

Méthode à la Résolution de Problèmes en Mécanique Rationnelle

Grégoire Roumache

Juillet 2018

1 Mouvement du point matériel

1. On commence tous les problèmes de mécanique rationnelle en **lisant** attentivement **l'énoncé** et en observant le dessin s'il y en a un.
2. Il faut **décomposer le mouvement en** plusieurs **phases** si il y a besoin (certains mouvements n'ont qu'une seule phase). Chaque phase correspond à une certaine période de temps et s'étend donc d'un temps t_1 à un temps t_2 . Quand change-t-on de phase ? Lorsque il y a un changement dans les forces extérieures au système.

Exemples :

- Dans un premier temps, la fusée expulse du gaz (\mathbf{P}) puis arrête ($\mathbf{P} = \mathbf{0}$).
 - Un train avance sur des rails (\mathbf{R}_ν) puis déraille ($\mathbf{R}_\nu = \mathbf{0}$).
 - Le courant électrique ne passe pas car le circuit est ouvert ($\mathbf{B} = \mathbf{0} \implies \mathbf{F}_B = \mathbf{0}$) puis on le ferme ($\mathbf{B} \neq \mathbf{0} \implies \mathbf{F}_B \neq \mathbf{0}$).
3. On **liste** toutes **les données du problèmes** qui n'ont "rien" à voir avec les forces et l'accélération. On va donc lister des données comme la masse, la position initiale/intermédiaire/finale, la vitesse ini/inter/fin, les informations en rapport avec le temps, la trajectoire, etc.
 4. Maintenant, on va d'abord **nommer le** type de **mouvement** (mouvement guidé, chute libre, champ de force/force centrale, particule chargée dans un champ magnétique/électrique, masse variable, ...) puis **lister** toutes **les forces** selon les trois catégories suivantes :

- **Force appliquée :**

- Gravité : $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$
- Champ de force/force centrale : $\mathbf{F} = -\frac{\mu}{s^3}\mathbf{s} = -m\mu r^{-2}\mathbf{e}_r$
- Rappel d'un ressort $\mathbf{F} = -k(l - l_0)\mathbf{e} = -kx\mathbf{e} = -k\mathbf{x}$
- Ressort de torsion d'axe $\mathbf{C} = -k(\theta - \theta_0)\mathbf{e} = -k\theta\mathbf{e}$
- Lorentz/électromagnétique $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{s}} \wedge \mathbf{B})$
- Masse variable $\mathbf{P} = \frac{dm}{dt}\mathbf{v}$

- **Force de liaison :**

- Tension dans une corde : proportionnelle à son extension (comme le ressort) seulement lorsque la corde est tendue et étirée.
- Force normale : $\mathbf{N} = \mathbf{R}_\nu$.
- Force binormale : \mathbf{R}_β .

La force normale est normale à la courbe/surface et la force binormale est une force de réaction normale à la courbe et à \mathbf{N} . La binormale est souvent perpendiculaire au plan dans lequel se passe le mouvement.

- **Force de frottement :**

- Frottement fluide (loi de Stokes) : $\mathbf{F} = -c\dot{\mathbf{s}}$

– Frottement sec : $\mathbf{T} = -\mu N \frac{\dot{\mathbf{s}}}{\|\dot{\mathbf{s}}\|}$

Enfin, on va **écrire ce qui est en rapport avec l'accélération**. On note le type d'accélération (centripète, linéaire, ...).

5. Puis on écrit la **loi de Newton** (équation différentielle vectorielle du mouvement) :

$$\mathbf{F} = m \ddot{\mathbf{s}} \qquad \sum \mathbf{F}_{\text{extérieures}} = m \ddot{\mathbf{s}}$$

Si le repère n'est pas inertiel, la loi de Newton s'écrit ¹ :

$$\begin{aligned} m \mathbf{a}_r &= m \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2} = \mathbf{G} - m \mathbf{a}_e - m \mathbf{a}_c \\ &= \mathbf{G} - m \left[\frac{d^2 \mathbf{b}}{dt^2} + \dot{\mathbf{w}} \wedge \mathbf{r} + \mathbf{w} \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{r}) \right] - m \left[2\mathbf{w} \wedge \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} \right] \end{aligned}$$

6. Il faut maintenant **tracer le dessin**.

- (a) Premièrement, on dessine la **trajectoire** du mobile dans l'espace grâce aux données sur sa provenance, sa destination, son type de mouvement (parabolique, circulaire, rectiligne, ...), etc. Il faut aussi placer le mobile sur un point quelconque de sa trajectoire.
- (b) Deuxièmement, on dessine toutes les **forces** quelles soient appliquées, de liaison ou de frottement. On trace aussi l'**accélération**.
- (c) Troisièmement, on dessine la **vitesse** et on marque les **position initiales et finales** de la phase de mouvement que l'on étudie.

Une fois que l'on a fait ceci, il faut agir en fonction de ce qui est demandé

Ici, on va se retrouver devant plusieurs Questions possible, parmi celles-ci, il y a :

- A. L'équation du mouvement est-elle intégrable ?
- B. Cherche-t-on la valeur d'un angle, d'un sinus ?
- C. Y a-t-il un terme en \dot{z}^2 dans l'équation de mouvement ?
- D. Est-ce un système oscillant ?
- E. Est-ce qu'il y a une courbe de guidage mobile ?
- F. Doit-on étudier la stabilité du système ?

¹Voir Annexe pour une explication plus détaillée.

A. Équation de Newton intégrable

Si l'équation différentielle du mouvement est linéaire et à coefficients constants, alors elle est résoluble. Solutions de l'équation $ay'' + by' + c = 0$:

Racines de $ar^2 + br + c = 0$	Solution générale
r_1 et r_2 réelles et distinctes	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = r$	$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$
r_1, r_2 complexes : $\alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Et lorsque l'équation différentielle est du type $ay'' + by' + cy = G(x)$:

$G(x)$	À remplacer dans l'équa. diff.
$G(x) = P(x)$	$Y_P = Q(x)$
$G(x) = e^{kx} P(x)$	$Y_P = e^{kx} Q(x)$
$G(x) = e^{kx} P(x) \cos mx$	$Y_P = e^{kx} Q(x) \cos mx + e^{kx} R(x) \sin mx$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes du style de $ax^2 + bx + c$.

Remarques :

- $A \cos mx + B \sin mx = C \cos(mx + \varphi_1) = C \sin(mx + \varphi_2)$.
- Si $Y_P(x)$ est une solution de l'équation homogène, alors on remplace $Y_P(x)$ par $xY_P(x)$.

B. Calcul d'angle ou de trigonométrie

Souvent, si une des étapes consiste à calculer un angle, le sinus d'un angle, etc. On devra projeter l'équation vectorielle de mouvement. Pour faire ceci, on utilise le dessin et on projette chaque force sur les axes adéquats qui sont souvent : la *trajectoire* et la *perpendiculaire à la trajectoire*.

