

Simulation Numérique de l'amortissement Landau dans les plasmas

Yassine MOUFTAH
Guillaume ROUMAGE

2019

Contents

1	Introduction	4
2	Plasma : définition, intérêts scientifiques et industriels	4
3	Description des modèles théoriques utilisés	4
4	Description des méthodes numériques utilisés	4
5	Travail réalisé	4
5.1	Notations et constantes	4
5.2	Simulation de mouvements de particules en 1D	4
5.2.1	Avec un champs électrique nul	4
5.2.2	Avec un champs électrique stationnaire	5
5.2.3	Avec un champs électrique discrétisé	7
5.3	Calculs relatifs aux densité	8
5.3.1	Méthode d'acceptation-rejet	8
5.3.2	Densité à partir d'un nuage de points	10
6	Conclusion	10

Dans tout le document, les problèmes seront étudiés sur un intervalle de temps noté $[0; T]$, avec $T \in]0; +\infty[$. Pour discrétiser le problème afin de faire des simulations numériques, on choisit un nombre de pas N . L'intervalle $[0; T]$ est subdivisé en N sous-intervalles. Le pas de temps, représenté par dt , est alors donné par la formule : $dt = \frac{T}{N}$.

Les situations en 1D seront étudiés sur un segment de longueur L .

Les champs électriques étudiés seront dans la grande majorité du temps discrétisé en un nombre I de points.

Le pas d'espace, représenté par dx , est alors donné par la formule : $dx = \frac{L}{I}$.

1 Introduction

2 Plasma : définition, intérêts scientifiques et industriels

Il est courant de dire que la matière possède trois états : l'état solide, l'état liquide, ainsi que l'état gazeux. Mais en réalité, il existe un quatrième état de la matière : c'est le plasma.

Comme nous le savons, les atomes sont composés d'un noyau, contenant des protons et des neutrons, autour duquel gravitent des électrons. A l'état solide, liquide ou gazeux, les électrons qui orbitent autour des atomes restent sur leurs orbites. Lorsque de la matière est chauffée, elle passe successivement de l'état solide à l'état liquide, puis de l'état liquide à l'état gazeux. Lorsque le gaz est chauffé à très haute température (supérieure à 10^4 K), une partie de ce gaz devient un plasma.

Cette haute température libère les électrons des orbites de l'atome auquel ils étaient rattachés, qui peuvent désormais se déplacer dans le gaz. Celui-ci devient alors un mélange d'électrons et d'ions positifs.

L'analyse numérique permet de reproduire par le calcul une réalité physique. Cette simulation peut être effectuée pour plusieurs raisons : l'expérience peut-être irréalisable, avoir un coût trop élevé, ou encore pour prévoir grâce aux ordinateurs comment l'expérience va se dérouler, avant de faire cette même expérience en laboratoire, en conditions réelles.

L'analyse numérique permet aussi de vérifier l'exactitude des modèles théoriques sous-jacents, et dégager le modèle qui peut modéliser au mieux les phénomènes physiques observés. Le schéma numérique lui-même doit être bien adapté au modèle. C'est pour cela qu'il y a différents types de méthodes numériques.

3 Description des modèles théoriques utilisés

4 Description des méthodes numériques utilisés

5 Travail réalisé

5.1 Notations et constantes

- Valeur d'une charge élémentaire : $e = 1.6021766208 \cdot 10^{-19} C$.
- Charge élémentaire d'un électron : $q_e = -e = -1.6021766208 \cdot 10^{-19} C$.
- Masse d'un électron : $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} kg$.

5.2 Simulation de mouvements de particules en 1D

Nous simulons en premier lieu le mouvement d'une, puis de plusieurs particules en une dimension, c'est-à-dire sur un segment défini. Nous noterons cette longueur L . Lors de la simulation, si la particule atteint le bord droit du segment, elle est envoyée sur le bord gauche, et inversement. Cela permet à la particule de rester dans l'intervalle d'espace étudié. Les particules étudiées seront les électrons. En effet, les mouvements des ions sont négligeables devant ceux des électrons. Nous considérerons donc les ions comme fixes.

