

# Simulation Numérique de l'amortissement Landau dans les plasmas

Yassine MOUFTAH  
Guillaume ROUMAGE

2019

Dans tout le document, les problèmes seront étudiés sur un intervalle de temps noté  $[0; T]$ , avec  $T \in ]0; +\infty[$ . Pour discrétiser le problème afin de faire des simulations numériques, on choisit un nombre de pas  $N$ . L'intervalle  $[0; T]$  est subdivisé en  $N$  sous-intervalles. Le pas de temps, représenté par  $h$ , est alors donné par la formule :  $h = \frac{T}{N}$ .

## Introduction

Il est courant de dire que la matière possède trois états : l'état solide, l'état liquide, ainsi que l'état gazeux. Mais en réalité, il existe un quatrième état de la matière : c'est le plasma.

Comme nous le savons, les atomes sont composés d'un noyau, contenant des protons et des neutrons, autour duquel gravitent des électrons. A l'état solide, liquide ou gazeux, les électrons qui orbitent autour des atomes restent sur leurs orbites. Lorsque de la matière est chauffée, elle passe successivement de l'état solide à l'état liquide, puis de l'état liquide à l'état gazeux. Lorsque le gaz est chauffé à très haute température (supérieure à  $10^4$  K), il devient un plasma.

Cette haute température libère les électrons des orbites de l'atome auquel ils étaient rattachés, qui peuvent désormais se déplacer dans le gaz. Celui-ci devient alors un mélange d'électrons et d'ions positifs.

L'analyse numérique permet de reproduire par le calcul une réalité physique. Cette simulation peut être effectuée pour plusieurs raisons : l'expérience peut-être irréalisable, avoir un coût trop élevé, ou encore pour prévoir grâce aux ordinateurs comment l'expérience va se dérouler, avant de faire cette même expérience en laboratoire, en conditions réelles.

## Constantes

- Valeur d'une charge élémentaire :  $e = 1.6021766208 \cdot 10^{-19} C$ .
- Charge élémentaire d'un électron :  $q_e = -e = -1.6021766208 \cdot 10^{-19} C$ .
- Masse d'un électron :  $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} kg$ .

## Simulation de mouvements de particules

### Mouvement de particules en 1D

Nous simulons en premier lieu le mouvement d'une, puis de plusieurs particules en une dimension, c'est-à-dire sur un segment défini. Lors de la simulation, si la particule atteint le bord droit du segment, elle est envoyée sur le bord gauche, et inversement. Cela permet à la particule de rester dans l'intervalle d'espace étudié. Les particules étudiées seront les électrons. En effet, les mouvements des ions sont négligeables devant ceux des électrons. Nous considérerons donc les ions comme fixes.

### Avec un champ électrique nul

Les équations donnant la position et la vitesse des électrons sont données par les systèmes suivants. Tout d'abord, en faisant l'hypothèse que le champ électrique auquel est soumis l'électron est nul.

$$\begin{cases} x'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= 0 \end{cases}$$

avec  $t \in [0; T]$ .

En discrétisant et en utilisant la méthode d'Euler explicite, cela se réécrit :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + h \cdot v_n \\ v_{n+1} &= v_n \end{cases}$$

avec  $n \in \{0, \dots, N-1\}$ .

### Avec un champs électrique constant

Ajoutons maintenant un champ électrique constant. Les équations décrivant la position et la vitesse des électrons sont données par :

$$\begin{cases} x'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= -\frac{q_e}{m_e} \cdot E_0(x(t)) \end{cases}$$

avec  $t \in [0; T]$ ,  $m_e$  la masse d'un électron,  $q_e$  la valeur de la charge élémentaire de l'électron,  $E_0$  la fonction représentant la valeur du champ électrique en fonction de la position.

Dans la simulation, la fonction  $E_0$  utilisée est  $E_0 : x \mapsto \sin(\frac{\pi}{x \cdot L}) \times \frac{-m_e}{q_e}$ .

Soit en discrétisant et en utilisant la méthode d'Euler explicite :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + h \cdot v_n \\ v_{n+1} &= -\frac{q_e}{m_e} \cdot E_0(x_n) \end{cases}$$

### Avec un champs électrique discrétisé

Dans les deux cas précédent, le champs électrique était donné par une fonction. De ce fait, on pouvait savoir la valeur du champs électrique en n'importe quelle position.

Cependant, le champs électrique d'un plasma étant auto-consistant, il se modifie à chaque pas de temps, en fonction du mouvement des électrons. De ce fait il faut le calculer à chaque pas de temps, et donc le discrétisé. Cela implique que le champs électrique est une liste finie de valeurs.

Le calcul de la force électrique auquel est soumise un électron ce fait donc de la façon suivante.

Notons  $E_{elec}$  la force électrique exercée sur un électron. A un  $t$  instant, l'électron se trouve à une position que nous noterons  $x_0$ . Etant donné que le champs électrique est une liste finie de valeurs, dans la majorité des cas, nous ne connaissons pas la valeur du champs électrique au point  $x_0$ .