Dans le cas où la trajectoire est rectiligne, on projette donc sur cette ligne et sur sa perpendiculaire. Si la trajectoire est, par exemple, circulaire ; on projette sur la tangente à la courbe et sur sa perpendiculaire, la droite joignant la masse et le centre du cercle.

C. Présence d'un terme en \dot{z}^2 dans l'équation de mouvement

Si la force de frottement est une force divisible par \dot{z}^2 , on utilise la formule $\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dz}(\dot{z}^2)$ après avoir projeté l'équation vectorielle de mouvement (la formule n'est pas vectorielle).

Exemple : $\ddot{z} = g - k\dot{z}^2$ possède un terme divisible par \dot{z}^2 . En appliquant la formule $\left(\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dz}(\dot{z}^2)\right)$, on obtient : $\frac{1}{2} \frac{d}{dz}(\dot{z}^2) = g - k\dot{z}^2 \implies \frac{d}{dz}(\dot{z}^2) + 2k\dot{z}^2 - 2g = 0$. Dès lors, on pose $\dot{z}^2 = v^2(z)$, afin de résoudre l'équation différentielle pour la variable v^2 .

Dans le cas d'un système oscillant, on va devoir subdiviser le type de système. Il y a :

1. L'oscillateur amorti.
2. L'oscillateur avec frottement sec.
3. Les oscillateurs couplés.

D. Système oscillant

Si le système est oscillant, il peut être de trois types :

1. L'**oscillateur amorti** est constitué d'une masse, d'un ressort et d'un amortisseur ; son équation de Newton est : $m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$. $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la fréquence propre du système et $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{k/m}}$ est le facteur d'amortissement du système ($\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 = 0$).
2. L'**oscillateur avec frottement sec**, son équation de Newton est : $m\ddot{x}\mathbf{e}_x = (-kx + T)\mathbf{e}_x + (N - mg)\mathbf{e}_y$. $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la fréquence propre du système, de sorte que :
$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\mu g & \text{si } \dot{x} > 0 \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu g & \text{si } \dot{x} < 0 \end{cases}$$
Après chaque intervalle de temps $\frac{\pi}{\omega_0}$, l'amplitude de l'oscillation est réduite, si bien que après un moment, la force de friction devient supérieure à la force de rappel du ressort.
3. Les **oscillateurs harmoniques couplés** sont des oscillateurs harmoniques mis en série. Le problème est qu'il y a une relation entre l'élongation des ressorts (la position des masses). Soient x_1 et x_2 les axes caractérisant le système. On va étudier les modes propres du système en posant :

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 + x_2 & 2x_1 &= X_1 + X_2 \\ X_2 &= x_1 - x_2 & 2x_2 &= X_1 - X_2 \end{aligned}$$

où X_1 et X_2 sont les modes normaux/propres du système, ils sont normaux car mathématiquement, X_1 est perpendiculaire à X_2 .

On peut étudier séparément la réponse de chacun des modes propres soumis à une force excitatrice^a.

Remarque : Pour tout système masse-ressort, on place les axes à la longueur naturelle du ressort.

^aExemple en annexe.

E. Courbe de guidage mobile

Dans le cas où l'équation différentielle vectorielle de mouvement n'est pas linéaire ou si le mouvement est guidé, on va avoir recours à l'étude de l'intégrale première.

1. Lorsque la projection sur un axe fixe \mathbf{e} de la *résultante* ou du *moment résultant* des forces extérieures appliquées à un système matériel est nulle, on obtient immédiatement une intégrale première du mouvement de ce système.

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{N}}_O = \mathbf{e} \cdot \mathbf{G} = 0 & \implies & \mathbf{e} \cdot \mathbf{N}_O = \text{constante} \\ \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{e} \cdot \mathbf{M}_O = 0 & \implies & \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_O = \text{constante} \\ \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{e} \cdot \mathbf{M}_C = 0 & \implies & \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_C = \text{constante} \end{array}$$

2. Lorsque les forces appliquées à un système sont conservatives ou ne développent pas de puissance dans un repère inertiel, il vient :

$$\frac{dT_O}{dt} = \mathcal{P}_O = -\frac{dV}{dt} \implies T_O + V = E = \text{constante}$$

3. Le théorème de l'énergie cinétique est une conséquence directe de la loi de Newton. L'intégrale première de conservation de l'énergie peut donc être obtenue également directement à partir de la loi de Newton.

Exemples :

- Glissement sans frottement sur une courbe/surface.

On multiplie l'équation de Newton scalairement par $\dot{\mathbf{s}}$. Et on obtient :

$$m\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{G} + \mathbf{R} \qquad m\dot{\mathbf{s}} \cdot \ddot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}} \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{R}) = \dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{G}$$

Si les forces données dérivent d'un potentiel, on a : $\dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{G} = -\frac{dV}{dt}$.

Et l'intégrale première de conservation de l'énergie : $\frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{s}}\|^2 + V = E$.

Cette façon de procéder est assez générale et permet d'obtenir des intégrales premières qui n'apparaissent pas directement par application des théorèmes généraux.

- Mouvement d'un point matériel sur une courbe/surface de guidage mobile.

$$m \frac{d^2 \mathbf{s}}{dt^2} = \mathbf{G} + \mathbf{R} \qquad m \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \cdot \frac{d^2 \mathbf{s}}{dt^2} = \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{R}) = \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \cdot \mathbf{G}$$

Cette fois-ci, on a multiplié l'équation scalairement par la dérivée relative du point par rapport à la courbe/surface. Dans certains cas, cette équation donne lieu à une intégrale première de bilan énergétique. Dans tous les cas, l'intégrale de : $\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \cdot \mathbf{G}$ joue le rôle de potentiel et la constante d'intégration représente une certaine forme de conservation d'énergie du système.

Pour ce qui est de l'étude de la stabilité, on va agir différemment en fonction de si on a une intégrale première de l'équation du mouvement ou pas.

D'abord, il faut trouver les positions d'équilibre :

F. Détermination des positions d'équilibre

Si on doit trouver les positions d'équilibre d'un système, on pose $\ddot{x} = 0$ et $\dot{x} = 0$ dans l'équation du mouvement, où x est la variable caractéristique du système. Si on a déjà une expression du potentiel ($V(x)$), on peut aussi chercher les valeurs de la variable x qui annulent sa dérivée ($V'(x) = \frac{dV(x)}{dx}$). Ces valeurs sont des positions d'équilibre.

