

Mécanique rationnelle

Grégoire Roumache

Janvier 2018

1 Théorie : Notions fondamentales - Point matériel

- Un point matériel P est un corps ponctuel sans surface ni volume mais possédant une masse constante. Il est relié à l'origine du repère O par le vecteur \mathbf{OP} aussi noté \mathbf{s} qui est le vecteur position du point P. La relation $\mathbf{s} = \mathbf{s}(t)$ est appelée "Loi du mouvement".
- On définit la vitesse d'un point P par

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{s}}(t) = \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{s}(t + \Delta t) - \mathbf{s}(t)}{\Delta t}$$

et son accélération par

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{s}}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$$

- L'abscisse curviligne λ est mesurée le long de la courbe à partir d'un point quelconque pris comme origine, on peut noter $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\lambda)$.
Le trièdre local de Frenet est formé par :

1. Le vecteur unitaire selon la tangente à la courbe : $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{s}}{d\lambda}$.
2. Le vecteur unitaire selon la normale principale : $\boldsymbol{\nu} = \rho \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\lambda}$.
3. Le vecteur unitaire selon la binormale : $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \wedge \boldsymbol{\nu}$

- Soient les référentiels $(O, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ et $(O', \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Adoptons le repère de centre O comme repère de base. Le mouvement des vecteurs (unitaires) liés en O' par rapport au vecteurs de O ne peut être qu'une rotation.

La dérivée du vecteur \mathbf{e}_i lui est perpendiculaire et peut donc s'écrire : $\left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}\right)_O = \mathbf{w} \wedge \mathbf{e}_i$.

Le vecteur \mathbf{w} est unique et peut être utilisé pour exprimer les dérivées temporelles de tous les vecteurs unitaires de la base. \mathbf{w} est appelé "vecteur de Poisson" ou "vecteur vitesse de rotation". La formule

$\left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}\right)_O = \mathbf{w} \wedge \mathbf{e}_i$ est appelée "formule de Poisson". On généralise la formule de Poisson à l'accélération : $\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_O = \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{O'} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{a}$.

- Soit $\mathbf{b} = \mathbf{OO'}$, $\mathbf{s} = \mathbf{OP}$ et $\mathbf{r} = \mathbf{O'P}$. On a évidemment la relation $\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, en y appliquant la formule de Poisson, on obtient :

$$\dot{\mathbf{s}} = \underbrace{\dot{\mathbf{b}} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{r}}_{\mathbf{v}_e} + \underbrace{\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}}_{\mathbf{v}_r}$$

où $\frac{\delta}{\delta t}$ désigne la dérivée relative évaluée dans la base mobile, \mathbf{v}_r est la vitesse relative et \mathbf{v}_e est la vitesse d'entraînement.

- Une décomposition semblable peut être effectuée pour l'accélération :

$$\frac{d^2 \mathbf{s}}{dt^2} = \underbrace{\frac{d^2 \mathbf{b}}{dt^2} + \dot{\mathbf{w}} \wedge \mathbf{r} + \mathbf{w} \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{r})}_{\mathbf{a}_e} + \underbrace{2 \mathbf{w} \wedge \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}}_{\mathbf{a}_c} + \underbrace{\frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2}}_{\mathbf{a}_r}$$

où \mathbf{a}_e est l'accélération d'entraînement, \mathbf{a}_c est l'accélération de Coriolis et \mathbf{a}_r est l'accélération relative.

- En plus de la masse m (ou dm), la position \mathbf{s} et la vitesse $\dot{\mathbf{s}}$, il est d'usage d'introduire d'autres grandeurs caractéristiques :

1. Le moment statique : $\mathbf{Q}_O = m \mathbf{s}$.
2. La quantité de mouvement : $\mathbf{N}_O = m \dot{\mathbf{s}}$.
3. Le moment cinétique : $\mathbf{H}_O = m \mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}$.
4. L'énergie cinétique : $T_O = \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{s}}\|^2$.

Les symboles désignant ces grandeurs sont munis d'un indice rappelant le système d'axes auquel elles se rapportent.

- On définit des grandeurs dynamiques qui ont un rôle important en mécanique :

1. Le moment dynamique : $\mathbf{M}_O = \mathbf{s} \wedge \mathbf{F}$.
2. La puissance : $\mathcal{P}_O = \dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{F}$.
3. La résultante : $\mathbf{G} = \sum_i \mathbf{F}_i + \int \hat{\mathbf{F}} dm$.
4. Le moment résultant : $\mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{s}_i \wedge \mathbf{F}_i + \int \mathbf{s} \wedge \hat{\mathbf{F}} dm$.

- L'expression mathématique de beaucoup de forces responsables du mouvement est connue dès l'abord du problème :

1. Champ de force : Le vecteur force $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ est donné en chaque point \mathbf{S} d'une région déterminée de l'espace. Un exemple important est le champ gravitationnel. La force est dans ce cas : $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{s}) = -\frac{\mu}{s^3} \mathbf{s}$ où $\mu > 0$, $s = \|\mathbf{s}\|$.
2. Force de rappel d'un ressort : $\mathbf{F} = -k (l - l_0) \mathbf{e}$.
De même pour un ressort de torsion d'axe \mathbf{e} : $\mathbf{C} = -k (\theta - \theta_0) \mathbf{e}$.
3. Tension dans une corde élastique : Comme dans le cas du ressort, on considère que la tension dans une corde élastique est proportionnelle à l'extension de celle-ci. A la différence que la tension ne s'exerce que lorsque la corde est tendue et étirée.
4. Force de frottement fluide : Dans le cas le plus simple, on a : $\mathbf{F} = -c \dot{\mathbf{s}}$ (loi de Stokes).
5. Force de Lorentz : $\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{s}} \wedge \mathbf{B})$.

- Les relations restrictives imposées à la position ou au mouvement d'un système sont appelées relations de liaisons (exemple : un point matériel qui ne peut se déplacer que sur une courbe ou une surface). Ces contraintes sont imposées par le biais de forces qui sont dès lors appelées forces de liaisons. Notamment, les forces de réaction s'exercent à l'endroit de contact entre deux corps.

- Selon la loi de frottement, la force de frottement \mathbf{T} agissant sur un point est donnée par : $\mathbf{T} = -\mu N \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$.

- Dans le cas d'une liaison pivot (exemple : tambour qui tourne dans la cuve d'un lave-linge), sous l'action du frottement, on aura $\mathbf{C}_F = -\mu^\Omega \text{sign}(\dot{\theta}) \|\mathbf{R}\| \mathbf{e}$ qui freinera le mouvement relatif du solide par rapport à l'autre.

- Dans le cas d'une liaison glissière (exemple : la cabine qui bouge dans la cage d'ascenseur), sous l'action du frottement, on aura la réaction $\mathbf{T} = -\mu \text{sign}(\dot{x}) \|\mathbf{R}\| \mathbf{e}$.

- On note les forces intérieures émanant d'éléments appartenant au système par un \mathbf{f} et les forces extérieures par un \mathbf{F} . Le principe d'action/réaction s'écrit : $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$.
- La puissance développée par une force quelconque \mathbf{F} s'appliquant en un point de vitesse $\dot{\mathbf{s}}$ dans un repère de centre O est donnée par $\mathcal{P}_O = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{s}}$.
- Une force \mathbf{F} est conservative si elle est de la forme : $\mathbf{F} = -\nabla V$ où V est une fonction de \mathbf{s} .
La puissance d'une force conservative est donnée par : $\mathcal{P}_O = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{s}} = -\dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{F} = -\frac{dV}{dt}$. Et son travail par :
 $\mathcal{T} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = V(\mathbf{s}_B) - V(\mathbf{s}_A)$.
- Si la puissance développée par une force \mathbf{F} est nulle, on dit que la force ne travaille pas.
- Une force est dite dissipative si elle développe une puissance définie négative et dissipe (en chaleur) une partie de l'énergie du système. C'est le cas des forces de résistances dans un fluide.
- Voici des grandeurs globales représentatives de l'ensemble du système :

1. La masse totale : $m = \sum_i m_i + \int dm$.
2. Le moment statique résultant : $\mathbf{Q}_O = \sum_i m_i \mathbf{s}_i + \int \mathbf{s} dm$.
3. La quantité de mouvement résultante : $\mathbf{N}_O = \sum_i m_i \dot{\mathbf{s}}_i + \int \dot{\mathbf{s}} dm$.
4. Le moment cinétique résultant : $\mathbf{H}_O = \sum_i m_i \mathbf{s}_i \wedge \dot{\mathbf{s}}_i + \int \mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}} dm$.
5. L'énergie cinétique totale : $T_O = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{s}}_i \cdot \dot{\mathbf{s}}_i + \frac{1}{2} \int \dot{\mathbf{s}} \cdot \dot{\mathbf{s}} dm$.
6. La résultante des forces agissant sur le système : $\mathbf{G} = \sum_i \mathbf{F}_i + \int \hat{\mathbf{F}} dm$.
7. Le moment dynamique résultant : $\mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{s}_i \wedge \mathbf{F}_i + \int \mathbf{s} \wedge \hat{\mathbf{F}} dm$.
8. La puissance totale : $\mathcal{P}_O = \sum_i \dot{\mathbf{s}}_i \cdot (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) + \int \dot{\mathbf{s}}_i \cdot (\hat{\mathbf{F}} + \hat{\mathbf{f}}) dm$.

2 Théorie : Notions fondamentales - Solide

- Les systèmes rigides que l'on désigne simplement sous le nom de solides ont la propriété que la distance entre 2 quelconques de leurs points est toujours constante.
On décrit la configuration du solide dans l'espace au moyen des trois coordonnées scalaires d'un de ses points B et de trois angles repérant l'orientation du solide par rapport à ses directions fixes de référence. Le mouvement d'un solide s'identifie complètement au mouvement d'un système de référence quelconque qui lui est attaché. On peut alors décrire le mouvement d'un solide par les trois composantes de la vitesse d'un de ses points et les trois composantes du vecteur de Poisson. On a donc à tout instant :

$$\mathbf{s} = \mathbf{b} + \mathbf{r} \quad \dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{b}} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{r}$$

- Lorsque deux corps matériels sont en contact, on admettra que les éléments de réduction correspondant aux forces entre les deux systèmes sont liés par les lois suivantes :
 1. La composante normale de la résultante est indépendante des propriétés de frottement des deux corps en contact.

2. La vitesse de glissement et de la vitesse de rotation relative provoquent une force de frottement (liée à un coefficient de frottement).

Ces lois de friction impliquent que la force de friction est directement proportionnelle à la force normale appliquant les deux corps l'un sur l'autre.

- Le centre d'inertie (ou centre de masse du système) est aussi appelée "position moyenne du système". Il est défini par le vecteur position \mathbf{c} .
- Théorème C :

Chacune des résultantes, calculée dans le système d'axes de centre O, est égale à la même résultante, calculée dans le système d'axes parallèles de centre C, augmentée de la résultante correspondante du centre d'inertie considéré comme un point matériel affecté de la masse totale du système et soumis à la résultante des forces.

- Le théorème C nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 - \mathbf{Q}_O &= m\mathbf{c} + \mathbf{Q}_C & - T_O &= \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{c}}\|^2 + T_C \\
 - \mathbf{N}_O &= m\dot{\mathbf{c}} + \mathbf{N}_C & - \mathbf{M}_O &= \mathbf{c} \wedge \mathbf{G} + \mathbf{M}_C \\
 - \mathbf{H}_O &= m\mathbf{c} \wedge \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_C & - \mathcal{P}_O &= \dot{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{G} + \mathcal{P}_C
 \end{aligned}$$

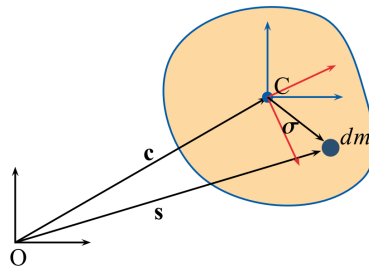
- Grandeurs résultantes du solide :

Si l'on définit le tenseur central d'inertie \mathbf{J}_C d'un solide par rapport au point C (référentiel d'origine C) quelconque du solide par l'expression : $\mathbf{J}_C = \int (r^2 \mathbf{I} - \mathbf{r} \mathbf{r}) dm$, alors on a :

$$\begin{aligned}
 - \mathbf{H}_C &= \mathbf{J}_C \cdot \mathbf{w} & - \mathbf{M}_C &= \int (\mathbf{r} \wedge \hat{\mathbf{F}}) dm \\
 - T_C &= \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{H}_C = \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \mathbf{w} & - \mathcal{P}_C &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{M}_C \\
 - \mathbf{Q}_C &= \mathbf{N}_C = \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

De manière générale, on prend le centre d'inertie comme point C pour simplifier les calculs. Et pour rappel, \mathbf{w} est le vecteur de Poisson.

