 5.2 Comparaison avec le radar à 24 [GHz]

Les spécifications du nouveau radar sont différentes par rapport au radar étudié précédemment. Le radar utilisé lors du défi est composé de 16 antennes positionnées dans le plan  $(x, y)$  à des endroits spécifiques et espacées d'une distance égale à la moitié de la longueur d'onde.

$$d_x = d_y = d = \frac{\lambda}{2} = 1,95 \text{ [mm]} \quad (100)$$

Cette distance, comme discuté à la Section 4.2.3, permet de ne pas obtenir d'ambiguïté sur les angles d'azimut et d'élévation. La relation entre l'angle réel et l'angle estimé est donc bijective, sans correction nécessaire, comme représenté à la Figure (18).

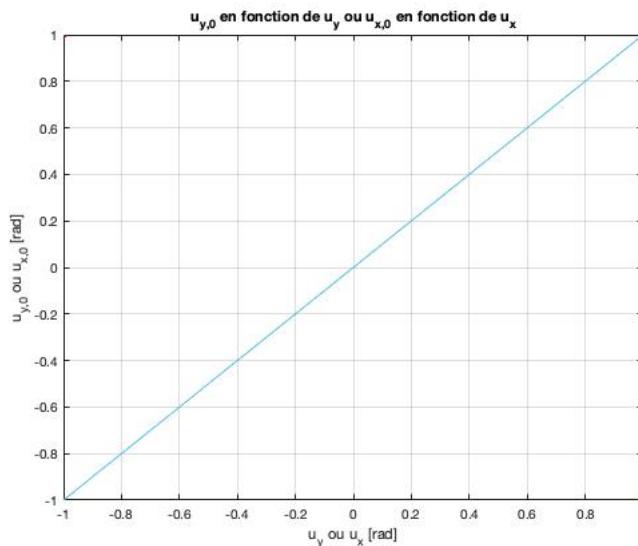


FIGURE 18: Graphe de  $u_{y,0}$  en fonction de  $u_y$  ou  $u_{x,0}$  en fonction de  $u_x$

La fréquence centrale du radar est de 77,5 [GHz] et sa bande passante est de 3 [GHz]. De plus, le nombre de "chirps" est réduit à 200 et le nombre d'échantillons au sein de chaque "chirp" à 128. Ces deux dernières variations réduisent la quantité des données à analyser et donc également le nombre de points de chaque transformée de Fourier 1D. L'ensemble des paramètres est la cause d'une variation de la distance maximale, de la vitesse maximale et de la résolution liée à la distance et à la vitesse. On peut tout simplement reprendre les équations (36) et (40) et en changer les paramètres pour obtenir les nouvelles valeurs :

10. Espace (x,y,z,t)

$$d_{max} \leq \frac{cN_{2,max}}{2\Delta f} = 6,4 \text{ [m]} \Rightarrow res_d = \frac{d_{max}}{128} = 0,05 \text{ [m]} \quad (101)$$

$$v_{max} \leq \frac{c}{4T_r f_0} = 8,709 \left[ \frac{\text{km}}{\text{h}} \right] \Rightarrow res_v = \frac{2.v_{max}}{200} = 0,08709 \left[ \frac{\text{km}}{\text{h}} \right] \quad (102)$$

La comparaison entre les deux radars est montrée sous forme de tableau récapitulatif à la Section (6) qui suit.

On remarque qu'utiliser le radar à une fréquence centrale plus élevée implique une nette diminution de la distance maximale (et la vitesse maximale) déterminable par le radar. Ceci implique donc que le radar à 77,5 [GHz] est inutile pour mesurer des véhicules. Néanmoins, celui-ci est fort intéressant pour déterminer la position de piétons.

### 5.3 Justification et implémentation de l'algorithme utilisé

Le but du défi est de trouver les positions d'une cible en coordonnées cartésiennes pour un nombre fini de "chirps" envoyés par le radar. L'algorithme utilisé se divise donc en deux parties.

Premièrement, on décide d'implémenter la corrélation (32) sur Matlab. Celle-ci permet de déterminer la distance entre le radar et la cible. Le principe utilisé est exactement identique à ce qui a été expliqué à la Section 2. La distance étant connue, il est ensuite nécessaire de s'intéresser aux angles d'azimut et d'élévation.

On décide d'utiliser la corrélation (74) qui réalise une transformée de Fourier discrète en deux dimensions, une première dans la direction  $x$  et une seconde dans la direction  $y$  du repère cartésien.

Le radar du défi possède 16 antennes réceptrices, dont les positions spatiales sont représentées à la Figure (19). Cette disposition a pour conséquence que l'on va réaliser deux transformées de Fourier discrètes de respectivement 16 et 5 points. Cependant, étant donné que le nombre de points évalués par la transformée de Fourier discret est assez faible, on décide de faire du zéropadding.

Le zéropadding consiste à augmenter à l'aide de zéros la taille du vecteur de points utilisés par la transformée de Fourier discrète. De par cette manipulation, 256 points sont utilisés dans les deux directions (au lieu de 5 et 16). Cet artifice mathématique ne change en rien les données mais améliore la précision des estimations étant donné qu'on évalue en plus de points. En pratique, sur Matlab, on place pour chaque antenne le "chirp" qui maximise la corrélation à sa position relative dans une matrice  $16 \times 5$ . Ensuite, on effectue une transformée de Fourier 2D avec du zéropadding.

Cependant, utiliser une seule donnée par matrice, à savoir le maximum de la corrélation, pour obtenir la position angulaire est très peu précis. Il est plus adapté d'utiliser le "chirp" contenant le maximum dans son entièreté, et donc de calculer autant de transformée de Fourier discrète par mesure que le "chirp" ne contient d'éléments. Ensuite, une moyenne de ces transformées permet d'obtenir des mesures beaucoup plus adaptées et beaucoup plus précises. Ceci engendre un temps de calcul élevé mais est bénéfique pour obtenir une estimation précise. Les erreurs de mesures sont amoindries et l'estimation finale bien meilleure.