G. Étude de la stabilité - Méthode des petites perturbations

Si on a déjà une intégrale première,

1. Pour trouver les positions d'équilibre, on va annuler la dérivée du potentiel ($V'(x) = 0$).
2. On fait un développement de Taylor de : $V'(x_{eq} + \eta)$, jusqu'au 1^{er} terme non-nul. On le met ensuite dans l'éq. $m\ddot{\eta} + V'(x_{eq} + \eta) = 0$ et on obtient :

$$m\ddot{\eta} + \frac{1}{k!} V^{(k+1)}(x_{eq}) \eta^k$$

3. On remplace :

$$\mu = \frac{1}{m k!} V^{(k+1)}(x_{eq})$$

Si on a pas d'intégrale première à disposition,

1. On pose $\ddot{x} = \dot{x} = 0$ et on annule l'équation de Newton pour trouver les positions d'équilibre.
2. On fait le développement de Taylor de $F(x_{eq} + \eta)$ jusqu'au 1^{er} terme non-nul dans l'équation de Newton et on obtient :

$$\ddot{\eta} + \mu \eta^k = 0$$

3. On remplace :

$$\frac{1}{2} \dot{\eta}^2 + \frac{\mu}{k+1} \eta^{k+1} = \text{constante}$$

$\frac{1}{2} \dot{\eta}^2 + \frac{\mu}{k+1} \eta^{k+1} = \text{constante}$	Stabilité : méthode des petites perturbations
k impair & μ positif	Équilibre stable
k impair & μ négatif	Équilibre instable
k pair	Équilibre instable

En pratique, on va utiliser le potentiel de la manière suivante : Pour trouver les positions d'équilibre, on peut dériver le potentiel ($\rightarrow V'(x)$) et voir où ça s'annule.

Ensuite, on calcule la dérivée seconde pour voir si c'est stable :

- $V''(x) < 0 \rightarrow \bigcap \quad [-x^2 \rightarrow f'' = -2]$
- $V''(x) > 0 \rightarrow \bigcup \quad [+x^2 \rightarrow f'' = +2]$
- $V''(x) = 0 \rightarrow$ Aucune information, il faut encore dériver².

△ Il faut dériver $V(x)$ en fonction de $x \rightarrow V'(x) = \frac{dV(x)}{dx}$.

²Voir annexe pour voir plus en détail.

H. Étude de la stabilité - Méthode des perturbations infinitésimales

On va utiliser le développement de Taylor sur l'équation de Newton : $\ddot{x} + F(x) = 0$, dans laquelle on introduit : $x = x_{\text{eq}} + \eta$. On obtient :

$$\ddot{\eta} + F'(x_{\text{eq}})\eta = 0$$

Polynôme caractéristique	Solution générale	Stabilité
$z^2 - \alpha^2 = 0$ $z_1 = \alpha \ \& \ z_2 = -\alpha$	$x(t) = C'_1 e^{\alpha t} + C'_2 e^{-\alpha t}$ $= C_1 \text{sh } \alpha t + C_2 \text{ch } \alpha t$	Équilibre instable
$z^2 + \alpha^2 = 0$ $z_1 = i\alpha \ \& \ z_2 = -i\alpha$	$x(t) = C'_1 e^{i\alpha t} + C'_2 e^{-i\alpha t}$ $= C_1 \sin \alpha t + C_2 \cos \alpha t$	Équilibre marginalement stable
$z^2 = 0$ $z_1 = z_2 = 0$	$x(t) = At + B$	Équilibre faiblement instable

2 Mouvement du solide

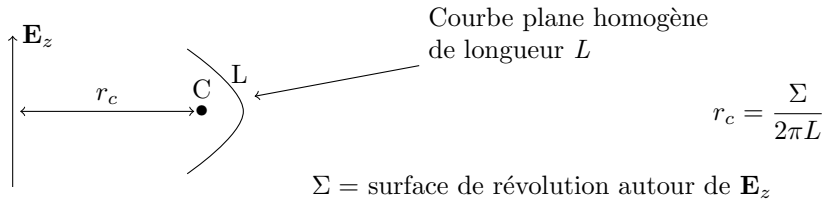
2.1 Calcul du centre de masse - tenseur d'inertie

1. On commence par préciser le **type de système**, c-à-d sa forme (rectiligne, circulaire, ...) **et ses caractéristiques** telles sa longueur, sa masse, etc.

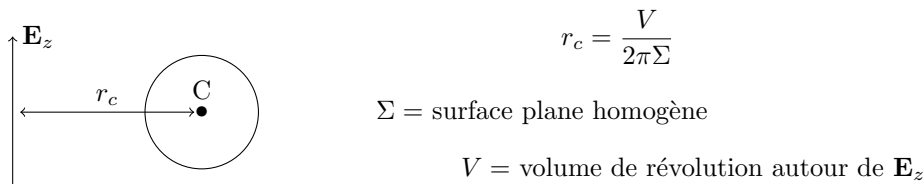
Exemple : "Disque de rayon R , de masse m et d'épaisseur négligeable".

2. On calcule le **centre d'inertie** qui est le point C tel que : $m\mathbf{c} = \mathbf{Q}_0 = \int_{\text{solide}} \mathbf{s} dm$. On trouve C facilement car il **se situe sur l'axe de symétrie du solide**. On peut aussi utiliser les théorèmes de Guldin :

- Solide = courbe plane homogène :



- Solide = surface plane homogène :



3. Si le solide est composé de plusieurs parties, on utilise le **principe de superposition** :

$$m\mathbf{c} = m_1\mathbf{c}_1 + m_2\mathbf{c}_2$$

Et si il y a un "trou" ($m_2\mathbf{c}_2$) dans la partie ($m_1\mathbf{c}_1$), le principe de superposition devient :

$$m\mathbf{c} = m_1\mathbf{c}_1 - m_2\mathbf{c}_2$$

4. Maintenant, on calcule le **tenseur d'inertie** (par rapport à B) :

$$\mathbf{J}_B = \int_{\text{solide}} (s^2 \mathbf{I} - \mathbf{s} \mathbf{s}) dm$$

$$J_B = \int \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} dm$$

On peut diagonaliser la matrice en l'exprimant dans **les axes principaux d'inertie** du solide qui **correspondent aux éléments de symétrie** du solide.

On fixe le **repère au centre d'inertie C** du solide **ou** alors **au point O si le solide est fixé en ce point**.

$J_C = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} = \text{diag} (J_1, J_2, J_3)$ dans la base des a.p.i. (axes principaux d'inertie).

$$\begin{cases} J_1 = \int (x_2^2 + x_3^2) dm \\ J_2 = \int (x_1^2 + x_3^2) dm \\ J_3 = \int (x_1^2 + x_2^2) dm \end{cases}$$

$$\mathbf{J}_C = J_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + J_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + J_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3$$

5. Théorèmes particuliers en rapport avec le tenseur d'inertie :

- **△ Théorème C :**

$$\mathbf{J}_O = \mathbf{J}_C + m \left[c \mathbf{I} - \mathbf{c}\mathbf{c} \right]$$

- Moment d'inertie par rapport à une droite d de direction \mathbf{e} passant par B est donné par :

$$J_B^d = \mathbf{e} \cdot \mathbf{J}_B \cdot \mathbf{e}$$

où \mathbf{e} est unitaire.

- Le **théorème de transport** est un théorème qui donne le moment d'inertie autour d'une droite d_1 passant par O parallèle à d_2 passant par C : $J_O^{d_1} = J_C^{d_2} + ml^2$.