- Preuve que $\mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C \cdot \mathbf{w}$: D'abord, remarquons que $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \cancel{\frac{\delta \boldsymbol{\sigma}}{\delta t}} + \mathbf{w} \wedge \boldsymbol{\sigma}$.



$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_C &= \int \boldsymbol{\sigma} \wedge \dot{\boldsymbol{\sigma}} \, dm \\
&= \int \boldsymbol{\sigma} \wedge (\mathbf{w} \wedge \boldsymbol{\sigma}) \, dm & \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \\
&= \int \mathbf{w} \|\boldsymbol{\sigma}\|^2 - \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{w}) \, dm \\
&= \int (\|\boldsymbol{\sigma}\|^2 \mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{w} \, dm = \mathbf{w} \cdot \int (\|\boldsymbol{\sigma}\|^2 \mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}) \, dm \\
&= \mathbf{J}_C \cdot \mathbf{w} & \text{où } \mathbf{J}_C &= \int (\|\boldsymbol{\sigma}\|^2 \mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}) \, dm
\end{aligned}$$

- Le tenseur identité \mathbf{I} est :

$$\mathbf{I} = \underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tel que : $\mathbf{I} \mathbf{a} = \mathbf{a}$, et ce pour tout \mathbf{a} de dimensions correspondantes (que \mathbf{a} soit un vecteur ou un tenseur).

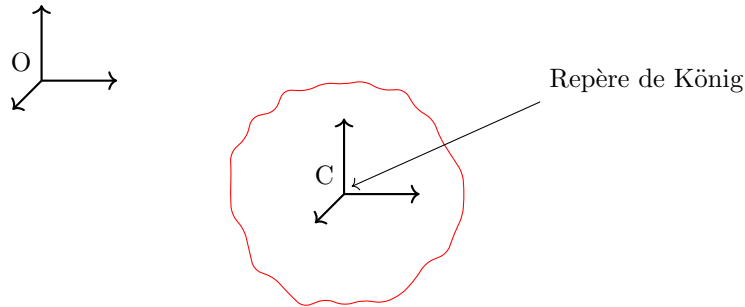
- Le tenseur central d'inertie $\mathbf{J}_C = \int (\|\mathbf{s}\|^2 \mathbf{I} - \mathbf{s} \mathbf{s}) \, dm$ peut être représenté par une matrice symétrique :

$$\begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix} = \int \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} dm$$

car $\mathbf{s} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$.

On peut mettre cette matrice sous forme diagonale, les éléments de cette diagonale sont appelés *moments principaux d'inertie* et les axes correspondants *axes principaux d'inertie*.

- Un repère de König est un repère non-inertiel de centre C dont les axes sont constamment parallèles aux axes d'un repère inertiel.



- Ellipsoïde d'inertie :

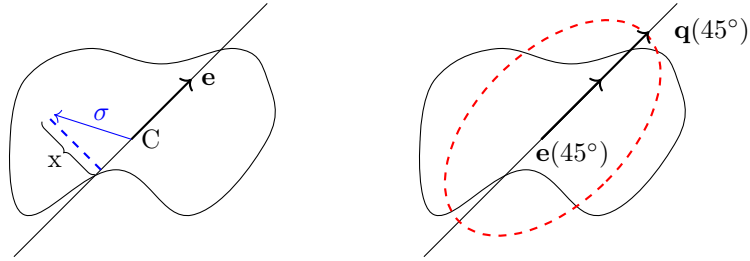
Le moment d'inertie autour d'une droite d passant par C est donné par : $J_d = \int x^2 \, dm > 0$ (sauf si la masse est sur l'axe).

Soit $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}$ (vecteur de Poisson) avec $\|\mathbf{e}\| = 1$, on a :

$$T_C = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \omega^2 \mathbf{e} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \mathbf{e} = \frac{1}{2} \omega^2 J_d$$

Si on fait varier le vecteur \mathbf{e} (on le fait tourner autour de C), on reporte le vecteur $\mathbf{q} = \frac{1}{\sqrt{J}} \mathbf{e}$. On obtient

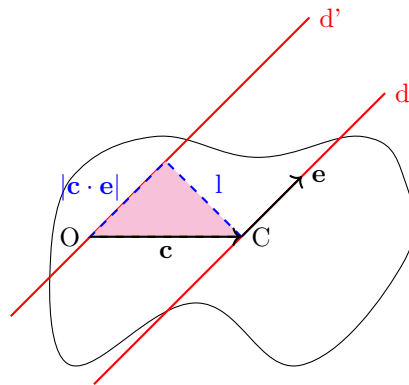
un ellipsoïde d'inertie $\left(\mathbf{q} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \mathbf{q} = \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \mathbf{e}}{J_d} = \frac{J_d}{J_d} = 1 \right)$.



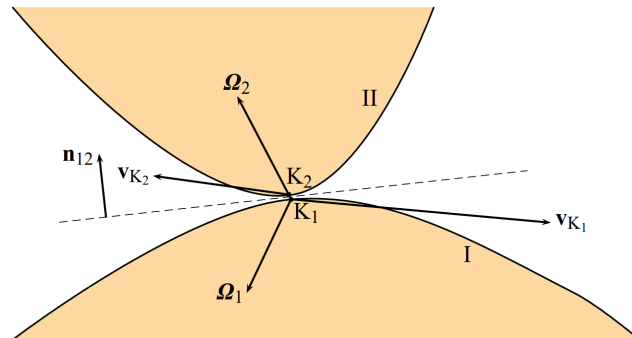
- Théorème de transport :

$$J'_d = \mathbf{e} \cdot \mathbf{J}_O \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e} \cdot \left(m \left[\|\mathbf{c}\|^2 \mathbf{I} - \mathbf{c} \mathbf{c} \right] + \mathbf{J}_C \right) \cdot \mathbf{e}$$

$$= m l^2 + J_d$$



- Mouvement relatif de deux solides :

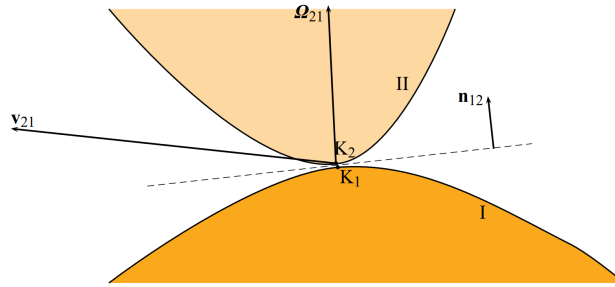


- Solide I : \mathbf{v}_{K_1} , $\boldsymbol{\Omega}_1$
- Solide II : \mathbf{v}_{K_2} , $\boldsymbol{\Omega}_2$

Mouvement relatif de II par rapport à I :

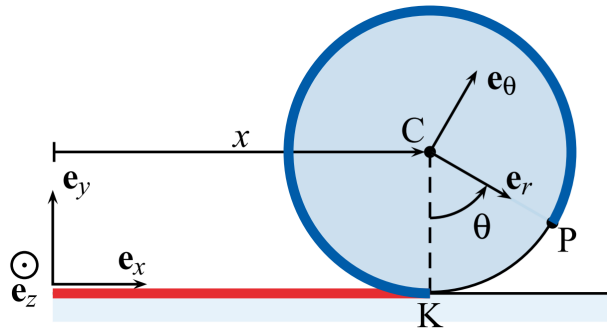
- Vitesse de glissement : $\mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_{K_2} - \mathbf{v}_{K_1}$
- Vitesse relative de rotation : $\boldsymbol{\Omega}_{21} = \boldsymbol{\Omega}_2 - \boldsymbol{\Omega}_1$

Glissement :



- Pas d'interpénétration des deux solides : $\mathbf{v}_{21} \cdot \mathbf{n}_{12} \geq 0$.
- Roulement (avec glissement) : $\mathbf{v}_{21} \cdot \mathbf{n}_{12} = 0$
- Roulement sans glissement : $\mathbf{v}_{21} = \mathbf{0}$, i.e. $\mathbf{v}_{K_2} = \mathbf{v}_{K_1}$.

Roulement sans glissement :



$$\mathbf{s}_p = x\mathbf{e}_x + R\mathbf{e}_y + R\mathbf{e}_r$$

$$\dot{\mathbf{s}}_p = \dot{x}\mathbf{e}_x + R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

$$\boxed{\dot{x} + R\dot{\theta} = 0}$$

3 Théorie : Lois de la dynamique newtonienne

- Axiomes de la dynamique newtonienne :
 1. Le temps est une grandeur absolue indépendante de tout système de référence.
 2. Les masses sont des constantes positives (ou nulles) additives.
 3. Les fonctions $\mathbf{s}(t)$ sont continûment dérivables et deux fois continûment dérivables par morceaux.
 4. Les forces satisfont au principe de l'action et de la réaction selon lequel les forces que deux éléments matériels distincts exercent l'un sur l'autre sont égales en norme, de signes opposés et parallèles à la droite joignant ces deux éléments.
- Dans un repère inertiel, un corps isolé de toute interaction avec le monde extérieur ne peut être qu'au repos ou en MRU (première loi de Newton ou principe d'inertie).
- Lorsqu'un corps est soumis à des forces, on admet la loi suivante (loi fondamentale de la dynamique newtonienne) :

Dans un repère inertiel, la résultante des forces appliquées à un point matériel (ou à un élément matériel infinitésimal) est égale à la dérivée temporelle de sa quantité de mouvement :

$$\mathbf{G} = \frac{d\mathbf{N}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{s}})$$

- Théorème de la quantité de mouvement :

Dans un repère inertiel, la dérivée temporelle de la quantité de mouvement d'un système matériel est égale à la résultante des forces extérieures qui lui sont appliquées :

$$\frac{d\mathbf{N}_O}{dt} = \mathbf{G}$$

Ce qui implique que le centre d'inertie d'un système (de masse m) "agit" comme un point matériel de masse m soumis à la résultante des forces extérieures ($m \ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{G}$).

- Théorème du moment cinétique :

Dans un repère inertiel, la dérivée temporelle du moment cinétique d'un système matériel par rapport à un point fixe O est égale à la résultant des moments par rapport à ce point des forces extérieures appliquées au système :

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{M}_O$$

- Théorème de l'énergie cinétique :

Dans un repère inertiel, la puissance développée par l'ensemble des forces intérieures appliquées à un système matériel est égale à la dérivée temporelle de son énergie cinétique :

$$\dot{T}_O = \mathcal{P}_O$$

- En l'absence de tout mouvement (statique), on a : $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$.
- Les trois théorèmes précédents sont aussi appelés théorèmes généraux et peuvent s'écrire sous formes intégrales :

1. $\mathbf{N}_O(t_2) - \mathbf{N}_O(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{G}(t) dt$
2. $\mathbf{H}_O(t_2) - \mathbf{H}_O(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O(t) dt$
3. $T_O(t_2) - T_O(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_O(t) dt$

- Voici les théorèmes généraux dans un repère non-inertiel :

1. Première loi de Newton : $m \mathbf{a}_r = m \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2} = \mathbf{G} - m \mathbf{a}_e - m \mathbf{a}_c$.
2. Quantité de mouvement : $\frac{\delta \mathbf{N}_{O'}}{\delta t} = \mathbf{G} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_c$.
3. Moment cinétique : $\dot{\mathbf{H}}_B = \frac{\delta \mathbf{H}_B}{\delta t} = \mathbf{M}_B - m (\mathbf{c} - \mathbf{b}) \wedge \ddot{\mathbf{b}}$.
4. Énergie cinétique : $\dot{T}_B = \mathcal{P} - m (\dot{\mathbf{c}} - \dot{\mathbf{b}}) \cdot \ddot{\mathbf{b}}$.

