

# Mécanique Rationnelle Janvier 2019

Grégoire Roumache

Novembre 2018

## Première partie

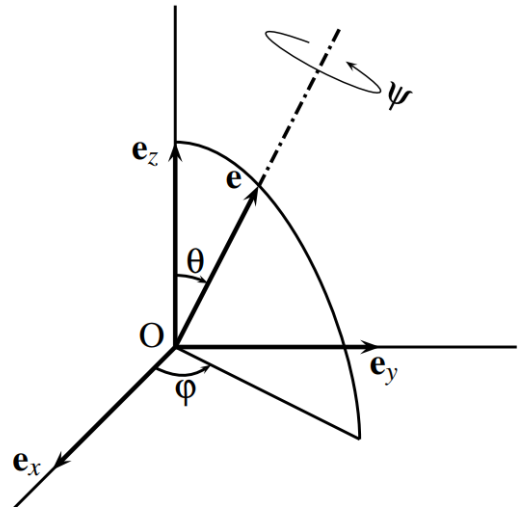
### Question I - Théorie

#### 1 Angles d'Euler

1. l'angle de nutation  $\theta$  mesure l'inclinaison de l'axe de référence  $\mathbf{e}$  par rapport à la verticale  $\mathbf{e}_z$  ;
2. l'angle de précession  $\varphi$  mesure l'angle entre le plan formé par  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{e}_z$  et le plan formé par  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_z$  ;
3. l'angle de rotation propre  $\Psi$  mesure la rotation de la toupie autour de l'axe  $\mathbf{e}$ .

Le vecteur de Poisson peut être exprimé en fonction des angles d'Euler sous la forme :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \dot{\varphi} \mathbf{e}_z + \dot{\Psi} \mathbf{e} + \dot{\theta} \frac{\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}}{\|\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}\|} \\ &= \dot{\varphi} \mathbf{e}_z + \dot{\Psi} \mathbf{e} + \frac{\dot{\theta}}{\sin \theta} (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e})\end{aligned}$$



#### 2 Force Conservative

##### 2.1 Définition

Une force  $\mathbf{F}$  est dite conservative si elle dérive d'un potentiel, i.e. si elle peut s'exprimer sous la forme :

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{s})$$

où  $V$  est une fonction de la position uniquement.

Le travail d'une force conservative déplaçant son point d'application entre deux points A et B ne dépend pas du chemin  $C$  suivi pour aller de A à B, i.e.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_C \nabla V \cdot d\mathbf{s} = V(\mathbf{s}_A) - V(\mathbf{s}_B)$$

##### 2.2 Puissance

Une force  $\mathbf{F}$  est dite conservative si elle dérive d'un potentiel, i.e. si elle peut s'exprimer sous la forme :

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{s})$$

où  $V$  est une fonction de la position uniquement.

Adoptant un repère cartésien de vecteurs unitaires  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ , la puissance développée par une telle force est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{s}} = - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \cdot (\dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y + \dot{z} \mathbf{e}_z) \\ &= \left[ \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right] \\ &= - \frac{dV}{dt} \end{aligned}$$

### 3 Grandeurs Résultantes du Solide

#### 3.1 Moment Cinétique

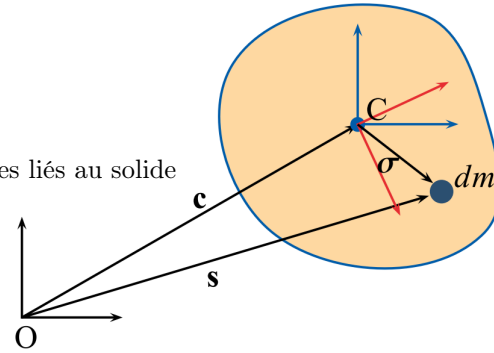
**Définition :**  $\mathbf{H}_O = \int \mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}} dm$

$$\mathbf{H}_C = \int \boldsymbol{\sigma} \wedge \dot{\boldsymbol{\sigma}} dm = \int \boldsymbol{\sigma} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma}) dm$$

En fait,  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\delta \boldsymbol{\sigma}}{\delta t} + (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma})$  mais  $\frac{\delta \boldsymbol{\sigma}}{\delta t} = 0$  dans les axes liés au solide

Et puisque,  $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_C &= \int \boldsymbol{\sigma} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma}) dm = \int \boldsymbol{\omega} \sigma^2 - \boldsymbol{\sigma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}) dm \\ &= \int \boldsymbol{\omega} \cdot (\sigma^2 \mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}) dm \end{aligned}$$



Le tenseur d'inertie du solide en C étant donné par :  $\mathbf{J}_C = \int (\sigma^2 \mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}) dm$ , le moment cinétique s'écrit :

$$\mathbf{H}_C = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_C$$

#### 3.2 Énergie cinétique

**Définition :**  $T_O = \frac{1}{2} \int \dot{\mathbf{s}} \cdot \dot{\mathbf{s}} dm$

$$\begin{aligned} T_C &= \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma}) dm & [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a})] \\ &= \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\sigma} \wedge \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma})] dm \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_C = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

#### 3.3 Remarque

On a :  $\mathbf{H}_C = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_C$ , et :  $T_O = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega}$ , pour tout système d'axes parallèles à des axes inertiaux et centrés en un point  $B$  fixe par rapport au solide. Le mouvement du solide par rapport à un tel référentiel se réduit à un mouvement de rotation.

### 4 Équations d'Euler

Les équations d'Euler sont les équations scalaires obtenues en projetant sur les axes principaux d'inertie d'un solide le théorème du moment cinétique rapporté à des axes centrés au centre d'inertie (ou en un point fixe du

solide) et constamment parallèles à des axes inertiels, i.e.

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = M_1 \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = M_2 \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_2 \omega_1 = M_3 \end{cases}$$

où  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  et  $(M_1, M_2, M_3)$  désignent les composantes dans les axes principaux d'inertie du vecteur de Poisson et du moment des forces appliquées au solide et où  $J_1, J_2, J_3$  sont les moments principaux d'inertie.

## 5 Système à Masse Variable

Dans quels cas, l'équation de Newton :  $\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{s}}) = \mathbf{F}$ , permet-elle de décrire le mouvement d'un système à masse variable ? Justifier.

L'équation du mouvement d'un point matériel de masse variable soumis à une force  $\mathbf{F}$  s'écrit :

$$m \frac{d\dot{\mathbf{s}}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{P} = \mathbf{F} + \frac{dm}{dt} \mathbf{w} \quad (1)$$

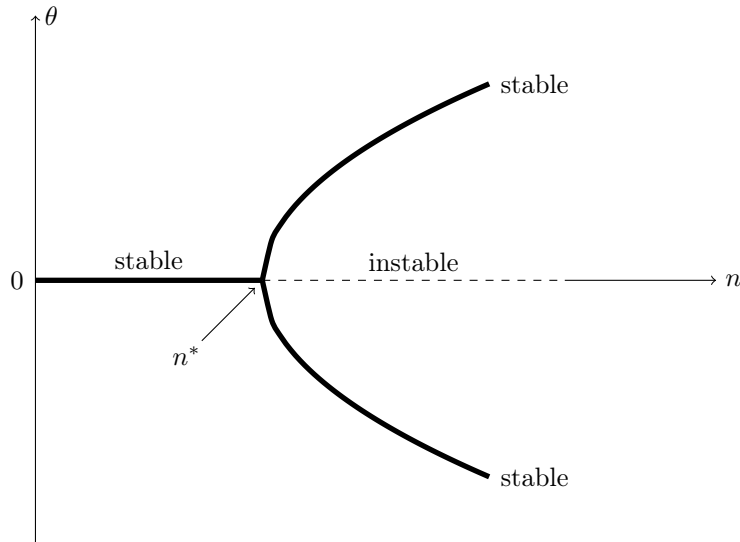
puisque la poussée  $\mathbf{P}$  est donnée par :  $\mathbf{P} = \frac{dm}{dt} \mathbf{w}$ , où  $\mathbf{w}$  est la vitesse relative par rapport au système à masse variable des matières qui vont être absorbées ou qui ont été éjectées.

L'équation donnée :  $\frac{d}{dt}(m \dot{\mathbf{s}}) = \mathbf{F}$ , peut s'écrire :

$$m \frac{d\dot{\mathbf{s}}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{dm}{dt} \dot{\mathbf{s}} \quad (2)$$

Les expressions (1) et (2) ne sont équivalentes que si :  $\mathbf{w} = -\dot{\mathbf{s}}$ , c'est-à-dire si les matières qui vont être absorbées ou qui ont été éjectées sont au repos absolu.

## 6 Bifurcation



Ici, on a représenté les positions d'équilibre (stables et instables) de  $\theta$ , qui est le seul degré de liberté du système, en fonction du paramètre  $n$ . Pour une valeur  $n = n^*$ , l'origine cesse d'être une position d'équilibre stable. Elle devient instable. En même temps, deux positions d'équilibre stable symétrique par rapport à l'origine apparaissent.

Ce phénomène constitue une bifurcation que l'on qualifie généralement de bifurcation surcritique.

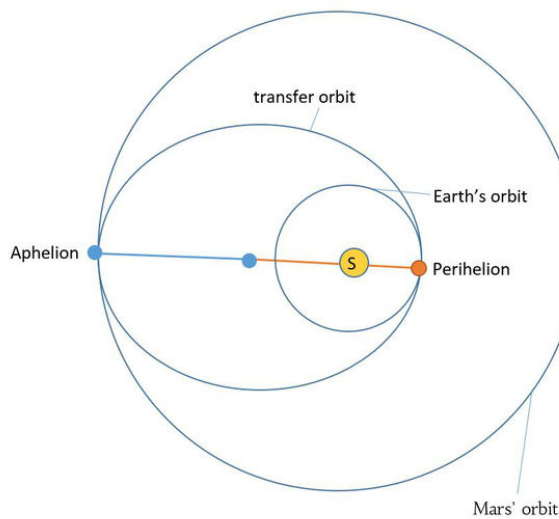
## 7 Orbite Géostationnaire

L'orbite géostationnaire est l'orbite équatoriale pour laquelle la vitesse angulaire de rotation du satellite autour de la Terre est précisément égale à la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même. Tous les satellites de communication sont placés en orbite géostationnaire afin de rester à l'aplomb de la zone qu'ils doivent desservir. Le rayon de l'orbite géostationnaire GEO est donné par :

$$R_{\text{GEO}} = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

où  $T$  est égal à un jour sidéral,  $M$  est la masse de la Terre et  $G$  la constante de Cavendish. L'altitude d'une telle orbite est approximativement de 35 800 kilomètres.

## 8 Orbite de Transfert de Hohmann



Le passage entre deux orbites circulaires coplanaires peut se faire avec une faible dépense d'énergie en suivant une orbite elliptique tangente aux deux orbites circulaires.

Cette orbite est appelée orbite de transfert de Hohmann.

## 9 Centre de Percussion

$\odot \mathbf{k}$

$\|\mathbf{OC}\| = a$

$\odot \mathbf{k} = \mathbf{e}_z$

$$\ell_{eq} = \frac{ma^2 + J_C}{ma} = a + \frac{J_C}{ma}$$

$\Rightarrow$  Centre d'oscillations P

Si on suspend le pendule en P

$$a \longrightarrow a' = \ell_{eq} - a = \frac{J_C}{ma}$$

$$\ell'_{eq} = a' + \frac{J_C}{ma'} = \frac{J_C}{ma} + a = \ell_{eq}$$

Même pulsation !

■ ddl : 3 - 2 (O fixe) = 1

■ coord. gén. :  $\theta$

■ Forces :  $m\mathbf{g}, \mathbf{R}$

■ Théorèmes généraux :

$$m\ddot{\mathbf{c}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_C = J_C \ddot{\theta} \mathbf{k} = \mathbf{CO} \wedge \mathbf{R}$$

3 équations pour 3 inconnues

$\odot \mathbf{k} = \mathbf{e}_z$

Si on percute le pendule "en P", la réaction en O est indépendante de la force  $\mathbf{F}$  appliquée !

Ex. : raquette de tennis, club de golf,...

Le centre de percussion d'un solide est le point auquel on peut appliquer des forces extérieures arbitrairement grandes, comme les forces impulsionnelles appliquées lors d'une percussion, sans provoquer de réaction aux appuis.