6. Cas particuliers :

- (a) **Système rectiligne** : Il suffit de calculer un seul moment d'inertie par rapport à une droite perpendiculaire à la droite du solide.
- (b) **Système plan** : (plan Oxy , $z = 0$)

$$J_x = \int y^2 dm \quad ; \quad J_y = \int x^2 dm \quad ; \quad J_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

Et donc : $J_x + J_y = J_z$; $J_{yz} = J_{xz} = 0$ et l'ellipsoïde d'inertie est donné par :

$$J_x x^2 + J_y y^2 + (J_x + J_y) z^2 - 2J_{xy} xy = 1$$

Son intersection avec le plan Oxy ($z = 0$) donne l'ellipse d'inertie d'équation :

$$J_x x^2 + J_y y^2 - 2J_{xy} xy = 1$$

7. **Remarque** : Il ne faut jamais utiliser les coordonnées sphérique. Il vaut mieux utiliser les coordonnées sphériques, même pour le calcul sur une sphère³.

3 Étude du mouvement du solide comme vu au cours (!)

1. On commence par préciser le **type de système**, c-à-d sa forme (rectiligne, circulaire, ...) **et ses caractéristiques** telles sa longueur, sa masse, etc.
2. On décrit le **mouvement du solide** (mouvement plan, rectiligne, ...) et ses **degrés de liberté** en précisant leur type (translation, rotation, ...), ainsi que les **liaisons**.
On en déduit le nombre de variables cinématiques.
3. On donne les **systèmes d'axes** que l'on va utiliser : axes inertiel, axes parallèles aux axes inertiel en C , axes principaux d'inertie du solide, coordonnées cylindriques/polaires, etc.
Il faut aussi écrire l'équation du **vecteur de Poisson** (ex : $\boldsymbol{\omega} = \dots \mathbf{E}_z$).
On essaie que l'axe \mathbf{E}_z pointe dans la même direction pour tous les repères par soucis de cohérence et éviter les erreurs lors des produits scalaires/vectoriels.

Remarque : Comment choisir le système d'axes approprié ?

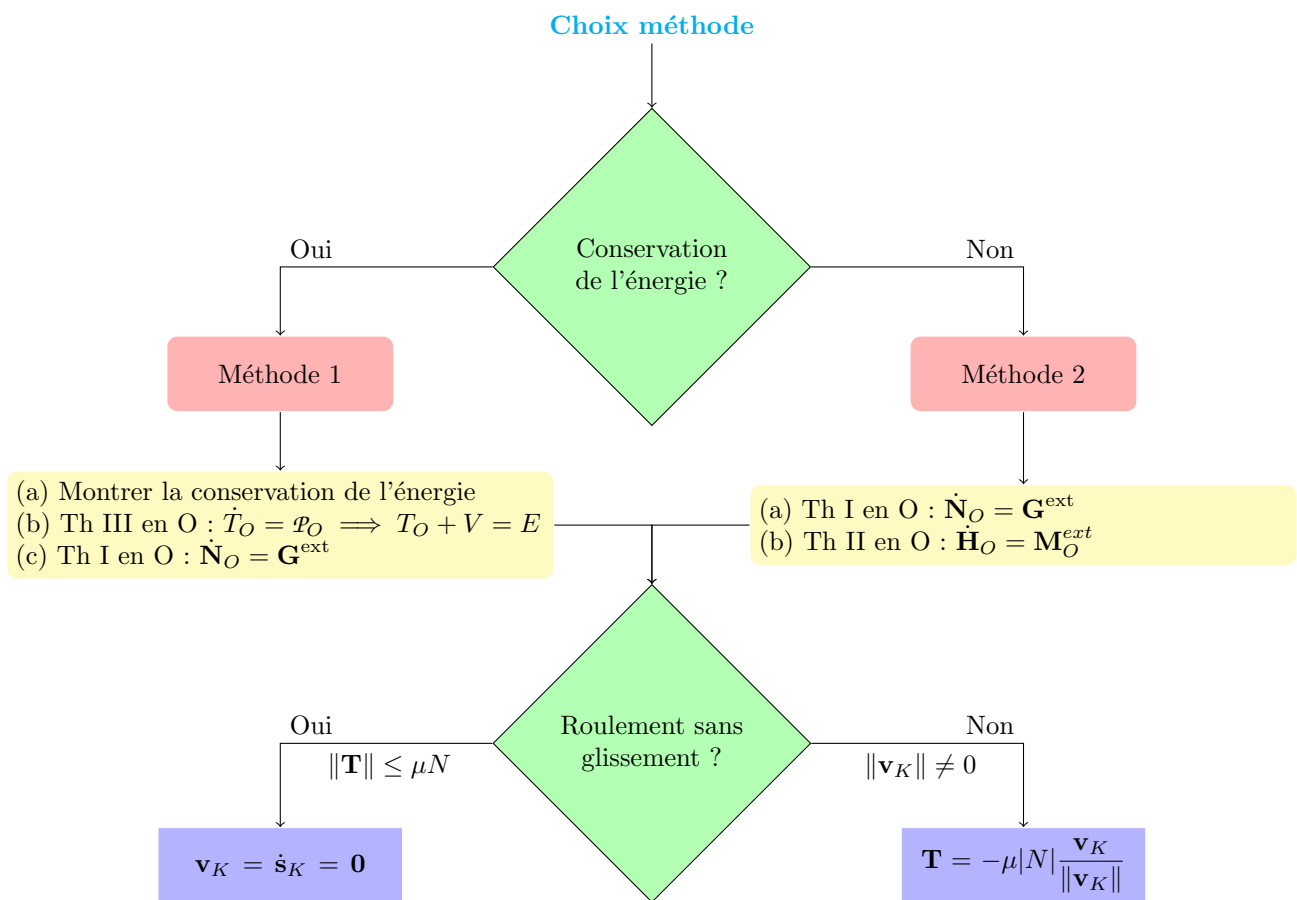
Pour choisir les coordonnées généralisées et les repères, on commence par :

- (a) Mettre un **repère absolu** : $O, \mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z$.
- (b) Si il y a une rotation, placer un repère : $C_{\text{rotation}}, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{E}_z$.
- (c) Avec un vecteur \mathbf{e}_r qui **pointe vers** C_{inertie} , le centre d'inertie de l'objet qui tourne.
- (d) Et un vecteur \mathbf{e}_θ qui est choisis tel que \mathbf{E}_z **est** le même qu'avant, c-à-d **le même que pour le repère absolu**.
- (e) On choisit l'**angle** θ afin qu'il soit **absolu**.

³Voir annexe pour un exemple de calcul du \mathbf{J}_C d'une sphère en coordonnées cylindriques.

4. Il faut introduire les coordonnées généralisées appropriées pour décrire le mouvement, comme par exemple : un angle θ pour une rotation et une longueur x pour la translation du centre d'inertie (suite de l'étape précédente).
5. On **liste les forces** dans leurs catégories (forces appliquées, de liaison, de frottement). Il faut aussi préciser si les **forces** sont **conservatives**, développent une puissance, etc. On donne également leur point d'application.
6. Après cela, on liste les **inconnues**.

Une fois que l'on a fait ceci, on doit choisir la méthode que l'on va utiliser en fonction du problème.