- Dans un système à masse variable, la loi fondamentale de Newton ($\mathbf{F} = m \mathbf{a}$) s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \mathbf{v} = \mathbf{G}$$

si et seulement si $\mathbf{P} = -\frac{dm}{dt} \mathbf{v}$ où \mathbf{P} est une force accélératrice dite de "poussée", ce qui nous donne :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{G} + \mathbf{P}.$$

4 Théorie : Modélisation et analyse des systèmes mécaniques

- Toutes les grandeurs physiques utilisées en mécanique peuvent être exprimées à partir des trois grandeurs fondamentales : L la longueur, T le temps et M la masse.
Pour une grandeur X quelconque, on a $[X] = L^\alpha T^\beta M^\gamma$ et si X est adimensionnel, alors $[X] = 1$.
- Le théorème *pi* (ou théorème de Vaschy-Buckingham) affirme que le nombre de produits sans dimension indépendants qui peuvent être construits à partir de n grandeurs physiques est égal à $n - N$ où N désigne le nombre de grandeurs fondamentales intervenant dans la mesure des n grandeurs.
- Lorsque la projection sur un axe fixe \mathbf{e} de la *résultante* ou du *moment résultant* des forces extérieures appliquées à un système matériel est nulle, on obtient immédiatement une intégrale première du mouvement de ce système. On a en effet, en vertu du théorème de la quantité de mouvement ou du théorème du moment cinétique exprimé dans un repère inertiel ou un système d'axes centrés au centre d'inertie du système et constamment parallèles à des axes inertiaux (\Rightarrow vecteur de Poisson = 0),

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{N}}_O &= \mathbf{e} \cdot \mathbf{G} = 0 & \Rightarrow & \mathbf{e} \cdot \mathbf{N}_O = \text{constante} \\ \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{H}}_O &= \mathbf{e} \cdot \mathbf{M}_O = 0 & \Rightarrow & \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_O = \text{constante} \\ \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{H}}_C &= \mathbf{e} \cdot \mathbf{M}_C = 0 & \Rightarrow & \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_C = \text{constante} \end{aligned}$$

- Lorsque les forces appliquées à un système sont conservatives ou ne développent pas de puissance dans un repère inertiel, il vient :

$$\frac{dT_O}{dt} = \mathcal{P}_O = -\frac{dV}{dt} \quad \Rightarrow \quad T_O + V = E = \text{constante}$$

- Dans le cas de l'étude du mouvement d'un point matériel, le théorème de l'énergie cinétique est une conséquence directe de la loi fondamentale de Newton. L'intégrale première de conservation de l'énergie peut donc être obtenue également directement à partir de la loi de Newton.

Exemple :

- Glissement sans frottement sur une courbe/surface.

On multiplie l'équation de Newton scalairement par $\dot{\mathbf{s}}$. Et on obtient :

$$m\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{G} + \mathbf{R} \quad m\dot{\mathbf{s}} \cdot \ddot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}} \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{R}) = \dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{G}$$

Si les forces données dérivent d'un potentiel, on a : $\dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{G} = -\frac{dV}{dt}$.

Et l'intégrale première de conservation de l'énergie : $\frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{s}}\|^2 + V = E$.

Cette façon de procéder est assez générale et permet d'obtenir des intégrales premières qui n'apparaissent pas directement par application des théorèmes généraux.

- Mouvement d'un point matériel sur une courbe/surface de guidage mobile.

$$m \frac{d^2 \mathbf{s}}{dt^2} = \mathbf{G} + \mathbf{R} \quad m \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \cdot \frac{d^2 \mathbf{s}}{dt^2} = \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{R}) = \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \cdot \mathbf{G}$$

Cette fois-ci, on a multiplié l'équation scalairement par la dérivée relative du point par rapport à la courbe/surface. Dans certains cas, cette équation donne lieu à une intégrale première de bilan énergétique. Dans tous les cas, l'intégrale de : $\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \cdot \mathbf{G}$ joue le rôle de potentiel et la constante d'intégration représente une certaine forme de conservation d'énergie du système.

- À partir de l'intégrale première du mouvement exprimant la conservation de l'énergie totale d'un système mécanique décrite précédemment, on va tracer un diagramme de potentiel. Puisque l'énergie cinétique $T_O > 0$, on peut écrire :

$$T_O = E - V \geq 0$$

On en déduit que les seules configurations accessibles sont telles que : $V(\mathbf{s}) \leq 0$. Le graphique de $V(q)$, où q est la variable du système, est appelé diagramme de potentiel.

- Les positions d'équilibre d'un système sont caractérisées par une accélération et une vitesse nulle. Pour trouver les position d'équilibre, on pose donc $\ddot{x} = 0$ et $\dot{x} = 0$ dans l'équation du mouvement, où x est la variable caractéristique du système.
- Pour la méthode des perturbations infinitésimales, on utilise l'équation :

$$\ddot{x} + F(x) = 0$$

(équation de Newton) dans laquelle on introduit :

$$x = x_{\text{eq}} + \eta$$

où x_{eq} est la position d'équilibre et η est la perturbation.

L'équation devient :

$$\underbrace{(\ddot{x}_{\text{eq}} + \ddot{\eta})}_0 + F(x_{\text{eq}} + \eta) = 0$$

Et pour $F(x_{\text{eq}} + \eta)$, on va faire le développement de Taylor au voisinage de x_{eq} à l'ordre 1.

L'équation devient donc :

$$\ddot{\eta} + \underbrace{F(x_{\text{eq}})}_0 + F'(x_{\text{eq}}) \underbrace{(x - x_{\text{eq}})}_{\eta} = 0$$

$$\implies \ddot{\eta} + F'(x_{\text{eq}})\eta = 0 \quad \text{Équation linéaire}$$

On étudie dès lors la stabilité en fonction de la résolution de l'équation différentielle ci-dessus.

Exemple :

- Si $F'(x_{\text{eq}}) = 0$, alors $\ddot{\eta} = 0$ et $\eta = At + B \longrightarrow$ Équilibre faiblement stable
- Si $F'(x_{\text{eq}}) > 0$, alors $\eta = A \cos\left(\sqrt{F'(x_{\text{eq}})}t\right) + B \sin\left(\sqrt{F'(x_{\text{eq}})}t\right) \longrightarrow$ Équilibre marginalement stable
- Si $F'(x_{\text{eq}}) < 0$, alors $\eta = A \text{ch}\left(\sqrt{F'(x_{\text{eq}})}t\right) + B \text{sh}\left(\sqrt{F'(x_{\text{eq}})}t\right) \longrightarrow$ Équilibre instable

Remarque : $F'(x_{\text{eq}}) = \text{constante}$.

- D'un point de vue plus général, la linéarisation de la dynamique des perturbations (infinitésimales) donne une équation linéaire à coefficients constants. Sa solution s'exprime sous la forme d'une somme d'expressions de la forme :

$$t^k e^{zt} \quad \text{avec } k \text{ entier } \geq 0$$

où les z sont les racines de l'équation caractéristique associée.

Ces expressions sont des fonctions croissantes en fonction du temps si la partie réelle de l'argument de l'exponentielle est positive et des fonctions décroissantes si cette partie réelle est négative. Il s'ensuit que :

- Si toutes les racines ont une partie réelle négative, l'équilibre est stable.
- Si une racine au moins a sa partie réelle positive, l'équilibre est instable.
- Si toutes les racines ont une partie réelle négative sauf certaines qui ont une partie réelle nulle, les solutions élémentaires correspondantes sont des fonctions périodiques ($k = 0$) ou des fonctions croissantes en puissance de t ($k > 0$). Dans le premier cas, la perturbation est bornée mais pas amortie. On dit que l'équilibre est marginalement stable. Dans le second cas, la perturbation croît sans être cependant exponentiellement amplifiée. On dit que l'équilibre est faiblement instable au sens de l'analyse linéaire de la stabilité.

C'est grâce à la méthode des petites perturbations que l'on va analyser les positions d'équilibre marginalement stable et faiblement instables. Et lever le voile sur leurs réelle stabilité.

Polynôme caractéristique	Solution générale
$z^2 - \alpha^2 = 0 \implies$	$x(t) = C_1' e^{\alpha t} + C_2' e^{-\alpha t}$
$z_1 = \alpha \text{ \& } z_2 = -\alpha$	$= C_1 \operatorname{sh} \alpha t + C_2 \operatorname{ch} \alpha t$
$z^2 + \alpha^2 = 0 \implies$	$x(t) = C_1' e^{i\alpha t} + C_2' e^{-i\alpha t}$
$z_1 = i\alpha \text{ \& } z_2 = -i\alpha$	$= C_1 \sin \alpha t + C_2 \cos \alpha t$
$z^2 = 0 \implies$	
$z_1 = z_2 = 0$	$x(t) = At + B$

Racines du polynôme caractéristique : $z_1 = a_1 + ib_1 \text{ \& } z_2 = a_2 + ib_2$	Stabilité : méthode des perturbations infinitésimales
$a_1 < 0 \text{ et } a_2 < 0$	Équilibre stable
Si $a_1 > 0$ ou $a_2 > 0$	Équilibre instable
$a_1 < 0 \text{ \& } a_2 = 0$ ou $a_1 = 0 \text{ \& } a_2 < 0$	Équilibre marginalement stable
<u>avec</u> $k = 0$ ($k = \text{multiplicité}$)	
$z_1 = z_2 = 0$ ($k \neq 0$)	Équilibre faiblement instable

Exemple d'équilibre marginalement stable : $x(t) = C_1' e^{i\alpha t} + C_2' e^{-i\alpha t} = C_1 \sin \alpha t + C_2 \cos \alpha t$.

- Pour la méthode des petites perturbations, on commence en faisant comme pour la méthode des perturbations infinitésimales mais quand on a l'équation :

$$\ddot{\eta} + F(x_{\text{eq}} + \eta) = 0$$

On doit faire le développement de Taylor et on ne s'arrête que lorsque l'on a un terme non nul.

Si $F'(x_{\text{eq}}) \neq 0$, la méthode des petites perturbations est différente de la méthode des perturbations infinitésimales. Sinon ($F(x_{\text{eq}}) = 0$), elles sont exactement les mêmes.

Exemple :

$$\begin{aligned} \text{Si } F'(x_{\text{eq}}) = 0 ; F^{(2)}(x_{\text{eq}}) = 0 ; F^{(3)}(x_{\text{eq}}) = 0 ; F^{(4)}(x_{\text{eq}}) \neq 0 \\ \text{alors } \underbrace{\ddot{\eta} + F(x_{\text{eq}}) + F'(x_{\text{eq}})\eta + F^{(2)}(x_{\text{eq}})\frac{\eta^2}{2!} + \dots + F^{(4)}(x_{\text{eq}})\frac{\eta^4}{4!}}_0 = 0 \\ \implies \ddot{\eta} + \underbrace{\frac{F^{(4)}(x_{\text{eq}})}{4!}\eta^4}_{\text{constant}} = 0 \end{aligned}$$

On n'a donc plus une équation différentielle *linéaire* même si les coefficients sont toujours constants.

Pour pouvoir obtenir une intégrale première, on va multiplier cette équation par $\dot{\eta}$.

On étudie ensuite la stabilité de l'équilibre à partir de cette intégrale première.

L'équilibre est stable si η , qui est la perturbation, diminue ou reste constant. Sinon, l'équilibre est instable.