Après avoir effectué ceci, nous avons toutes les informations requises pour trouver les coordonnées cartésiennes de la cible. En effet, nous connaissons  $(d, \theta, \phi)$  qui correspondent à des coordonnées dans un repère sphérique et il suffit simplement de passer en repère cartésien. On remarque cependant que les données obtenues présentent des imperfections qu'il est nécessaire de corriger.

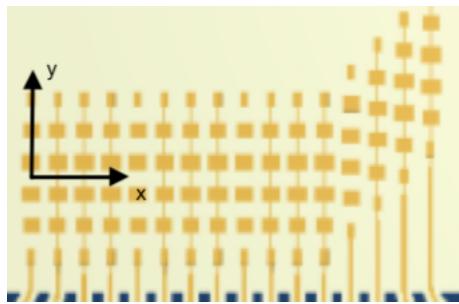


FIGURE 19: Antennes réceptrices du radar 77,5 [GHz] [9]

## 5.4 Améliorations

Un élément portant de ce défi est l'absence d'ambiguïté. En effet, ces dernières sont très lourdes à implémenter. Il existe cependant un certain nombre d'imperfections dans les données mesurées par le radar, engendrées à la fois par le bruit, par les imperfections de mesure et par les non-idealités. Celles-ci vont être expliquées et des solutions vont être apportées. Les données avant améliorations sont représentées à la Figure (20).

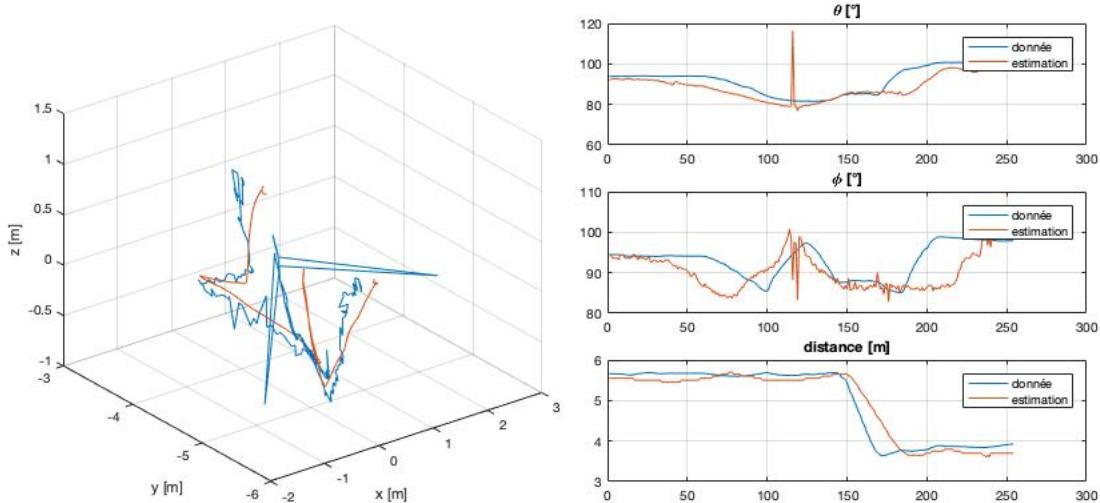


FIGURE 20: Simulation des données LV pour le défi sans amélioration

### 5.4.1 Données aberrantes

Les "données aberrantes", communément appelées outliers, correspondent à des erreurs de mesures qui doivent être éliminées. Une donnée est considérée comme un outlier si elle est en dehors de l'intervalle (103). Avec  $Q_1$  le premier quartile,  $Q_3$  le troisième quartile et  $IQR = Q_3 - Q_1$  l'écart interquartile.

$$[Q_1 - 1,5 IQR; Q_1 + 1,5 IQR] \quad (103)$$

Il a donc été décidé arbitrairement d'éliminer ces outliers et de les remplacer par la moyenne entre la valeur précédente et la suivante. Si la suivante était également un outlier, alors l'algorithme remplace par la moyenne entre la précédente et celle d'après, etc. Notez que ces améliorations ont été réalisées sur les données  $\phi$  et  $\theta$  à l'aide de la fonction Matlab `isoutlier(x)` renvoyant un booléen pour chaque valeur du vecteur  $x$  donnant l'information permettant de déterminer si une donnée est un outlier ou non.

### 5.4.2 Filtre médian

Une autre amélioration réalisée est l'utilisation d'un filtre médian à une dimension couramment utilisée en numérique car il permet de réduire le bruit. L'idée principale est que le filtre remplace chaque entrée par la valeur médiane de son voisinage. Pour les données du défi, il a été déterminé par essai-erreur que la meilleure dimension pour le filtre soit de 9. Ceci signifie que le filtre est réalisé sur une entrée en tenant compte des 4 entrées directement à gauche et des 4 entrées directement à droite.

Ce filtre a été réalisé à l'aide de la fonction MatLab `medfilt1(x,n)`, avec  $x$  le signal à filtrer, et  $n$  l'ordre. Ses résultats sont très satisfaisants et permettent d'améliorer et de lisser l'estimation de la position dans le plan cartésien.

