

# Électricité et magnétisme

Synthèse du cours “Physics II: Electricity and Magnetism” du MIT

Grégoire Roumache

Juillet 2017

## 1 Loi de Coulomb

### 1.1 Théorie

- La force électrique exercée par une charge  $q_1$  sur une seconde charge  $q_2$  est donnée par la **loi de Coulomb**:

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

où  $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2 \approx 9 \times 10^9$  est la constante de Coulomb.

- Le **champ électrique** en un point de l'espace est défini comme la force électrique agissant sur une charge test  $q_t$  divisée par  $q_t$ :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_e}{q_t}$$

- Le champ électrique à une distance  $r$  de la charge  $q$  vaut:

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

- Avec le **principe de superposition**, on détermine que le champ électrique dû à plusieurs charges, chacune ayant une charge  $q_i$  et se trouvant à une distance  $r_i$  est:

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i$$

- Une particule de charge  $q$  et de masse  $m$  se déplaçant dans un champ électrique  $\vec{\mathbf{E}}$  a une accélération:

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{q\vec{\mathbf{E}}}{m}$$

- Un **dipôle électrique** consiste en deux charges opposées (par exemple  $+q$  et  $-q$ ) séparées par une distance  $2a$ . Le moment dipolaire électrique (utile notamment en chimie:  $\text{H}_2\text{O}$  est une molécule dipolaire) est représenté par un vecteur  $\vec{\mathbf{p}}$  qui pointe de la charge négative vers la charge positive et possède une magnitude de:

$$p = 2aq$$

- Le **moment de force** agissant sur un dipôle électrique dans un champ électrique extérieur uniforme est:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{p}} \wedge \vec{\mathbf{E}}$$

- L'énergie potentielle d'un dipôle électrique dans un champ électrique extérieur uniforme est:

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

- Le champ électrique en un point de l'espace dû à une distribution continue de charge d'éléments de charge  $dq$  est:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

- Lorsque l'on s'étend loin assez d'une distribution de charge continue finie (pas de fil ou plan infini donc), l'expression analytique du champ électrique va ressembler à celui d'une charge ponctuelle.

## 1.2 Pratique

Comme expliqué dans la sous-section "Théorie", dans le cas d'une distribution continue de charge, on doit calculer l'intégrale vectorielle:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

Pour réaliser l'intégration, on peut suivre la procédure suivante:

1. Commencer avec:  $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$
2. Réécrire l'élément  $dq$  en:

$$dq = \begin{cases} \lambda dL & (\text{longueur}) \\ \sigma dA & (\text{aire}) \\ \rho dV & (\text{volume}) \end{cases}$$

selon la forme de distribution qui est soit en longueur, soit en surface, soit en volume.

3. Remplacer  $dq$  dans l'expression de  $d\vec{E}$ .
4. Spécifier le système de coordonnées approprié (cartésien, cylindrique ou sphérique) et exprimer l'élément différentiel ( $dL$ ,  $dA$ ,  $dV$ ) ainsi que  $r$  en terme de coordonnées.

	Cartesian ( $x, y, z$ )	Cylindrical ( $\rho, \phi, z$ )	Spherical ( $r, \theta, \phi$ )
$dl$	$dx, dy, dz$	$d\rho, \rho d\phi, dz$	$dr, r d\theta, r \sin \theta d\phi$
$dA$	$dx dy, dy dz, dz dx$	$d\rho dz, \rho d\phi dz, \rho d\phi d\rho$	$r dr d\theta, r \sin \theta dr d\phi, r^2 \sin \theta d\theta d\phi$
$dV$	$dx dy dz$	$\rho d\rho d\phi dz$	$r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

5. Réécrire  $d\vec{E}$  en fonction des variables d'intégration et utiliser la symétrie pour identifier les composantes non-nulles du champ électrique.
6. Compléter l'intégration pour obtenir  $\vec{E}$ .

	Line charge	Ring of charge	Uniformly charged disk
Figure			
(2) Express $dq$ in terms of charge density	$dq = \lambda dx'$	$dq = \lambda d\ell$	$dq = \sigma dA$
(3) Write down $dE$	$dE = k_e \frac{\lambda dx'}{r'^2}$	$dE = k_e \frac{\lambda d\ell}{r^2}$	$dE = k_e \frac{\sigma dA}{r^2}$
(4) Rewrite $r$ and the differential element in terms of the appropriate coordinates	$dx'$ $\cos \theta = \frac{y}{r'}$ $r' = \sqrt{x'^2 + y^2}$	$d\ell = R d\phi'$ $\cos \theta = \frac{z}{r}$ $r = \sqrt{R^2 + z^2}$	$dA = 2\pi r' dr'$ $\cos \theta = \frac{z}{r}$ $r = \sqrt{r'^2 + z^2}$
(5) Apply symmetry argument to identify non-vanishing component(s) of $dE$	$dE_y = dE \cos \theta$ $= k_e \frac{\lambda y dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}}$	$dE_z = dE \cos \theta$ $= k_e \frac{\lambda R z d\phi'}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$	$dE_z = dE \cos \theta$ $= k_e \frac{2\pi \sigma z r' dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}}$
(6) Integrate to get $E$	$E_y = k_e \lambda y \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ $= \frac{2k_e \lambda}{y} \frac{\ell/2}{\sqrt{(\ell/2)^2 + y^2}}$	$E_z = k_e \frac{R \lambda z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \oint d\phi'$ $= k_e \frac{(2\pi R \lambda) z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$ $= k_e \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$	$E_z = 2\pi \sigma k_e z \int_0^R \frac{r' dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}}$ $= 2\pi \sigma k_e \left( \frac{z}{ z } - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$

## 2 Potentiel électrique

### 2.1 Théorie

- Une force  $\vec{F}$  est **conservative** si l'intégrale curviligne sur une boucle fermée s'annule:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

- Le changement en énergie potentielle associé à une force conservative  $\vec{F}$  agissant sur un objet qui se déplace de  $A$  à  $B$  est:

$$\Delta U = U_B - U_A = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

- La **différence de potentiel électrique**  $\Delta V$  entre les points  $A$  et  $B$  dans un champ électrique  $\vec{E}$  est donnée par:

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q_t} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Cette grandeur représente la quantité de travail nécessaire pour déplacer une unité de charge du point  $A$  au point  $B$ , sans changer son énergie cinétique.

- Le potentiel électrique d'une charge ponctuelle  $Q$  à une distance  $r$  vaut:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Lorsqu'il y a plusieurs charges, on utilise le principe de superposition pour trouver le potentiel électrique:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i}$$

- L'**énergie potentielle** associée à deux charges ponctuelles  $q_1$  et  $q_2$  séparées par une distance  $r_{12}$  est:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

- On peut, à partir du potentiel électrique  $V$ , obtenir la valeur du champ électrique:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

En coordonnées cartésiennes, les composantes peuvent être écrites de la manière suivante:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

- Le potentiel électrique dû à une distribution de charge continue est:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

## 2.2 Pratique

Comme expliqué dans la sous-section "Théorie", dans le cas d'une distribution continue de charge, on doit calculer l'intégrale vectorielle:

$$V = k_e \int \frac{dq}{r}$$

Pour réaliser l'intégration, on peut suivre la procédure suivante:

1. Commencer avec:  $dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$
2. Réécrire l'élément  $dq$  en:

$$dq = \begin{cases} \lambda dL & (\text{longueur}) \\ \sigma dA & (\text{aire}) \\ \rho dV & (\text{volume}) \end{cases}$$

selon la forme de distribution qui est soit en longueur, soit en surface, soit en volume.

3. Remplacer  $dq$  dans l'expression de  $dV$ .
4. Spécifier le système de coordonnées approprié (cartésien, cylindrique ou sphérique) et exprimer l'élément différentiel ( $dL$ ,  $dA$ ,  $dV$ ) ainsi que  $r$  en terme de coordonnées.
5. Réécrire  $dV$  en fonction des variables d'intégration et utiliser la symétrie pour identifier les composantes non-nulles du champ électrique.

6. Compléter l'intégration pour obtenir  $V$ .

On peut utiliser le résultat obtenu en calculant  $V$  pour trouver le champ électrique avec la formule:  
 $\vec{E} = -\nabla V$ .