- De manière plus générale, considérons un système à un degré de liberté dont la dynamique des petites perturbations est décrite par l'équation :

$$\ddot{\eta} + \mu \eta^k = 0$$

où k est un naturel non nul et μ désigne une constante quelconque. Multipliant par $\dot{\eta}$ et intégrant terme à terme, il vient :

$$\frac{1}{2}\dot{\eta}^2 + \frac{\mu}{k+1}\eta^{k+1} = \text{constante}$$

Même si on ne sait pas résoudre complètement l'équation différentielle, l'intégrale première permet de conclure quant à la stabilité de la position d'équilibre :

- Si k est impair et μ positif, le membre de gauche de l'intégrale première $\left(\frac{1}{2}\dot{\eta}^2 + \frac{\mu}{k+1}\eta^{k+1}\right)$ est une somme bornée de deux carrés. Chacun des termes est donc borné et l'équilibre est stable.
- Si k est impair et μ négatif, l'intégrale première exprime que la différence des deux termes positifs du membre de gauche reste constante mais permet à ces deux termes de prendre des valeurs arbitrairement grandes. La perturbation n'est donc pas bornée et l'équilibre est instable.

- Si k est pair, quel que soit μ il existe toujours une évolution de la perturbation qui n'est pas bornée. L'équilibre est instable.

$\frac{1}{2}\dot{\eta}^2 + \frac{\mu}{k+1}\eta^{k+1} = \text{constante}$	Stabilité : méthode des petites perturbations
k impair & μ positif	Équilibre stable
k impair & μ négatif	Équilibre instable
k pair	Équilibre instable

- Dans le cas où le système est décrit par une intégrale première du type :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E$$

ou par toute autre intégrale de même structure, la stabilité peut être discutée directement à partir de l'étude des variations de $V(x)$.

L'équation de mouvement correspondant à cette équation s'obtient par dérivation :

$$m\ddot{x} + V'(x) = 0$$

Les éventuelles positions d'équilibre x_{eq} sont données par : $V'(x_{\text{eq}}) = 0$, et correspondent aux *points stationnaires* du potentiel V .

- Pour caractériser une position d'équilibre, considérons une petite perturbation η de celle-ci selon :

$$x = x_{\text{eq}} + \eta \quad \dot{x} = \dot{\eta} \quad \ddot{x} = \ddot{\eta}$$

La perturbation obéit à l'équation :

$$m\ddot{\eta} + V'(x_{\text{eq}} + \eta) = 0$$

En limitant au premier terme non nul le développement en série de Taylor de $V'(x)$ au voisinage de $x = x_{\text{eq}}$, on obtient l'équation approchée :

$$m\ddot{\eta} + \frac{1}{k!}V^{(k+1)}(x_{\text{eq}})\eta^k$$

qui est similaire à l'équation obtenue dans l'étude des petites perturbations $\left(\frac{1}{2}\dot{\eta}^2 + \frac{\mu}{k+1}\eta^{k+1} = \text{constante}\right)$

avec $\mu = \frac{1}{m k!}V^{(k+1)}(x_{\text{eq}})$.

En s'appuyant sur les résultats dégagés dans l'étude des petites perturbations, on en déduit la stabilité de l'équilibre :

- Si k est impair et μ positif, c'est-à-dire si la première dérivée non-nulle du potentiel en x_{eq} est d'ordre pair et que la valeur de celle-ci est positive, l'équilibre est stable. Cette condition correspond à l'existence d'un minimum local du potentiel en x_{eq} .
- Si k est impair et μ négatif, c'est-à-dire si la première dérivée non-nulle du potentiel en x_{eq} est d'ordre pair et que la valeur de celle-ci est négative, l'équilibre est instable. Cette situation se produit en tout maximum local du potentiel.
- Si k est pair, quel que soit μ , c'est-à-dire si la première dérivée non-nulle du potentiel en x_{eq} est d'ordre impair, l'équilibre est instable. Le graphe du potentiel $V(x)$ présente un point d'inflexion à tangente horizontale en un tel point.
- En pratique, on utilise le potentiel de la manière suivante : Pour trouver les positions d'équilibre, on peut aussi dériver le potentiel ($\rightarrow V'(x)$) et voir où ça s'annule.
Ensuite, on calcule la dérivée seconde pour voir si c'est stable :

$$- V''(x) < 0 \rightarrow \bigcirc [-x^2 \rightarrow f'' = -2]$$

$$- V''(x) > 0 \rightarrow \bigcirc [+x^2 \rightarrow f'' = +2]$$

– $V''(x) = 0 \rightarrow$ Aucune information, il faut encore dériver.

△ Il faut dériver $V(x)$ en fonction de $x \rightarrow V'(x) = \frac{dV(x)}{dx}$.

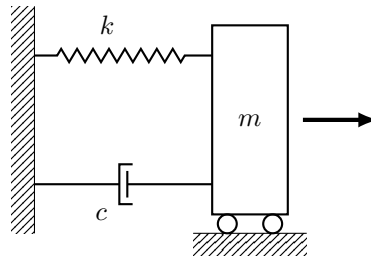
• Rappel : Extrema d'une fonction :

Si f est une fonction réelle $n + 1$ fois continûment dérivable sur $]a, b[$, si $f'(c) = 0$ en un point $c \in]a, b[$ et si la première dérivée non-nulle en c est $f^{(n)}(c)$, alors :

- c est un maximum local si n est pair et $f^{(n)}(c) < 0$.
- c est un minimum local si n est pair et $f^{(n)}(c) > 0$.
- c est un point d'inflexion à tangente horizontale si n est pair.

• L'oscillateur amorti est constitué d'une masse, d'un ressort et d'un amortisseur. On note $x(t)$ l'élongation du ressort par rapport à sa longueur naturelle l_0 . L'équation de Newton donne :

$$m \ddot{x} = -c \dot{x} - k x$$



où m la masse, c la constante d'amortissement, k la raideur du ressort sont des constantes positives. On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ appelée fréquence propre du système et $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{k m}}$ appelé facteur d'amortissement du système. Et on a donc l'équation de Newton sous forme canonique :

$$\ddot{x} + 2 \zeta \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

En l'absence d'amortissement ($c = 0$), l'équation différentielle du mouvement devient : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. La solution générale s'exprime dès lors sous la forme : $x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$. Le système est appelé "oscillateur harmonique", il a une période de $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ et son énergie totale vaut : $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$.

Dans le cas de l'oscillateur harmonique, le théorème de l'énergie cinétique permet d'écrire :

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) = -c \dot{x}^2$ qui montre que l'amortisseur dissipe progressivement l'énergie du système. L'équation différentielle du mouvement est linéaire et à coefficients constants. Les racines de son polynôme caractéristique sont :

$$z_\alpha = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \omega_0 \quad (\alpha = 1, 2)$$

1. $\zeta < 1$

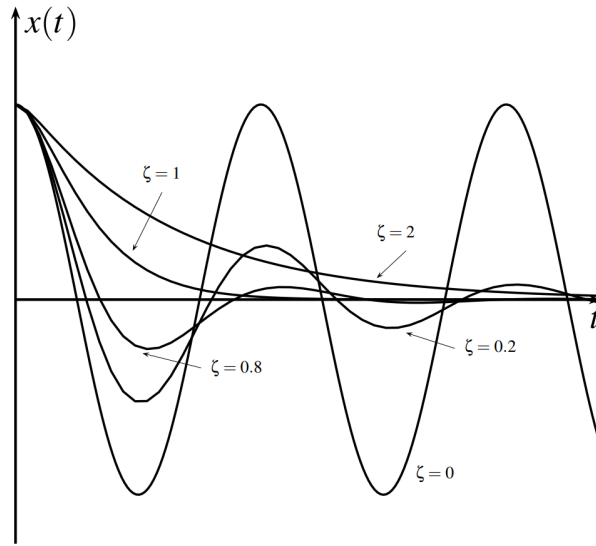
$$x(t) = e^{-\zeta \omega_0 t} \left(\frac{\nu_0 + \zeta \omega_0 x_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t \right)$$

2. $\zeta = 1$

$$x(t) = e^{-\omega_0 t} \left(x_0 + (\nu_0 + \omega_0 x_0) t \right)$$

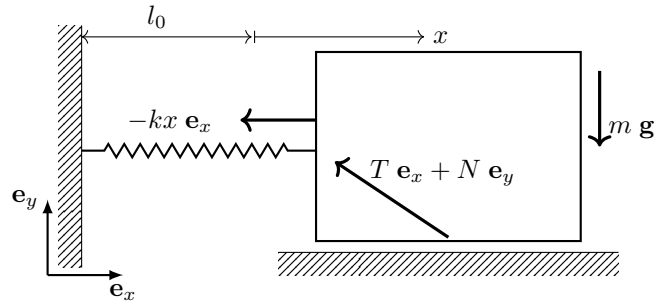
3. $\zeta > 1$

$$x(t) = \frac{\nu_0 - z_2 x_0}{z_1 - z_2} e^{z_1 t} + \frac{\nu_0 - z_1 x_0}{z_2 - z_1} e^{z_2 t}$$



- Lorsque $\zeta = 0$, il n'y a pas d'amortissement. Si $\zeta < 1$, La solution est oscillatoire et l'amortissement est dit "sous-critique". Dans le cas où $\zeta = 1$, l'amortissement est dit critique, alors que lorsque $\zeta > 1$, l'amortissement est "sur-critique".
- Dans le cas d'un frottement sec, la force de liaison entre le mobile et le plan possède une composante verticale $N \mathbf{e}_y$ et une composante horizontale $T \mathbf{e}_x$ où T vaut :

$$T = -\mu N \text{sign}(\dot{x})$$



La loi de Newton s'écrit :

$$m \ddot{x} \mathbf{e}_x = (-k x + T) \mathbf{e}_x + (N - m g) \mathbf{e}_y$$

de sorte que (en posant $\omega_0 = \sqrt{k/m}$) :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\mu g & \text{si } \dot{x} > 0 \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu g & \text{si } \dot{x} < 0 \end{cases}$$

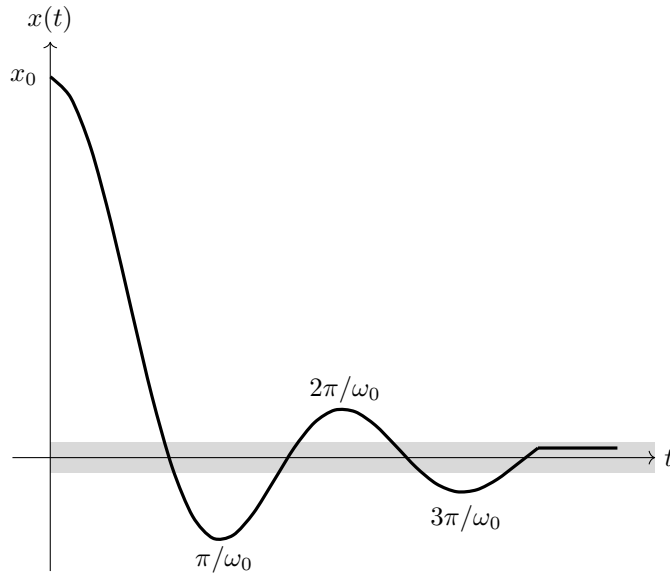
Si $x > 0$ ($\dot{x}_0 = 0$), on a :

$$x(t) = \frac{\mu g}{\omega_0^2} + \left(x_0 - \frac{\mu g}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t \quad \text{pour } t \in \left] 0, \frac{\pi}{\omega_0} \right[$$

Ensuite, on aura $x < 0$ ($\dot{x}_0 = 0$) et donc :

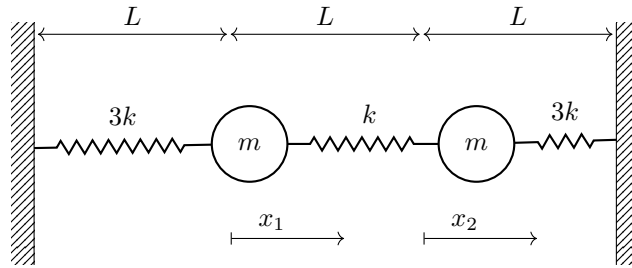
$$x(t) = -\frac{\mu g}{\omega_0^2} + \left(x_0 - \frac{3\mu g}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t \quad \text{pour } t \in \left] \frac{\pi}{\omega_0}, \frac{2\pi}{\omega_0} \right[$$

Après chaque intervalle de temps $\frac{\pi}{\omega_0}$, l'amplitude de l'oscillation est réduite, si bien que après un moment, la force de friction devient supérieure à la force de rappel du ressort.