A. Méthode n°1 - Conservation de l'énergie

1. Il faut démontrer la conservation de l'énergie (ex : forces appliquées = conservatives & forces de réaction ne développent pas de puissance)
2. On utilise le Th. III en O = théorème de l'énergie cinétique en O (axes absolus en O) :

$$\dot{T}_O = \mathcal{P}_O$$

avec $T_O + V = E \longrightarrow 1$ équ. pour O

3. On utilise le Th. I = théorème de la quantité de mouvement (axes absolus en O) :

$$\dot{\mathbf{N}}_O = \mathbf{G}^{\text{ext}}$$

projeté sur \mathbf{E}_x & \mathbf{E}_y donne \mathbf{R}_m et \mathbf{R}_n en fonction de θ .

B. Méthode n°2 - Fonctionne dans tous les cas

1. On utilise le Th. I = théorème de la quantité de mouvement (axes absolus en O) :

$$\dot{\mathbf{N}}_O = \mathbf{G}_{\text{ext}}$$

projeté sur \mathbf{E}_x & \mathbf{E}_y donne \mathbf{R}_m et \mathbf{R}_n en fonction de θ .

2. On utilise le Th. II = théorème du moment cinétique (axes absolus en O) :

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{M}_O^{\text{ext}}$$

projeté sur $\mathbf{E}_z \longrightarrow 1$ équ. si mouvement plan

Remarque : Si le solide décrit un mouvement plan, il y a maximum 3 ddl (degrés de liberté) : Il y a sa propre rotation et le mouvement dans le plan.

A Annexes - Mouvement du point matériel

A.1 Loi de Newton dans un repère non-inertiel

Lorsqu'on est dans un repère non-inertiel, une décomposition de l'accélération peut être effectuée :

$$\frac{d^2 \mathbf{s}}{dt^2} = \underbrace{\frac{d^2 \mathbf{b}}{dt^2} + \dot{\mathbf{w}} \wedge \mathbf{r} + \mathbf{w} \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{r})}_{\mathbf{a}_e} + \underbrace{2 \mathbf{w} \wedge \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}}_{\mathbf{a}_c} + \underbrace{\frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2}}_{\mathbf{a}_r}$$

où \mathbf{a}_e est l'accélération d'entraînement, \mathbf{a}_c est l'accélération de Coriolis et \mathbf{a}_r est l'accélération relative.

La **Loi de Newton** (équation différentielle vectorielle du mouvement) qui devrait s'écrire :

$$\mathbf{F} = m \ddot{\mathbf{s}} \quad \sum \mathbf{F}_{\text{extérieures}} = m \ddot{\mathbf{s}}$$

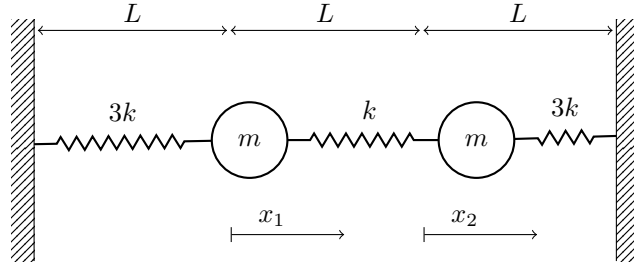
S'écrit, dans un repère non-inertiel :

$$\begin{aligned} m \mathbf{a}_r &= m \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2} = \mathbf{G} - m \mathbf{a}_e - m \mathbf{a}_c \\ &= \mathbf{G} - m \left[\frac{d^2 \mathbf{b}}{dt^2} + \dot{\mathbf{w}} \wedge \mathbf{r} + \mathbf{w} \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{r}) \right] - m \left[2 \mathbf{w} \wedge \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} \right] \end{aligned}$$

A.2 Exemple d'oscillateurs harmoniques couplés

- Oscillateurs harmoniques couplés :

La réponse libre d'oscillateurs harmoniques couplés consiste en une oscillation composite, superposition de plusieurs oscillations périodiques dont les fréquences sont les *fréquences propres* du système. La forme particulière des oscillations harmoniques correspondant à chacune des fréquences propres est appelée *mode de vibration*.



Si on place les axes à la longueur naturelle des ressorts, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - k(x_2 - x_1) &= 0 \\ m\ddot{x}_2 + 3kx_2 - k(x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned}$$

On découple ces équations en posant :

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 + x_2 & 2x_1 &= X_1 + X_2 \\ X_2 &= x_1 - x_2 & 2x_2 &= X_1 - X_2 \end{aligned}$$

D'un point de vue physique, X_1 décrit le déplacement du centre d'inertie du système.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} m\ddot{X}_1 + 3kX_1 &= 0 \\ m\ddot{X}_2 + 5kX_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} X_1 &= C_1 \cos(\sqrt{3} \omega_0 t + \varphi_1) \\ X_2 &= C_2 \cos(\sqrt{5} \omega_0 t + \varphi_2) \end{aligned}$$

où $\omega_0^2 = k/m$. Les fréquences propres du systèmes sont donc $\omega_I = \sqrt{3} \omega_0$ et $\omega_{II} = \sqrt{5} \omega_0$.

Si $x_1 = x_2$, les 2 points matériels oscillent en phase (fréquence = ω_I)
 Si $x_1 = -x_2$, les 2 points matériels oscillent en opposition de phase (fréquence = ω_{II})

- Dans le cas envisagé, si on applique une force \mathbf{F} au premier point matériel du système telle que $F = mL\Omega^2 \cos \omega t$, on a :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - k(x_2 - x_1) &= mL\Omega^2 \cos \omega t \\ m\ddot{x}_2 + 3kx_2 - k(x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} m\ddot{X}_1 + 3kX_1 &= mL\Omega^2 \cos \omega t \\ m\ddot{X}_2 + 5kX_2 &= mL\Omega^2 \cos \omega t \end{aligned}$$

On peut donc étudier séparément la réponse de chacun des modes propres soumis à une force excitatrice. On dit de cette force s'appliquant à un mode particulier qu'elle est la *projection de la force appliquée dans la base des modes propres*.

Et si $x_1 = x_2 = 0$; $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, on a :

$$X_1 = \frac{L\Omega^2}{\omega_I^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_I t) \quad X_2 = \frac{L\Omega^2}{\omega_{II}^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_{II} t)$$

Si $\omega = \omega_I$ ou si $\omega = \omega_{II}$, alors il y a résonance et la solution ci-dessus n'est plus correcte. Par exemple, si $\omega = \omega_I$, on a :

$$X_1 = \frac{L\Omega^2}{2\omega_I} t \sin \omega_I t$$

- Note sur les modes propres :

Un mode normal ou mode propre d'oscillation est une forme de mouvement dans laquelle toutes les parties du système se déplacent sinusoïdalement avec la même fréquence naturelle de vibration associée au mode. Le nombre de modes normaux est égal à celui des degrés de liberté du système.

Le mouvement général d'un système est la superposition de ses modes normaux. Les modes sont normaux dans le sens qu'ils se déplacent indépendamment les uns des autres, une excitation d'un des modes ne cause jamais le mouvement d'un autre mode. En termes mathématiques, les modes sont orthogonaux.