	<b>Charged Rod</b>	<b>Charged Ring</b>	<b>Charged disk</b>
Figure			
(2) Express $dq$ in terms of charge density	$dq = \lambda dx'$	$dq = \lambda dl$	$dq = \sigma dA$
(3) Substitute $dq$ into expression for $dV$	$dV = k_e \frac{\lambda dx'}{r}$	$dV = k_e \frac{\lambda dl}{r}$	$dV = k_e \frac{\sigma dA}{r}$
(4) Rewrite $r$ and the differential element in terms of the appropriate coordinates	$dx'$ $r = \sqrt{x'^2 + y^2}$	$dl = R d\phi'$ $r = \sqrt{R^2 + z^2}$	$dA = 2\pi r' dr'$ $r = \sqrt{r'^2 + z^2}$
(5) Rewrite $dV$	$dV = k_e \frac{\lambda dx'}{(x'^2 + y^2)^{1/2}}$	$dV = k_e \frac{\lambda R d\phi'}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$	$dV = k_e \frac{2\pi\sigma r' dr'}{(r'^2 + z^2)^{1/2}}$
(6) Integrate to get $V$	$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 + y^2}}$ $= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{(\ell/2) + \sqrt{(\ell/2)^2 + y^2}}{-(\ell/2) + \sqrt{(\ell/2)^2 + y^2}} \right]$	$V = k_e \frac{R\lambda}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \oint d\phi'$ $= k_e \frac{(2\pi R\lambda)}{\sqrt{R^2 + z^2}}$ $= k_e \frac{Q}{\sqrt{R^2 + z^2}}$	$V = k_e 2\pi\sigma \int_0^R \frac{r' dr'}{(r'^2 + z^2)^{1/2}}$ $= 2k_e \pi\sigma \left( \sqrt{z^2 + R^2} -  z  \right)$ $= \frac{2k_e Q}{R^2} \left( \sqrt{z^2 + R^2} -  z  \right)$
Derive $E$ from $V$	$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ $= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \frac{\ell/2}{\sqrt{(\ell/2)^2 + y^2}}$	$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{k_e Q z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$	$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{2k_e Q}{R^2} \left( \frac{z}{ z } - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$
Point-charge limit for $E$	$E_y \approx \frac{k_e Q}{y^2} \quad y \gg \ell$	$E_z \approx \frac{k_e Q}{z^2} \quad z \gg R$	$E_z \approx \frac{k_e Q}{z^2} \quad z \gg R$

## 3 Loi de Gauss

### 3.1 Théorie

- Le **flux électrique** qui passe au travers d'une surface caractérisée par le vecteur "zone"  $\vec{A} = A\hat{n}$  est:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \theta$$

où  $\theta$  est l'angle entre le champ électrique  $\vec{E}$  et le vecteur unitaire  $\hat{n}$ .

- En général, le flux électrique passant au travers d'une surface est:

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

- La **Loi de Gauss** affirme que le flux électrique passant au travers de n'importe quelle surface de Gauss est proportionnel à la charge totale enfermée par cette surface:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

La loi de Gauss peut être utilisée pour calculer le champ électrique d'un système qui possède une symétrie planaire, cylindrique ou sphérique.

- Les propriétés de base d'un **conducteur** sont:
  1. Le champ électrique au sein d'un conducteur est nul.
  2. Toute charge nette doit se trouver à la surface du conducteur.
  3. La surface d'un conducteur est une surface équipotentielle, et la composante tangentielle du champ électrique est nul à la surface.
  4. Juste à l'extérieur du conducteur, le champ électrique est normal à la surface.
- La **pression électrostatique** sur une surface conductrice est:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

### 3.2 Pratique

Comme expliqué dans la sous-section "Théorie", on a montré que l'on peut calculer le champ électrique grâce à la loi de Gauss:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

System	Infinite line of charge	Infinite plane of charge	Uniformly charged solid sphere
Figure			
Identify the symmetry	Cylindrical	Planar	Spherical
Determine the direction of $\vec{E}$			
Divide the space into different regions	$r > 0$	$z > 0$ and $z < 0$	$r \leq a$ and $r \geq a$
Choose Gaussian surface	 Coaxial cylinder	 Gaussian pillbox	 Concentric sphere
Calculate electric flux	$\Phi_E = E(2\pi r l)$	$\Phi_E = EA + EA = 2EA$	$\Phi_E = E(4\pi r^2)$
Calculate enclosed charge $q_{in}$	$q_{enc} = \lambda l$	$q_{enc} = \sigma A$	$q_{enc} = \begin{cases} Q(r/a)^3 & r \leq a \\ Q & r \geq a \end{cases}$
Apply Gauss's law $\Phi_E = q_{in} / \epsilon_0$ to find $E$	$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$	$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$	$E = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3}, & r \leq a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r \geq a \end{cases}$

## 4 Capacités et diélectriques

### 4.1 Théorie

- Un **condensateur** est un dispositif qui stocke des charges électriques et de l'énergie potentielle. La **capacité**  $C$  d'un condensateur est le ratio entre la charge stockée sur les plaques du condensateur et la différence de potentiel entre elles:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|}$$

System	Capacitance
Isolated charged sphere of radius $R$	$C = 4\pi\epsilon_0 R$
Parallel-plate capacitor of plate area $A$ and plate separation $d$	$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$
Cylindrical capacitor of length $L$ , inner radius $a$ and outer radius $b$	$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}$
Spherical capacitor with inner radius $a$ and outer radius $b$	$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{(b-a)}$

- La capacité équivalente de condensateurs connectés en séries et en parallèles est:

$$C_T = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \quad (\text{parallèle})$$

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad (\text{série})$$

- Le travail réalisé pour charger un condensateur à une charge  $Q$  est:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}Q|\Delta V| = \frac{1}{2}C|\Delta V|^2$$

C'est égal à la quantité d'énergie stockée dans le condensateur.

- On peut aussi penser que l'énergie électrique est stockée dans le champ électrique  $\vec{E}$ . La **densité énergétique** (énergie par unité de volume) est:

$$u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

La densité énergétique  $u_E$  est égale à la **pression électrostatique** sur une surface.

- Lorsqu'un matériau diélectrique avec une **constante diélectrique**  $K_E$  est inséré dans un condensateur, la capacité est augmentée d'un facteur  $K_E$ :

$$C = K_E C_0$$

- Le vecteur de **polarisation**  $\vec{P}$  est le moment dipolaire par unité de volume ( $\Delta$  moment dipolaire  $\neq$  moment de force):

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

Le champ électrique induit par la polarisation est:

$$\vec{E}_P = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$



- En présence d'un diélectrique avec une constante diélectrique  $K_E$ , le champ électrique devient:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p = \frac{\vec{E}_0}{K_E}$$

où  $\vec{E}_0$  est la valeur du champ électrique sans diélectrique.

## 4.2 Pratique

Voici la procédure pour calculer la capacité  $C$  de plusieurs systèmes:

1. Identifier la direction du champ électrique en utilisant la symétrie du système.
2. Calculer le champ électrique partout.
3. Calculer la différence de potentiel électrique  $|\Delta V|$ .
4. Calculer la capacité  $C$  en utilisant  $C = \frac{Q}{|\Delta V|}$

Capacitors	Parallel-plate	Cylindrical	Spherical
Figure			
(1) Identify the direction of the electric field using symmetry			
(2) Calculate electric field everywhere	$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = \frac{Q}{\epsilon_0}$ $E = \frac{Q}{A\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$	$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(2\pi r l) = \frac{Q}{\epsilon_0}$ $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$	$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E_r (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$ $E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$
(3) Compute the electric potential difference $\Delta V$	$\Delta V = V_- - V_+ = -\int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s}$ $= -Ed$	$\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b E_r dr$ $= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$	$\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b E_r dr$ $= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b-a}{ab}\right)$

(4) Calculate $C$ using $C = Q /  \Delta V $	$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$	$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(b/a)}$	$C = 4\pi\epsilon_0 \left( \frac{ab}{b-a} \right)$
----------------------------------------------	------------------------------	-----------------------------------------	----------------------------------------------------