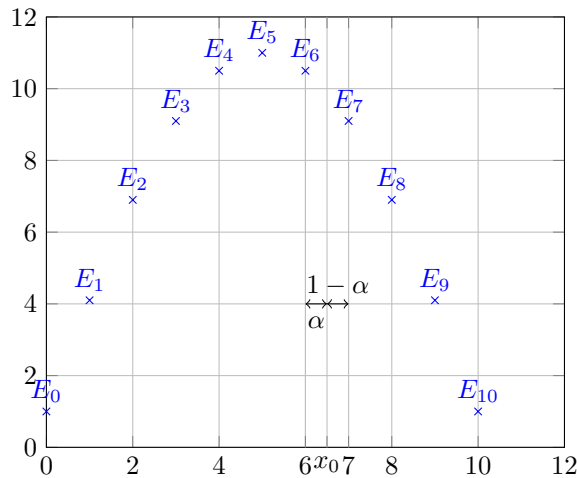
On a  $\lfloor x_0 \rfloor \leq x_0 < \lfloor x_0 \rfloor + 1$ . Nous considérons donc qu'un électron à la position  $x_0$  est soumis aux champs électrique des points  $\lfloor x_0 \rfloor$  et  $\lfloor x_0 \rfloor + 1$ , car nous connaissons la valeur du champs électrique en ces deux points. La dernière étape consiste à pondérer le poids de chacun de ces deux champs électrique. Plus l'électron est proche de  $\lfloor x_0 \rfloor$ , plus le champs électrique en ce point a de l'influence. De même pour  $\lfloor x_0 \rfloor + 1$ .

D'où au final, en prenant  $\alpha = \lfloor x_0 \rfloor + 1 - x_0$  :

$$E_{elec} = (1 - \alpha) \times E_{\lfloor x_0 \rfloor} + \alpha \times E_{\lfloor x_0 \rfloor + 1}$$

Le graphique ci-dessous représente un exemple de discrétisation du champs électrique.

Exemple de discrétisation du champs électrique



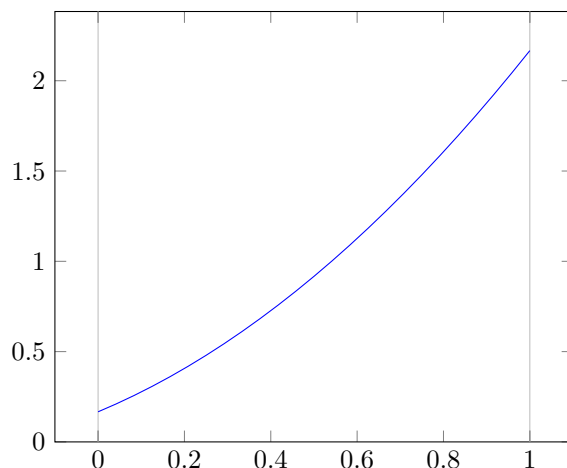
On observe qu'un électron à la position  $x_0$  subira une force électrique  $E_{elec} = (1 - \alpha) \times E_6 + \alpha \times E_7$ .

## Méthode d'acceptation-rejet

La méthode d'acceptation-rejet est une méthode permettant de simuler une loi de probabilité de densité  $f$  lorsqu'il est compliqué de simuler directement cette densité. Nous expliquons ci-après le fonctionnement de la méthode d'acceptation-rejet.

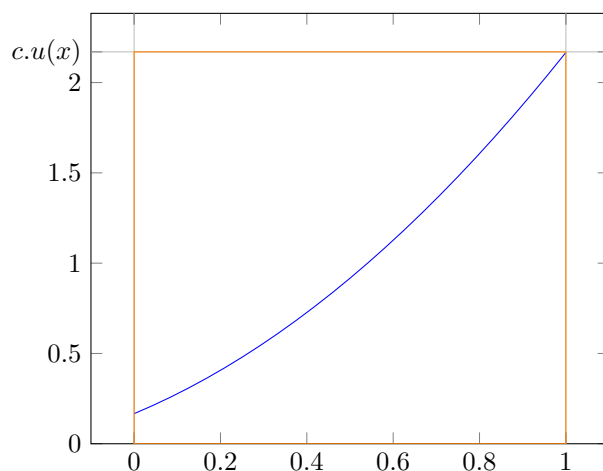
Considérons une variable aléatoire  $X$  dont la fonction de densité est donné par :  $f_X(x) = (x^2 + x + \frac{1}{6}) \times \mathbf{1}_{[0;1]}(x)$ .

*Fonction de densité de  $(x^2 + x + \frac{1}{6}) \times \mathbf{1}_{[0;1]}(x)$*



Le support de la loi de  $X$  est finie, donc peut donc l'inscrire dans un rectangle. Ce rectangle correspond à la densité d'une loi uniforme  $u$ , augmenté d'un facteur  $c$ .

*Fonction de densité de  $(x^2 + x + \frac{1}{6}) \times \mathbf{1}_{[0;1]}(x)$  inscrite dans un rectangle*



Cela fait, il faut générer des valeurs issues de la densité de  $u$  et d'en accepter seulement une partie, de sorte que les valeurs retenus semblent provenir de la densité de  $X$ . On applique ensuite l'algorithme suivant :

1. On prend une valeur  $\alpha$  sur  $[0; 1]$ , obtenue de la loi uniforme.
2. On prend une valeur  $\beta$  sur  $[0; c.u(x)]$  obtenue de la loi uniforme et multiplié par le facteur  $c$ .
3. On positionne cette valeur sur le graphique de la densité de  $f$ . Si le point  $(\alpha, \beta)$  se situe sous la courbe, c'est-à-dire si  $\beta \leq f_X(\alpha)$ , alors la valeur est acceptée. Sinon, elle est refusée.

4. Reprendre à l'étape 1 autant de fois que nécessaire pour avoir le nombre de points suffisant.

*Fonction de densité de  $(x^2 + x + \frac{1}{6}) \times \mathbf{1}_{[0;1]}(x)$  inscrite dans un rectangle*