En frappant une boule de billard de rayon  $R$  en son centre de percussion, situé à une distance  $2R/5$  au-dessus du centre d'inertie, on communique à la boule une vitesse de translation et une vitesse de rotation compatibles avec le roulement sans glissement sans qu'aucune force de frottement ne doive être mise en oeuvre au point de contact avec le plan.

Dans le cas d'une raquette de tennis, le centre de percussion correspond au point du tamis où il convient de frapper la balle pour éviter de faire naître une force de réaction importante au niveau du poignet.

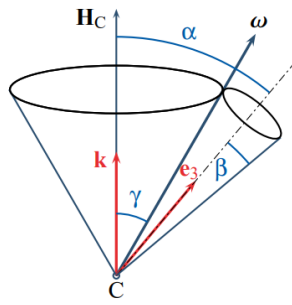
## 10 Précession

### 10.1 Euler-Poinsot & Précession Uniforme

**Définition** : Le mouvement d'un solide autour d'un de ses points fixes et par rapport auquel le moment des forces extérieures est nul est appelé mouvement de Poinsot.

**Définition** : Le mouvement d'un solide autour de son centre d'inertie et soumis à des forces appliquées uniquement en ce point (comme  $\mathbf{G}$ ) est appelé mouvement d'Euler-Poinsot.

### Euler-Poinsot pour solide de révolution



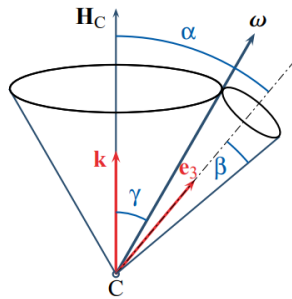
$$\cos \gamma = \frac{\omega \cdot \mathbf{H}_C}{\|\omega\| \|\mathbf{H}_C\|} = \frac{2T_0}{\omega_0 \|\mathbf{H}_0\|}$$

$$\cos \beta = \frac{\omega \cdot \mathbf{e}_3}{\|\omega\| \|\mathbf{e}_3\|} = \frac{n}{\omega_0}$$

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{H}_C \cdot \mathbf{e}_3}{\|\mathbf{H}_C\| \|\mathbf{e}_3\|} = \frac{J_3 n}{\|\mathbf{H}_0\|}$$

- Les cônes de polhodie et d'herpolhodie sont des cônes circulaires droits.
- L'axe de symétrie décrit un cône circulaire droit autour de la direction invariable = précession.

### Précession uniforme



$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \omega \wedge \mathbf{e}_3 = \omega_p \mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_3$$

En norme

$$\omega_0 \sin \beta = \omega_p \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \omega_p = \frac{\omega_0 \sin \beta}{\sin \alpha} = \text{constante}$$

Un solide de révolution soumis à un ensemble de forces dont le moment résultant par rapport au centre d'inertie est nul est en précession uniforme ( $\alpha$  et  $\omega_p$  constants)

Remarque : le cône d'herpolhodie est le cône central, celui de polhodie étant le petit à coté.

## 10.2 Précession/Effet Gyroscopique

La précession gyroscopique ou effet gyroscopique est le mouvement de précession que présente un solide de révolution en rotation rapide autour de son axe de symétrie lorsqu'il est sollicité par un couple extérieur  $\mathbf{C}$  indépendant de la vitesse de rotation. Au lieu de basculer dans la direction du couple appliqué, le solide acquiert un mouvement de rotation qui tend à aligner son axe de symétrie avec la direction du couple appliqué. Au premier ordre, la vitesse de précession :  $\dot{\phi} \mathbf{e}_z$ , est telle que :

$$\mathbf{C} = \Gamma \dot{\phi} \mathbf{e}_z \wedge \dot{\Psi} \mathbf{e}$$

où  $\Gamma$  désigne le moment d'inertie du solide par rapport à son axe de symétrie de révolution,  $\mathbf{e}$  est le vecteur unitaire porté par cet axe de symétrie et :  $\dot{\Psi} \gg \dot{\phi}$ , est la vitesse de rotation autour de cet axe.

## 10.3 Précession Uniforme d'un Gyroscope

On dit d'un gyroscope qu'il présente un mouvement de précession uniforme lorsque son axe de symétrie conserve une inclinaison constante par rapport à une direction fixe et tourne à vitesse angulaire constante autour de celle-ci. Dans ce mouvement, on a :

$$\theta = \text{constante}, \quad \dot{\phi} = \text{constante}, \quad \dot{\Psi} = \text{constante}$$

Établissez l'expression du couple extérieur à appliquer à un gyroscope pour produire un mouvement de précession uniforme autour de son centre d'inertie.

Lorsqu'on a un mouvement de précession uniforme, on a :  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{e}_z + \dot{\Psi} \mathbf{e}$ , où  $\dot{\phi}$  et  $\dot{\Psi}$  sont constantes. Le gyroscope possède un tenseur central d'inertie de la forme :  $\mathbf{J}_C = A \mathbf{I} + (\Gamma - A) \mathbf{e}\mathbf{e}$ , où  $\Gamma$  et  $A$  sont, respectivement, les moments principaux d'inertie pour la rotation autour de  $\mathbf{e}$  et autour de tout axe perpendiculaire à  $\mathbf{e}$ .

On calcule dès lors,

$$\mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = A \boldsymbol{\omega} + (\Gamma - A) (\dot{\Psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \mathbf{e}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_C &= A \dot{\boldsymbol{\omega}} + (\Gamma - A) (\ddot{\Psi} + \ddot{\phi} \cos \theta) \mathbf{e} \\ &= \dot{\phi} [\Gamma \dot{\Psi} + (\Gamma - A) \dot{\phi} \cos \theta] \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e} \end{aligned}$$

Appliquant le théorème du moment cinétique en  $C$ , on en déduit que, pour provoquer une précession uniforme, il convient d'appliquer un couple extérieur de moment :

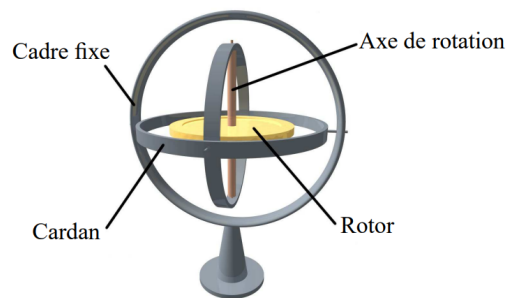
$$\mathbf{M}_C = \dot{\phi} [\Gamma \dot{\phi} + (\Gamma - A) \dot{\phi} \cos \theta] \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}$$

à la fois perpendiculaire à l'axe de symétrie du gyroscope et à l'axe autour duquel il précesse.

## 10.4 Supplément

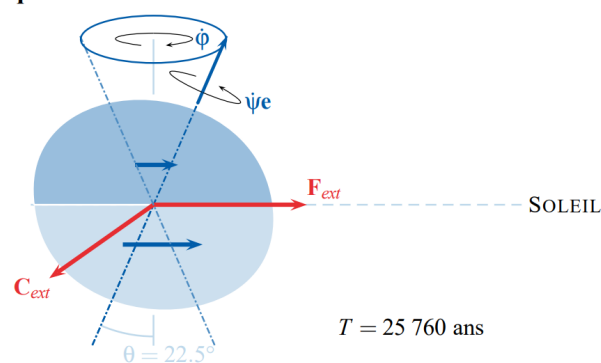
**Définition de la stabilisation - rigidité gyroscopique** : un solide présentant une très grande vitesse de rotation autour d'un axe de symétrie 'résiste' aux sollicitations extérieures.

### Suspension de Cardan



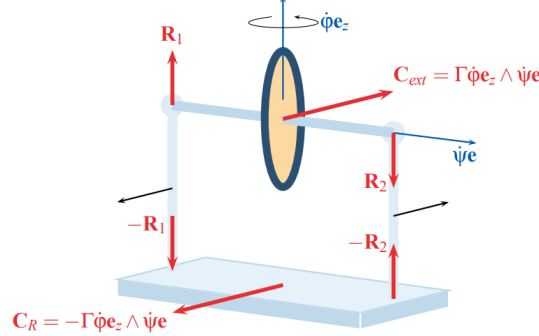
Quel que soit le mouvement du cadre fixe, le rotor (gyroscope) garde une direction constante, ce qui fournit une direction de référence.

### Précession des équinoxes



### Couple de réaction gyroscopique

Soit un solide en rotation rapide dont on force la précession...



Tout se passe comme-ci le support subissait un couple de réaction gyroscopique tendant à aligner l'axe de rotation avec l'axe de précession

## 11 Toupie

On considère une toupie présentant une symétrie de révolution d'axe  $\mathbf{e}$  en mouvement autour de son sommet O fixe.

### 11.1 Tenseur d'Inertie

Le tenseur d'inertie s'écrit :  $\mathbf{J}_O = J_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + J_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \Gamma \mathbf{e} \mathbf{e}$ , où  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  sont deux axes perpendiculaires à  $\mathbf{e}$ . Vu la symétrie de révolution, le solide présente le même moment d'inertie pour la rotation autour de tout axe perpendiculaire à  $\mathbf{e}$  et passant par le point O. Dès lors,  $J_1 = J_2 = A$  et :

$$\mathbf{J}_O = A \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + A \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \Gamma \mathbf{e} \mathbf{e} = A \mathbf{I} + (\Gamma - A) \mathbf{e} \mathbf{e}$$

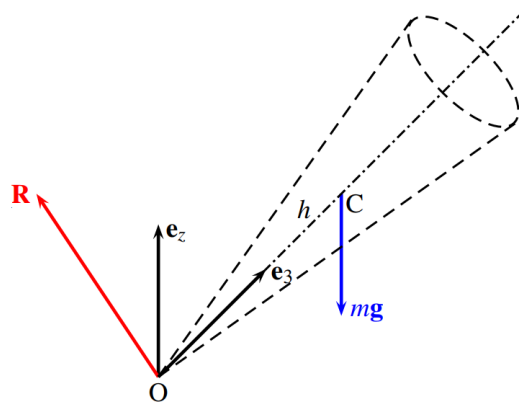
### 11.2 Moment Cinétique

Puisque la toupie est en rotation autour de son sommet O fixe, on a :  $\mathbf{H}_O = \mathbf{J}_O \cdot \boldsymbol{\omega}$ . Les forces appliquées à la toupie sont :

- la force de pesanteur, assimilable à une force unique  $m\mathbf{g}$  appliquée au centre d'inertie de la toupie ;
- la réaction  $\mathbf{R}$  appliquée au point O.

Dès lors, le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{M}_O = h \mathbf{e} \wedge (m\mathbf{g}) = -mgh \mathbf{e} \wedge \mathbf{e}_z$$



### 11.3 Intégrales Premières

On peut obtenir 3 intégrales premières :

1.  $T_O + V_{mg} = E$ , qui exprime la conservation d'énergie du système.
2.  $\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{e}_z = H_z$ , qui exprime la conservation de la composante verticale du moment cinétique.



3.  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_O = \Gamma \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega} = \text{const.}$ , cette intégrale première exprime la conservation du *spin* :  $n = \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}$ .

**Démonstration de la n°3 :**

En projetant sur  $\mathbf{e}$ , il vient :  $\mathbf{e}_z \cdot \dot{\mathbf{H}}_O = 0$ . On utilise la dérivée relative par rapport aux axes liés au solide et l'équation devient :

$$\mathbf{e} \cdot \left[ \frac{\delta \mathbf{H}_O}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{H}_O \right] = 0$$

où :  $\mathbf{H}_O = \mathbf{J}_O \cdot \boldsymbol{\omega} = A\boldsymbol{\omega} + (\Gamma - A) (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{e}$

$\Rightarrow \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{H}_O = (\Gamma - A) (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}) (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e})$

$\Rightarrow \mathbf{e} \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{H}_O) = 0$

de sorte que, puisque  $\mathbf{e}$  est constant dans les axes liés à la toupie,  $\mathbf{e} \cdot \frac{\delta \mathbf{H}_O}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_O) = 0$ .