## 5 Courant et résistance

### 5.1 Théorie

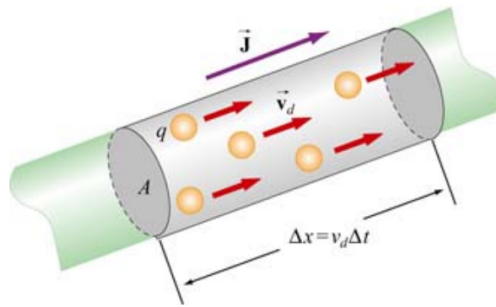
- Le **courant électrique** est défini par:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

- Le courant moyen dans un conducteur est:

$$I_{moy} = nqv_d A$$

où  $n$  est la densité de porteurs de charge,  $q$  est la charge que chaque porteur possède,  $v_d$  est la vitesse de dérive (aussi appelée "vitesse de drift" est la vitesse moyenne d'un porteur de charge, ici un électron, atteinte sous l'effet d'un champ électrique  $\vec{E}$ ) et  $A$  est la surface en coupe transversale.<sup>1</sup>



- La **loi d'Ohm** pour le microscopique: la densité de courant est proportionnelle au champ électrique, et la constante de proportionnalité  $\sigma$  est appelée conductivité:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

- La réciproque de la conductivité  $\sigma$  est appelée **résistivité**  $\rho$ :

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

- La **loi d'Ohm** pour le macroscopique: La **résistance**  $R$  d'un conducteur est le ratio entre la différence de potentiel  $\Delta V$  (différence de potentiel entre les deux bouts du conducteur) et le courant  $I$ :

$$R = \frac{\Delta V}{I}$$

- La résistance est reliée à la résistivité par:

$$R = \frac{\rho l}{A}$$

où  $l$  est la longueur et  $A$  est la surface en coupe transversale du conducteur.

<sup>1</sup>La charge totale d'une section vaut:  $\Delta Q = q(nA\Delta x)$ . Sur un intervalle de temps  $\Delta t$ , on a:  $\Delta x = v_d \Delta t$ . Ce qui implique que  $I_{moy} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqv_d A$ .

- La **vitesse de dérive** d'un électron dans un conducteur est:

$$v_d = -\frac{e\vec{E}}{m_e}\tau$$

où  $e$  est la charge de l'électron,  $m_e$  sa masse et  $\tau$  est le temps moyen entre deux collisions successives.

- La résistivité d'un métal est reliée à  $\tau$  par:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m_e}{ne^2\tau}$$

- La variation de température de la résistance d'un conducteur est:

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

où  $\alpha$  est le **coefficient de température de la résistance**.

- La **puissance** ou le débit auquel l'énergie est délivrée à la résistance est:

$$P = I\Delta V = I^2 R = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

## 6 Courant continu

### 6.1 Théorie

- La résistance équivalente à plusieurs résistances placées en série est:

$$R_T = R_1 + R_2 + R_3 + \dots = \sum_{i=1}^N R_i$$

- La résistance équivalente à plusieurs résistances placées en parallèle est:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

- **Lois de Kirchhoff:**

1. La somme des courants entrants une jonction est égale à la somme des courants sortants de la jonction:

$$\sum I_{in} = \sum I_{out}$$

2. La somme algébrique des changements de potentiel électrique dans une boucle en circuit fermé est zéro.

$$\sum_{\text{boucle fermée}} \Delta V = 0$$

- Dans un condensateur en chargement, la charge et le courant en fonction du temps sont:

$$q(t) = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), \quad I(t) = \left(\frac{\epsilon}{R}\right)e^{-\frac{t}{RC}}$$

- Dans un condensateur en déchargement, la charge et le courant en fonction du temps sont:

$$q(t) = Qe^{-\frac{t}{RC}}, \quad I(t) = \left(\frac{Q}{RC}\right)e^{-\frac{t}{RC}}$$

## 6.2 Pratique

### Appliquer les lois de Kirchhoff

La procédure pour analyser (résoudre) des circuits possédant plusieurs boucles est la suivante:

1. Tracer le diagramme du circuit, attribuer un symbole à toutes les variables connues et inconnues. Le nombre d'inconnues correspond au nombre d'équations linéairement indépendantes que l'on doit trouver.
2. Donner une direction au courant dans chaque branche du circuit (Si la vraie direction est opposée à celle que vous avez choisie, la valeur du courant sera négative).
3. Appliquer la loi des noeuds à toutes les jonctions sauf une (appliquer cette loi au dernier noeud ne donnera pas de relation supplémentaire indépendante entre les courants).
4. Appliquer la loi des boucles jusqu'à ce que le nombre d'équations indépendantes obtenues soit le même que le nombre d'inconnues.  
Par *exemple*, si on a trois inconnues, il faut avoir trois équations linéairement indépendantes pour avoir une solution unique.

resistor	<p>travel direction higher V a lower V b <math>\Delta V = V_b - V_a = -IR</math></p>	<p>travel direction lower V a higher V b <math>\Delta V = V_b - V_a = +IR</math></p>
emf source	<p>travel direction lower V a higher V b <math>\Delta V = V_b - V_a = +\epsilon</math></p>	<p>travel direction higher V a lower V b <math>\Delta V = V_b - V_a = -\epsilon</math></p>
capacitor	<p>travel direction lower V a higher V b <math>\Delta V = V_b - V_a = +q/C</math></p>	<p>travel direction higher V a lower V b <math>\Delta V = V_b - V_a = -q/C</math></p>

Notez que la même équation est obtenue que vous parcourez la boucle dans le sens horloger ou anti-horloger.

5. Résoudre simultanément toutes les équations pour obtenir les solutions de toutes les inconnues.

## 7 Introduction aux champs magnétiques

### 7.1 Théorie

- La **force magnétique** agissant sur une charge  $q$  se déplaçant à une vitesse  $\vec{v}$  dans un champ magnétique  $\vec{B}$  est donnée par:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

- La force magnétique agissant sur un conducteur de longueur  $\vec{l}$  traversé par un courant  $I$  dans un champ magnétique  $\vec{B}$  est:

$$\vec{F}_B = I \vec{l} \wedge \vec{B}$$

- La force magnétique  $d\vec{F}_B$  générée par une petite portion du courant  $I$  de longueur  $d\vec{s}$  dans un champ magnétique  $\vec{B}$  est:

$$d\vec{F}_B = I d\vec{s} \wedge \vec{B}$$

- Le **moment de force**  $\vec{\tau}$  agissant sur une boucle fermée conductrice d'aire  $A$  et traversée par un courant  $I$  dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  est:

$$\vec{\tau} = I\vec{A} \wedge \vec{B}$$

où  $\vec{A}$  est un vecteur de grandeur  $A$  et une direction perpendiculaire à la boucle.

- Le **moment magnétique dipolaire** (encore une fois, moment magnétique dipolaire  $\neq$  moment de force) d'une boucle fermée conductrice d'aire  $A$  traversée par un courant  $I$  est donnée par:

$$\vec{\mu} = I\vec{A}$$

- Le moment de force exercée sur un dipôle magnétique  $\vec{\tau}$  placé dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B}$  est:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$$

- L'énergie potentielle d'un dipôle magnétique placé dans un champ magnétique est:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

- Si une particule de charge  $q$  et de masse  $m$  entre dans un champ magnétique de magnitude  $B$  avec une vitesse  $\vec{v}$  perpendiculaire aux lignes de champ magnétique, le rayon du chemin circulaire suivi par la particule est:

$$r = \frac{mv}{|q|B}$$

et la vitesse angulaire de la particule est:  $\omega = \frac{|q|B}{m}$ .