• Oscillateurs harmoniques couplés :

La réponse libre d'oscillateurs harmoniques couplés consiste en une oscillation composite, superposition de plusieurs oscillations périodiques dont les fréquences sont les *fréquences propres* du système. La forme particulière des oscillations harmoniques correspondant à chacune des fréquences propres est appelée *mode de vibration*.



Si on place les axes à la longueur naturelle des ressorts, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - k(x_2 - x_1) &= 0 \\ m\ddot{x}_2 + 3kx_2 - k(x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned}$$

On découple ces équations en posant :

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 + x_2 & 2x_1 &= X_1 + X_2 \\ X_2 &= x_1 - x_2 & 2x_2 &= X_1 - X_2 \end{aligned}$$

D'un point de vue physique, X_1 décrit le déplacement du centre d'inertie du système.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} m\ddot{X}_1 + 3kX_1 &= 0 & \Rightarrow & & X_1 &= C_1 \cos(\sqrt{3} \omega_0 t + \varphi_1) \\ m\ddot{X}_2 + 5kX_2 &= 0 & & & X_2 &= C_2 \cos(\sqrt{5} \omega_0 t + \varphi_2) \end{aligned}$$

où $\omega_0^2 = k/m$. Les fréquences propres du système sont donc $\omega_I = \sqrt{3} \omega_0$ et $\omega_{II} = \sqrt{5} \omega_0$.

Si $x_1 = x_2$, les 2 points matériels oscillent en phase (fréquence = ω_I)
 Si $x_1 = -x_2$, les 2 points matériels oscillent en opposition de phase (fréquence = ω_{II})

- Dans le cas envisagé, si on applique une force \mathbf{F} au premier point matériel du système telle que $F = mL\Omega^2 \cos \omega t$, on a :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - k(x_2 - x_1) &= mL\Omega^2 \cos \omega t \\ m\ddot{x}_2 + 3kx_2 - k(x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} m\ddot{X}_1 + 3kX_1 &= mL\Omega^2 \cos \omega t \\ m\ddot{X}_2 + 5kX_2 &= mL\Omega^2 \cos \omega t \end{aligned}$$

On peut donc étudier séparément la réponse de chacun des modes propres soumis à une force excitatrice. On dit de cette force s'appliquant à un mode particulier qu'elle est la *projection de la force appliquée dans la base des modes propres*.

Et si $x_1 = x_2 = 0$; $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, on a :

$$X_1 = \frac{L\Omega^2}{\omega_I^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_I t) \quad X_2 = \frac{L\Omega^2}{\omega_{II}^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_{II} t)$$

Si $\omega = \omega_I$ ou si $\omega = \omega_{II}$, alors il y a résonance et la solution ci-dessus n'est plus correcte. Par exemple, si $\omega = \omega_I$, on a :

$$X_1 = \frac{L\Omega^2}{2\omega_I} t \sin \omega_I t$$

- Note sur les modes propres :

Un mode normal ou mode propre d'oscillation est une forme de mouvement dans laquelle toutes les parties du système se déplacent sinusoïdalement avec la même fréquence naturelle de vibration associée au mode. Le nombre de modes normaux est égal à celui des degrés de liberté du système.

Le mouvement général d'un système est la superposition de ses modes normaux. Les modes sont normaux dans le sens qu'ils se déplacent indépendamment les uns des autres, une excitation d'un des modes ne cause jamais le mouvement d'un autre mode. En termes mathématiques, les modes sont orthogonaux.

5 Applications : Mouvement de base du point matériel

- Lors d'une chute dans le vide, la seule force agissant sur un corps de masse m est $m \mathbf{g}$. L'équation différentielle vectorielle du mouvement est donc : $m \ddot{\mathbf{s}} = m \mathbf{g}$. Son équation du mouvement est donc :

$$\mathbf{s}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{s}_0$$

- Si la résistance de l'air crée une force $\mathbf{F} = -k \dot{\mathbf{s}}$, l'EDVM (équation différentielle vectorielle du mouvement) s'écrit :

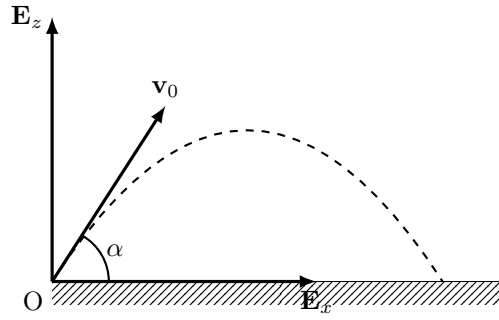
$$m \ddot{\mathbf{s}} = m \mathbf{g} - k \dot{\mathbf{s}}$$

Son EM (équation de mouvement) s'écrit quant à elle :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(t) &= \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 e^{-kt/m} + \frac{m \mathbf{g}}{k} t \\ &= h \mathbf{E}_z + \frac{m^2 \mathbf{g}}{k^2} (e^{-kt/m} - 1) + \frac{m \mathbf{g}}{k} t \\ z(t) &= h + \frac{m^2 g}{k^2} (1 - e^{-kt/m}) - \frac{m g}{k} t \end{aligned}$$

La vitesse du corps augmente et tend progressivement vers la vitesse limite de chute : $v_L = \frac{m g}{k}$.

- La seule force agissant sur le projectile est la pesanteur. On a donc : $m \ddot{\mathbf{s}} = m \mathbf{g}$.



En intégrant, on obtient :

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{g} t + v_0(\cos \alpha \mathbf{E}_x + \sin \alpha \mathbf{E}_z) \quad \mathbf{s}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 + v_0 t(\cos \alpha \mathbf{E}_x + \sin \alpha \mathbf{E}_z)$$

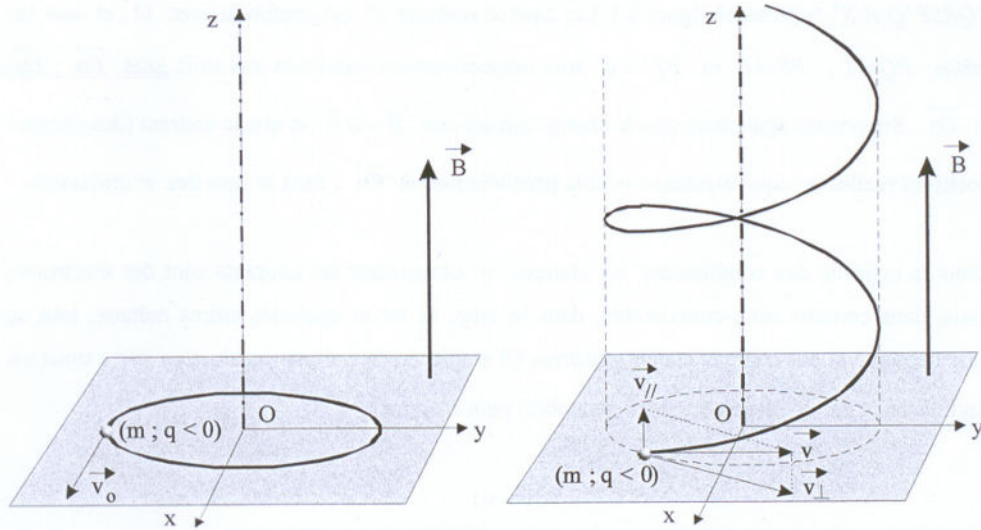
- Une particule de masse m , charge q dans un champ électromagnétique est soumise à la force : $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$ qui se réécrit sous la forme : $m \ddot{\mathbf{s}} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{s}} \wedge \mathbf{B})$.

On pose :

$$\mathbf{e} = \frac{q}{m} \mathbf{E} ; \quad \omega_c = -\frac{q B}{m} ; \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|}$$

Ce qui nous donne : $\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{e} + \omega_c \mathbf{b} \wedge \dot{\mathbf{s}}$.

- Si $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, alors $\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{e}$ et donc : $\mathbf{s} = \frac{1}{2} \mathbf{e} t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{s}_0$.
- Si $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, alors $\ddot{\mathbf{s}} = \omega_c \mathbf{b} \wedge \dot{\mathbf{s}}$.



1. Vitesse initiale perpendiculaire au champ :

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = m \mathbf{a} \quad \text{où } a = a_c = \frac{v^2}{r} \quad \mathbf{v} \perp \mathbf{B} \implies F = q v B$$

$$q v B = m \frac{v^2}{r} \implies r = \frac{m v}{q B} = \frac{\boxed{m v}}{\boxed{q B}}$$

→ $\boxed{m v}$ est la quantité de mouvement

→ $\boxed{q B}$ est l'interaction électrostatique

En physique des particules chargées, $r = \frac{m v}{q B}$ est appelé rayon cyclotronique et $\omega_c = \frac{v}{r} = \frac{q B}{m}$ porte le nom de fréquence cyclotronique (elle est souvent notée $\omega = \frac{|q| B}{m}$).

2. Vitesse initiale perpendiculaire au champ :

Si on note \mathbf{v}_{\parallel} la vitesse parallèle à \mathbf{B} et \mathbf{v}_{\perp} la vitesse perpendiculaire à \mathbf{B} , on a : $r = \frac{m v_{\perp}}{q B} \implies$

$$v_{\perp} = \frac{q B r}{m}.$$

Le pas de l'hélice (le mouvement en 3d est hélicoïdal) vaut : $z = v_{\parallel} T$ avec T la période qui vaut :

$$T = \frac{2\pi r}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{q B}.$$

$$z = 2\pi \frac{m v_{\parallel}}{q B} = 2\pi \frac{m v_{\parallel}}{q B}$$

- Expression vectorielle de la trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique :

$$\mathbf{s}(t) = v_{\parallel} t \mathbf{E}_z + r (\cos \theta \mathbf{E}_x + \sin \theta \mathbf{E}_y)$$

où $\theta(t)$ vaut 2π en $t = T = 2\pi/mqB \implies \theta = t m q B$.

- Dans un système à masse variable (SMV), l'EDVM s'écrit :

$$m(t) \ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{G} + \mathbf{P}$$

où \mathbf{s} est le vecteur position du centre d'inertie (CI) du SMV, \mathbf{G} est la résultante des forces qui agissent sur le SMV et \mathbf{P} est la poussée avec $\mathbf{P} = \frac{dm}{dt} \mathbf{w}$.

$$\frac{dm}{dt} \begin{cases} > 0 & \text{si absorption (m augmente)} \\ < 0 & \text{si éjection (m baisse)} \end{cases} \quad \triangleq \text{Attention aux erreurs de signe !}$$

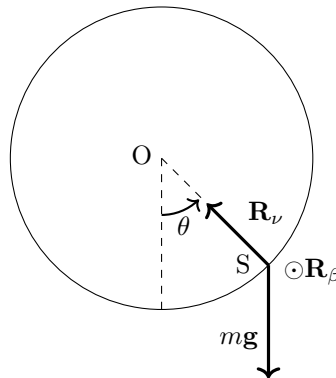
\mathbf{w} est la vitesse de l'objet absorbé/éjecté par rapport au SMV (vitesse relative).

- Relation différentielle utile lorsqu'on a une force divisible par \dot{z}^2 (ex : si $\mathbf{F} = -k \dot{\mathbf{z}}^2$) :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} (\dot{z}^2)$$

6 Applications : Mouvements guidés

- L'équation de Newton d'un pendule simple s'écrit : $m \ddot{\mathbf{s}} = m \mathbf{g} + \mathbf{R}$ avec $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\nu} + \mathbf{R}_{\beta}$.



Pour se débarrasser du terme \mathbf{R} , on multiplie l'équation par $\dot{\mathbf{s}}$: $\dot{\mathbf{s}} \cdot \ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{s}}$.