Dès lors,

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_O = \Gamma \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega} = \text{const.}$$

## 11.4 Énergie Cinétique

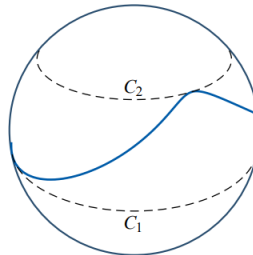
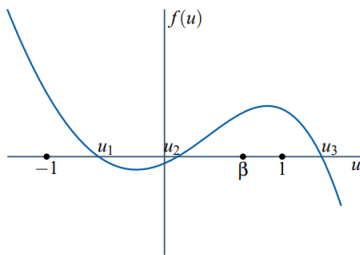
La toupie étant en rotation autour de son sommet O fixe, son énergie cinétique peut être exprimée avec les angles d'Euler sous la forme :

$$\begin{aligned} T_O &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot [A \mathbf{I} + (\Gamma - A) \mathbf{e} \mathbf{e}] \cdot \boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{A}{2} \omega^2 + \frac{1}{2} (\Gamma - A) (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e})^2 \\ &= \frac{A}{2} (\dot{\phi}^2 + \dot{\Psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\Psi} \dot{\phi} \cos \theta) + \frac{1}{2} (\Gamma - A) (\dot{\Psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \end{aligned}$$

## 12 Types de Mouvement d'une Toupie

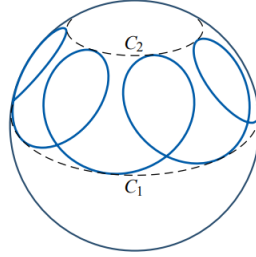
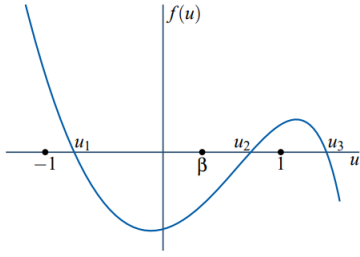
1. Précession monotone.
2. Précession de signe variable.
3. Mouvement avec rebroussement.
4. Précession uniforme.
5. Mouvement asymptotique.
6. Toupie forte.

### Précession monotone



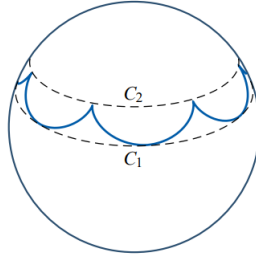
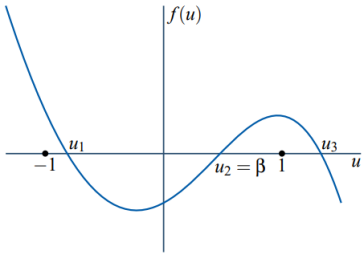
$$\dot{\phi} = \frac{bn_*(\beta - u)}{1 - u^2} > 0 \text{ garde un signe constant.}$$

### Précession de signe variable



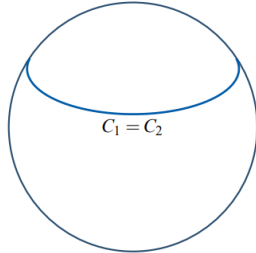
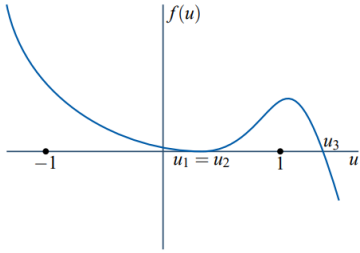
$$\dot{\phi} = \frac{bn_*(\beta - u)}{1 - u^2} \text{ change périodiquement de signe.}$$

### Mouvement avec rebroussement



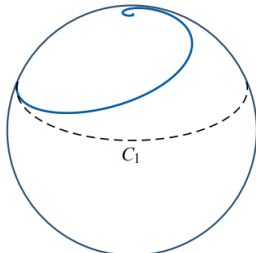
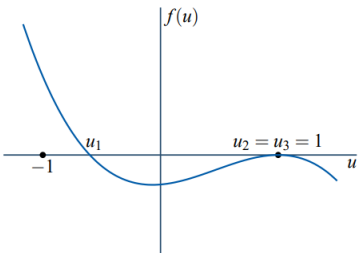
$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{\phi}} = \mp \frac{\sqrt{-f(u)}\sqrt{1-u^2}}{bn_*(\beta - u)} \rightarrow \infty \quad \text{si } u \rightarrow u_2 = \beta$$

### Précession uniforme



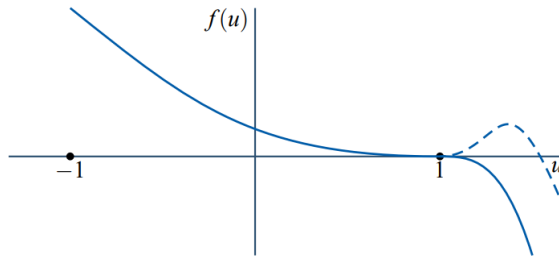
$$u = \text{constante} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\phi} = \frac{bn_*(\beta - u)}{1 - u^2} = \text{constante} \\ \dot{\psi} = n_* - \dot{\phi}u = \text{constante} \end{cases}$$

### Mouvement asymptotique



Si l'axe n'est pas initialement vertical, il met un temps infini pour atteindre la verticale supérieure.

### Toupie forte



La toupie est en équilibre stable en position verticale !

## 12.1 Précession Uniforme

Le mouvement de précession uniforme d'une toupie est un mouvement caractérisé par l'absence de nutation et par des vitesses de précession et de rotation propre constantes. L'axe de la toupie garde donc une inclinaison constante par rapport à la verticale autour de laquelle il tourne à vitesse angulaire constante. La toupie tourne aussi sur elle-même à vitesse constante.

## 12.2 Toupie Forte

La toupie forte est un solide de révolution dont la rotation rapide autour de son axe de symétrie de révolution assure l'équilibre stable dans la position verticale supérieure. La toupie reste verticale en dépit de la force de pesanteur qui tend à faire basculer son axe de rotation lors de toute perturbation de l'équilibre.

## 13 Équilibrage Statique et Dynamique d'un Système Tournant

L'équilibrage statique d'un système tournant consiste à veiller à ce que le centre d'inertie du système soit situé sur l'axe de rotation.

L'équilibrage dynamique, quant à lui, consiste à veiller à ce que l'axe de rotation  $\mathbf{e}$  corresponde à un axe principal d'inertie du système.

Pour réaliser l'équilibrage statique et dynamique, on peut ajouter de petits balourds sur le système (ou enlever de la matière en effectuant quelques perforations). Pour un système en rotation autour d'un axe fixe unique, deux balourds sont suffisants pour réaliser cette opération.

Si un système non équilibré est mis en rotation, des réactions parasites sont induites au niveau des appuis, lesquelles engendrent des sollicitations mécaniques parasites qui peuvent endommager le système ou son support.

## 14 Forces de Cohésion/Internes

Les forces intérieures agissant au sein d'un solide rigide sont notées  $\mathbf{f}$ , ainsi  $\mathbf{f}_{ji}$  est la force qu'un point  $j$  exerce sur un point  $i$  du même système.

Au vu du principe de l'action et de la réaction, il est évidemment intéressant de regrouper deux à deux les forces intérieures qui se correspondent. En effet, on a :

$$\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$$

La résultante de ces forces est donc nulle. De même, on a :

$$\mathbf{s}_i \wedge \mathbf{f}_{ji} + \mathbf{s}_j \wedge \mathbf{f}_{ij} = \mathbf{0}$$

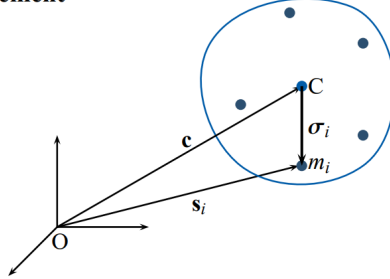
Ce qui fait que le moment résultant est nul, lui aussi. De même pour la puissance :

$$\dot{\mathbf{s}}_i \cdot \mathbf{f}_{ji} + \dot{\mathbf{s}}_j \cdot \mathbf{f}_{ij} = 0$$

## 15 Résultats du Théorème C pour un Système de Points

Un système de points possède une masse :  $m = \sum m_i$ , et son centre d'inertie est donné par :  $m\mathbf{c} = \sum m_i\mathbf{s}_i$ . Les grandeurs résultantes sont facilement retrouvables, par exemple le moment cinétique est donné par :  $\mathbf{H}_O = \sum m_i\mathbf{s}_i \wedge \dot{\mathbf{s}}_i$ . Et si on veut décomposer le mouvement, on applique la méthode générale qui suit.

### Décomposition du mouvement



$$\mathbf{s}_i = \mathbf{c} + \boldsymbol{\sigma}_i$$

Mouvement de  $i$  = mouvement d'ensemble (C) + mouvement par rapport à C

### Théorème C

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{c} + \boldsymbol{\sigma}_i, \quad \dot{\mathbf{s}}_i = \dot{\mathbf{c}} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_i, \quad \begin{cases} \mathbf{Q}_C = \sum_i m_i \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_C = \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{\sigma}}_i = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O &= \sum_i m_i \mathbf{s}_i \wedge \dot{\mathbf{s}}_i = \sum_i m_i (\mathbf{c} + \boldsymbol{\sigma}_i) \wedge (\dot{\mathbf{c}} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_i) \\ &= \sum_i m_i \mathbf{c} \wedge \dot{\mathbf{c}} + \sum_i m_i \boldsymbol{\sigma}_i \wedge \dot{\mathbf{c}} + \sum_i m_i \mathbf{c} \wedge \dot{\boldsymbol{\sigma}}_i + \sum_i m_i \boldsymbol{\sigma}_i \wedge \dot{\boldsymbol{\sigma}}_i \\ &= m\mathbf{c} \wedge \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \sum_i m_i \boldsymbol{\sigma}_i \wedge \dot{\boldsymbol{\sigma}}_i \\ &= m\mathbf{c} \wedge \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_C \quad \text{où} \quad \mathbf{H}_C = \sum_i m_i \boldsymbol{\sigma}_i \wedge \dot{\boldsymbol{\sigma}}_i \end{aligned}$$

Remarque : le moment statique  $\mathbf{Q}_O$  et le moment cinétique  $\mathbf{N}_O$  ne dépendent que de  $\mathbf{c}$ , ce qui fait que :  $\mathbf{Q}_C = \mathbf{N}_C = \mathbf{0}$ .

## 16 Axes et Moments Principaux d'Inertie d'un Solide

Les axes principaux d'inertie en un point B sont ceux dans lesquels le tenseur d'inertie  $\mathbf{J}_B$  est représenté par une matrice diagonale. Les éléments de cette matrice, i.e. les moments d'inertie pour la rotation autour des axes principaux d'inertie, sont les moments principaux d'inertie.

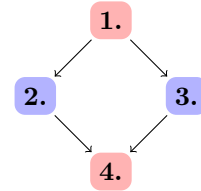
Les axes principaux d'inertie coïncident avec les éléments de symétrie matérielle du solide.

## Deuxième partie

# Question II - Point Matériel

On va sûrement avoir un mouvement avec une force centrale. Ça peut être un mouvement guidé mais pas forcément. On va donc appliquer la démarche suivante :

1. Méthode Générale - Point matériel.
2. Méthode Spécifique - Force Centrale *Sans* Courbe de Guidage.
3. Méthode Spécifique - Force Centrale *Avec* Courbe de Guidage.
4. Méthode Générale - Étude Stabilité.



## 17 Méthode Générale - Point Matériel

1. On commence tous les problèmes de mécanique rationnelle en **lisant** attentivement **l'énoncé** et en observant le dessin s'il y en a un.
2. Il faut **décomposer le mouvement en** plusieurs **phases** si il y a besoin (certains mouvements n'ont qu'une seule phase). Chaque phase correspond à une certaine période de temps et s'étend donc d'un temps  $t_1$  à un temps  $t_2$ . Quand change-t-on de phase ? Lorsque il y a un changement dans les forces extérieures au système.