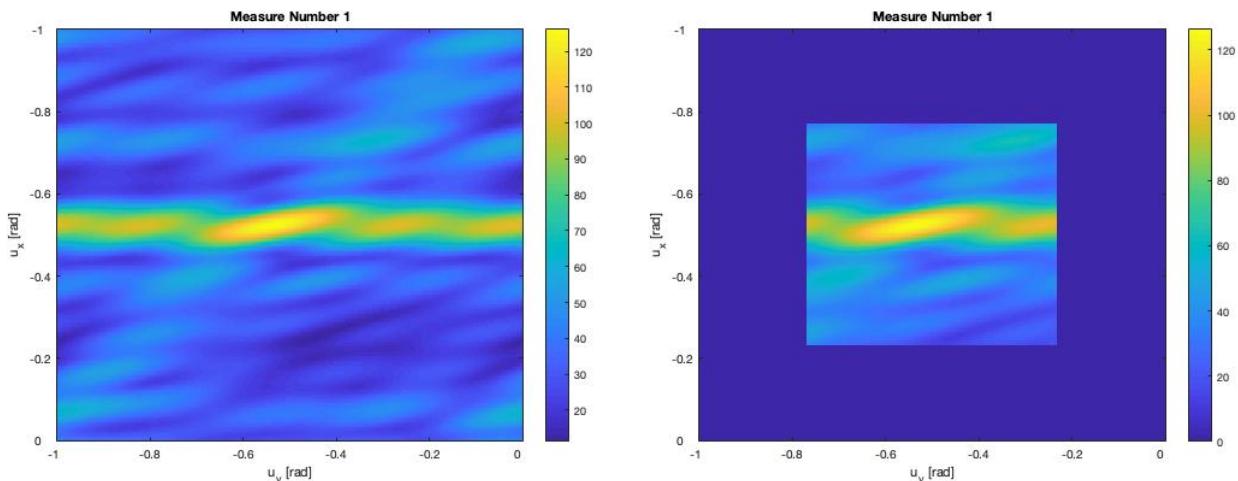
### 5.4.3 Lissage des données

Les données comme telle restent très peu lisses. Il est donc intéressant d'utiliser un filtre de Savitzky-Golay. Ce filtre est utile lorsque les données varient rapidement et, dans notre cas, il semblait le mieux adapté parmi d'autres testés.

Pour réaliser ceci, la fonction `smoothdata(x,'sgolay')` a été utilisée. Ce filtre lisse le vecteur  $x$  en respectant un polynôme quadratique ajusté sur chaque fenêtre de celui-ci.

### 5.4.4 Limitation de la zone d'évaluation de la corrélation

Il est vrai que le radar 77,5 [GHz] peut déterminer des angles compris entre 0 et 180 [ $^{\circ}$ ]. Cependant, il est réaliste de supposer que la cible se trouvera dans une ouverture moindre. Une fenêtre limitée à  $136 \times 136$ , déterminée par essai-erreur, permet d'éviter la détection de certains parasites et est tout à fait réaliste pour la détection de cible. Aux Figures (21a) et (21b), on retrouve la corrélation avant et après limitation de l'angle d'ouverture. Cette limitation se fait en remplaçant par 0 les valeurs non-comprises dans la fenêtre centrée de  $136 \times 136$ .



(a) Corrélation dans le plan des cosinus directeurs ( $u_y, u_x$ )

(b) Corrélation dans le plan des cosinus directeurs ( $u_y, u_x$ ) avec limitation des recherches d'angles

FIGURE 21: Représentation de la corrélation

### 5.4.5 Déphasage lié au Hardware

Lors de l'analyse des données du défi, il semble qu'il existe un déphasage en  $\phi$  et en  $\theta$ , comme discuté à la Section 4.3. Après approximation, on trouve :

$$\phi_{error} \simeq 2,1 [{}^{\circ}] \quad (104)$$

$$\theta_{error} \simeq 2,5 [{}^{\circ}] \quad (105)$$

Ceci permet de rapprocher nos estimations des vraies valeurs de  $\phi$  et  $\theta$ . Ce déphasage pourrait également être engendré par un mauvais alignement entre le radar et l'appareil de mesure.

#### 5.4.6 Position entre le radar et l'appareil de mesure

Les mesures exactes de positions de la cible pour le défi ont été effectuées grâce à un appareil de mesure très précis. Avec du bon sens, il est aisément de supposer que l'appareil ne se trouve pas exactement en  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  dans le plan du radar (cfr Figure (13)). Grâce aux données, il a été estimé que la position de l'appareil de mesure dans le plan du radar était :

$$(x_{mes}, y_{mes}, z_{mes}) \simeq (0, 0.05, 0) [m] \quad (106)$$

L'appareil de mesure de la position serait donc situé à 5 [cm] à côté du radar, ce qui semble possible.

#### 5.4.7 Discussion des résultats

Pour le défi, les résultats sont vraiment satisfaisants. En effet, la distance ainsi que l'angle  $\theta$  ont été très bien estimés. L'estimation de  $\phi$  est elle un peu moins précise, surtout pour la simulation *LV*. Ceci est du au fait qu'il n'y a que 5 antennes dans la direction  $y$  contre 16 dans la direction  $x$ .

Cependant, dans l'ensemble, et comme on peut le voir sur le plot dans le plan cartésien aux Figures (22) et (23), les résultats sont très proches de ce qui a été enregistré par l'appareil de mesure, et nettement meilleurs que la simulation avant améliorations représentée à la Figure (20)