On en tire l'intégrale première de conservation de l'énergie : $\frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{s}}\|^2 = \mathbf{g} \cdot \mathbf{s} + c$ où c est une constante. On

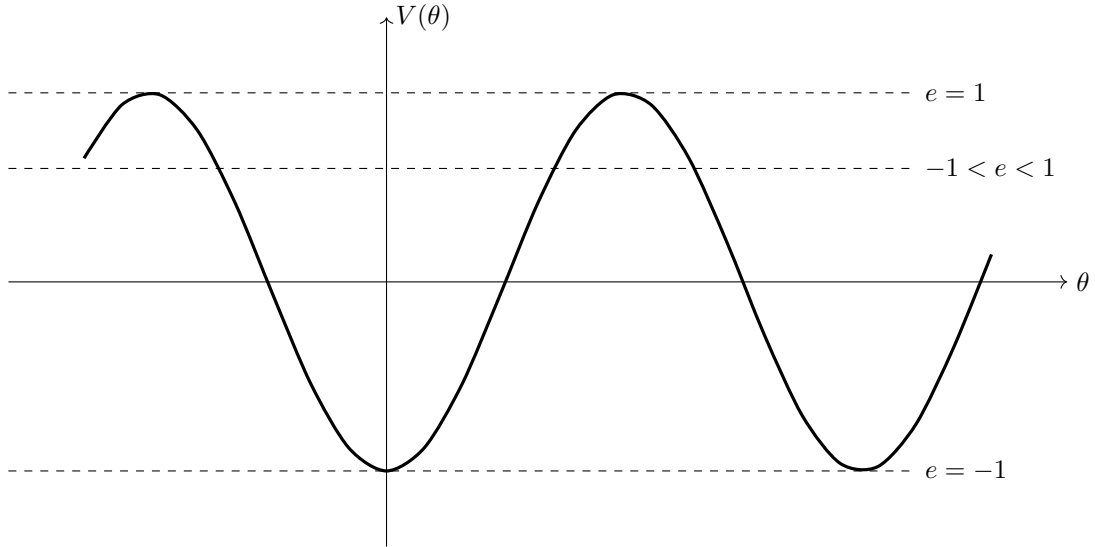
écrit donc : $\frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{s}}\|^2 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{s} = c = e$ (on note e l'énergie du système par unité de masse).

On pose $z = 0$; $r = a$; $\omega^2 = \frac{g}{a}$ et puisque la position ne varie qu'en fonction de θ , l'équation devient :

$$\underbrace{\frac{1}{2\omega^2}\dot{\theta}^2}_{E_{cin}} - \underbrace{\cos\theta}_{E_{pot}} = \underbrace{e}_{E_{tot}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{2\omega^2}\dot{\theta}^2}_{>0} = \underbrace{e + \cos\theta}_{>0}$$

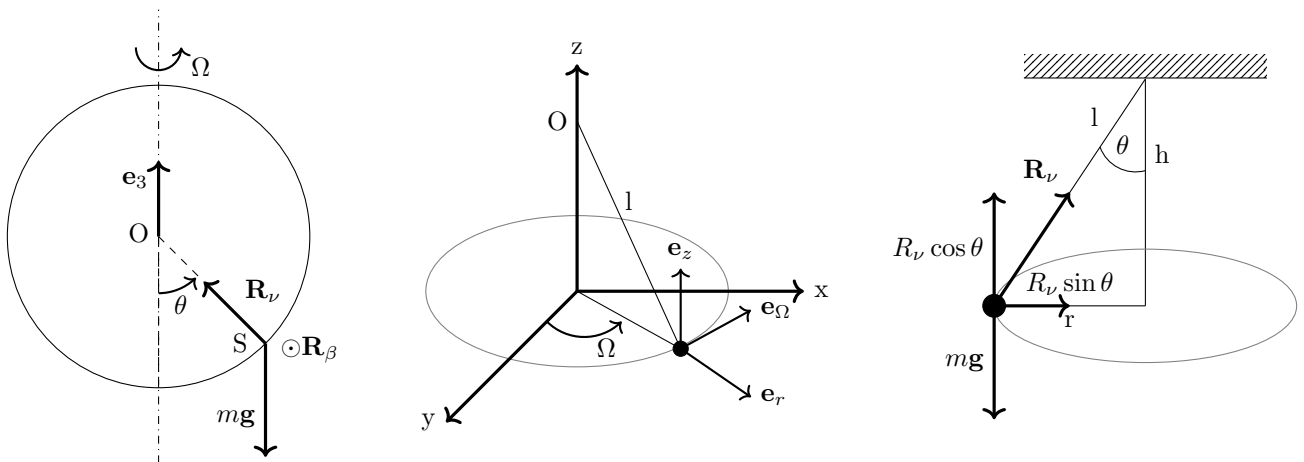
Étant donné que $e + \cos\theta > 0$, nous avons une nouvelle équation :

$$e > \underbrace{-\cos\theta}_{V(\theta)}$$



Le mouvement n'est possible que si $e \geq -1$. Si $e = -1 + \epsilon$, alors $\theta \ll 1$. L'équation $\frac{1}{2\omega^2}\dot{\theta}^2 - \cos\theta = e$ peut dès lors être réécrite sous la forme : $\frac{1}{2\omega^2}\dot{\theta}^2 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = -1 + \epsilon$. On la dérive par t et on obtient : $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$. Ou alternativement, $\theta = C_1 \cos(\omega t + \Phi_0)$.

- Pendule rotatif :



Un pendule rotatif qui tourne à vitesse constante Ω autour de l'axe \mathbf{e}_3 possède un vecteur de Poisson : $\mathbf{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_3$.

L'équation de Newton en axes relatifs s'écrit :

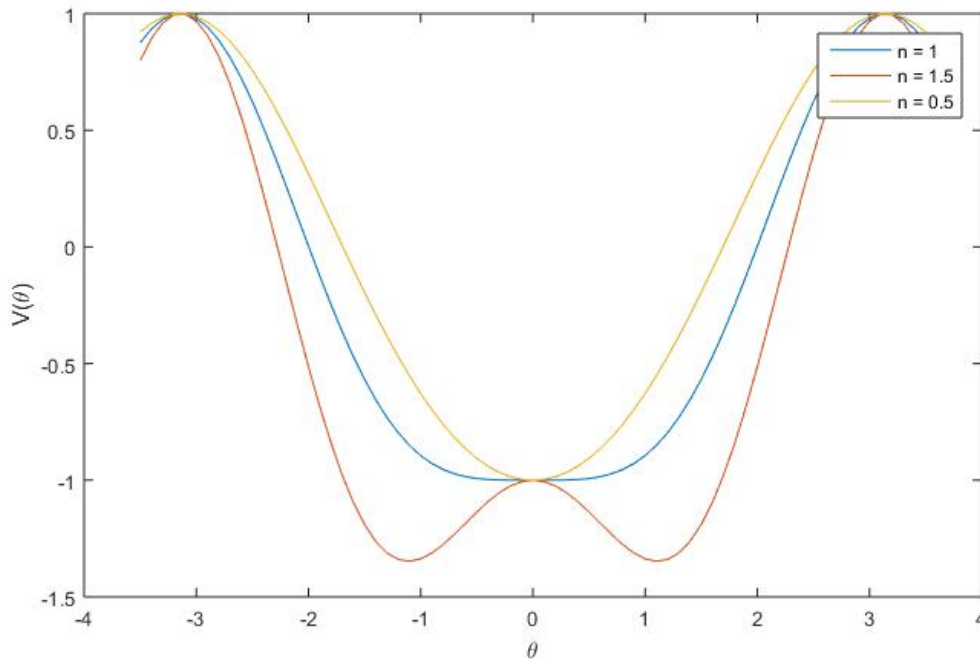
$$\underbrace{m \frac{\delta^2 \mathbf{s}}{\delta t^2}}_{\text{relative}} + \underbrace{2m \mathbf{\Omega} \wedge \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t}}_{\text{coriolis}} + \underbrace{m \mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{s})}_{\text{entraînement}} = m \mathbf{g} + \mathbf{R}$$

En multipliant scalairement par la vitesse relative et en développant le produit vectoriel ($\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$), on arrive à une équation immédiatement intégrable : $\frac{\delta^2 \mathbf{s}}{\delta t^2} \cdot \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{s}) \left(\mathbf{\Omega} \cdot \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \right) - \Omega^2 \mathbf{s} \cdot \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} = \mathbf{g} \cdot \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t}$. On en tire :

$$\frac{1}{2} \left\| \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \right\|^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{s})^2 - \frac{1}{2} \Omega^2 \|\mathbf{s}\|^2 = \mathbf{g} \cdot \mathbf{s} + c$$

On peut écrire : $\mathbf{s} = l \mathbf{e}_r$; $\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} = l \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$ et on pose : $n = \frac{\Omega}{\omega}$; $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Ce qui nous permet de réécrire l'équation précédente :

$$\ddot{\theta}^2 - \underbrace{(n^2 \sin^2 \theta + 2 \cos \theta)}_{V(\theta)} = 2c$$



- Analyse des position d'équilibre du pendule rotatif ($\ddot{\theta} = \sin \theta (n^2 \cos \theta - 1)$) :

– Positions d'équilibre : $\theta = \theta_{\text{eq}} \implies \dot{\theta} = 0$; $\ddot{\theta} = 0$.

* $\sin \theta_{\text{eq}} = 0 \implies \theta_{\text{eq}} = 0, \pm\pi$

* $n^2 \cos \theta_{\text{eq}} - 1 = 0 \implies \theta_{\text{eq}} = \pm \arccos \frac{1}{n^2}$ si $n^2 \geq 1$

– Méthode des perturbations infinitésimales :

Si on note ϵ la perturbation, on a l'équation : $\ddot{\epsilon} + (1 - n^2) \epsilon = 0$

* $n^2 < 1$, $\epsilon(\tau) = A \sin \sqrt{1 - n^2} \tau + B \cos \sqrt{1 - n^2} \tau \rightarrow$ Marginalement stable

* $n^2 > 1$, $\epsilon(\tau) = A \text{sh} \sqrt{n^2 - 1} \tau + B \text{ch} \sqrt{n^2 - 1} \tau \rightarrow$ Instable

* $n^2 = 1$, $\ddot{\epsilon} = 0 \implies \epsilon(\tau) = A + B\tau \rightarrow$ Faiblement instable

- Méthode des petites perturbations :

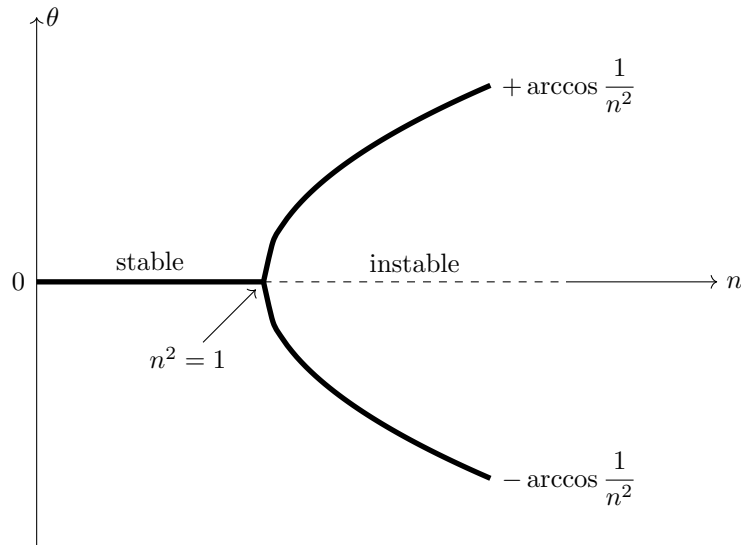
$$\text{On a : } \ddot{\epsilon} \approx -\frac{\epsilon^3}{2} \Rightarrow \ddot{\epsilon} + \frac{\epsilon^3}{2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\epsilon}^2 + \frac{\epsilon^4}{8} = \text{constante} \rightarrow \text{Stable}$$

Remarque : Si on avait eu : $\begin{cases} \dot{\epsilon} - \epsilon^4 = c \\ \dot{\epsilon}^2 + \epsilon^3 = c \end{cases}$ la position ($n^2 = 1$) aurait été instable.