A.3 Stabilité et dérivées

- Rappel : Extrema d'une fonction :

Si f est une fonction réelle $n + 1$ fois continûment dérivable sur $]a, b[$, si $f'(c) = 0$ en un point $c \in]a, b[$ et si la première dérivée non-nulle en c est $f^{(n)}(c)$, alors :

- c est un maximum local si n est pair et $f^{(n)}(c) < 0$.
- c est un minimum local si n est pair et $f^{(n)}(c) > 0$.
- c est un point d'inflexion à tangente horizontale si n est pair.

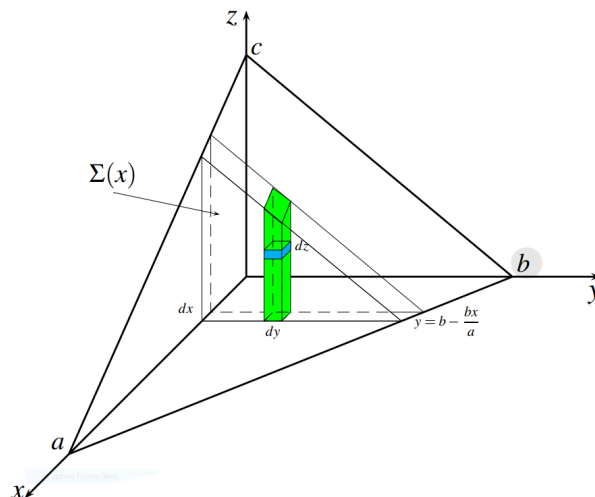
- Pour rappel, on a 4 types "d'équilibres" : Stable, Instable, Marginalement Stable, Faiblement Instable. Et par exemple, si on a une équation différentielle linéaire à coefficients constants dont on veut connaître la stabilité :

Racines du polynôme caractéristique : $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$	Stabilité : méthode des perturbations infinitésimales (éq. linéaire)
$a_1 < 0$ et $a_2 < 0$	Équilibre stable $x(t) = C_1 e^{-x t} + C_2 e^{-y t}$
Si $a_1 > 0$ ou $a_2 > 0$	Équilibre instable $x(t) = C'_1 e^{\alpha t} + C'_2 e^{-\alpha t} = C_1 \operatorname{sh} \alpha t + C_2 \operatorname{ch} \alpha t$
$a_1 < 0, a_2 = 0$ ou $a_1 = 0, a_2 < 0$ <u>Δ</u> avec $k = 0$ ($k = \text{multiplicité}$)	Équilibre marginalelement stable , $x(t) = C'_1 e^{i\alpha t} + C'_2 e^{-i\alpha t} = C_1 \sin \alpha t + C_2 \cos \alpha t$
$z_1 = z_2 = 0$ ($k \neq 0$)	Équilibre faiblement instable $x(t) = At + B$

B Annexes - Mouvement du solide

B.1 Intégrer sur des volumes/surfaces

- Calcul d'aire et volume : Une aire se calcule avec la formule $A = \iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy = \iint_{\Omega} dx \, dy$ et le volume avec la formule $V = \iiint_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz$.
- Réduction des intégrales dans \mathbb{R}^n :



Calculer le volume du tétraèdre :

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz = \int_0^a dx \iint_{\Sigma(x)} dy \, dz \\
 &= \int_0^a dx \int_0^{b - \frac{bx}{a}} dy \int_0^{c(1 - \frac{y}{b} - \frac{x}{a})} dz \\
 &= \int_0^a dx \int_0^{b - \frac{bx}{a}} c \left(1 - \frac{y}{b} - \frac{x}{a} \right) dy \\
 &= c \int_0^a \left[y - \frac{y^2}{2b} - \frac{xy}{a} \right]_{y=0}^{y=b - \frac{bx}{a}} dx \\
 &= c \int_0^a \left(\frac{bx^2}{2a^2} - \frac{bx}{a} + \frac{b}{2} \right) dx \\
 &= \frac{abc}{6}
 \end{aligned}$$

- Systèmes de coordonnées :

	Cartesian	Polar	Cylindrical	Spherical
dA	$dx \, dy$	$r \, dr \, d\theta$	$N A$	$N A$
dV	$dx \, dy \, dz$	$N A$	$r \, dr \, d\theta \, dz$	$\rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

	Cartésien $f(x, y, z)$	Cylindrique $f(r, \theta, z)$	Sphérique $f(\rho, \theta, \phi)$
x	x	$r \cos \theta$	$\rho \cos \theta \sin \phi$
y	y	$r \sin \theta$	$\rho \sin \theta \sin \phi$
z	z	z	$\rho \cos \phi$
r	$\sqrt{x^2 + y^2}$	r	$\rho \sin \phi$
θ	$\tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$	θ	θ
ρ	$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$\sqrt{r^2 + z^2}$	ρ
ϕ	$\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right)$	$\tan^{-1} \left(\frac{r}{z} \right)$	ϕ

- Aire d'une surface courbe : On définit l'aire d'une surface courbe régulière Σ par la formule :

$$S = \iint_{\Sigma} d\sigma = \iint_{\Omega} \left\| \frac{d\mathbf{s}}{du} \wedge \frac{d\mathbf{s}}{dv} \right\| du dv$$

si cette intégrale existe, c-à-d si :

$$\left\| \frac{d\mathbf{s}}{du} \wedge \frac{d\mathbf{s}}{dv} \right\| \in \mathbb{L}_1(\Omega)$$

avec : $\mathbf{s} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3$.

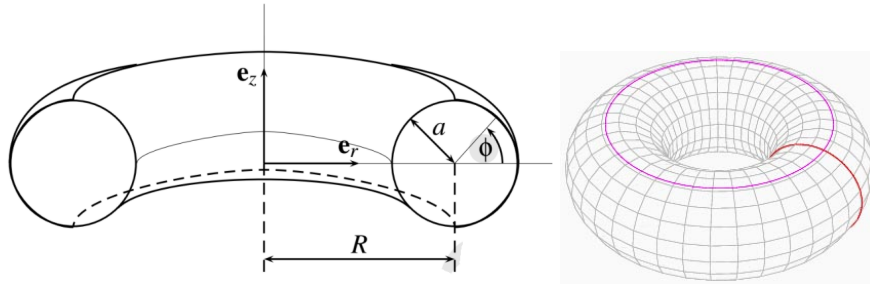
- Surface de révolution : Si une surface est engendrée par la rotation d'une courbe plane $y = f(x) \geq 0$ autour de l'axe OX, on peut introduire le paramétrage,

$$\mathbf{s}(x, \theta) = x \mathbf{e}_x + f(x) \cos(\theta) \mathbf{e}_y + f(x) \sin(\theta) \mathbf{e}_z, \quad x \in]a, b[, \theta \in]0, 2\pi[$$

Et on a donc la formule pour la surface :

$$S = \iint_{\Sigma} d\sigma = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

- Surface d'un tore ($R > a$) :