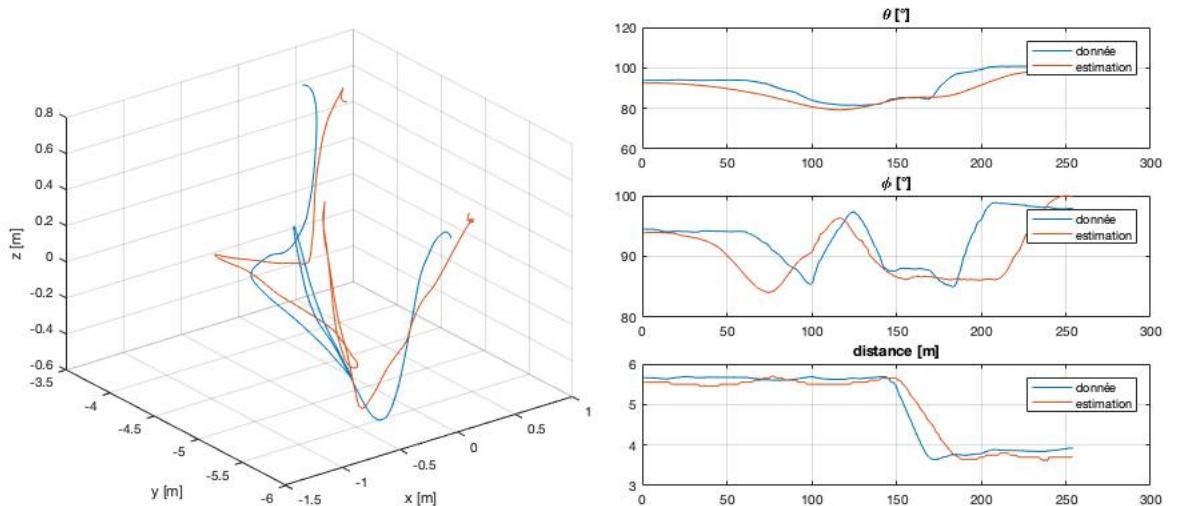


FIGURE 22: Simulation des données LV pour le défi

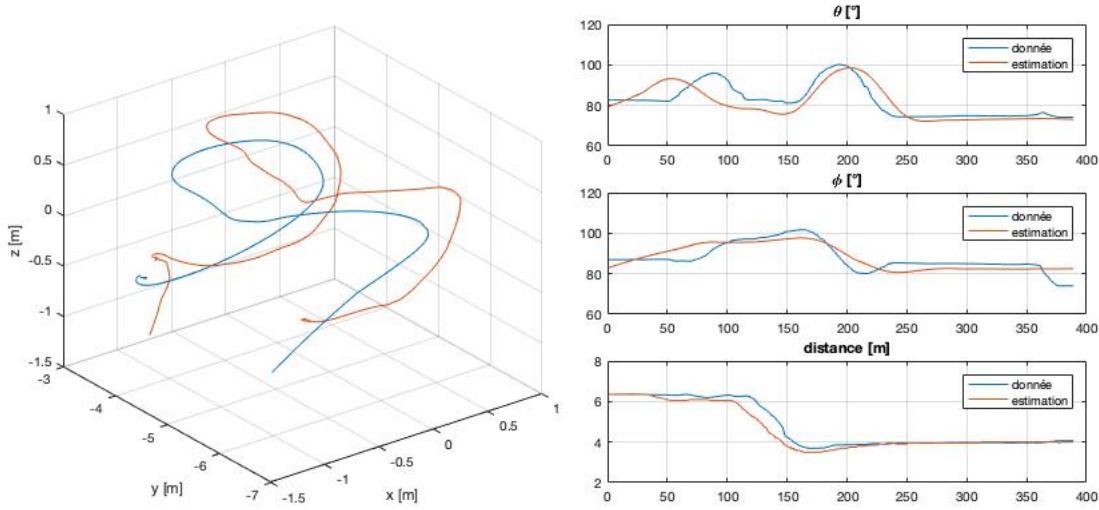


FIGURE 23: Simulation des données CC pour le défi

## 6 Spécifications des radars utilisés

Les spécifications principales sont regroupées dans le tableau ci-dessous.

	Radar 24 [GHz]	Radar 77,5 [GHz]
Type de radar [-]	Doppler	Doppler
Distance maximale [m]	153,6	6,4
Vitesse maximale [ $\frac{km}{h}$ ]	$\pm 150$	$\pm 8,709$
Résolution sur la distance [m]	0,6	0,05
Résolution sur la vitesse [ $\frac{km}{h}$ ]	1,1719	0,08709
Nombre de "chirps" émis [-]	256	200
Nombre d'échantillons au sein de chaque "chirp" [-]	256	128
Fréquence centrale [GHz]	24	77,5
Longueur d'onde [mm]	12,5	3,9
Bande passante [MHz]	250	3000
Nombre d'antennes [-]	3	16
Distance horizontale entre les antennes [mm]	22,5	1,95
Distance verticale entre les antennes [mm]	36	1,95
Intervalle d'angle azimuthal sans ambiguïté [°]	$\pm 16,4$	Aucune ambiguïté
Intervalle d'angle d'élévation sans ambiguïté [°]	$\pm 9,1$	Aucune ambiguïté
Type d'antennes [-]	antennes patch	antennes patch

Dans la littérature, on parle encore d'autres spécifications, mais celles-ci ne peuvent être données du fait que l'on n'a pas assez d'informations sur le radar. Un bon nombre d'entre elles sont liées aux antennes utilisées : leur hauteur, leur gain, leur efficacité de rayonnement, etc. Notons que le gain d'une antenne est donné par  $G(\hat{u}) = \nu D(\hat{u}) = \nu \frac{4\pi|F(\hat{u})|^2}{\iint |F(\hat{u})|^2 d\Omega}$ .

## Conclusion

Ce projet nous a permis d'estimer la position d'une cible dans un plan cartésien, ainsi que sa vitesse. Le projet ne se résume cependant pas à cela. En effet, le travail n'a pas été apporté sur un plateau d'argent. Il a fallu comprendre les concepts en profondeur, les développer et prouver la compréhension de la matière au travers de quatre milestones et d'un défi.

Premièrement, ce projet a permis de déterminer le fonctionnement du radar utilisé. Dans les grandes lignes, celui-ci capte un signal qui va passer dans trois blocs de traitement. Le but recherché est d'obtenir les composantes de Rice du signal reçu afin d'en extraire son enveloppe complexe. Ceci se fait par le bloc mélangeur, bloc essentiel au bon fonctionnement du radar. L'enveloppe complexe du signal est ensuite échantillonnée et analysée.