## 7.2 Aide pour la pratique

Dans la sous-section "Théorie", il est expliqué que en présence du champ magnétique  $\vec{B}$  et du champ électrique  $\vec{E}$ , la force totale agissant sur une particule en mouvement de charge  $q$  est:  $\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_B = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ , où  $\vec{v}$  est la vitesse de la particule. La direction de  $\vec{F}_B$  implique le produit vectoriel de  $\vec{v}$  et de  $\vec{B}$ , qui se base sur la règle de la main droite. En coordonnées cartésiennes, les vecteurs unitaires sont  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  et  $\hat{k}$  qui satisfont les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} \hat{i} \wedge \hat{j} &= \hat{k}, & \hat{j} \wedge \hat{k} &= \hat{i}, & \hat{k} \wedge \hat{i} &= \hat{j} \\ \hat{j} \wedge \hat{i} &= -\hat{k}, & \hat{k} \wedge \hat{j} &= -\hat{i}, & \hat{i} \wedge \hat{k} &= -\hat{j} \\ \hat{i} \wedge \hat{i} &= \hat{j} \wedge \hat{j} = \hat{k} \wedge \hat{k} = \vec{0} \end{aligned}$$

Pour  $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$  et  $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$  le produit vectoriel peut être obtenu ainsi:

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (v_y B_z - v_z B_y)\hat{i} + (v_z B_x - v_x B_z)\hat{j} + (v_x B_y - v_y B_x)\hat{k}$$

Si seulement le champ magnétique est présent, et si  $\vec{v}$  est perpendiculaire à  $\vec{B}$ , alors la trajectoire est un cercle de rayon  $r = \frac{mv}{|q|B}$  et la vitesse angulaire est  $\omega = \frac{|q|B}{m}$ .

Lorsque l'on a affaire à un cas plus compliqué, il est utile de travailler avec les composantes de la force. Par exemple:  $F_x = ma_x = qE_x + q(v_y B_z - v_z B_y)$ .

## 8 Sources de champ magnétique

### 8.1 Théorie

- La **loi de Biot-Savart** déclare que le champ magnétique  $d\vec{B}$  en un point et dû à un élément de longueur  $d\vec{s}$  traversé par un courant continu  $I$  et localisé à la distance donnée par  $\vec{r}$  est donné par:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \wedge \vec{r}}{r^2}$$

où  $r = \|\vec{r}\|$  et  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} Tm/A$  est la permittivité du vide.

- La magnitude du champ magnétique à une distance  $r$  d'un fil conducteur rectiligne infiniment long traversé par un courant  $I$  est:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

- La magnitude de la force magnétique  $F_B$  entre deux fils rectilignes de longueur  $l$  traversés par des courants continus  $I_1$  et  $I_2$  et séparés par une distance  $r$  est:

$$F_B = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r}$$

- La **loi d'Ampère** déclare que l'intégrale curviligne de  $\vec{B} \cdot d\vec{s}$  autour de n'importe quelle boucle est proportionnel au courant continu total traversant n'importe quelle surface délimitée par cette boucle:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

- Le champ magnétique au sein d'un **toroïde** qui possède  $N$  boucles étroitement espacées traversées par un courant  $I$  est donné par

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R}$$

où  $r$  est la distance jusqu'au centre du **toroïde**.

- Le champ magnétique au centre d'un **solénoïde** possédant  $N$  boucles étroitement espacées traversées par un courant  $I$  sur une longueur  $l$  est donné par:

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 n I$$

où  $n$  est le nombre de boucles par unité de longueur.

- Les propriétés des matériaux magnétiques sont les suivantes:

Materials	Magnetic susceptibility $\chi_m$	Relative permeability $\kappa_m = 1 + \chi_m$	Magnetic permeability $\mu_m = \kappa_m \mu_0$
Diamagnetic	$-10^{-5} \sim -10^{-9}$	$\kappa_m < 1$	$\mu_m < \mu_0$
Paramagnetic	$10^{-5} \sim 10^{-3}$	$\kappa_m > 1$	$\mu_m > \mu_0$
Ferromagnetic	$\chi_m \gg 1$	$\kappa_m \gg 1$	$\mu_m \gg \mu_0$

### 8.2 Pratique

Dans la partie "Théorie", il est dit que l'on peut utiliser les lois de Biot-Savart et d'Ampère pour calculer le champ magnétique dû à une source électrique.

### 8.2.1 Loi de Biot-Savart

La loi déclare que le champ magnétique en un point  $P$  dû à un élément de longueur  $d\vec{s}$  traversé par un courant continu  $I$  est donné par:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \wedge \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

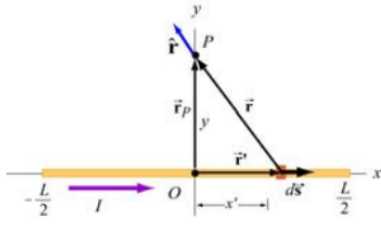
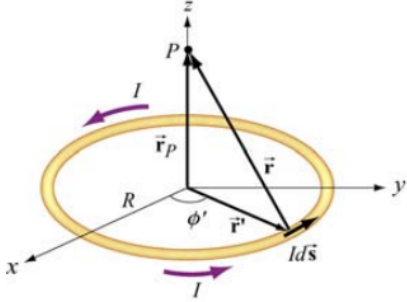
Le calcul du champ magnétique peut se faire de la manière suivante:

1. *Source*: Choisir un système de coordonnées approprié et écrire une expression pour l'élément de courant différentiel  $I d\vec{s}$ , et pour le vecteur  $\vec{r}$  décrivant la position de  $I d\vec{s}$ . La magnitude  $r' = \|\vec{r}\|$  est la distance entre  $I d\vec{s}$  et l'origine. Les variables avec un "prime" sont utilisées pour la source.
2. *Point du champ*: Le point  $P$  est un point de l'espace où le champ magnétique dû au courant doit être calculé. En utilisant le même système de coordonnées, écrire le vecteur position  $\vec{r}_p$  pour le point  $P$ . La quantité  $r_p = \|\vec{r}_p\|$  est la distance entre l'origine et  $P$ .
3. *Vecteur de position relative*: La position relative entre la source et le point est caractérisée par le vecteur de position relative  $\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}'$ . Le vecteur unitaire correspondant est:

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r}_p - \vec{r}'}{\|\vec{r}_p - \vec{r}'\|}$$

où  $r = \|\vec{r}\| = \|\vec{r}_p - \vec{r}'\|$  est la distance entre la source et le point  $P$ .

4. Calculer le produit vectoriel  $d\vec{s} \wedge \vec{r}$  ou  $d\vec{s} \wedge \hat{\mathbf{r}}$ . Le vecteur résultant donne la direction du champ magnétique  $\vec{B}$ , selon la loi de Biot-Savart.
5. Substituer les expressions obtenues dans  $d\vec{B}$  et simplifier autant que possible.
6. Compléter l'intégration pour obtenir  $\vec{B}$  si possible. La taille et la géométrie du système se reflètent dans les limites d'intégration. Changer les variables d'intégration peut parfois aider à compléter l'intégration.

Current distribution	Finite wire of length $L$	Circular loop of radius $R$
Figure		
(1) Source point	$\vec{r}' = x'\hat{i}$ $d\vec{s} = (d\vec{r}'/dx')dx' = dx'\hat{i}$	$\vec{r}' = R(\cos\phi'\hat{i} + \sin\phi'\hat{j})$ $d\vec{s} = (d\vec{r}'/d\phi')d\phi' = R d\phi'(-\sin\phi'\hat{i} + \cos\phi'\hat{j})$
(2) Field point $P$	$\vec{r}_P = y\hat{j}$	$\vec{r}_P = z\hat{k}$
(3) Relative position vector $\vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}'$	$\vec{r} = y\hat{j} - x'\hat{i}$ $r =  \vec{r}  = \sqrt{x'^2 + y^2}$ $\hat{r} = \frac{y\hat{j} - x'\hat{i}}{\sqrt{x'^2 + y^2}}$	$\vec{r} = -R\cos\phi'\hat{i} - R\sin\phi'\hat{j} + z\hat{k}$ $r =  \vec{r}  = \sqrt{R^2 + z^2}$ $\hat{r} = \frac{-R\cos\phi'\hat{i} - R\sin\phi'\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{R^2 + z^2}}$
(4) The cross product $d\vec{s} \times \hat{r}$	$d\vec{s} \times \hat{r} = \frac{y dx' \hat{k}}{\sqrt{y^2 + x'^2}}$	$d\vec{s} \times \hat{r} = \frac{R d\phi' (z \cos\phi'\hat{i} + z \sin\phi'\hat{j} + R\hat{k})}{\sqrt{R^2 + z^2}}$
(5) Rewrite $d\vec{B}$	$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{y dx' \hat{k}}{(y^2 + x'^2)^{3/2}}$	$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R d\phi' (z \cos\phi'\hat{i} + z \sin\phi'\hat{j} + R\hat{k})}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$
(6) Integrate to get $\vec{B}$	$B_x = 0$ $B_y = 0$ $B_z = \frac{\mu_0 I y}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx'}{(y^2 + x'^2)^{3/2}}$ $= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{L}{y\sqrt{y^2 + (L/2)^2}}$	$B_x = \frac{\mu_0 I R z}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos\phi' d\phi' = 0$ $B_y = \frac{\mu_0 I R z}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin\phi' d\phi' = 0$ $B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$