En utilisant les vecteurs unitaires des coordonnées cylindriques, la surface est décrite par :

$$\mathbf{s}(\theta, \phi) = (R + a \cos \phi) \mathbf{e}_r(\theta) + a \sin \phi \mathbf{e}_z, \quad \theta \in]0, 2\pi[, \phi \in]0, 2\pi[$$

de sorte que

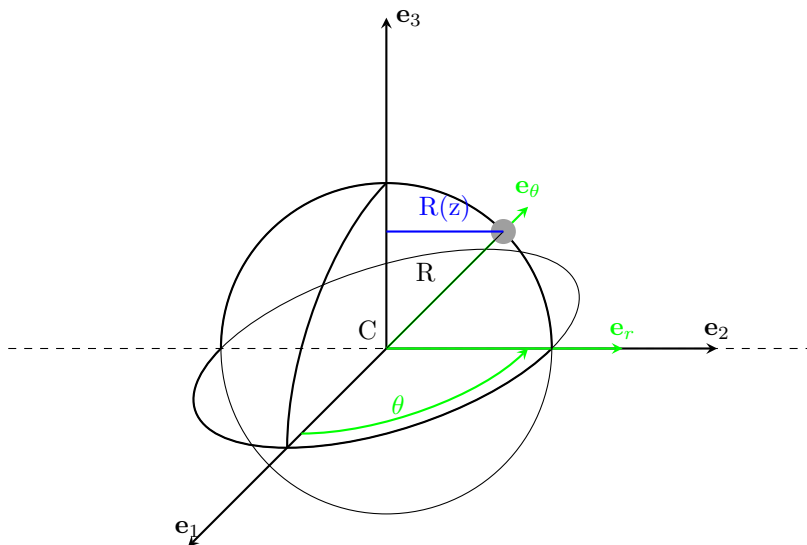
$$\begin{aligned} d\sigma &= \left\| (R + a \cos \phi) \mathbf{e}_{\theta} \wedge (-a \sin \phi \mathbf{e}_r + a \cos \phi \mathbf{e}_z) \right\| d\theta d\phi \\ &= (R + a \cos \phi) a d\theta d\phi \end{aligned}$$

Il vient dès lors

$$S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} (R + a \cos \phi) a d\phi = 4\pi^2 Ra$$

B.2 Exemple de calcul du tenseur d'inertie d'une sphère en coordonnées cylindriques

Exemple : Calcul de J_3 en coordonnées cylindriques ($\mathbf{J}_C = J \mathbf{I}$).



$$J = J_3 = \int_{\text{sphère}} (x_1^2 + x_2^2) dm, \quad \text{avec } dm = \rho dx_1 dx_2 dx_3$$

$$J = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-R}^R dz \int_0^{R(z)=\sqrt{R^2-z^2}} ((r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2) \underbrace{r}_{\text{Jacobian}} dr = \frac{16}{15} R^5$$

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \implies J = \frac{2}{5} m R^2$$

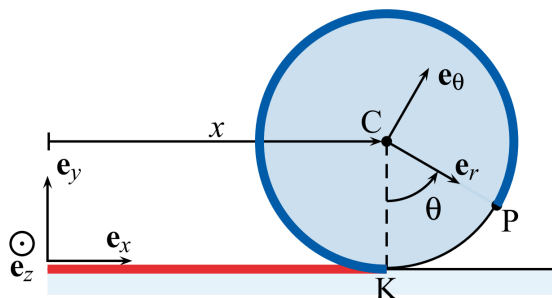
B.3 Théorèmes généraux en dynamique du solide

Un solide indéformable peut avoir jusqu'à six degrés de liberté (3 de translation et 3 de rotation), pour déterminer le mouvement d'un solide, on a donc affaire à 6 inconnues.

Th. I	$m\ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{G}$	3 équations	}	\implies	11 équations
Th. II	$\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{M}_O$	3 équations			
Th. II _C	$\dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{M}_C$	3 équations			
Th. III	$\dot{T}_O = \mathcal{P}_O$	1 équation			
Th. III _C	$\dot{T}_C = \mathcal{P}_C$	1 équation			

B.4 Exemple : Déterminer la relation entre les coordonnées généralisés exprimant le roulement sans glissement

Roulement sans glissement :



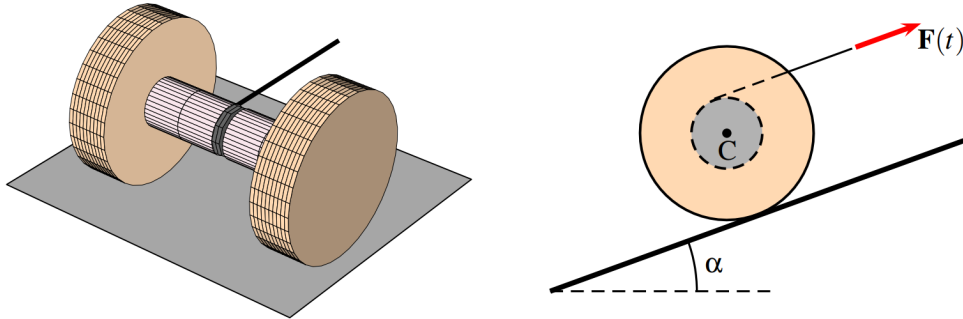
$$\mathbf{s}_p = x\mathbf{e}_x + R\mathbf{e}_y + R\mathbf{e}_r$$

$$\dot{\mathbf{s}}_p = \dot{x}\mathbf{e}_x + R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

$$\dot{x} + R\dot{\theta} = 0$$

C Q.III Janvier 2017

C.1 Application de la méthode générale



1. **Type de système** et **caractéristiques** :

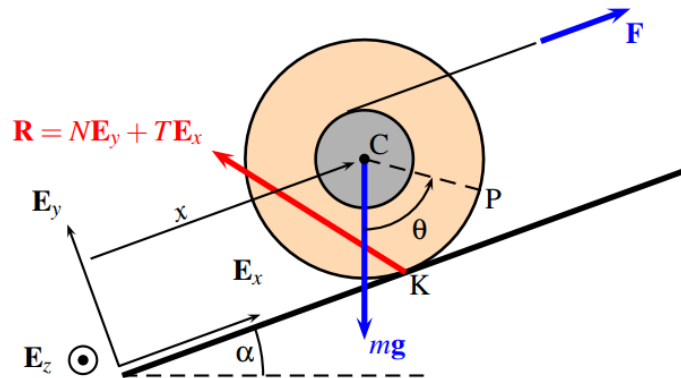
- Roues identiques (rayon a),
- reliées par un axe horizontal (rayon b , avec $b < a$),
- sur un plan incliné (angle α par rapport à l'horizontale),
- système de masse m ,
- coefficient de frottement μ ,
- centre d'inertie (C) situé au centre géométrique,
- moment central d'inertie (rotation axe horizontal) $= \Gamma$.
- Une corde inextensible (masse négligeable) se déroule sans frottement et est attachée à l'axe horizontal (voir dessin ci-dessus).