Deuxièmement, une estimation de la distance et de la vitesse d'une cible a été déterminée. Il a d'abord été nécessaire d'analyser le signal reçu et filtré et d'en obtenir sa fonction de densité de probabilité. On a ensuite décidé d'optimiser la fonction de densité de probabilité selon le maximum de vraisemblance, ce qui nous a permis d'obtenir une corrélation à maximiser. Celle-ci, appliquée à des données radar, a permis de déterminer la distance et la vitesse des cibles mesurées. Les résultats obtenus ont été affichés dans le plan (distance,vitesse) et on remarque bien le maximum de la corrélation pour chaque chirp. On a également fait l'étude des ambiguïtés liées à la distance et à la vitesse. En effet, la distance maximale déterminable par le radar, avant ambiguïté, dépend des données propres au radar. Le même cas s'applique pour l'ambiguïté liée à la vitesse.

Par après, le spectre micro-Doppler, caractéristique de l'effet Doppler, a été analysé. Celui-ci provient de la rotation d'un élément de la cible et permet de déterminer certaines caractéristiques d'un véhicule, comme son empattement. Il peut également être utilisé pour observer le mouvement harmonique des bras d'un piéton. Le principe a donc d'abord été défini, puis l'expression analytique du spectre micro-Doppler d'un véhicule a été déterminée. Des exemples d'applications ont été cités et des simulations ont été réalisées.

Ensuite, la détermination des angles a été caractérisée. La corrélation à optimiser pour estimer ceux-ci provient d'une minimisation de la distance euclidienne entre le signal reçu et le signal théoriquement reçu. Des ambiguïtés liées à ces angles sont également présentes et analysées en profondeur. On remarque en fait que la cible peut se trouver dans un intervalle d'angles fini non-ambigu. Une explication sur une erreur hardware a aussi été développée.

Finalement, le projet est arrivé à son apogée avec l'application des concepts à un radar fonctionnant à une fréquence centrale de 77,5 [GHz] (au lieu de 24 [GHz]). Ce radar avait l'avantage de ne pas présenter d'ambiguïté sur les angles. Une position précise de la cible dans le plan cartésien a donc pu être déterminée. De nombreuses améliorations ont dû être implémentées afin d'y parvenir.

Pour ce qui est des améliorations qui pourraient être appliquées au radar, il est possible de diminuer la distance entre les antennes, sans pour autant atteindre une distance de la moitié de la longueur d'onde. Ceci permettrait de n'avoir aucune ambiguïté angulaire sur un intervalle de 180 [°]. Nous pourrions aussi augmenter la fréquence centrale pour diminuer ces ambiguïtés. Ceci impliquerait cependant une diminution de la distance maximale ainsi que de la vitesse maximale. Il est aussi possible d'augmenter le nombre de "chirps", ce qui théoriquement permettrait d'améliorer la résolution de la vitesse. Néanmoins, en réalité, une hypothèse assez grossière est faite et on ne peut pas se permettre de le faire.

Nous avons appris de nos erreurs et certains points restent également à améliorer dans le futur. Par exemple, une meilleure répartition du travail semble opportune. Plus d'échéances devraient être fixées et respectées au sein du groupe pour permettre un travail plus efficace. Sur certains éléments, nous sommes aussi trop perfectionnistes. Nous pourrions être plus concis et satisfaits plus rapidement.

Dans son ensemble, nous sommes très satisfaits des résultats obtenus à travers ce projet. Nous avons appris énormément sur une technologie ayant des applications dans des domaines très variés, de la télécommunication spatiale à la robotique en passant par de nombreux autres domaines. Nous nous sommes dépassés durant tout ce quadrimestre et nous pensons même être allés au-delà de ce qui nous était demandé pour certains points, ce qui nous semble très positif.

## A Bibliographie

### Références

- [1] Vandendorpe Luc, Craeye Christophe, Oestges Claude, Vanhoenacker-Janvier Danielle, *Séminaire RF*.
- [2] Vandendorpe Luc, Craeye Christophe, Oestges Claude, Vanhoenacker-Janvier Danielle, *Slides démarre RF*.
- [3] automobiledimension.com, *Dimensions de la Opel Corsa 5p 2015 avec des photos de l'intérieur et coffre*, <https://fr.automobiledimension.com/modeles/opel/corsa-5p-2015?fbclid=IwAR2M104bguUBpr89Ke1Yn3fTzPWfi-UlbExNl0z-wYawiQY6mxhjdYhTI0c>, consulté le 1/5/2019.
- [4] The MathWorks Inc., *Introduction to Micro-Doppler Effects*, <https://nl.mathworks.com/help/phased/examples/introduction-to-micro-Doppler-effects.html>, consulté le 3/5/2019.
- [5] RFbeam microwave GmbH, *Standard Product K-MD2 Engineering Sample*, <https://www.rfbeam.ch/product?id=21>, consulté le 29/4/2019.
- [6] RFbeam microwave GmbH, *Data sheet K-MD2 Engineering Sample*, [http://rfbeam.com/files/products/21/downloads/Datasheet\\_K-MD2.pdf](http://rfbeam.com/files/products/21/downloads/Datasheet_K-MD2.pdf), consulté le 20/4/2019.
- [7] RFbeam microwave GmbH, *Use Cases*, <https://www.rfbeam.ch/use-cases#usecase-8>, consulté le 7/5/2019.
- [8] UCAR, *Airborne Radar Specifications*, <https://www.eol.ucar.edu/content/airborne-radar-specifications>.
- [9] Vandendorpe Luc, Craeye Christophe, Oestges Claude, Vanhoenacker-Janvier Danielle, *Description défi : radar à 77GHz*.