Exemples :

- Dans un premier temps, la fusée expulse du gaz ( $\mathbf{P}$ ) puis arrête ( $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ ).
  - Un train avance sur des rails ( $\mathbf{R}_\nu$ ) puis déraille ( $\mathbf{R}_\nu = \mathbf{0}$ ).
  - Le courant électrique ne passe pas car le circuit est ouvert ( $\mathbf{B} = \mathbf{0} \implies \mathbf{F}_B = \mathbf{0}$ ) puis on le ferme ( $\mathbf{B} \neq \mathbf{0} \implies \mathbf{F}_B \neq \mathbf{0}$ ).
3. On **liste** toutes **les données du problème** qui n'ont "rien" à voir avec les forces et l'accélération. On va donc lister des données comme la masse, la position initiale/intermédiaire/finale, la vitesse ini/inter/fin, les informations en rapport avec le temps, la trajectoire, etc.
  4. Maintenant, on va d'abord **nommer le** type de **mouvement** (mouvement guidé, chute libre, champ de force/force centrale, particule chargée dans un champ magnétique/électrique, masse variable, ...) puis **listier** toutes **les forces** selon les trois catégories suivantes :

— **Force appliquée :**

- Gravité :  $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$
- Champ de force/force centrale :  $\mathbf{F} = -\frac{\mu}{s^3}\mathbf{s} = -m\mu r^{-2}\mathbf{e}_r$
- Rappel d'un ressort  $\mathbf{F} = -k(l - l_0)\mathbf{e} = -kx\mathbf{e} = -k\mathbf{x}$
- Ressort de torsion d'axe  $\mathbf{C} = -k(\theta - \theta_0)\mathbf{e} = -k\theta\mathbf{e}$
- Lorentz/électromagnétique  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{s}} \wedge \mathbf{B})$
- Masse variable  $\mathbf{P} = \frac{dm}{dt}\mathbf{v}$

— **Force de liaison :**

- Tension dans une corde : proportionnelle à son extension (comme le ressort) seulement lorsque la corde est tendue et étirée.
- Force normale :  $\mathbf{N} = \mathbf{R}_\nu$ .
- Force binormale :  $\mathbf{R}_\beta$ .

La force normale est normale à la courbe/surface et la force binormale est une force de réaction normale à la courbe et à  $\mathbf{N}$ . La binormale est souvent perpendiculaire au plan dans lequel se passe le mouvement.

— **Force de frottement** :

— Frottement fluide (loi de Stokes) :  $\mathbf{F} = -c \dot{\mathbf{s}}$

— Frottement sec :  $\mathbf{T} = -\mu N \frac{\dot{\mathbf{s}}}{\|\dot{\mathbf{s}}\|}$

Enfin, on va **écrire ce qui est en rapport avec l'accélération**. On note le type d'accélération (centripète, linéaire, ...).

5. Puis on écrit la **loi de Newton** (équation différentielle vectorielle du mouvement) :

$$\mathbf{F} = m \ddot{\mathbf{s}} \quad \sum \mathbf{F}_{\text{extérieures}} = m \ddot{\mathbf{s}}$$

Si le repère n'est pas inertiel, la loi de Newton s'écrit <sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} m \mathbf{a}_r &= m \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2} = \mathbf{G} - m \mathbf{a}_e - m \mathbf{a}_c \\ &= \mathbf{G} - m \left[ \frac{d^2 \mathbf{b}}{dt^2} + \dot{\mathbf{w}} \wedge \mathbf{r} + \mathbf{w} \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{r}) \right] - m \left[ 2\mathbf{w} \wedge \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} \right] \end{aligned}$$

6. Il faut maintenant **tracer le dessin**.

- Premièrement, on dessine la **trajectoire** du mobile dans l'espace grâce aux données sur sa provenance, sa destination, son type de mouvement (parabolique, circulaire, rectiligne, ...), etc. Il faut aussi placer le mobile sur un point quelconque de sa trajectoire.
- Deuxièmement, on dessine toutes les **forces** quelles soient appliquées, de liaison ou de frottement. On trace aussi l'**accélération**.
- Troisièmement, on dessine la **vitesse** et on marque les **position initiales et finales** de la phase de mouvement que l'on étudie.

## 18 Méthode Spécifique - Force Centrale *Sans* Courbe de Guidage.

1. Il faut montrer que **le mouvement est plan**. On a deux méthodes :

(a) On multiplie vectoriellement l'équation du mouvement par :  $\mathbf{s} = r \mathbf{e}_r$ , ce qui donne :

$$\mathbf{s} \wedge \ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \implies \frac{d}{dt}(\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}) = \mathbf{0} \implies \mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{h}$$

On conclut :

À chaque instant, le vecteur position et le vecteur vitesse sont donc perpendiculaires à un vecteur constant  $\mathbf{h}$ , ce qui indique que le mouvement a lieu dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{h}$ .

Remarque :  $\mathbf{h}$  est le moment cinétique par unité de masse.

(b) On place un repère absolu : O,  $\mathbf{E}_x$ ,  $\mathbf{E}_y$ ,  $\mathbf{E}_z$ . Avec : O au centre de force,  $\mathbf{E}_x$  qui pointe vers le point matériel, le vecteur vitesse est initialement compris dans le plan défini par les vecteurs  $\mathbf{E}_x$  et  $\mathbf{E}_y$ . On multiplie scalairement l'équation vectorielle du mouvement par :  $\mathbf{E}_z$ , ce qui donne :

$$\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$$

Puisque l'accélération est nulle tandis que les vecteurs position et vitesse sont compris dans le plan défini plus haut ( $\perp \mathbf{E}_z$ ), alors le mouvement est plan.

2. Il faut maintenant déterminer **deux intégrales scalaires** et préciser leur interprétation physique. Puisque le mouvement est plan, on va utiliser les coordonnées polaires. On a :  $\mathbf{s} = r \mathbf{e}_r$  ;  $\dot{\mathbf{s}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$  ;

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{s}} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \mathbf{e}_\theta \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

Ensuite, on combine cette équation et l'équation du mouvement que l'on projette alors sur :  $\mathbf{e}_r$  et  $\mathbf{e}_\theta$  pour obtenir deux équations scalaires. On intègre ensuite les équations. **Interprétations** :

1. Voir Annexe pour une explication plus détaillée.

- Ce qu'on a projeté sur  $\mathbf{e}_\theta$  peut représenter la *conservation de la valeur du moment cinétique par unité de masse*, une fois qu'on l'a intégré.
  - Ce qui a été projeté sur  $\mathbf{e}_r$  peut représenter la *conservation de l'énergie du système*.
3. Il faut calculer les **constantes d'intégration**.

## 19 Méthode Spécifique - Force Centrale Avec Courbe de Guidage.

1. Pour obtenir une intégrale première exprimant la **conservation de l'énergie** du système, on multiplie scalairement l'équation de Newton du mouvement par la vitesse du point matériel.
- Glissement sans frottement sur une courbe/surface.  
On multiplie l'équation de **Newton scalairement par  $\dot{\mathbf{s}}$** . Et on obtient :

$$m\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{G} + \mathbf{R} \qquad m\dot{\mathbf{s}} \cdot \ddot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}} \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{R}) = \dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{G}$$

Si les forces données dérivent d'un potentiel, on a :  $\dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{G} = -\frac{dV}{dt}$ .

Et l'intégrale première de conservation de l'énergie :  $\frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{s}}\|^2 + V = E$ .

Cette façon de procéder est assez générale et permet d'obtenir des intégrales premières qui n'apparaissent pas directement par application des théorèmes généraux.

- Mouvement d'un point matériel sur une courbe/surface de guidage mobile.

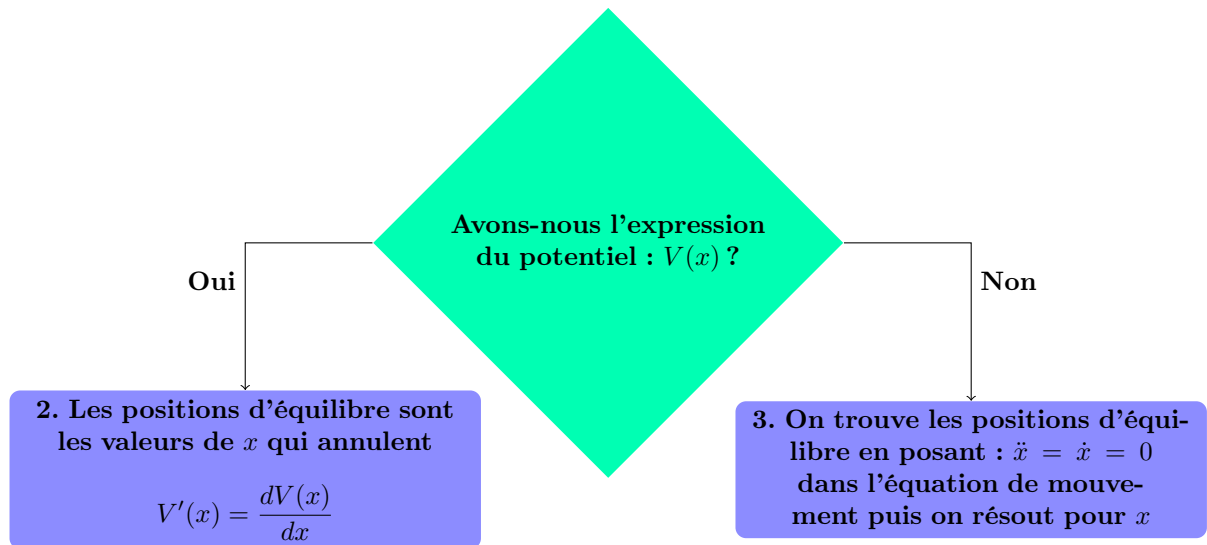
$$m \frac{d^2 \mathbf{s}}{dt^2} = \mathbf{G} + \mathbf{R} \qquad m \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \cdot \frac{d^2 \mathbf{s}}{dt^2} = \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{R}) = \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \cdot \mathbf{G}$$

Cette fois-ci, on a multiplié l'équation scalairement par la dérivée relative du point par rapport à la courbe/surface. Dans certains cas, cette équation donne lieu à une intégrale première de bilan énergétique. Dans tous les cas, l'intégrale de :  $\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \cdot \mathbf{G}$  joue le rôle de potentiel et la constante d'intégration représente une certaine forme de conservation d'énergie du système.

2. Seconde intégrale première :
- Pour une **courbe de guidage**, on ne doit pas calculer une autre intégrale première.
  - Pour une **surface de guidage**, on calcule la seconde intégrale première qui représente la **conservation du moment cinétique**, on l'obtient en multipliant l'équation de Newton du mouvement par :  $\mathbf{e}_\theta$  qui est différent de :  $\dot{\mathbf{s}}$ , et perpendiculaire à  $\mathbf{R}$ .
3. Il faut calculer les **constantes d'intégration**.

## 20 Méthode Générale - Étude Stabilité

1. On commence en cherchant les **positions d'équilibre**.



2. On a maintenant les positions d'équilibres  $x_{eq}$  et la dérivée du potentiel (en fonction de  $x$ ). On va calculer la **dérivée seconde du potentiel** pour voir si c'est on a un équilibre stable :
- $V''(x) < 0 \rightarrow \bigcirc [-x^2 \rightarrow f'' = -2]$
  - $V''(x) > 0 \rightarrow \bigcirc [+x^2 \rightarrow f'' = +2]$
  - $V''(x) = 0 \rightarrow$  Aucune information, il faut encore dériver<sup>2</sup>.
3. On va utiliser le développement de **Taylor sur l'équation de Newton** :  $\ddot{x} + F(x) = 0$ , dans laquelle on introduit :  $x = x_{eq} + \eta$ . On obtient :

$$\ddot{\eta} + F'(x_{eq})\eta = 0$$

Polynôme caractéristique	Solution générale	Stabilité
$z^2 - \alpha^2 = 0$ $z_1 = \alpha \ \& \ z_2 = -\alpha$	$x(t) = C'_1 e^{\alpha t} + C'_2 e^{-\alpha t}$ $= C_1 \operatorname{sh} \alpha t + C_2 \operatorname{ch} \alpha t$	Équilibre instable
$z^2 + \alpha^2 = 0$ $z_1 = i\alpha \ \& \ z_2 = -i\alpha$	$x(t) = C'_1 e^{i\alpha t} + C'_2 e^{-i\alpha t}$ $= C_1 \sin \alpha t + C_2 \cos \alpha t$	Équilibre marginalement stable
$z^2 = 0$ $z_1 = z_2 = 0$	$x(t) = At + B$	Équilibre faiblement instable

## 21 Erreurs Fréquentes

- Déjà écrire l'accélération en coordonnées polaires alors que l'on n'a pas encore démontré que le mouvement est plan.
- Utiliser l'expression de la vitesse et/ou de l'accélération en coordonnées polaires pour démontrer que le mouvement est plan.
- Ne pas donner les interprétations des intégrales premières.
- Ne pas déterminer les constantes d'intégration.