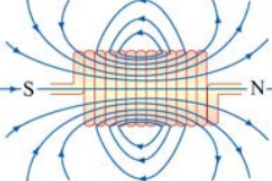
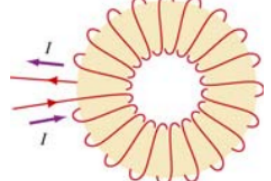
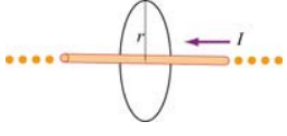
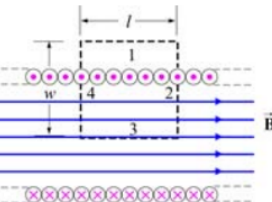
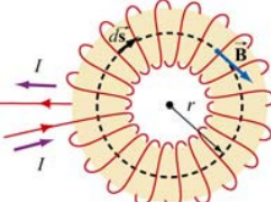
### 8.2.2 Loi d'Ampère

La loi d'Ampère déclare que l'intégrale curviligne de  $\vec{B} \cdot d\vec{s}$  autour d'une boucle fermée est proportionnel au courant total passant au travers de n'importe quelle surface délimitée par cette boucle fermée:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

On applique la loi d'Ampère pour calculer le champ magnétique selon la procédure suivante:

1. Dessiner une boucle "ampérienne" en utilisant des arguments de symétrie (le courant doit passer au travers de la boucle).
2. Trouver le courant passant au travers de la boucle.
3. Calculer l'intégrale curviligne  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  autour de la boucle fermée.
4. Égaliser  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  avec  $\mu_0 I$  et résoudre pour  $\vec{B}$ .

System	Infinite wire	Ideal solenoid	Toroid
Figure			
(1) Draw the Amperian loop			
(2) Find the current enclosed by the Amperian loop	$I_{\text{enc}} = I$	$I_{\text{enc}} = NI$	$I_{\text{enc}} = NI$
(3) Calculate $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ along the loop	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B(2\pi r)$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = Bl$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B(2\pi r)$
(4) Equate $\mu_0 I_{\text{enc}}$ with $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ to obtain $\vec{B}$	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$	$B = \frac{\mu_0 NI}{l} = \mu_0 nI$	$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$

## 9 Loi d'induction de Faraday

### 9.1 Théorie

- Le **flux magnétique** traversant une surface  $S$  est donné par:

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

- La **Loi de Faraday** (loi d'induction de Faraday) déclare que la fem  $\epsilon$  (fem = force électromotrice) induite dans une bobine est proportionnel à l'opposé de la vitesse du changement du flux magnétique:

$$\epsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

- La direction du courant induit est déterminé par la **loi de Lenz** qui déclare que le courant induit produit des champs magnétiques qui ont tendance à opposer le flux magnétique qui les a induits.
- Une **fem induite** est induite si un conducteur se déplace dans un champ magnétique. L'expression générale pour  $\epsilon$  est:

$$\epsilon = \oint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

Dans ce cas, une barre conductrice de longueur  $l$  se déplaçant à une vitesse constante  $\vec{v}$  dans un champ magnétique qui pointe dans la direction perpendiculaire à la barre et  $\vec{v}$ , la fem induite est:  $\epsilon = -Bvl$ .

- Une fem induite dans un conducteur stationnaire est associée avec un champ électrique non-conservatif  $E_{nc}$ :

$$\epsilon = \oint \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

## 9.2 Aide pour la pratique

### Loi de Faraday et Loi de Lenz:

Dans la partie "Théorie", nous avons vu que le changement de flux magnétique induit une fem:  $\epsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$  d'après la loi d'induction de Faraday. Pour un conducteur qui forme une boucle fermée, la fem induit un courant  $I = \frac{|\epsilon|}{R}$ , où  $R$  est la résistance de la boucle. Pour calculer le courant induit et sa direction, on suit la procédure suivante:

1. Pour une boucle fermée d'aire  $A$  sur un plan, définir un vecteur surface  $\vec{A}$  qui pointe dans la direction de votre pouce, pour pouvoir appliquer la règle de la main droite plus tard. Calculer le flux magnétique au travers de la boucle en utilisant:

$$\Phi_B = \begin{cases} \vec{B} \cdot \vec{A} & (\vec{B} \text{ est uniforme}) \\ \iint \vec{B} \cdot d\vec{A} & (\vec{B} \text{ est non-uniforme}) \end{cases}$$

Déterminer le signe de  $\Phi_B$ .

2. Évaluer la vitesse de changement du flux magnétique  $\frac{d\Phi_B}{dt}$ . Il faut garder à l'esprit que le changement peut être causé par

i. une variation du champ magnétique:  $\frac{dB}{dt} \neq 0$

ii. un changement de l'aire de la boucle si le conducteur est en mouvement  $\left(\frac{dA}{dt} \neq 0\right)$

iii. un changement d'orientation de la boucle par rapport au champ magnétique  $\left(\frac{d\theta}{dt} \neq 0\right)$

Déterminer le signe de  $\frac{d\Phi_B}{dt}$ .

3. Le signe de la fem induite est de signe opposé à  $\frac{d\Phi_B}{dt}$ . La direction du courant induit peut être trouvée en utilisant la loi de Lenz.

## 10 Inductance et énergie magnétique

### 10.1 Théorie

- En utilisant la loi d'induction de Faraday, l'**inductance mutuelle** de deux bobines est donnée par:

$$M_{12} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2} = M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1}$$

où  $N_1$  est le nombre de boucle de la bobine 1,  $I_1$  est le courant qui la traverse,  $\Phi_{21}$  est le flux magnétique traversant UNE boucle de la bobine 2 et causé par  $I_1$ .

- La fem induite dans la bobine 2 par un changement de courant dans la bobine 1 est donnée par:

$$\epsilon_2 = -M \frac{dI_1}{dt}$$

- La **self-inductance** d'une bobine à  $N$  boucle est:

$$L = \frac{N \Phi_B}{I}$$

où  $\Phi_B$  est le flux magnétique traversant une boucle de la bobine.

- La fem auto-induite (self-induced) répondant à un changement de courant au sein de la bobine est:

$$\epsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$$

- L'inductance d'un solénoïde à  $N$  boucles avec une aire de section transversale égale à  $A$  et de longueur  $l$  est:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}$$

- Si une batterie alimentant le circuit par une fem  $\epsilon$  est connecté à un solénoïde (solénoïde = bobine = auto-inductance = "self") et à une résistance en série à un temps  $t = 0$ , le courant dans ce **circuit RL** en fonction du temps est:

$$I(t) = \frac{\epsilon}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

où  $\tau = L/R$  est la constante de temps du circuit. Si la batterie est retirée du circuit RL, le courant va diminuer selon:

$$I(t) = \left( \frac{\epsilon}{R} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- L'**énergie magnétique** stockée dans un solénoïde traversé par un courant  $I$  est:

$$U_B = \frac{1}{2} L I^2$$

- La **densité d'énergie magnétique** en un point avec un champ magnétique  $B$  est:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

- L'équation différentielle pour un **circuit LC** oscillant est:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \omega_0^2 Q = 0$$

où  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  est la fréquence angulaire d'oscillation. La charge du condensateur en fonction du temps est donné par:

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

et le courant dans le circuit est:

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = +\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$$

- L'énergie totale dans un circuit LC est, en utilisant  $I_0 = \omega_0 Q_0$ ,

$$U = U_E + U_B = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t + \frac{LI_0^2}{2} \sin^2 \omega_0 t = \frac{Q_0^2}{2C}$$

- L'équation différentielle pour un **circuit RLC** est:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 2\gamma \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = 0$$

où  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $\gamma = \frac{R}{2L}$ . Dans ce cas, la charge du condensateur en fonction du temps est:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \phi)$$

où  $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ .

## 10.2 Pratique

### 10.2.1 Calculer la self-inductance

La self-inductance  $L$  d'une bobine peut être calculée en suivant la procédure suivante:

1. Supposer un courant constant  $I$  pour l'inducteur, l'inducteur pouvant être une boucle conductrice, un solénoïde, un toroïde ou des câbles coaxiaux.
2. Choisir une section transversale appropriée  $S$  et calcule le flux magnétique traversant  $S$  en utilisant:

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

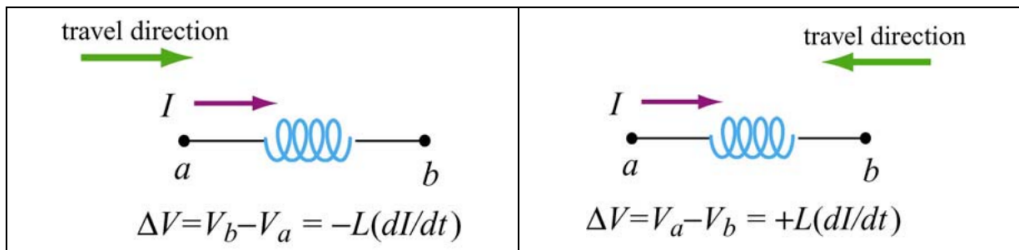
Si la surface est délimitée par  $N$  tours de fils (il y a  $N$  boucles), alors le flux magnétique total à travers la surface est:  $N\Phi_B$ .

3. L'inductance peut être obtenue avec:

$$L = \frac{N\Phi_B}{I}$$

### 10.2.2 Circuits contenant des inducteurs

Trois types de circuits à boucle unique ont été examinés dans cette section: RL, LC et RLC. Pour mettre en place l'équation différentielle du circuit, on applique la loi des boucles et des noeuds de Kirchhoff, comme pour les circuits RC. Pour les circuits contenant des inducteurs, la règle de Kirchhoff modifiée correspondante est schématisée ci-dessous.

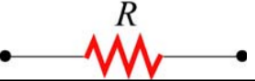
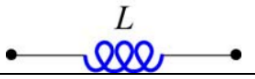



Remarque: la "différence de potentiel" entre les deux bouts de l'inducteur est proportionnelle au taux de variation du courant  $\frac{dI}{dt}$ . La situation se simplifie si on est seulement intéressé dans le comportement à long terme du circuit, lorsque le courant sera stable  $\frac{dI}{dt} = 0$ . Dans cette limite, l'inducteur peut être remplacé par un fil conducteur normal.

## 11 Courant alternatif

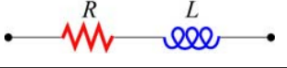

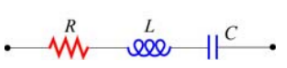
### 11.1 Théorie

- Dans un circuit AC avec une source de tension sinusoïdale  $V(t) = V(0) \sin \omega t$ , le courant est donné par  $I(t) = I_0 \sin(\omega t - \phi)$ , où  $I_0$  est l'amplitude et  $\phi$  est le déphasage (aussi appelé phase à l'origine). Pour un circuit simple avec seulement un composant (une résistance, un condensateur ou un inducteur), connecté à la source de tension, les résultats sont les suivants:

Circuit Elements	Resistance /Reactance	Current Amplitude	Phase angle $\phi$
	$R$	$I_{R0} = \frac{V_0}{R}$	0
	$X_L = \omega L$	$I_{L0} = \frac{V_0}{X_L}$	$\pi/2$ current lags voltage by $90^\circ$
	$X_C = \frac{1}{\omega C}$	$I_{C0} = \frac{V_0}{X_C}$	$-\pi/2$ current leads voltage by $90^\circ$

où  $X_L$  est la **réactance inductive** et  $X_C$  est la **réactance capacitive**.

- Pour les circuits qui ont plus d'un élément connectés en série, les résultats sont:

Circuit Elements	Impedance $Z$	Current Amplitude	Phase angle $\phi$
	$\sqrt{R^2 + X_L^2}$	$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$	$0 < \phi < \frac{\pi}{2}$
	$\sqrt{R^2 + X_C^2}$	$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$	$-\frac{\pi}{2} < \phi < 0$
	$\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$	$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$	$\phi > 0$ if $X_L > X_C$ $\phi < 0$ if $X_L < X_C$

où  $Z$  est l'**impédance**  $Z$  du circuit. Pour un circuit RLC série, on a:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

L'angle de phase entre la tension (voltage) et le courant dans un circuit AC est:

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{X_L - X_C}{R} \right)$$

- Dans un circuit RLC parallèle, l'impédance est donnée par:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)^2}$$

et le déphasage est:

$$\phi = \tan^{-1} \left[ R \left( \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right) \right] = \tan^{-1} \left[ R \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right]$$

- Le voltage **rms** (root mean square = moyenne quadratique ; voltage rms = tension efficace) et la valeur efficace moyenne du courant d'un circuit AC (AC = courant alternatif) sont données par:

$$V_{\text{eff}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}, \quad I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

- La puissance moyenne d'un circuit AC est:

$$\langle P(t) \rangle = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \cos \phi$$

où  $\cos \phi$  est connu comme le **facteur de puissance**.

- La **fréquence de résonance**  $\omega_0$  est:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

En **résonance**, le courant dans un circuit RLC série atteint son maximum, alors que le courant dans un circuit RLC parallèle atteint son minimum.

- L'équation du transformateur est:

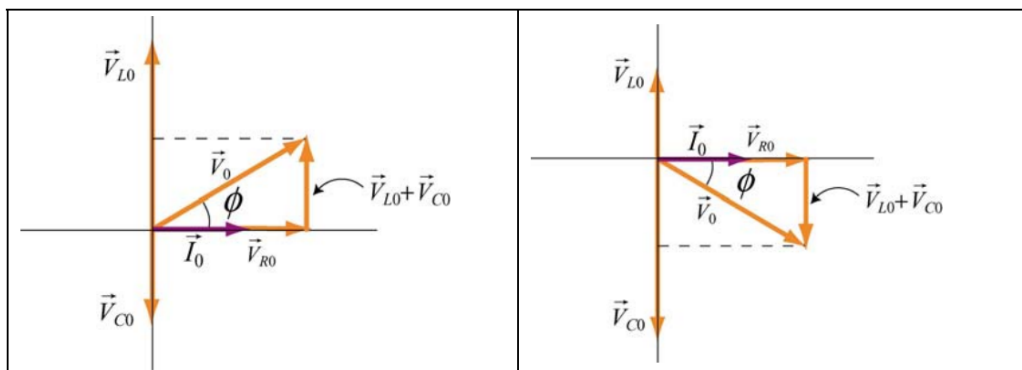
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

où  $V_1$  est la source de tension de la première bobine à  $N_1$  boucles et  $V_2$  est la tension de sortie (output voltage) de la seconde bobine à  $N_2$  boucles. Un transformateur avec  $N_2 > N_1$  est appelé transformateur élévateur (step-up transformer) et un transformateur avec  $N_2 < N_1$  est appelé transformateur descendeur (step-down transformer).