## B Glossaire

- $r_f(m)$  [V] : Enveloppe complexe du signal reçu ;
- $\vec{r_m}$  [-] : Vecteur position des antennes ;
- $\hat{u}$  [-] : Vecteur directeur unitaire entre le radar et la cible,  $(u_x, u_y, u_z)$  [m] ses composantes dans le repère cartésien et  $(\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)$  [m] leurs estimations ;
- $A$  [ $m^2$ ] : Section de la cible ;
- $F(\hat{u})$  [dB] : Diagramme de rayonnement des antennes ;
- $k$  [ $m^{-1}$ ] : Nombre d'onde ;
- $x_l$  [m] : Distance entre le radar et la cible ;
- $m$  [-] : Nombre d'antennes ;
- $\Delta\psi$  [°] : Déphasage entre deux antennes consécutives ;
- $\vec{E}$  [V] : Champ électrique d'une antenne ;
- $\lambda$  [m] : Longueur d'onde ;
- $d$  [m] : Distance entre les antennes ;
- $l$  [m] : Différence de trajet d'ondes entre deux antennes ;
- $d_{max}$  [m] : Distance maximale entre deux antennes pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté ;
- $\alpha_{error}$  [°] : Erreur d'angle liée au hardware ;
- $\alpha_{estim}$  ou  $\hat{\alpha}$  [°] : Angle estimé ;
- $\alpha_{rel}$  ou  $\alpha$  [°] : Angle réel ;
- $f_{rec}$  [Hz] : Fréquence de l'onde reçue ;
- $v_{cible}$  [m/s] : Vitesse de la cible ;
- $c$  [m/s] : Vitesse de la lumière ;
- $s_0(t)$  [V] : Impulsion "chirp" ;
- $s(t)$  [V] : Train d'impulsions "chirps" ;
- $G(\hat{u})$  [dB] : Gain d'une antenne ;
- $f_0$  et  $f_p$  [Hz] : Fréquence centrale du signal émis et fréquence de la porteuse ;

- $\Delta\omega$  [rad/s] et  $\Delta f$  [Hz] : Variation angulaire et variation fréquentielle ;
- $T$  [s] : Temps d'émission d'un "chirp" ;
- $T_r$  [s] : Temps d'attente avant émission entre chaque impulsion "chirp" ;
- $\mu_f$  [V] : Moyenne du signal reçu et filtré ;
- $\sigma_f$  [–] : Ecart-type complexe du signal reçu et filtré ;
- $\sigma_r$  [–] : Ecart-type réel du signal reçu et filtré ;
- $\sigma_i$  [–] : Ecart-type imaginaire du signal reçu et filtré ;
- $T_s$  [s] et  $f_s$  [Hz] : Période et fréquence d'échantillonnage ;
- \* : Complexe conjugué ;
- $\hat{\cdot}$  : Estimateur ;
- $N_{1,max}$  [–] : Nombre de "chirps" ;
- $N_{2,max}$  [–] : Nombre d'échantillons au sein du "chirp" ;
- $\alpha$  [s] : Temps entre l'émission et la réception d'un "chirp" ;
- $\beta$  [–] : Paramètre contenant l'information sur la vitesse ;
- $r_f[n]$  [V] : Signal reçu échantillonné et filtré ;
- $s(t; \theta)$  [V] et  $s[n; \theta]$  [V] : Signal utile et signal utile échantillonné ;
- $N_f[n]$  [V] : Bruit filtré et échantillonné ;
- $N_f(t)$  [V] : Bruit filtré ;
- $e_{rf}(t)$  [V] : Enveloppe complexe du signal reçu et filtré ;
- $n_I(t)$  et  $n_Q(t)$  [V] : Composantes de Rice du bruit filtré ;
- $T_{rf}(r|\theta)$  [–] : Fonction de densité de probabilité du signal reçu et filtré ;
- $e_r[n]$  [V] : Enveloppe complexe échantillonnée du signal reçu et filtré ;
- $e_c(t)$  [V] : Enveloppe complexe d'une impulsion "chirp" ;
- $e_s(t)$  [V] : Enveloppe complexe du train d'impulsions de "chirp" (= le signal utile) ;
- $res_d$  [m] et  $res_v$  [m] : Résolution de distance et de vitesse ;
- $a$  [m] : Rayon d'une roue ;
- $R_0$  [m] : Distance entre le centre de la roue et l'antenne émettrice ;
- $R(\theta, \phi)$  [m] : Distance entre le radar et un point de la roue situé à une distance égale au rayon de la roue ;
- $C_n$  [–] : Coefficients de Fourier ;
- $J_n$  [–] : Fonction de Bessel d'ordre  $n$  évaluée en  $x$  ;
- A' et B' : Constantes complexes ;
- $S(\omega)$  Spectre micro-Doppler
- $u_y$  : Cosinus de l'angle azimutal à estimer ;
- $u_x$  : Cosinus de l'angle d'élévation à estimer ;

## C Annexes

### C.1 Expression analytique de l'enveloppe complexe d'une impulsion "chirp"

Un signal de type "chirp" est un signal pour lequel la fréquence du signal varie de manière linéaire en fonction du temps. Donc,

$$f(t) = At + B \quad (107)$$

En supposant qu'une impulsion a une durée  $T$ , et en prenant les conventions utilisées sur le schéma suivant, on a :

$$f(0) = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \quad (108)$$

$$f(T) = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \quad (109)$$

$$\rightarrow f(t) = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{T} t - \frac{\Delta\omega}{2} \quad (110)$$

Une impulsion de type "chirp" peut s'exprimer de la manière suivante :

$$s_0(t) = A \cos(\phi(t)) \text{rect}_T(t) \quad (111)$$

Pour passer d'une fréquence instantanée  $f(t)$  à une phase instantanée  $\phi(t)$ , il suffit d'intégrer cette fréquence. On obtient donc :

$$\phi(t) = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{2T} t^2 - \frac{\Delta\omega}{2} t \quad (112)$$

On peut donc exprimer un signal "chirp" de la façon suivante :

$$s_0(t) = A \cos(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{2T} t^2 - \frac{\Delta\omega}{2} t) \text{rect}_T(t) \quad (113)$$

On peut montrer que le signal reçu peut s'écrire sous la forme :

$$r(t) \approx A \mathbb{R}[e^{j\omega_0 t(1-\beta)} e_s(t-\alpha) e^{-j\omega_0 \alpha}] + n_{r_f}(t) \quad (114)$$