---

2. Voir Annexe pour voir plus en détail.



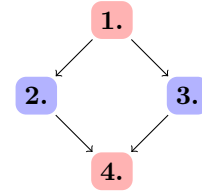
- Ne pas bien interpréter les conditions initiales.
- Ne pas savoir dessiner le diagramme de potentiel.
- Représenter aussi la fonction potentielle pour les valeurs négatives de  $r$  (avec  $r$ , le rayon par ex.).
- Ne pas savoir résoudre une équation du second degré ( $ax^2 + bx + c = 0$ ). LOL
- Ne pas se rendre compte que l'équation différentielle du second ordre est plus facile à résoudre que celle du premier ordre (pour certaines sous-questions).
- Ne pas savoir résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants.
- Confondre équation de la trajectoire et équation différentielle de la trajectoire.

## Troisième partie

# Question III - Solide

On va sûrement avoir un solide qui se déplace en mouvement plan, sur un plan horizontal ou incliné. Il est possible que le centre d'inertie ne corresponde pas avec le centre géométrique. On va donc appliquer la démarche suivante :

1. Méthode Générale - Solide.
2. Méthode Spécifique - Centre d'Inertie.
3. Méthode Spécifique - Centre Géométrique.
4. Méthode Générale - Suite.



## 22 Méthode Générale - Solide

1. **Dessin** : Généralement, on refait juste le même dessin que celui du prof et s'il n'y en a pas on se débrouille pour le faire. Attention, il faut le faire grand. Il faut aussi dessiner les forces, et un repère absolu ( $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z$ ) en un point fixe  $O$ , ainsi qu'un système d'axes polaires ( $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{E}_z$ ), l'angle  $\theta$  étant pris par rapport à une direction fixe (généralement l'axe vertical).

Remarque : On prend tous les systèmes d'axes de telle manière qu'ils aient toujours le vecteur  $\mathbf{E}_z$  en commun.

Il faut aussi mettre les coordonnées généralisées qui sont souvent  $x$  et  $\theta$ .

Comme on est encore au début de la résolution, ce n'est pas plus mal de ré-écrire les données importantes de l'énoncé sous forme de liste (• masse = 12 m ; • coeff. frottement =  $\mu$  ; ...).

2. **Degrés de libertés** : On commence en disant que le solide est en mouvement plan et qu'il possède donc au maximum 3 degrés de liberté. Le **mouvement sur le plan (incliné/horizontal)** et la **condition de roulement sans-glissement** imposent deux liaisons.

Conclusion : le solide ne possède qu'un seul degré de liberté

3. **Relation de roulement sans-glissement** : Il faut dire que : le roulement sans glissement du solide sur le plan incliné se traduit par l'égalité de leurs vitesses au niveau du point de contact  $K$ , soit :

$$\dot{\mathbf{s}}_K = \mathbf{0}$$

En prenant en compte le vecteur de Poisson :  $\dot{\theta} \mathbf{E}_z$ , du solide, la vitesse du point du solide en contact en  $K$  avec le plan horizontal est [Méthode B]<sup>3</sup> :

$$\dot{\mathbf{s}}_K = \dot{x} \mathbf{E}_x + \dot{\theta} \mathbf{E}_z \wedge \mathbf{CK} = \dot{x} \mathbf{E}_x + \dot{\theta} \mathbf{E}_z \wedge (-a \mathbf{E}_y) = \dot{x} \mathbf{E}_x + a\dot{\theta} \mathbf{E}_x$$

de sorte que la condition de roulement sans glissement s'écrit :

$$\dot{x} + a\dot{\theta} = 0$$

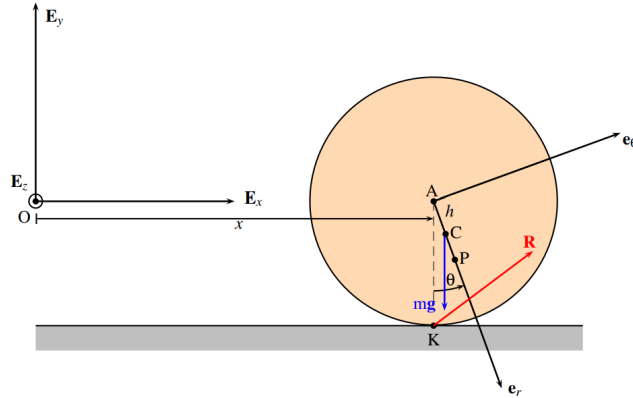
4. **Forces extérieures** : Il faut commencer par : "*les forces extérieures agissant sur le solide sont*", suivi d'une liste des forces extérieures et de leurs caractéristiques qui sont souvent :

- $m\mathbf{g}$  : la force de pesanteur, force appliquée conservative agissant au centre d'inertie  $C$  du solide et dirigée verticalement vers le bas ;
- $\mathbf{R} = N \mathbf{E}_y + T \mathbf{E}_x$  : la force de liaison exercée par le plan horizontal/incliné sur le solide au point de contact  $K$ .

---

3. Méthodes A et B pour trouver la condition de roulement sans-glissement en annexe.

## 23 Méthode Spécifique - Centre d'Inertie



1. Expression vectorielle du **théorème de la quantité de mouvement**<sup>4</sup> : Le théorème de la quantité de mouvement écrit au point  $O$  donne :

$$\dot{\mathbf{N}}_O = \mathbf{G} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

où :  $\mathbf{N}_O = m \dot{\mathbf{s}}_C = m \frac{d}{dt} (x \mathbf{E}_x + h \mathbf{e}_r) = m(\dot{x} \mathbf{E}_x + h\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta)$ .

Dés lors, le théorème s'écrit :

$$m \frac{d}{dt} (\dot{x} \mathbf{E}_x + h\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta) = m\mathbf{g} + T \mathbf{E}_x + N \mathbf{E}_y$$

2. Expression scalaire du **théorème du moment cinétique**<sup>4</sup> par rapport à un repère centré au centre d'inertie du solide et dont les axes sont parallèles à des axes inertiaux : Appliquant au solide étudié le théorème du moment cinétique rapporté à des axes parallèles aux axes absolus et centrés en  $C$ , il vient :

$$\dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{M}_C$$

où :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_C &= \mathbf{CC} \wedge m\mathbf{g} + \mathbf{CK} \wedge \mathbf{R} = (-h \mathbf{e}_r - a \mathbf{E}_y) \wedge (N \mathbf{E}_y + T \mathbf{E}_x) \\ &= -hN (\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{E}_y) - hT (\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{E}_x) - aT (\mathbf{E}_y \wedge \mathbf{E}_x) \\ &= -hN \sin \theta \mathbf{E}_z - hT \cos \theta \mathbf{E}_z + aT \mathbf{E}_z \end{aligned}$$

et :  $\mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = mb^2 \dot{\theta} \mathbf{E}_z$ , soit :

$$\frac{d}{dt} (mb^2 \dot{\theta} \mathbf{E}_z) = -hN \sin \theta \mathbf{E}_z - hT \cos \theta \mathbf{E}_z + aT \mathbf{E}_z$$

ou encore, en projetant sur  $\mathbf{E}_z$ ,

$$\frac{d}{dt} (mb^2 \dot{\theta}) = -hN \sin \theta - hT \cos \theta + aT$$

3. **Théorème de l'énergie cinétique**<sup>4</sup> par rapport à un repère inertiel : Le théorème de l'énergie cinétique rapporté à des axes inertiaux centrés en  $O$ , s'écrit :

$$\frac{dT_O}{dt} = \mathcal{P}_O = m\mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{s}}_C + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{s}}_K = m\mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{s}}_C$$

vu la condition de roulement sans glissement et où :  $T_O = \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{s}}_C\|^2 + T_C$

avec :  $\|\dot{\mathbf{s}}_C\|^2 = \dot{x}^2 + h^2 \dot{\theta}^2 + 2h\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta$

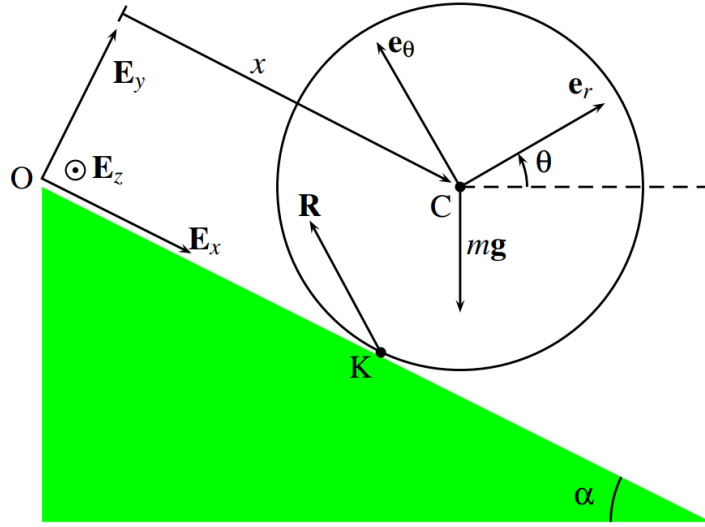
et :  $T_C = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \dot{\theta} \mathbf{E}_z \cdot \mathbf{J}_C \cdot \dot{\theta} \mathbf{E}_z = \frac{1}{2} mb^2 \dot{\theta}^2$

soit :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + h^2 \dot{\theta}^2 + 2h\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + b^2 \dot{\theta}^2) \right] = m\mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{s}}_C = -mgh\dot{\theta} \sin \theta$$

4. Explicitez chacune des résultantes cinématiques (pas leurs dérivées) et dynamiques intervenant dans ce théorème.

## 24 Méthode Spécifique - Centre Géométrique



1. Expression vectorielle du **théorème de la quantité de mouvement**<sup>4</sup> : Le théorème de la quantité de mouvement écrit au point  $O$  donne :

$$\dot{\mathbf{N}}_O = \mathbf{G} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

où :  $\mathbf{N}_O = m \dot{\mathbf{s}}_C = m\dot{x} \mathbf{E}_x$ .

Dés lors, le théorème s'écrit :

$$m\ddot{x} \mathbf{E}_x = m\mathbf{g} + T \mathbf{E}_x + N \mathbf{E}_y \quad (\text{Th.1})$$

2. Expression scalaire du **théorème du moment cinétique**<sup>4</sup> par rapport à un repère centré au centre d'inertie du solide et dont les axes sont parallèles à des axes inertiels : Appliquant au solide étudié le théorème du moment cinétique rapporté à des axes parallèles aux axes absolus et centrés en  $C$ , il vient :

$$\dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{M}_C$$

où :  $\mathbf{M}_C = \mathbf{CC} \wedge m\mathbf{g} + \mathbf{CK} \wedge \mathbf{R} = -a\mathbf{E}_y \wedge (T \mathbf{E}_x + N \mathbf{E}_y) = aT \mathbf{E}_z$ , et :  $\mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = J_C \dot{\theta} \mathbf{E}_z$ , soit :

$$J_C \ddot{\theta} = aT \quad (\text{Th.2})$$

3. **Théorème de l'énergie cinétique**<sup>4</sup> par rapport à un repère inertiel : Le théorème de l'énergie cinétique rapporté à des axes inertiels centrés en  $O$ , s'écrit :

$$\frac{dT_O}{dt} = \mathcal{P}_O = m\mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{s}}_C + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{s}}_K = m\mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{s}}_C$$

vu la condition de roulement sans glissement et où :  $T_O = \frac{1}{2}m \|\dot{\mathbf{s}}_C\|^2 + T_C$ , avec :  $\|\dot{\mathbf{s}}_C\|^2 = \dot{x}^2$ , et :

$$T_C = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\dot{\theta} \mathbf{E}_z \cdot \mathbf{J}_C \cdot \dot{\theta} \mathbf{E}_z = \frac{1}{2}J_C \dot{\theta}^2, \text{ soit :}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (m\dot{x}^2 + J_C \dot{\theta}^2) = m\dot{x} \ddot{x} + J_C \dot{\theta} \ddot{\theta} = mg\dot{x} \sin \alpha \quad (\text{Th.3})$$

## 25 Méthode Générale - Suite

### 25.1 Indépendance des Équations

Montrer que les équations découlant des théorèmes (Th.1, 2, 3) ne sont **pas** indépendantes.

$$\begin{cases} \ddot{x} \mathbf{E}_x = m\mathbf{g} + T \mathbf{E}_x + N \mathbf{E}_y \\ J_C \ddot{\theta} = aT \\ m\dot{x} \ddot{x} + J_C \dot{\theta} \ddot{\theta} = mg\dot{x} \sin \alpha \end{cases}$$

Ici, on a trois méthodes :

- (A) On décrit comment on utilise les 2 premières équations pour arriver à la troisième :  
Multipliant scalairement (Th.1) par :  $\dot{\mathbf{s}}_C = \dot{x}\mathbf{E}_x$ , et lui ajoutant le produit de (Th.2) par :  $\dot{\theta}$ , on obtient, en tenant compte de la condition de roulement sans glissement,

$$m\dot{x}\ddot{x} + J_C\dot{\theta}\ddot{\theta} = (\dot{x} + a\dot{\theta})T + mg\dot{x}\sin\theta = mg\dot{x}\sin\alpha$$

qui n'est autre que (Th.3). Les équations ne sont donc pas indépendantes.