## 11.2 Aide pour la pratique

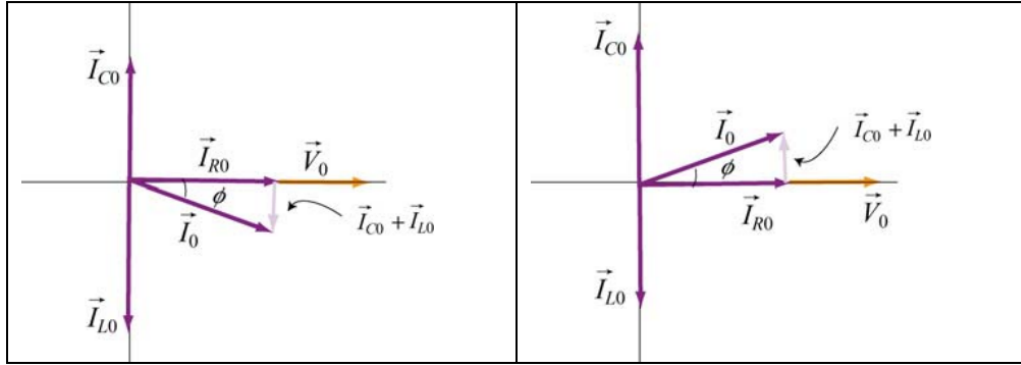
Dans la sous-section "Théorie", on a vu comment les phaseurs peuvent fournir un outil puissant pour l'analyse des circuits AC (En physique et en ingénierie, un phaseur est une représentation d'une fonction sinusoïdale dans laquelle l'amplitude  $A$ , la phase  $\theta$  et la pulsation  $\omega$  (sachant que  $\omega = 2\pi f$ ) ne dépendent pas du temps. Il s'agit d'une application d'un concept plus général appelé représentation analytique.<sup>2</sup>). Voici quelques conseils importants:

1. Garder à l'esprit les relations de phase pour les circuits les plus simples.
  - i. Pour une résistance, la tension (voltage) et le déphasage sont toujours en phase.
  - ii. Pour un inducteur, le courant a un retard de  $90^\circ$  sur la tension.
  - iii. Pour un condensateur, le courant est en avance de  $90^\circ$  sur la tension.
2. Lorsque des éléments du circuits sont connectés en série, le courant instantané est le même pour tous les composants, et les tensions instantanées à travers les éléments sont tous en phase. D'autre part, lorsque les éléments du circuit sont connectés en parallèle, la tension instantanée est la même pour tous les éléments, et les courants instantanés à travers les éléments ne sont pas en phase.
3. Pour les connections en série, dessiner un diagramme de phase pour les tensions. Ici, un diagramme de phase d'un circuit RLC série est montré dans le cas inductif  $X_L > X_C$  et dans le cas capacitif  $X_L < X_C$ .



<sup>2</sup>Wikipédia

4. Lorsque  $V_{L_0} = V_{C_0}$ , ou  $\phi = 0$ , le circuit est en résonance. La fréquence de résonance correspondante est  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et la puissance délivrée à la résistance est maximum.
5. Pour les connexions en parallèle, dessiner un diagramme de phase pour les courants. Ici, un diagramme de phase d'un circuit RLC parallèle est montré dans le cas inductif  $X_L > X_C$  et dans le cas capacitif  $X_L < X_C$ .



## 12 Équations de Maxwell et ondes électromagnétiques

### 12.1 Théorie

- La loi d'Ampère-Maxwell dit que:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 (I + I_d)$$

où  $I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$  est appelé le **courant de déplacement**. L'équation décrit comment un flux électrique changeant peut induire un champ magnétique.

- La loi de Gauss pour le magnétisme est:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

La loi déclare que le flux magnétique traversant une surface fermée doit être égal à zéro, et implique l'absence de mono-pôles magnétiques.

- Tout phénomène électromagnétique est décrit par les **équations de Maxwell**:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \frac{Q}{\epsilon_0} & \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} &= -\frac{d\Phi_B}{dt} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} &= 0 & \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \end{aligned}$$

- Dans le vide, les composantes électriques et magnétiques d'une onde électromagnétique obéissent à l'équation d'onde:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{Bmatrix} E_y(x, t) \\ B_z(x, t) \end{Bmatrix} = 0$$

- L'amplitude du champ électrique et du champ magnétique sont liées par:

$$\frac{E}{B} = \frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

- Une **onde électromagnétique stationnaire** ne se propage pas, mais les champs électrique et magnétique exécutent des mouvements harmoniques simples perpendiculaire à la direction de propagation (si elle se propageait). Un exemple d'onde stationnaire est:

$$E_y(x, t) = 2E_0 \sin kx \sin \omega t, \quad B_z(x, t) = 2B_0 \cos kx \cos \omega t$$

- Le débit d'énergie d'une onde électromagnétique traversant une surface fermée est donné par:

$$\frac{dU}{dt} = - \oint \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

où

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$$

est le **vecteur de Poynting**, et  $\vec{S}$  pointe dans la direction vers laquelle l'onde se propage.

- L'**intensité** d'une onde électromagnétique est reliée à la densité moyenne d'énergie par:

$$I = \langle S \rangle = c \langle u \rangle$$

- Le moment de force transféré est relié à l'énergie absorbée par:

$$\Delta p = \begin{cases} \frac{\Delta U}{c} & \text{(absorption totale)} \\ 2 \frac{\Delta U}{c} & \text{(réflexion totale)} \end{cases}$$

- La **pression de rayonnement** moyenne sur une surface par une onde électromagnétique qui se dirige perpendiculairement vers cette surface est:

$$P = \begin{cases} \frac{I}{c} & \text{(absorption totale)} \\ 2 \frac{I}{c} & \text{(réflexion totale)} \end{cases}$$

## 12.2 Pratique

La sous-section "Théorie" explore diverses propriétés des ondes électromagnétiques. Les champs électrique et magnétique de l'onde obéissent à l'équation d'onde. Une fois que la forme fonctionnelle de l'un des champs est donnée, l'autre peut être déterminée à partir des équations de Maxwell. Par exemple, considérons une onde électromagnétique sinusoïdale avec:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \sin(kz - \omega t) \hat{i}$$

L'équation ci-dessus contient l'information complète sur l'onde électromagnétique:

1. Le sens de la propagation de l'onde: l'argument de la forme sinusoïdale dans le champ électrique peut être réécrit comme  $(kz - \omega t) = k(z - vt)$ , ce qui indique que l'onde se propage dans la direction  $+z$ .
2. La longueur d'onde: la longueur d'onde  $\lambda$  est relié au nombre d'onde  $k$  par  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ .
3. La fréquence: la fréquence de l'onde  $f$  est liée à la fréquence angulaire  $\omega$  par  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ .
4. La vitesse de propagation: la vitesse de l'onde est donnée par:

$$v = \lambda f = \frac{2\pi}{k} \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k}$$

Dans le vide, la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique est égale à la vitesse de la lumière  $c$ .



5. Le champ magnétique  $\vec{B}$ : le champ magnétique  $\vec{B}$  est perpendiculaire à la fois à  $\vec{E}$  qui pointe dans la direction  $+x$  et à  $+\hat{k}$ , le vecteur unité le long de l'axe  $+z$ ;  $\hat{k}$  étant la direction de propagation de l'onde comme trouvé précédemment. De plus, puisque l'onde se propage dans la même direction que le produit vectoriel  $\vec{E} \wedge \vec{B}$ , on en conclut que  $\vec{B}$  doit pointer dans la direction  $+y$  (étant donné que  $\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k}$ ).

Comme  $\vec{B}$  est toujours en phase avec  $\vec{E}$ , les deux champs ont la même forme fonctionnelle (same functional form). Et donc, on peut écrire le champ magnétique:

$$\vec{B}(z, t) = B_0 \sin(kz - \omega t) \hat{j}$$

où  $B_0$  est l'amplitude. En utilisant les équations de Maxwell, il est possible de montrer que  $B_0 = E_0 \frac{k}{\omega} = \frac{E_0}{c}$  dans le vide.

6. Le vecteur de Poynting: le vecteur de Poynting peut être obtenu ainsi:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} [E_0 \sin(kz - \omega t) \hat{i}] \wedge [B_0 \sin(kz - \omega t) \hat{j}] = \frac{E_0 B_0 \sin^2(kz - \omega t)}{\mu_0} \hat{k}$$

7. L'intensité: L'intensité de l'onde est égale à la moyenne de  $S$ :

$$I = \langle S \rangle = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \langle \sin^2(kz - \omega t) \rangle = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} = \frac{E_0^2}{2c\mu_0} = \frac{cB_0^2}{2\mu_0}$$

8. La pression de radiation (électromagnétique): si l'onde électromagnétique se dirige perpendiculairement vers une surface et que le rayonnement (électromagnétique) est totalement *réfléchi*, la pression de radiation vaut:

$$P = \frac{2I}{c} = \frac{E_0 B_0}{c\mu_0} = \frac{E_0^2}{c^2\mu_0} = \frac{B_0^2}{\mu_0}$$

## 13 Interférence et diffraction

### 13.1 Théorie

- L'**interférence** est la combinaison de deux ou plusieurs ondes pour former une onde composite basée sur le principe de la superposition.
- Dans l'**expérience à deux fentes de Young**, où une source de lumière monochromatique cohérente avec une longueur d'onde  $\lambda$  émerge de deux fentes qui sont séparées par une distance  $d$ , la condition d'**interférence constructive** est:

$$\delta = d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (\text{interférence constructive})$$

où  $m$  est appelé le numéro de commande (order number). D'autre part, la condition d'interférence destructrice est:

$$d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (\text{interférence destructive})$$

- L' **intensité** dans le schéma d'interférence est:

$$I = I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right)$$

où  $I_0$  est l'intensité maximum sur l'écran.