Or, l'enveloppe complexe du signal émis  $e_s(t)$  peut s'écrire sous la forme :

$$e_s(t) = \sum_{p=0}^{P-1} e_c(t-pT_r) e^{-j\omega_0 p T_r} \text{rect}_T(t-pT_r) \quad (115)$$

Quant à l'enveloppe complexe d'une impulsion de type "chirp"  $e_c(t)$ , elle peut s'écrire sous la forme :

$$e_c(t) = e^{j\frac{-\Delta\omega t}{2} + j\frac{\Delta\omega t^2}{2T}} \quad (116)$$

## C.2 Expression de l'enveloppe complexe du signal reçu et filtré $r_f[n]$

Le calcul de l'enveloppe complexe du signal utile est relativement fastidieux et nous n'allons donner que les grandes étapes du développement pour y arriver. Sur base des hypothèses citées précédemment, on sait que le signal utile peut s'exprimer sous la forme :

$$s(t) = A \mathbb{R}[e^{j\omega_0 t(1-\beta)} e_s(t-\alpha) e^{-j\omega_0 \alpha}] = A \mathbb{R}[e_k(t)] \quad (117)$$

En identifiant terme à terme, on peut calculer l'expression analytique du signal  $e_k(t)$ . On a :

$$e_k(t) = A e^{-j\omega_0 t \beta} e_s(t-\alpha) e^{j\omega_0 (t-\alpha)} \quad (118)$$

$$= A e^{-j\omega_0 t \beta} \sum_{p=0}^{P-1} e_c(t-\alpha-pT_r) e^{-j\omega_0 p T_r} \text{rect}_T(t-\alpha-pT_r) e^{j\omega_0 (t-\alpha)} \quad (119)$$

$$= A e^{-j\omega_0 t \beta} \sum_{p=0}^{P-1} e^{j\frac{-\Delta\omega(t-\alpha-pT_r)}{2} + j\frac{\Delta\omega(t-\alpha-pT_r)^2}{2T}} e^{-j\omega_0 p T_r} e^{j\omega_0 (t-\alpha)} \text{rect}_T(t-\alpha-pT_r) \quad (120)$$

En développant le terme  $(t-\alpha-pT_r)^2$ , on a :

$$(t-\alpha-pT_r)^2 = t^2 - t(2\alpha + 2pT_r) + (\alpha^2 + 2\alpha p T_r + p^2 T_r^2) \quad (121)$$

Donc,

$$e_k(t) = A e^{-j\omega_0 t \beta} \sum_{p=0}^{P-1} e^{j\frac{-\Delta\omega(t-\alpha-pT_r)}{2} + j\frac{\Delta\omega(t^2 - t(2\alpha + 2pT_r) + (\alpha^2 + 2\alpha p T_r + p^2 T_r^2))}{2T}} e^{-j\omega_0 p T_r} e^{j\omega_0 (t-\alpha)} \text{rect}_T(t-\alpha-pT_r) \quad (122)$$

En sortant de la somme les termes qui ne dépendent pas de  $p$ , on a :

$$e_k(t) = A e^{-j\omega_0 t \beta} e^{j\frac{-\Delta\omega(t-\alpha)}{2}} e^{j\frac{\Delta\omega(t^2 - 2t\alpha + \alpha^2)}{2T}} e^{j\omega_0 (t-\alpha)} \sum_{p=0}^{P-1} e^{j\frac{-\Delta\omega(-pT_r)}{2}} e^{j\frac{\Delta\omega(-2tpT_r + 2\alpha p T_r + p^2 T_r^2)}{2T}} e^{-j\omega_0 p T_r} \text{rect}_T(t-\alpha-pT_r) \quad (123)$$

Nous pouvons dès à présent factoriser cette lourde expression.

$$e_k(t) = A \sum_{p=0}^{P-1} e^{-j\omega_0 t \beta} e^{j \frac{-\Delta\omega(t-\alpha)}{2}} e^{j \frac{\Delta\omega(t^2 - 2t\alpha + \alpha^2)}{2T}} e^{j\omega_0(t-\alpha)} e^{j \frac{-\Delta\omega(-pT_r)}{2}} e^{j \frac{\Delta\omega(-2pT_r + 2\alpha p T_r + p^2 T_r^2)}{2T}} e^{-j\omega_0 p T_r} \text{rect}_T(t - \alpha - pT_r) \quad (124)$$

L'enveloppe complexe du signal utile  $e_u(t)$  est alors donnée par :

$$e_k(t) = e_u(t) e^{j\phi(t-pT_r)} \quad (125)$$

$$e_k(t) = e_u(t) e^{j[\omega_0(t-pT_r) + \frac{\Delta\omega}{2T}(t-pT_r)^2 - \frac{\Delta\omega}{2}(t-pT_r)]} \quad (126)$$

C'est-à-dire :

$$e_u(t) = A \sum_{p=0}^{P-1} e^{j(\frac{\Delta\omega}{2}\alpha - \frac{\Delta\omega}{T}t\alpha + \frac{\Delta\omega}{2T}\alpha^2 + \frac{\Delta\omega}{T}\alpha p T_r)} e^{-j\omega_0(t\beta + \alpha)} \text{rect}_T(t - \alpha - pT_r) \quad (127)$$

On en conclut donc que l'enveloppe complexe du signal reçu  $r_f(t)$  est donnée par :

$$e_{r_f}(t) = e_u(t) + e_{n_{r_f}}(t) \quad (128)$$

$$= A \sum_{p=0}^{P-1} e^{j(\frac{\Delta\omega}{2}\alpha - \frac{\Delta\omega}{T}t\alpha + \frac{\Delta\omega}{2T}\alpha^2 + \frac{\Delta\omega}{T}\alpha p T_r)} e^{-j\omega_0(t\beta + \alpha)} \text{rect}_T(t - \alpha - pT_r) + n_I(t) - jn_Q(t) \quad (129)$$