- (B) On remarque qu'on a trois équations pour trois inconnues (inconnues =  $\ddot{x}, T, N$ ) mais que quand on multiplie scalairement (Th.1) par :  $\mathbf{E}_x$ , on n'a plus qu'un système de trois équations à 2 inconnues.  
(C) On écrit le système sous forme matricielle :  
D'abord, on multiplie scalairement (Th.1) par  $\dot{x}\mathbf{E}_x$ , ce qui donne :  $\dot{x}\ddot{x} = mg\dot{x}\sin\alpha + \dot{x}T$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} & -\dot{x} & 0 \\ -J_C/a & -a & 0 \\ m\dot{x} - J_C\dot{\theta}/a & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ T \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\dot{x}\sin\alpha \\ 0 \\ mg\dot{x}\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Étant donné qu'une des colonnes de la matrice des coefficients est remplie de 0, on en conclut que le rang de cette matrice est inférieur à 3. Il y a donc une relation linéaire entre les lignes/colonnes de cette matrice. Les équations ne sont pas indépendantes.

## 25.2 Intégrales Premières

On peut intégrer n'importe laquelle des équations que l'on a obtenue jusqu'à présent. Cependant, s'il faut choisir, autant prendre la troisième vu qu'il n'y a pas de  $T$ .

$$m\dot{x}\ddot{x} + J_C\dot{\theta}\ddot{\theta} = mg\dot{x}\sin\alpha \quad (\text{Th.3})$$

On élimine la variable  $\theta$  avec la relation de roulement sans-glissement qu'on intègre pour obtenir :

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} \left( 1 + \frac{J_C}{ma^2} \right) = mgx\sin\alpha + C$$

On détermine la **constante d'intégration** grâce aux conditions initiales ( $C = 0$ ). Ceci est l'intégrale première de **conservation de l'énergie**.

Si on avait intégré l'équation découlant du Th.1, l'intégrale première de conservation de la **quantité de mouvement**.

Et si on avait intégré l'équation découlant du Th.2, l'intégrale première de conservation du **moment cinétique**.

Dans ce système-ci, il n'y a pas conservation de ces grandeurs dynamiques car le solide prend de la vitesse et de la vitesse de rotation sans perdre de masse. La quantité de mouvement et la quantité de moment cinétique augmentent en fonction du temps au cours de cette phase de mouvement.

**Remarque** : Si on demande la loi de mouvement du solide, on doit dériver l'intégrale première puis la ré-intégrer 2 fois.

## 25.3 Équation du Potentiel

On peut aussi demander de montrer que le mouvement peut être étudié à partir d'une intégrale première du type :

$$f(\theta)\dot{\theta}^2 - 2gh\cos\theta = C$$

où  $f(\theta)$  et  $C$  sont à déterminer et désignent respectivement une fonction strictement positive et une constante.

C'est typiquement une intégrale première du Th.3 (théorème de l'énergie cinétique). En intégrant, on obtient donc : l'intégrale première de **conservation de l'énergie**. Une fois qu'on a intégré, on utilise la relation de roulement sans-glissement pour éliminer la variable  $x$ . Il faut ensuite déterminer la constante d'intégration  $C$  et la fonction  $f(\theta)$  en montrant que :  $f(\theta) > 0$ .

## 25.4 Angle d'Inclinaison

On demande souvent pour quelle angle  $\alpha$  la relation de roulement sans-glissement n'est plus valable.

Le roulement sans glissement est possible tant que  $|T| \leq \mu|N|$ . Il faut utiliser l'équation du Th.1 pour obtenir la valeur de  $N$  et le Th.2 pour obtenir  $T$ . Ce qui nous permet d'écrire l'inégalité suivante :

$$\text{const}_1 \sin \alpha \leq \mu \text{const}_2 \cos \alpha$$

$$\tan \alpha \leq \mu \text{const}_3$$

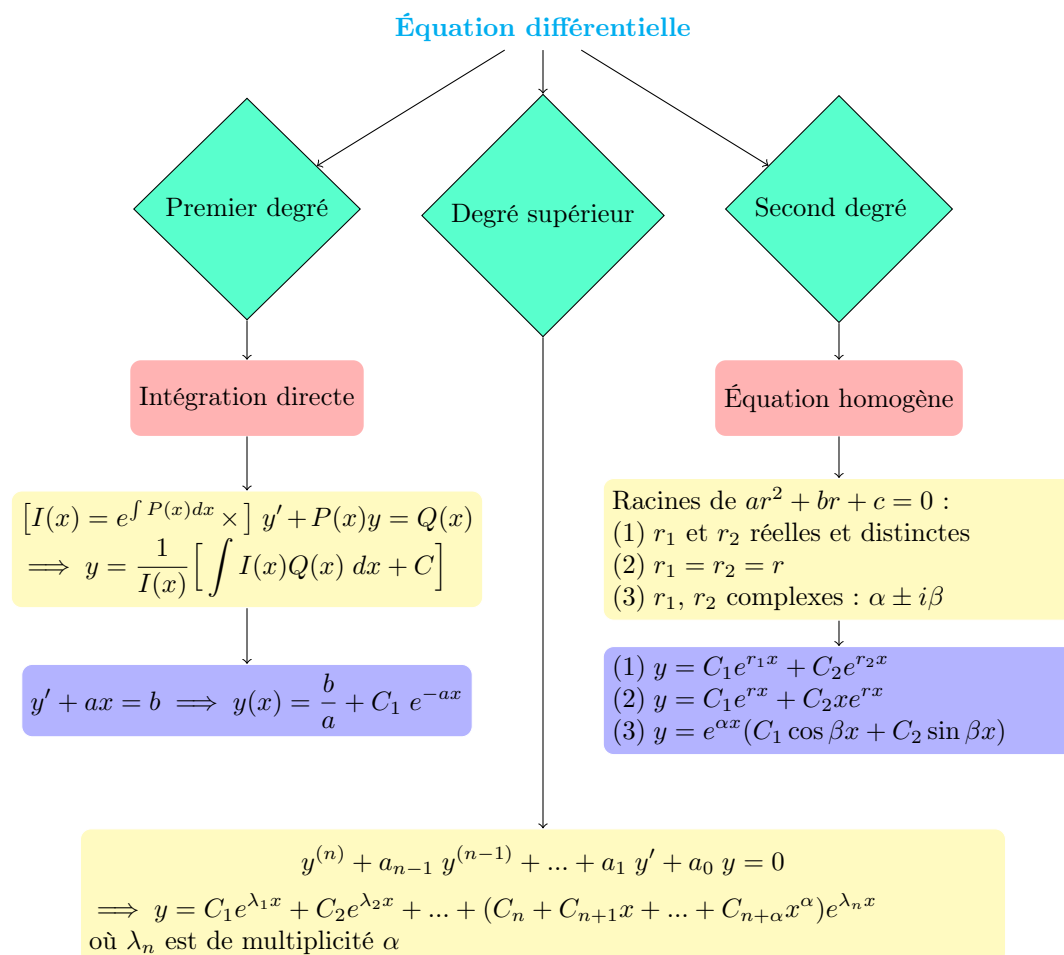
## 26 Erreurs Fréquentes

- Ne pas faire de dessin.
- Ne pas bien orienter le repère lié au solide (pour la rotation). Pour rappel, l'angle  $\theta$  doit être mesuré à partir d'une direction fixe jusqu'au vecteur  $\mathbf{e}_r$ . Le vecteur  $\mathbf{e}_\theta$  se trouve alors  $90^\circ$  plus loin que  $\mathbf{e}_r$  dans la direction des  $\theta$  croissants qui doit être indiquée par une flèche.
- Oublier le point  $P$ .
- Calculer le tenseur par rapport à  $C$  au lieu de la faire par rapport à  $O$  (quand le point  $O$  est fixe).
- Mélanger tenseurs, vecteurs et scalaires et obtenir des expressions qui n'ont aucun sens mathématique.
- Obtenir une expression dimensionnellement fausse et ne pas s'en rendre compte.
- Oublier la force  $N$ .
- Croire que la force  $N$  est conservative.
- Croire que l'absence de frottement implique que la force de liaison en ce point est horizontale (alors que cela indique juste l'absence d'un couple de réaction).
- Ne pas souligner les vecteurs.
- Ne pas savoir dériver la quantité de mouvement ou oublier de le faire.
- Croire que  $\dot{\theta} = \omega_0$  durant tout le mouvement.
- Ne pas savoir calculer le moment cinétique.
- Ne pas savoir dériver le moment cinétique ou oublier de le faire.
- Ne pas savoir calculer le moment d'une force, en particulier inverser les termes dans le produit vectoriel.
- Être incapable de calculer un produit vectoriel.
- Croire que l'énergie cinétique et la puissance sont des vecteurs.
- Ne pas savoir calculer l'énergie cinétique.
- Ne pas savoir dériver l'énergie cinétique ou oublier de le faire.
- Ne pas savoir calculer la puissance d'une force, en particulier, utiliser le vecteur position au lieu de la vitesse ou la même vitesse pour toutes les forces, malgré les points d'application différents.
- Être incapable de calculer correctement un produit scalaire.
- Calculer une puissance nulle pour  $\mathbf{N}$  et obtenir l'intégrale première de conservation de l'énergie.
- Croire qu'au moment de l'impact,  $\ddot{\theta} = 0$ .
- Essayer d'obtenir  $\dot{\theta}$  en intégrant l'expression de  $\ddot{\theta}$  avec  $N$  considérée comme constante.
- Introduire n'importe comment la force de liaison en  $O$  à ce moment parce qu'on ne l'avait pas considérée au départ.
- Obtenir une expression dimensionnellement fausse pour la force et ne pas s'en rendre compte.
- Indiquer un angle  $\theta$  absolu sur son dessin (mesure par rapport à une direction fixe) et le considérer comme relatif dans le calcul des vitesses (et inversement).
- Écrire les théorèmes au point  $O$  qui n'est pas fixe.
- Utiliser le théorème de transport pour obtenir le tenseur d'inertie en  $O'$  à partir de celui en  $O$ .

## Quatrième partie

## Annexe

### 27 Résolution d'Équations Différentielles Linéaires



Si l'équation n'est pas homogène mais que les coefficients sont constants, on utilise la méthode des coefficients indéterminés, c-à-d : lorsque l'équation différentielle est du type  $ay'' + by' + cy = G(x)$  :

$G(x)$	À remplacer dans l'équa. diff.
$G(x) = P(x)$	$Y_P = Q(x)$
$G(x) = e^{kx} P(x)$	$Y_P = e^{kx} Q(x)$
$G(x) = e^{kx} P(x) \cos mx$	$Y_P = e^{kx} Q(x) \cos mx + e^{kx} R(x) \sin mx$

où  $P(x)$  et  $Q(x)$  sont des polynômes du style de  $ax^2 + bx + c$ .

Remarques :

- $A \cos mx + B \sin mx = C \cos(mx + \varphi_1) = C \sin(mx + \varphi_2)$ .
- Si  $Y_P(x)$  est une solution de l'équation homogène, alors on remplace  $Y_P(x)$  par  $xY_P(x)$ .