- La **diffraction** La diffraction est la flexion des ondes lorsqu'elles passent par un objet (un objet est sur leur passage) ou par une ouverture. Dans une diffraction Fraunhofer à une seule fente, la condition pour l'interférence destructrice est:

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{a}, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (\text{interférence destructive})$$

où  $a$  est la largeur de la fente. L'intensité du modèle (pattern) d'interférence est:

$$I = I_0 \left[ \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2 = \left[ \frac{\sin(\pi a \sin \theta / \lambda)}{\pi a \sin \theta / \lambda} \right]^2$$

où  $\beta = 2\pi a \sin \theta / \lambda$  est la différence de déphasage totale entre les ondes de l'extrémité supérieure et de l'extrémité inférieure de la fente, et  $I_0$  est l'intensité pour  $\theta = 0$ .

- Pour deux fentes ayant chacune une largeur  $a$  et séparées par une distance  $d$ , le motif d'interférence inclura également un motif de diffraction dû à la fente unique, et l'intensité est:

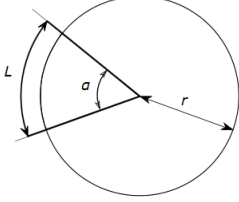
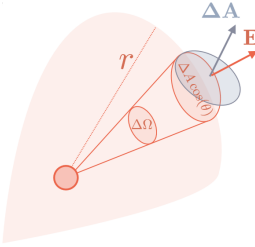
$$I = I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) \left[ \frac{\sin(\pi a \sin \theta / \lambda)}{\pi a \sin \theta / \lambda} \right]^2$$

## 14 Annexe

### 14.1 Démonstration: loi de Gauss

#### 14.1.1 Rappel: stéradian

Rappel:

Cercle	Sphère
<p>Le cercle est à 2 dimensions.  rayon = <math>R</math>, angle = <math>\theta</math>  Tout le cercle: <math>L = 2\pi R</math>  <math>L = R\theta</math>    <math>\theta \in [0, 2\pi]</math></p>	<p>La sphère est à 3 dimensions.  rayon = <math>R</math>, angle solide (stéradian) = <math>\Omega</math>  Toute la sphère: <math>A = 4\pi R^2</math>  <math>A = R^2\Omega</math>    <math>\Omega \in [0, 4\pi]</math></p>
	

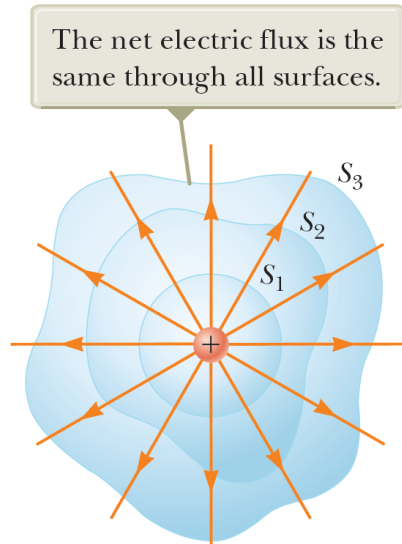
#### 14.1.2 Démonstration

La **loi de Gauss** affirme que le flux électrique passant au travers de n'importe quelle surface de Gauss est proportionnel à la charge totale enfermée par cette surface:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

On sait que:

1.  $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$
2. La charge est entourée par une surface  $A$  ( $A$  est une surface dans un espace à 3 dimensions).



Démonstration:

Le flux du champ électrique total

$$\Phi_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{E} \cdot \Delta \vec{A}_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta \Phi_i$$

$$\Delta \Phi_i = \vec{E} \cdot \Delta \vec{A}_i = E \cos(\theta) \Delta A_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cos(\theta) \Delta A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \Delta \Omega$$

$$\Rightarrow \Phi_E = \oint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

Le flux du champs électrique total est indépendant de la forme de la surface fermée et indépendant de la position de la charge dans le volume délimité par la surface.

*Remarque (Importante):*

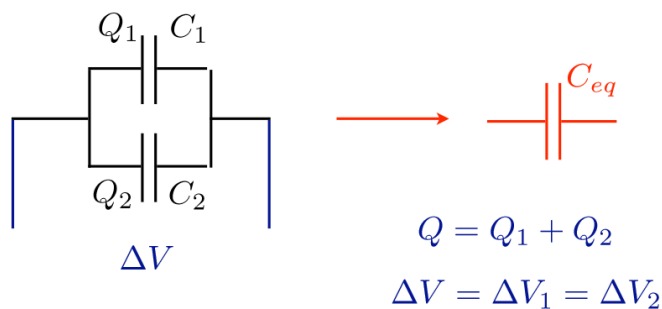
Le théorème de Gauss dit que le flux est proportionnel à la charge pas le champs électrique.

## 14.2 Combinaisons de composants électriques

### 14.2.1 Combinaisons de condensateurs

#### En parallèle

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$



$$C_{eq} = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q_1 + Q_2}{\Delta V} = \frac{Q_1}{\Delta V_1} + \frac{Q_2}{\Delta V_2} = C_1 + C_2$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

Capacitor symbol



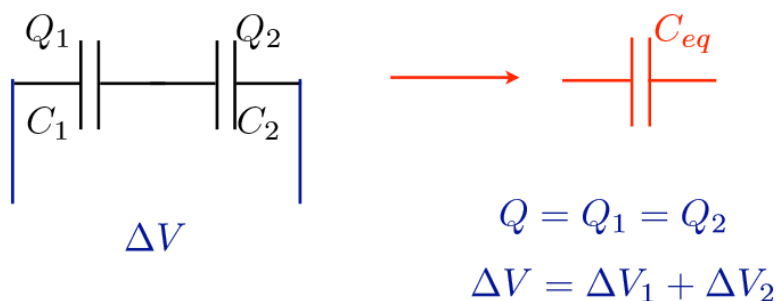
Battery symbol



Switch symbol



#### En série

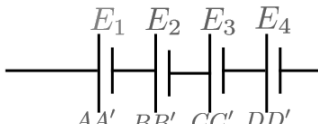


$$\Delta V = \frac{Q}{C_{eq}} = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

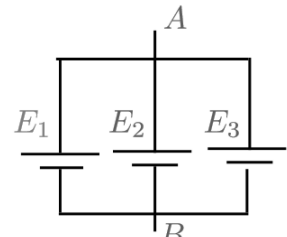
## 14.2.2 Association de piles

**Association en série**



$$V_D - V_A = -(E_1 + E_2 + E_3 + E_4)$$


**Association en parallèle**



$$V_B - V_A = -E_1 = -E_2 = -E_3$$

## 14.2.3 Association de résistance

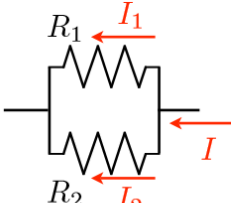
**Association en série**



$$\begin{aligned} \Delta V &= \Delta V_1 + \Delta V_2 \\ I &= I_1 = I_2 \end{aligned} \quad \left| \rightarrow R_{eq} I = R_1 I_1 + R_2 I_2 \right.$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

**Association en parallèle**



$$\begin{aligned} \Delta V &= \Delta V_1 = \Delta V_2 \\ I &= I_1 + I_2 \end{aligned} \quad \left| \rightarrow \frac{\Delta V}{R_{eq}} = \frac{\Delta V_1}{R_1} + \frac{\Delta V_2}{R_2} \right.$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$