On va ensuite réaliser un échantillonnage aux instants  $n_1 N_r T_s + n_2 T_s$  où  $T_s$  est la période d'échantillonnage,  $n_1$  l'indice de "chirp" et  $n_2$  l'indice d'échantillonnage au sein du "chirp". Après échantillonnage, on peut montrer qu'on a :

$$e_{r_f}(n_1 N_r T_s + n_2 T_s) = A e^{-j\omega_0 \alpha} e^{-j\omega_0 \beta(n_1 N_r T_s + n_2 T_s)} e^{j \frac{\Delta\omega}{2} \alpha} e^{j \frac{\Delta\omega}{2T} \alpha^2} e^{j \frac{\Delta\omega}{T} \alpha n_2 T_s} \quad (130)$$

### C.3 Calcul de la moyenne du signal reçu filtré $r_f[n]$

Le signal utile  $s[n; \theta]$  étant constant vis-à-vis du signal reçu, la moyenne de  $r_f[n]$  se calcule comme suit :

$$\mathbb{E}(r_f[n]) = \mathbb{E}(s[n; \theta]) + \mathbb{E}(N_f[n]) \quad (131)$$

Puisque  $s[n; \theta]$  peut être considéré comme une constante par rapport au signal  $r_f[n]$ , son espérance correspond simplement à cette constante. Par hypothèse, l'espérance du bruit filtré peut être considéré comme nulle. On a donc :

$$\mathbb{E}(r_f[n]) = s[n; \theta] + 0 = s[n; \theta] \quad (132)$$

On en conclut donc que le signal reçu filtré a une moyenne  $\mu_f = s[n; \theta]$ .

### C.4 Calcul de la variance du signal reçu filtré $r_f[n]$

Quant à la variance du signal reçu filtré, elle est donnée par :

$$\mathbb{V}(r_f[n]) = \mathbb{V}(s[n; \theta] + N_f[n]) = \mathbb{V}(s[n; \theta]) + \mathbb{V}(N_f[n]) + 2\mathbb{C}(s[n; \theta]; N_f[n]) \quad (133)$$

Or, puisque  $s[n; \theta]$  est considéré comme une constante, on en déduit que sa variance est nulle. En ce qui concerne  $\mathbb{V}(N_f[n])$ , on part de la covariance du bruit filtré  $N_f[n]$  définie par :

$$C_{N_f}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{N_f}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \text{ où } \gamma_{N_f}(\omega) \text{ est la densité spectrale du bruit filtré.} \quad (134)$$

La variance est alors donnée par :

$$\sigma_{N_f}^2 = C_{N_f}(\tau = 0) \quad (135)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{N_f}(\omega) d\omega \quad (136)$$

Il reste donc à déterminer le lien entre le bruit filtré  $N_f[n]$  et le bruit non-filtré  $N(t)$ . Comme dit précédemment, le bruit  $N(t)$  passe à travers un filtre passe-bande suivi d'un filtre passe-bas. Le premier est considéré comme un filtre de Hilbert de transmittance  $U(\omega)$  et le filtre passe-bas est supposé parfait et donc de fréquence de coupure  $|\frac{f_s}{2}|$ <sup>11</sup>. La transmittance de ce filtre est notée  $G(\omega)$ . On supposera donc que les deux réponses en fréquence sont définie de la manière suivante :

$$U(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega < 0 \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (137)$$

$$G(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega < |\frac{f_s}{2}| \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (138)$$

Ainsi, en utilisant la propriété des systèmes linéaires permanents, nous avons la relation suivante :

$$\gamma_{N_f}(\omega) = |U(\omega)|^2 |G(\omega)|^2 \gamma_N(\omega) \quad (139)$$

Par définition, la densité spectrale d'un bruit blanc gaussien additif est définie par :

$$\gamma_N(\omega) = \frac{N_0}{2} \quad (140)$$

Ainsi, la variance du bruit filtré est donnée par :

$$\sigma_{N_f}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{N_f}(\omega) d\omega \quad (141)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |U(\omega)|^2 |G(\omega)|^2 \frac{N_0}{2} d\omega \quad (142)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{f_s}{2}}^{+\frac{f_s}{2}} 8\pi \frac{N_0}{2} df \quad (143)$$

$$= 2N_0 f_s = \frac{2N_0}{T_s} \quad (144)$$

Il reste donc à calculer la covariance entre le signal utile et le bruit filtré. Elle est donnée par :

$$\mathbb{C}(s[n; \theta]; N_f[n]) = \mathbb{E}(s[n; \theta] - \mathbb{E}(s[n; \theta])) \mathbb{E}(N_f[n] - \mathbb{E}(N_f[n])) \quad (145)$$

Puisque l'espérance d'une constante est égale à la constante elle-même, nous obtenons finalement :

$$\mathbb{C}(s[n; \theta]; N_f[n]) = \mathbb{E}(s[n; \theta] - s[n; \theta]) \mathbb{E}(N_f[n] - \mathbb{E}(N_f[n])) \quad (146)$$

$$= \mathbb{E}(0) \mathbb{E}(N_f[n] - \mathbb{E}(N_f[n])) = 0 \quad (147)$$

Par conséquent, au vu de tout ce qui précède, nous pouvons en conclure que la variance du signal reçu filtré est donnée par :

$$\sigma_f^2 = \mathbb{V}(r_f[n]) = \mathbb{V}(s[n; \theta]) + \mathbb{V}(N_f[n]) + 2\mathbb{C}(s[n; \theta]; N_f[n]) \quad (148)$$

$$= 0 + \frac{2N_0}{T_s} + 0 = \frac{2N_0}{T_s} \quad (149)$$

---

11. Puisque la fréquence d'échantillonnage est  $f_s$ , le meilleur filtre passe-bas que l'on peut réaliser a une transmittance rectangulaire et une fréquence de coupure  $|\frac{f_s}{2}|$ .