### 28 Variables Adimensionnelles

Le changement de variable :  $\tau = \frac{t}{t^*}$ , permet d'écrire :

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{t^*} \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{t^*} (^\circ)$$

## 29 Loi de Newton dans un Repère Non-Inertiel

Lorsqu'on est dans un repère non-inertiel, une décomposition de l'accélération peut être effectuée :

$$\frac{d^2 \mathbf{s}}{dt^2} = \underbrace{\frac{d^2 \mathbf{b}}{dt^2} + \dot{\mathbf{w}} \wedge \mathbf{r} + \mathbf{w} \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{r})}_{\mathbf{a}_e} + \underbrace{2 \mathbf{w} \wedge \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}}_{\mathbf{a}_c} + \underbrace{\frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2}}_{\mathbf{a}_r}$$

où  $\mathbf{a}_e$  est l'accélération d'entraînement,  $\mathbf{a}_c$  est l'accélération de Coriolis et  $\mathbf{a}_r$  est l'accélération relative.

La **Loi de Newton** (équation différentielle vectorielle du mouvement) qui devrait s'écrire :

$$\mathbf{F} = m \ddot{\mathbf{s}} \qquad \sum \mathbf{F}_{\text{extérieures}} = m \ddot{\mathbf{s}}$$

S'écrit, dans un repère non-inertiel :

$$\begin{aligned} m \mathbf{a}_r &= m \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2} = \mathbf{G} - m \mathbf{a}_e - m \mathbf{a}_c \\ &= \mathbf{G} - m \left[ \frac{d^2 \mathbf{b}}{dt^2} + \dot{\mathbf{w}} \wedge \mathbf{r} + \mathbf{w} \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{r}) \right] - m \left[ 2 \mathbf{w} \wedge \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} \right] \end{aligned}$$

## 30 Stabilité et Dérivées

— Rappel : Extrema d'une fonction :

Si  $f$  est une fonction réelle  $n+1$  fois continûment dérivable sur  $]a, b[$ , si  $f'(c) = 0$  en un point  $c \in ]a, b[$  et si la première dérivée non-nulle en  $c$  est  $f^{(n)}(c)$ , alors :

- $c$  est un maximum local si  $n$  est pair et  $f^{(n)}(c) < 0$ .
- $c$  est un minimum local si  $n$  est pair et  $f^{(n)}(c) > 0$ .
- $c$  est un point d'inflexion à tangente horizontale si  $n$  est pair.

— Pour rappel, on a 4 types "d'équilibres" : Stable, Instable, Marginalement Stable, Faiblement Instable.

Et par exemple, si on a une équation différentielle linéaire à coefficients constants dont on veut connaître la stabilité :

Racines du polynôme caractéristique : $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$	Stabilité : méthode des perturbations infinitésimales (eq. linéaire)
$a_1 < 0$ et $a_2 < 0$	Équilibre <b>stable</b> $x(t) = C_1 e^{-x t} + C_2 e^{-y t}$
Si $a_1 > 0$ ou $a_2 > 0$	Équilibre <b>instable</b> $x(t) = C'_1 e^{\alpha t} + C'_2 e^{-\alpha t} = C_1 \operatorname{sh} \alpha t + C_2 \operatorname{ch} \alpha t$
$a_1 < 0, a_2 = 0$ ou $a_1 = 0, a_2 < 0$ <u>A</u> avec $k = 0$ ( $k$ = multiplicité)	Équilibre <b>marginalelement stable</b> , $x(t) = C'_1 e^{i \alpha t} + C'_2 e^{-i \alpha t} = C_1 \sin \alpha t + C_2 \cos \alpha t$
$z_1 = z_2 = 0$ ( $k \neq 0$ )	Équilibre <b>faiblement instable</b> $x(t) = At + B$



## 31 Grandeurs Caractéristiques

Voici des grandeurs globales représentatives de l'ensemble du système :

Masse totale : $m = \int dm$	Moment statique : $\mathbf{Q}_O = \int \mathbf{s} dm$
Quantité de mouvement : $\mathbf{N}_O = \int \dot{\mathbf{s}} dm$	Résultante des forces : $\mathbf{G} = \int \mathbf{F} dm$
Moment cinétique : $\mathbf{H}_O = \int \mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}} dm$	Moment dynamique : $\mathbf{M}_O = \int \mathbf{s} \wedge \mathbf{F} dm$
Énergie cinétique : $T_O = \frac{1}{2} \int \dot{\mathbf{s}} \cdot \dot{\mathbf{s}} dm$	Puissance : $\mathcal{P} = \int \dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{F} dm$

Remarque : ici,  $\mathbf{F}$  correspond à l'accélération  $\ddot{\mathbf{s}}$ .

Théorèmes généraux en mécanique du solide :

— Théorème de la quantité de mouvement (Th. I) :

Dans un repère inertiel, la dérivée temporelle de la quantité de mouvement d'un système matériel est égale à la résultante des forces extérieures qui lui sont appliquées :

$$\frac{d\mathbf{N}_O}{dt} = \mathbf{G}$$

Ce qui implique que le centre d'inertie d'un système (de masse  $m$ ) "agit" comme un point matériel de masse  $m$  soumis à la résultante des forces extérieures ( $m \ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{G}$ ).

— Théorème du moment cinétique (Th. II) :

Dans un repère inertiel, la dérivée temporelle du moment cinétique d'un système matériel par rapport à un point fixe O est égale à la résultante des moments par rapport à ce point des forces extérieures appliquées au système :

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{M}_O$$

— Théorème de l'énergie cinétique (Th. III) :

Dans un repère inertiel, la puissance développée par l'ensemble des forces intérieures appliquées à un système matériel est égale à la dérivée temporelle de son énergie cinétique :

$$\dot{T}_O = \mathcal{P}_O$$

## 32 Théorème C et Implications

Théorème C :

Chacune des résultantes, calculée dans le système d'axes de centre O, est égale à la même résultante, calculée dans le système d'axes parallèles de centre C, augmentée de la résultante correspondante du centre d'inertie considéré comme un point matériel affecté de la masse totale du système et soumis à la résultante des forces.

Le théorème C nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \text{— } \mathbf{Q}_O &= m\mathbf{c} + \mathbf{Q}_C & \text{— } T_O &= \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{c}}\|^2 + T_C \\ \text{— } \mathbf{N}_O &= m\dot{\mathbf{c}} + \mathbf{N}_C & \text{— } \mathbf{M}_O &= \mathbf{c} \wedge \mathbf{G} + \mathbf{M}_C \\ \text{— } \mathbf{H}_O &= m\mathbf{c} \wedge \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_C & \text{— } \mathcal{P}_O &= \dot{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{G} + \mathcal{P}_C \end{aligned}$$

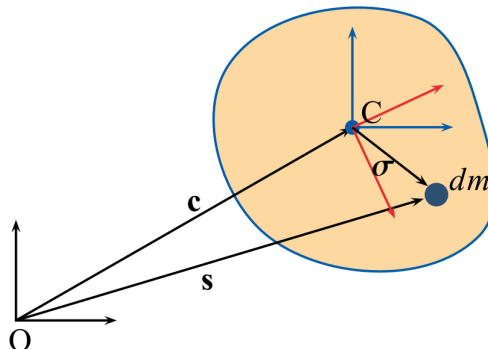
Grandeurs résultantes du solide :

Si l'on définit le tenseur central d'inertie  $\mathbf{J}_C$  d'un solide par rapport au point C (référentiel d'origine C) quelconque du solide par l'expression :  $\mathbf{J}_C = \int (r^2 \mathbf{I} - \mathbf{r} \mathbf{r}) dm$ , alors on a :

$$\begin{aligned}
- \mathbf{H}_C &= \mathbf{J}_C \cdot \mathbf{w} & - \mathbf{M}_C &= \int (\mathbf{r} \wedge \hat{\mathbf{F}}) dm \\
- T_C &= \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{H}_C = \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \mathbf{w} & - \mathcal{P}_C &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{M}_C \\
- \mathbf{Q}_C &= \mathbf{N}_C = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

De manière générale, on prend le centre d'inertie comme point C pour simplifier les calculs. Et pour rappel,  $\mathbf{w}$  est le vecteur de Poisson.

Preuve que  $\mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C \cdot \mathbf{w}$  : D'abord, remarquons que  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \cancel{\frac{\delta \boldsymbol{\sigma}}{\delta t}} + \mathbf{w} \wedge \boldsymbol{\sigma}$ .

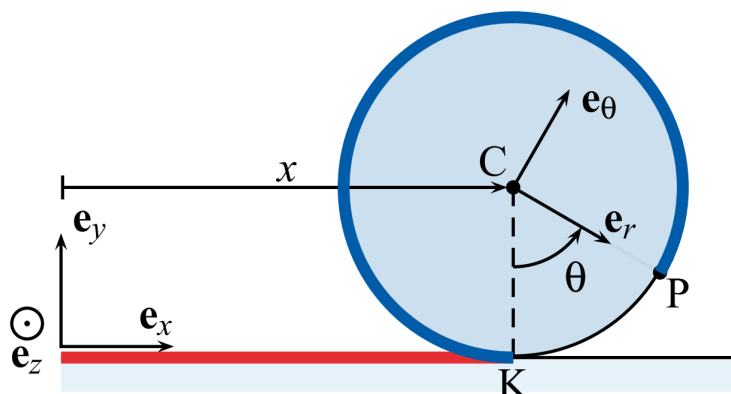


$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_C &= \int \boldsymbol{\sigma} \wedge \dot{\boldsymbol{\sigma}} dm \\
&= \int \boldsymbol{\sigma} \wedge (\mathbf{w} \wedge \boldsymbol{\sigma}) dm & \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \\
&= \int \mathbf{w} \|\boldsymbol{\sigma}\|^2 - \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{w}) dm \\
&= \int (\|\boldsymbol{\sigma}\|^2 \mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{w} dm = \mathbf{w} \cdot \int (\|\boldsymbol{\sigma}\|^2 \mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}) dm \\
&= \mathbf{J}_C \cdot \mathbf{w} & \text{où } \mathbf{J}_C &= \int (\|\boldsymbol{\sigma}\|^2 \mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}) dm
\end{aligned}$$

### 33 Rappel

- La dérivée de :  $\mathbf{e}_r$ , est donnée par :  $\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$ .
- La dérivée de :  $\mathbf{e}_\theta$ , est donnée par :  $\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r$ .

### 34 Roulement Sans-Glisement



On veut exprimer la vitesse de  $\dot{\mathbf{s}}_K (= \mathbf{0})$  en **passant par son centre d'inertie**.

1. On essaie de trouver la position d'un point quelconque de la périphérie en passant par son centre d'inertie. **Attention**, on utilise un repère absolu pour donner la coordonnée du centre d'inertie  $C$ .
2. On veut décrire l'orientation du solide dans l'espace. Pour cela, il suffit de donner un angle  $\theta$  qui décrive la rotation de la roue autour de son centre, autour de l'axe.
3. L'angle  $\theta$  (qui décrit la rotation du solide) est toujours un angle qui est pris par rapport à une **direction fixe** et qui pointe vers une direction variable liée au solide.
4. Une fois qu'on a la position du point ainsi décrite, on peut la dériver pour avoir la vitesse qu'on égale à  $\mathbf{0}$  pour avoir notre *bonne vieille* condition de roulement sans-glissement.