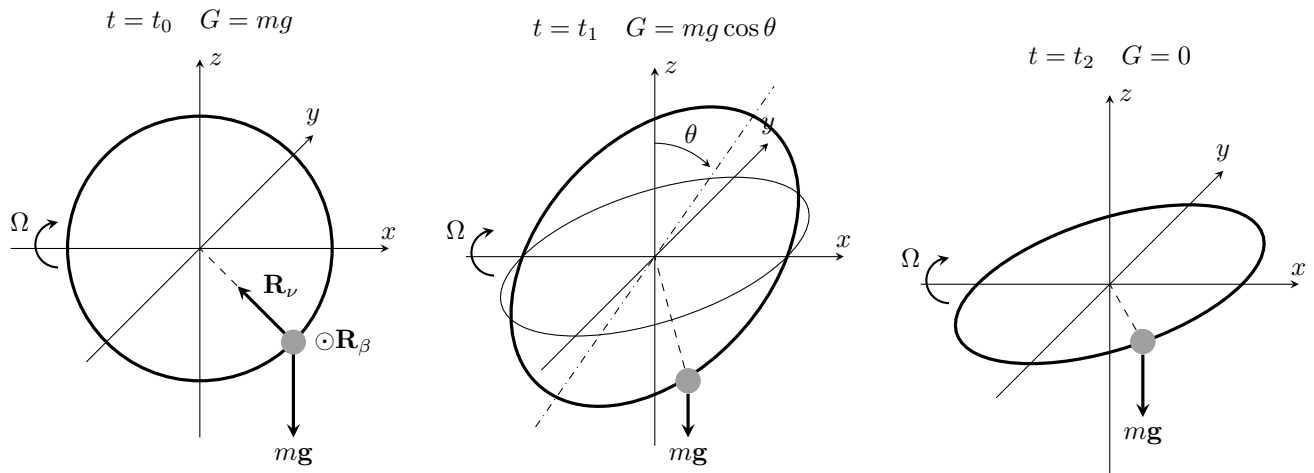
- Analyse des position d'équilibre du pendule rotatif à partir de l'intégrale première :

Comme on le voit sur le graphique, pour $n \leq 1$, on a seulement la position $\theta = 0$ qui est stable. Pour $n > 1$ par contre, on voit que la position $\theta = 0$ n'est plus une position d'équilibre stable mais il y en a deux autres qui apparaissent. Elles se trouvent en $\theta = +\arccos \frac{1}{n^2}$ et $\theta = -\arccos \frac{1}{n^2}$.

Si on fait une analyse des positions d'équilibre stables (de θ) en fonction de n , on remarque une bifurcation en $n^2 = 1$.



- Dans le cas où la courbe de guidage tourne autour d'un axe horizontal, la force de gravité n'est pas constante.



7 Applications : Forces centrales

- Une force centrale est une force qui passe toujours par le même point, celui-ci est appelé centre de force. Par exemple, la force d'attraction universelle est donnée par : $\mathbf{F} = -\frac{G M m}{r^2} \mathbf{e}_r$, et la force électrostatique

s'écrit : $\mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_r$. La force centrale (en r^{-2}) se note de manière générique ($\mu > 0$) :

$$\mathbf{F} = -m \mu r^{-2} \mathbf{e}_r$$

- Le moment cinétique dû aux forces centrales est conservé puisque sa dérivée est nulle : $\mathbf{s} \wedge \mathbf{F} = m \mathbf{s} \wedge \ddot{\mathbf{s}} = \frac{d}{dt} [m \mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}] = 0$ car $\frac{d}{dt} (\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}) = \underbrace{\dot{\mathbf{s}} \wedge \dot{\mathbf{s}}}_0 + \mathbf{s} \wedge \ddot{\mathbf{s}}$. Le moment cinétique étant : $m \mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{H}_0$.

$$\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{h}$$

Ceci implique que le mouvement est plan ($\mathbf{s} \cdot \mathbf{h} = 0$ et $\dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{h} = 0$).

- Il y a bien sûr conservation de l'énergie : $\frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{s}}\|^2 + V = E$.
- On sait que : $\mathbf{s} = r \mathbf{e}_r$ et $\dot{\mathbf{s}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$. D'où, $\mathbf{h} = \mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}} = r^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z$

$$\implies r^2 \dot{\theta} = h$$

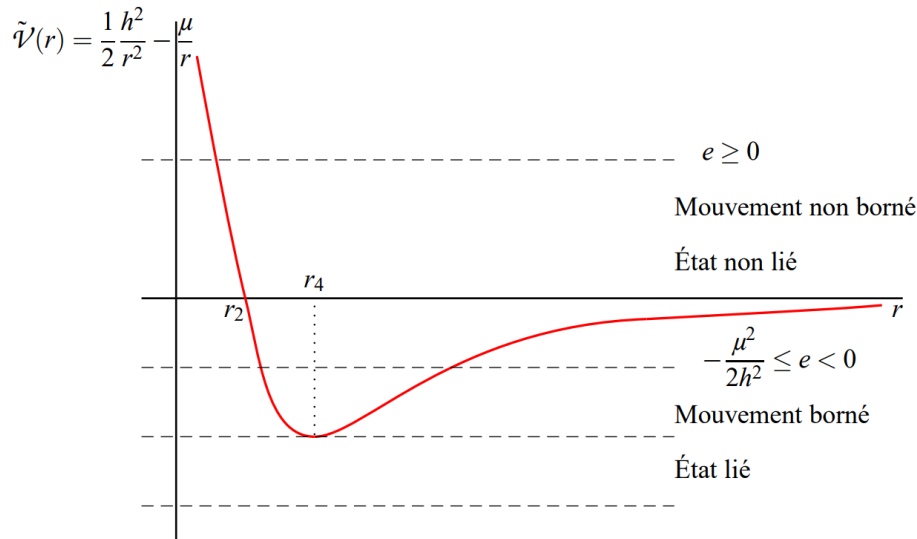
- L'énergie du système vaut ($\mathbf{F} = -\nabla V$) :

$$\begin{aligned} E = T_O + V &= \left(\frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{s}}\|^2 \right) + \left(-\mu m r^{-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - m \frac{\mu}{r} \\ &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{m \frac{h^2}{2r^2}}_{\mathcal{V}(r)} - m \frac{\mu}{r} \end{aligned}$$

On va comme dans la section précédente discuter du diagramme de potentiel de :

$$\tilde{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{r^2} - \frac{\mu}{r}$$

Diagramme de potentiel



- On cherche maintenant à déterminer exactement la trajectoire du système. Pour cela, on pose $r = u^{-1}$ et $\frac{dr}{du} = u^{-2}$.

$$m\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{F} \quad : \quad \begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -m\mu r^{-2} \\ \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0, \text{ i.e. } r^2\dot{\theta} = h \end{cases} \Rightarrow \ddot{r} - h^2 r^{-3} = -\mu r^{-2}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \left(-\frac{1}{u^2}\right) (hu^2) \frac{du}{d\theta} = -h \frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta} \left(-h \frac{du}{d\theta}\right) (hu^2) = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

$$-h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - h^2 u^3 = -\mu u^2$$

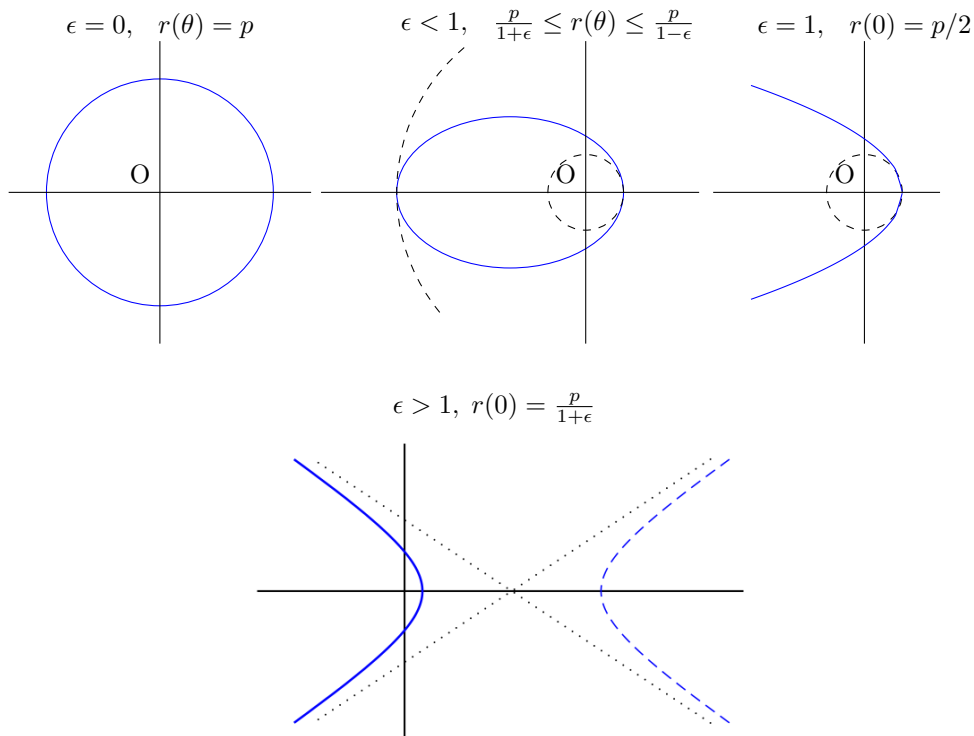
$$\boxed{\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}}$$

On tombe sur une équation différentielle facile à résoudre, sa solution est :

$$u(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{1}{p} = \frac{1}{r(\theta)} \quad \text{où } p = \frac{h^2}{\mu}$$

- Fixons $\theta = 0$ lorsque $r = r_{min} = \frac{p}{1+\epsilon}$ et posons $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2eh^2}{\mu^2}}$. On a donc :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2eh^2}{\mu^2}}$$

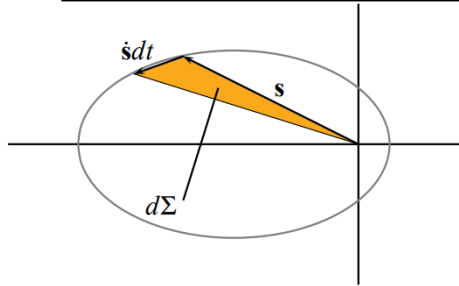


- Lois de Kepler sur le mouvement des planètes :

1. Les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil est un des foyers.

2. Le rayon vecteur joignant le soleil à une planète balaie des aires égales en des temps égaux au cours de son mouvement autour du soleil.
 3. Le carré des périodes des mouvements planétaires sont proportionnels aux cubes des grands axes des trajectoires.
- Démonstration de la 2^{ème} loi de Kepler :

Le rayon vecteur joignant le Soleil à une planète balaie des aires égales en des temps égaux au cours de son mouvement autour du Soleil (*Loi des aires*, 1609).



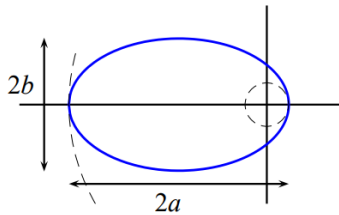
$$d\Sigma = \frac{1}{2} \|\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}\| dt$$

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{1}{2} \|\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}\| = \frac{1}{2} h$$

Rem : Vitesse plus grande au périégée (vs apogée)

- Démonstration de la 3^{ème} loi de Kepler :

Les carrés des périodes des mouvements planétaires sont proportionnels aux cubes des grands axes des trajectoires (1619).



$$a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{1 + \epsilon} + \frac{p}{1 - \epsilon} \right)$$

$$= \frac{p}{1 - \epsilon^2} \quad \text{où} \quad p = \frac{h^2}{\mu}$$

$$b = \sqrt{1 - \epsilon^2} a = \sqrt{pa} = h \sqrt{\frac{a}{\mu}}$$

$$\Sigma = \frac{hT}{2} = \pi ab = \pi a h \sqrt{\frac{a}{\mu}}$$

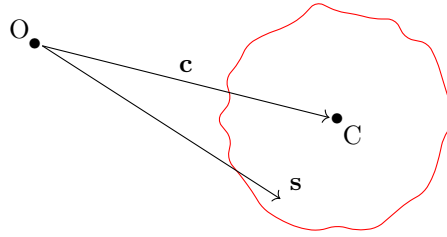
$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu}$$

8 Applications : Caractéristiques du solide

- Le point C (centre d'inertie) est tel que :

$$\begin{aligned} m \mathbf{c} &= \begin{cases} \mathbf{Q}_O \\ \text{moment statique} \end{cases} \\ &= \int_{\text{solide}} \mathbf{s} \, dm \end{aligned}$$

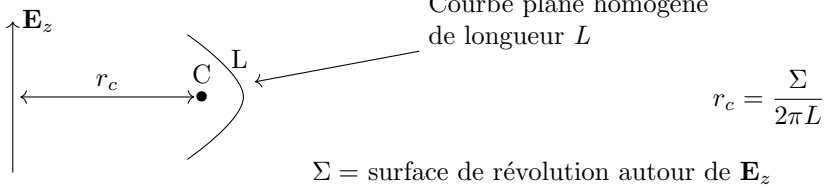
où le vecteur \mathbf{s} balaie l'ensemble du solide.