2. Le système roule sans glisser parallèlement au plan. Le mouvement du système est étudié comme un **mouvement plan**.

Puisque le solide est en mouvement plan, il possède 3 degrés de liberté *au maximum*. Le contact entre le système et le plan, et la condition de roulement sans glissement donnent 2 contraintes cinématiques, ce qui fait que le système n'a qu'un seul degré de liberté (**1 ddl**).

3. **Systèmes d'axes** :

- (a) On place un **repère absolu** : $O, \mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z$, ici avec O au pied du plan incliné, \mathbf{E}_x parallèle au plan (angle α avec l'horizontale), $\mathbf{E}_y \perp \mathbf{E}_x$ et \mathbf{E}_z perpendiculaire au plan contenant le mouvement (\mathbf{E}_z pointe *en-dehors* de la feuille).
- (b) On n'a pas besoin d'ajouter un système d'axe ici car le repère absolu est suffisant. On va juste introduire les **coordonnées généralisées** x (décrit le mouvement de C) et θ (décrit la rotation du solide autour de C).



4. Les forces extérieures appliquées au système sont :

- La force de pesanteur $m\mathbf{g}$, force extérieure conservative appliquée en C et dirigée verticalement vers le bas.
- La force de liaison $\mathbf{R} = N\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x$ appliquée en K , de direction inconnue;
- La force extérieure $\mathbf{F}(t)$ appliquée en l'extrémité de la corde et parallèle au plan incliné.

Une fois que l'on a fait ceci, on doit choisir la méthode que l'on va utiliser en fonction du problème.

C.2 Application de la méthode 2

On va suivre la méthode n°2 qui fonctionne dans tous les cas.

Méthode n°2

- (a) Th I en O : $\dot{\mathbf{N}}_O = \mathbf{G}^{\text{ext}}$
 (b) Th II en O : $\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{M}_O^{\text{ext}}$

Pourquoi la méthode 2 ? Parce que le roulement sans glissement implique qu'il y ait une force de frottement qui développe inévitablement une puissance et il n'y a donc pas de conservation de l'énergie, condition nécessaire pour utiliser la méthode 1.

$$(a) \dot{\mathbf{N}}_O = \mathbf{G}^{\text{ext}} \implies m\ddot{x} \mathbf{E}_x = m \mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{F}$$

Quand on projette cette équation sur les axes \mathbf{E}_x et \mathbf{E}_y , on obtient :

$$m\ddot{x} = -mg \sin \alpha + F + T \quad (1)$$

$$0 = -mg \cos \alpha + N \quad (2)$$

(b) Plutôt que d'utiliser le théorème : $\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{M}_O^{\text{ext}}$, on va utiliser : $\dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{M}_C^{\text{ext}}$ dans un système d'axes en C parallèles aux axes inertiaux.

Puisque : $\mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = \Gamma \dot{\theta} \mathbf{E}_z$,

$\mathbf{M}_C = -a \mathbf{E}_y \wedge \mathbf{R} + b \mathbf{E}_y \wedge \mathbf{F}$, on a :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{M}_C &\implies \Gamma \ddot{\theta} \mathbf{E}_z = -a \mathbf{E}_y \wedge \mathbf{R} + b \mathbf{E}_y \wedge \mathbf{F} \\ &= aT \mathbf{E}_z - bF \mathbf{E}_z \end{aligned}$$

Si on fait un produit scalaire $(\cdot \mathbf{E}_z)$ sur les 2 membres de l'équation, on a :

$$\Gamma \ddot{\theta} = aT - bF \quad (3)$$

C.3 Relation entre les coordonnées généralisées exprimant le roulement sans glissement

Le roulement sans glissement se traduit par la condition :

$$\dot{\mathbf{s}}_K^{\text{Syst}} = \dot{\mathbf{s}}_K^{\text{Plan}}$$

Puisque le plan incliné est immobile, on a : $\dot{\mathbf{s}}_K^{\text{Syst}} = \dot{\mathbf{s}}_K^{\text{Plan}} = \mathbf{0}$. La vitesse d'un point matériel P quelconque du système étudié est donnée par (avec \mathbf{c} la position de C) :

$$\dot{\mathbf{s}}_P = \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{CP}$$

Et la vitesse de K :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}_K &= \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{CK} \\ &= \dot{x} \mathbf{E}_x + \dot{\theta} \mathbf{E}_z \wedge (-a) \mathbf{E}_y \\ &= (\dot{x} + a\dot{\theta}) \mathbf{E}_x \end{aligned}$$

ainsi, la condition de roulement sans glissement est donnée par : $\dot{x} + a\dot{\theta} = 0$.

C.4 Sous-Questions Supplémentaires

- vi. Déterminer l'intensité de \mathbf{F} ($= F_0$) pour maintenir le système au repos. (1)
- vii. Déterminer la valeur max de l'inclinaison du plan permettant l'équilibre identifié en vi. (2)
- viii. Déterminer l'accélération de C en fonction de F lorsque : $F(t) = \|\mathbf{F}(t)\| > F_0$. (3)
- ix. Montrez qu'on peut communiquer un roulement sans glissement avec une accélération arbitrairement grande pour autant que : $\tan \alpha \leq \mu \left(1 + \frac{ma^2}{\Gamma}\right)$, à condition de choisir judicieusement le rayon b de l'axe horizontal sur lequel s'enroule la corde. (4)

(1) Au repos, les 3 équations deviennent :
$$\begin{cases} 0 = -mg \sin \alpha + F + T \\ 0 = -mg \cos \alpha + N \\ 0 = aT - bF \end{cases} \implies F_0 = \frac{mga \sin \alpha}{a + b}$$

(2) En K , on a :
$$\begin{cases} N_0 = mg \cos \alpha \\ T_0 = \frac{mgb \sin \alpha}{a + b} \end{cases} .$$
 Cette solution n'est acceptable que si on respecte les conditions de roulement sans glissement, notamment : $|T_0| \leq \mu |N_0| \implies mgb \sin \alpha \leq (a + b)\mu mg \cos \alpha$
 $\implies \tan \alpha \leq \frac{a + b}{b} \mu.$

- (3) On utilise les éq. (1), (2) et (3) et la cond. de roulement sans glissement pour isoler T et N et trouver :

$$\ddot{x} = \frac{Fa(a + b) - mga^2 \sin \alpha}{\Gamma + ma^2}$$

On remarque que le système possède une accélération positive vers le haut du plan incliné ($\ddot{x} > 0$) si :

$$F > F_0 = \frac{mga \sin \alpha}{a + b}$$

- (4) Il y a 2 conditions pour un roulement sans glissement : $\mathbf{v}_K = \mathbf{0}$ et $|T| \leq \mu |N|$. La deuxième condition est plus intéressante puisqu'elle implique des forces. Une idée est donc d'isoler T et N . On trouve pour T : $T = \frac{mg\Gamma \sin \alpha - (\Gamma - mab)F}{\Gamma + ma^2}$, qui est indépendant de F lorsque : $b = \frac{\Gamma}{ma}$.
 On continue le raisonnement et on trouve :

$$\tan \alpha \leq \mu \left(1 + \frac{ma^2}{\Gamma}\right)$$

comme prévu.