Dans le cas de la roue (rayon =  $a$ ) ci-dessus, on a 2 méthodes :

(A) Première Méthode :

$$\mathbf{s}_K = \underbrace{x \mathbf{E}_x + R \mathbf{E}_y + a \mathbf{e}_r}_{\mathbf{c}} \implies \dot{\mathbf{s}}_K = \dot{x} \mathbf{E}_x + a \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$$

$$\boxed{\dot{x} + a \dot{\theta} = 0}$$

(B) Seconde Méthode :

$$\dot{\mathbf{s}}_K = \dot{x} \mathbf{E}_x + \underbrace{\dot{\theta} \mathbf{E}_z}_{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{CK} = \dot{x} \mathbf{E}_x + \dot{\theta} \mathbf{E}_z \wedge (-a \mathbf{E}_y) = \dot{x} \mathbf{E}_x + a \dot{\theta} \mathbf{E}_x$$

$$\boxed{\dot{x} + a \dot{\theta} = 0}$$

## 35 Calcul Moments d'Inertie Fréquents

- (a) **Système rectiligne** : Il suffit de calculer un seul moment d'inertie par rapport à une droite perpendiculaire à la droite du solide.
- (b) **Système plan** : (plan  $Oxy$ ,  $z = 0$ )

$$J_x = \int y^2 dm \quad ; \quad J_y = \int x^2 dm \quad ; \quad J_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

Et donc :  $J_x + J_y = J_z$

Théorèmes particuliers en rapport avec le tenseur d'inertie :

(c) **Théorème C** :

$$\mathbf{J}_O = \mathbf{J}_C + m \left[ c \mathbf{I} - \mathbf{c} \mathbf{c} \right]$$

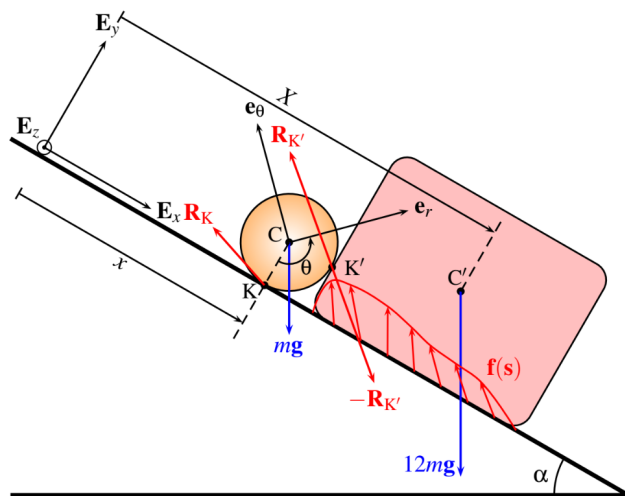
- (d) Le **théorème de transport** est un théorème qui donne le moment d'inertie autour d'une droite  $d_1$  passant par  $O$  parallèle à  $d_2$  passant par  $C$  :  $J_O^{d_1} = J_C^{d_2} + ml^2$ .
- (e) Ce qu'on veut souvent calculer, c'est le  $J_C$  d'un **mouvement plan**. Il vaut :

$$J_C = \int (x^2 + y^2) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm$$

(f) **Moments d'inertie de base** :

- Tige rectiligne :  $J_C = \frac{1}{12} ml^2$
- Anneau (cercle) :  $J_C = mr^2$
- Disque plein :  $J_C = \frac{1}{2} mr^2$
- Rectangle plein :  $J_C = \frac{1}{12} m(l^2 + h^2)$

## 36 Forces Surfiques



Ici, la force  $\mathbf{f}(s)$  agissant sur le casier est une force surfacique. si on a ça à un examen, il faut noter :  
 $\mathbf{f}(s)$  : distribution surfacique de forces de liaison agissant sur la surface  $\Sigma$  du casier en contact avec le plan, de direction inconnue dans le plan du mouvement. Notons  $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{T} = N\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x$  la résultante de cette distribution.

## 37 Examens

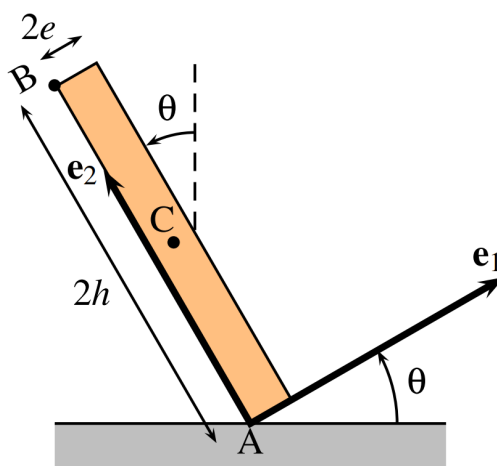
La théorie couvre tous les examens (jusque janvier 2019).

Examens avec Q. sur les **forces centrales**, examens avec Q. sur les **solides qui roulent** :

- Janvier 2011 : 1 question - **solide qui roule**
- Août 2011 : Q1 - similaire à la méthode des **forces centrales**, Q2 - **moment d'inertie** + **pendule**
- Janvier 2012 : Q1 - **force centrale**, Q2 - **pendule**
- Août 2012 : Q1 - **solide qui roule**, Q2 - **moment d'inertie** + **pendule**
- Janvier 2013 : Q1 - **force centrale**, Q2 - **moment d'inertie** + **pendule**
- Août 2013 : Q1 - **courbe de guidage fixe**, Q2 - **pendule**
- Janvier 2014 : Q1 - **courbe de guidage mobile** + **pendule** - système similaire à septembre 2017, Q2 - théorie
- Août 2014 : Q1 - théorie, Q2 - **force centrale**, Q3 - **solide qui roule**
- Janvier 2015 : Q1 - théorie, Q2 - **courbe de guidage mobile**, Q3 - **solide qui roule**
- Août 2015 : Q1 - théorie, Q2 - **courbe de guidage mobile**, Q3 - **solide qui roule** (Relire quand même)
- Janvier 2016 : Q1 - théorie, Q2 - **force centrale**, Q3 - **moment d'inertie** + **point fixe**
- Août 2016 : Q1 - théorie, Q2 - **masse variable**, Q3 - **solide qui roule**
- Janvier 2017 : Q1 - théorie, Q2 - **force centrale**, Q3 - **solide qui roule**
- Août 2017 : Q1 - théorie, Q2 - **courbe de guidage mobile**, Q3 - **solide qui roule** + **courbe de guidage fixe** (Relire exercice dirigé 2017)
- Janvier 2018 : Q1 - théorie, Q2 - similaire à la méthode des **forces centrales**, Q3 - **solide qui roule** + **moment d'inertie**
- Août 2018 : Q1 - théorie, Q2 - **forces centrales**, Q3 - **solide qui roule**

Il faudrait refaire un truc sur les pendules.

## 38 Exemple : calcul du moment d'inertie



Montrez, en repartant de la définition des moments d'inertie, que le moment d'inertie du domino pour la rotation autour de A dans le plan du mouvement est donné par

$$J_A = \frac{4}{3}m(e^2 + h^2)$$

**Méthode n°1 :** Par définition, le moment d'inertie recherché est donné par

$$J_A = \int_0^{2h} dy \int_0^{2e} \rho l (x^2 + y^2) dx = \rho l \int_0^{2h} \left[ \frac{x^3}{3} + y^2 x \right] dy = \frac{16}{3} \rho l e h (e^2 + h^2)$$

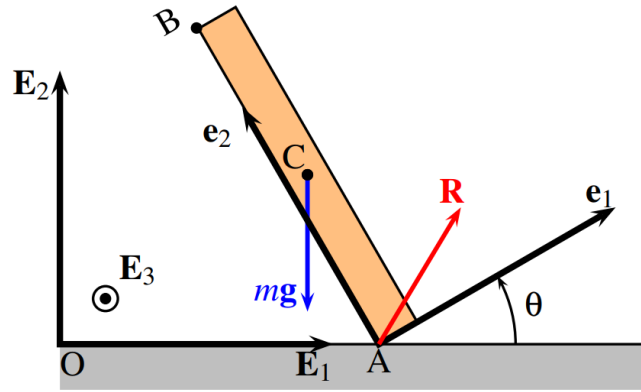
où  $l$  est l'épaisseur du solide et  $\rho$  la masse par unité de volume. Puisque  $m = 4\rho l e h$ , il vient :

$$J_A = \frac{4}{3} m (e^2 + h^2)$$

**Méthode n°2 :** Le moment d'inertie de base d'un rectangle plein est donné par  $J_C = m(l^2 + h^2)/12$ , dans notre cas, la largeur et la longueur valent  $2e$  et  $2h$ . D'où,  $J_C = 1/3 \times m(e^2 + h^2)$ . Le théorème de transport nous permet finalement d'arriver à :

$$J_C = \frac{1}{3} m (e^2 + h^2) + m(e^2 + h^2) = \frac{4}{3} m (e^2 + h^2)$$

### 39 Mouvement du Solide autour d'un Point Fixe



Exprimez la vitesse et l'accélération absolues du centre d'inertie C dans les axes  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  liés au solide.

On a :

$$\mathbf{c} = e \mathbf{e}_1 + h \mathbf{e}_2$$

$$\dot{\mathbf{c}} = e\dot{\theta}\mathbf{E}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + h\dot{\theta}\mathbf{E}_3 \wedge \mathbf{e}_2 = e\dot{\theta}\mathbf{e}_2 - h\dot{\theta}\mathbf{e}_1$$

$$\ddot{\mathbf{c}} = (-h\ddot{\theta} - e\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_1 + (e\ddot{\theta} - h\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_2$$

en tenant compte du fait que le vecteur de Poisson du domino et des axes  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  qui y sont attachés est :  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{E}_3$ .

Le **moment cinétique** en A est donné par :  $\mathbf{H}_A = J_A \dot{\theta} \mathbf{E}_3$ .

Le **théorème du moment cinétique** rapporté à des axes absolus centrés en A s'écrit donc :  $\dot{\mathbf{H}}_A = \mathbf{c} \wedge m\mathbf{g} + \mathbf{0} \wedge \mathbf{R} \implies J_A \ddot{\theta} = -mge \cos \theta + mgh \sin \theta$ .

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Question I - Théorie</b>	<b>1</b>
1	Angles d'Euler	1
2	Force Conservative	1
2.1	Définition . . . . .	1
2.2	Puissance . . . . .	1
3	Grandeurs Résultantes du Solide	2
3.1	Moment Cinétique . . . . .	2
3.2	Énergie cinétique . . . . .	2
3.3	Remarque . . . . .	2
4	Équations d'Euler	2
5	Système à Masse Variable	3
6	Bifurcation	3
7	Orbite Géostationnaire	4
8	Orbite de Transfert de Hohmann	4
9	Centre de Percussion	5
10	Précession	5
10.1	Euler-Poinsot & Précession Uniforme . . . . .	5
10.2	Précession/Effet Gyroscopique . . . . .	6
10.3	Précession Uniforme d'un Gyroscope . . . . .	6
10.4	Supplément . . . . .	7
11	Toupie	8
11.1	Tenseur d'Inertie . . . . .	8
11.2	Moment Cinétique . . . . .	8
11.3	Intégrales Premières . . . . .	8
11.4	Énergie Cinétique . . . . .	9
12	Types de Mouvement d'une Toupie	9
12.1	Précession Uniforme . . . . .	11
12.2	Toupie Forte . . . . .	11
13	Équilibrage Statique et Dynamique d'un Système Tournant	11
14	Forces de Cohésion/Internes	11
15	Résultats du Théorème C pour un Système de Points	12
16	Axes et Moments Principaux d'Inertie d'un Solide	12
<b>II</b>	<b>Question II - Point Matériel</b>	<b>13</b>
17	Méthode Générale - Point Matériel	13
18	Méthode Spécifique - Force Centrale <i>Sans</i> Courbe de Guidage.	14

19 Méthode Spécifique - Force Centrale <i>Avec</i> Courbe de Guidage.	15
20 Méthode Générale - Étude Stabilité	15
21 Erreurs Fréquentes	16
<b>III Question III - Solide</b>	<b>18</b>
22 Méthode Générale - Solide	18
23 Méthode Spécifique - Centre d’Inertie	19
24 Méthode Spécifique - Centre Géométrique	20
25 Méthode Générale - Suite	20
25.1 Indépendance des Équations . . . . .	20
25.2 Intégrales Premières . . . . .	21
25.3 Équation du Potentiel . . . . .	21
25.4 Angle d’Inclinaison . . . . .	22
26 Erreurs Fréquentes	22
<b>IV Annexe</b>	<b>23</b>
27 Résolution d’Équations Différentielles Linéaires	23
28 Variables Adimensionnelles	23
29 Loi de Newton dans un Repère Non-Inertiel	24
30 Stabilité et Dérivées	24
31 Grandeurs Caractéristiques	25
32 Théorème C et Implications	25
33 Rappel	26
34 Roulement Sans-Glisement	26
35 Calcul Moments d’Inertie Fréquents	27
36 Forces Surfaciques	28
37 Examens	29
38 Exemple : calcul du moment d’inertie	29
39 Mouvement du Solide autour d’un Point Fixe	30