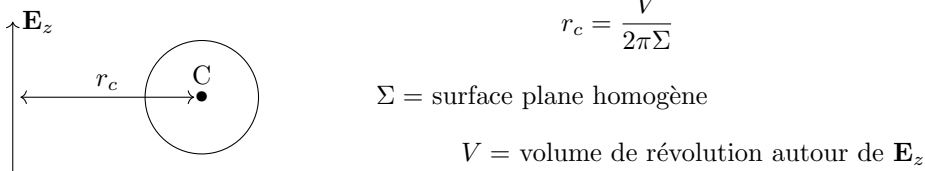
* Le point C se situe sur un élément de symétrie matérielle du solide.

* Théorèmes de Guldin :

1. Premier théorème :



2. Second théorème :



* Principe de superposition :

(a) Sans encoche :



(b) Avec encoche :



- Le tenseur d'inertie par rapport à un point B est donné par : $\mathbf{J}_B = \int_{\text{solide}} (\mathbf{s}^2 \mathbf{I} - \mathbf{s}\mathbf{s}) dm$, où \mathbf{I} est le tenseur identité et \mathbf{s} est le vecteur position par rapport à B.

$$J_B = \int \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} dm$$

La matrice est symétrique, donc diagonalisable. Dès lors, il existe un repère dans lequel J_B est représenté par une matrice diagonale.

Les axes du repères sont les :

- Vecteurs propres du solide.
- Axes principaux du solide.
- Axes de symétries du solides (s'ils existent).

On exprime \mathbf{J}_B :

- * Dans les axes principaux d'inertie (seulement trois intégrales à calculer).
- * Dans les axes liés au solide (\mathbf{J}_B constant).
- * En O , point fixe du solide.
En C , centre d'inertie du solide.

Soient $C, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ les a.p.i. (= axes principaux d'inertie) liés au solide en C . On a : $\mathbf{s} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$

et : $J_C = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ dans la base des \mathbf{e}_i (base des a.p.i.).

$$\begin{cases} J_1 = \int (x_2^2 + x_3^2) dm \\ J_2 = \int (x_1^2 + x_3^2) dm \\ J_3 = \int (x_1^2 + x_2^2) dm \end{cases}$$

Moments principaux d'inertie

$$\mathbf{J}_C = J_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + J_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + J_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$$

• Cas particuliers : moments d'inertie et axes principaux d'inertie

- Système rectiligne : Il suffit de calculer un seul moment d'inertie par rapport à une droite perpendiculaire à la droite du solide.
- Système plan : (plan $Oxy, z = 0$)

$$J_x = \int y^2 dm \quad ; \quad J_y = \int x^2 dm \quad ; \quad J_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

Et donc : $J_x + J_y = J_z$; $J_{yz} = J_{xz} = 0$ et l'ellipsoïde d'inertie est donné par :

$$J_x x^2 + J_y y^2 + (J_x + J_y) z^2 - 2J_{xy} xy = 1$$

Son intersection avec le plan Oxy ($z = 0$) donne l'ellipse d'inertie d'équation :

$$J_x x^2 + J_y y^2 - 2J_{xy} xy = 1$$

- Le système possède un axe de symétrie : Prenons cet axe pour Oz . On a :

$$J_{yz} = J_{xz} = 0$$

Ceci implique que l'axe de symétrie est un axe principal d'inertie. Et puisqu'il porte le centre d'inertie, il est l'un des axes centraux principaux d'inertie.

- Le système possède un axe de symétrie¹ d'ordre n (avec $n \neq 2$) : L'ellipsoïde d'inertie est de révolution autour de cet axe.
- Le système possède un plan de symétrie : Toute droite perpendiculaire au plan de symétrie est principale d'inertie. Car $J_{yz} = 0$ et $J_{xz} = 0$.

• Quelques informations à propos du tenseur d'inertie :

- * Le théorème C donne la formule : $\mathbf{J}_O = \mathbf{J}_C + m[c\mathbf{I} - \mathbf{c}\mathbf{c}]$. (Important !)
- * Le moment d'inertie par rapport à une droite d et de direction \mathbf{e} passant par B est donné par : $J_B^d = \mathbf{e} \cdot \mathbf{J}_B \cdot \mathbf{e}$ où \mathbf{e} est unitaire.
- * Le théorème de transport est un théorème qui donne le moment d'inertie autour d'une droite d_1 passant par O parallèle à d_2 passant par C : $J_O^{d_1} = J_C^{d_2} + ml^2$.

¹Un axe de symétrie est d'ordre n si une rotation de $\frac{2\pi}{n}$ autour de cet axe transforme le solide en lui-même.

9 Applications : Mouvement du solide

- Dynamique du solide : Théorème généraux :

Un solide indéformable peut avoir jusqu'à six degrés de liberté (3 de translation et 3 de rotation), pour déterminer le mouvement d'un solide, on a donc affaire à 6 inconnues.

$$\left. \begin{array}{lll} \text{Th. I} & m\ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{G} & 3 \text{ équations} \\ \text{Th. II} & \dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{M}_O & 3 \text{ équations} \\ \text{Th. II}_C & \dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{M}_C & 3 \text{ équations} \\ \text{Th. III} & \dot{T}_O = \mathcal{P}_O & 1 \text{ équation} \\ \text{Th. III}_C & \dot{T}_C = \mathcal{P}_C & 1 \text{ équation} \end{array} \right\} \Rightarrow 11 \text{ inconnues}$$

Il y a donc plusieurs approches possibles dans la résolution des problèmes.

Classiquement :

$$\begin{aligned} \text{Th. I (mouvement de } C) &+ \text{Th. II}_C \text{ (mouvement autour de } C) \\ \longrightarrow &6 \text{ éq. pour 6 inconnues} \end{aligned}$$

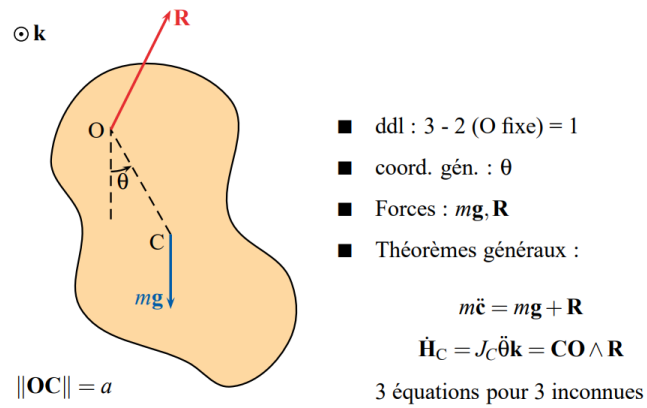
- Méthodes de l'étude du mouvement d'un solide :

Méthode 1	Méthode 2
⊕ Si on étudie seulement le mouvement	⊕ Toujours possible
⊖ Seulement si il y a conservation de l'énergie	⊖ Système à résoudre
(a) Il faut démontrer la conservation de l'énergie (ex : forces appliquées = conservatives & forces de réaction ne développent pas de puissance)	(a) On utilise le <u>Th. I</u> = théorème de la quantité de mouvement (axes absolus en O) :
(b) On utilise le <u>Th. III en O</u> = théorème de l'énergie cinétique en O (axes absolus en O) :	$\dot{\mathbf{N}}_O = \mathbf{G}_{\text{ext}}$ projeté sur \mathbf{E}_x & \mathbf{E}_y donne \mathbf{R}_m et \mathbf{R}_n en fonction de θ .
$\dot{T}_O = \mathcal{P}_O$ avec $T_O + V = E \longrightarrow 1 \text{ éq. pour } O$	(b) On utilise le <u>Th. II</u> = théorème du moment cinétique (axes absolus en O) :
(c) On utilise le <u>Th. I</u> = théorème de la quantité de mouvement (axes absolus en O) :	$\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{M}_O^{\text{ext}}$ projeté sur $\mathbf{E}_z \longrightarrow 1 \text{ éq. si mouvement plan}$
$\dot{\mathbf{N}}_O = \mathbf{G}^{\text{ext}}$ projeté sur \mathbf{E}_x & \mathbf{E}_y donne \mathbf{R}_m et \mathbf{R}_n en fonction de θ .	

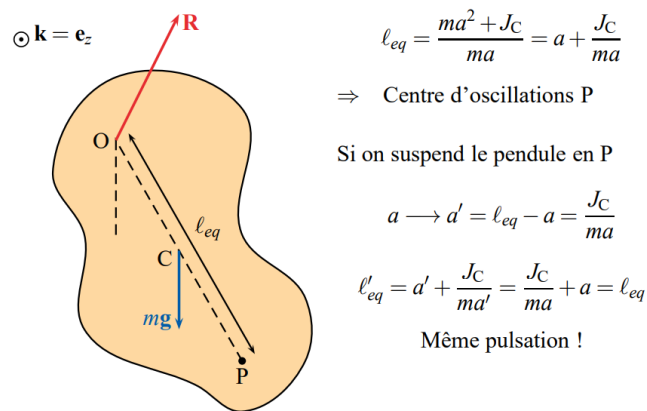
- Un solide est en mouvement plan lorsque 3 des ses points non alignés se déplacent à chaque instant dans un même plan.

On dit aussi que pour qu'un solide soit en mouvement plan, il faut que la résultante des forces soit dans le plan du mouvement et que le moment résultant par rapport au centre d'inertie soit perpendiculaire à celui-ci

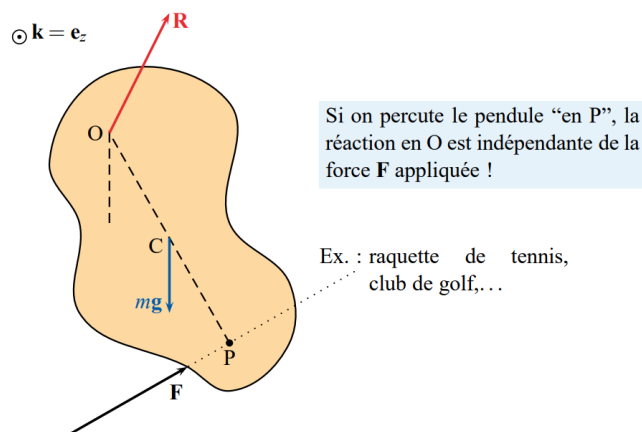
- Pendule plan :



Centre d'oscillation :



Centre de percussion :



- Mouvements des solides dans l'espace \longrightarrow voir "Lesson 9". \triangle Grand risque d'avoir ça à l'examen \triangle Résumé (méthodes de résolution : mouvement des solides dans l'espace) :

	<i>Roulement sans glissement</i>	<i>Roulement avec glissement</i>
<i>Équations</i>	Théorèmes généraux + $\mathbf{v}_K = \mathbf{0}$	Théorèmes généraux + $\mathbf{T} = -\mu N \frac{\mathbf{v}_K}{\ \mathbf{v}_K\ }$
<i>Hypothèses</i>	$\ \mathbf{T}\ \leq \mu N$? Oui : OK Non : Phase avec glissement	$\ \mathbf{v}_K\ \neq 0$? Oui : OK Non : Phase sans glissement