5.2.1 Avec un champ électrique nul

Les équations donnant la position et la vitesse des électrons sont données par les systèmes suivants. Tout d'abord, en faisant l'hypothèse que le champ électrique auquel est soumis l'électron est nul.

$$\begin{cases} x'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= 0 \end{cases}$$

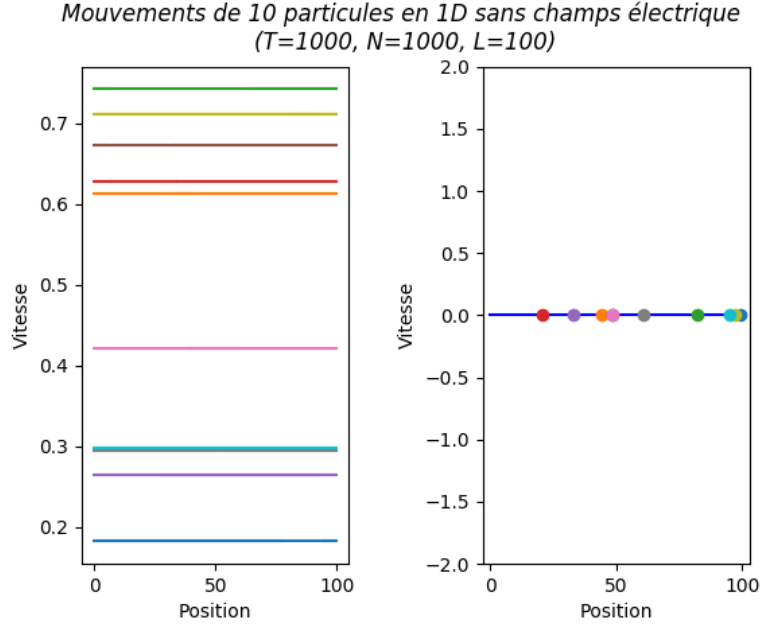
avec $t \in [0; T]$.

En discrétisant et en utilisant la méthode d'Euler explicite, cela se réécrit :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + h.v_n \\ v_{n+1} &= v_n \end{cases}$$

avec $n \in \{0, \dots, N-1\}$.

La vitesse étant constante, l'utilisation de la méthode d'euler symplectique n'apporte pas de précisions supplémentaires.



On remarque que dès que l'on simule plus de 100 particules, l'affichage devient lent. C'est pour cela que parfois, nous ne travaillerons qu'avec l'espace des phases des particules (le graphique de la vitesse en fonction de la position pour chaque particules). D'une part, le mouvement des particules est mieux représentés, et d'autre part, les calculs sont plus rapides.

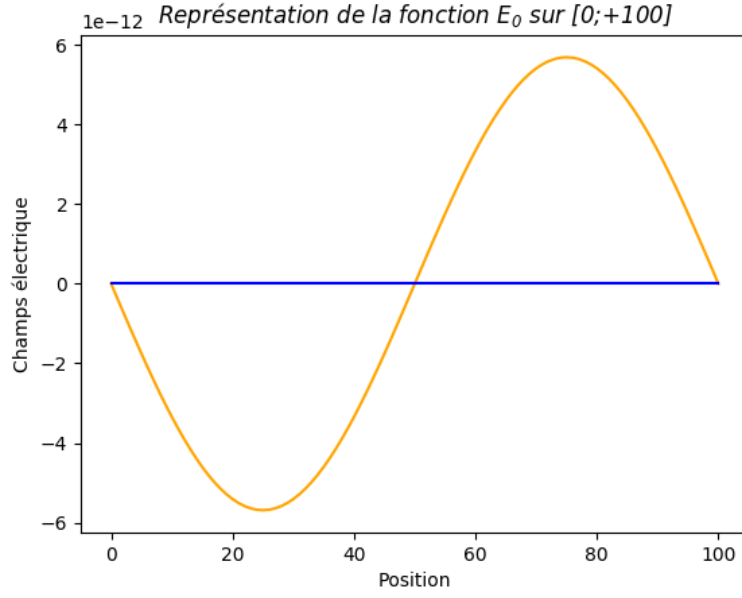
5.2.2 Avec un champs électrique stationnaire

Ajoutons maintenant un champ électrique stationnaire, c'est-à-dire qui ne dépend pas du temps. Les équations décrivant la position et la vitesse des électrons sont données par :

$$\begin{cases} x'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= -\frac{q_e}{m_e} \cdot E_0(x(t)) \end{cases}$$

avec $t \in [0; T]$, m_e la masse d'un électron, q_e la valeur de la charge élémentaire de l'électron, E_0 la fonction représentant la valeur du champ électrique en fonction de la position.

Dans la simulation, la fonction E_0 utilisée est $E_0 : x \mapsto \sin(\frac{2\pi}{L} \times x) \times \frac{-m_e}{q_e}$.



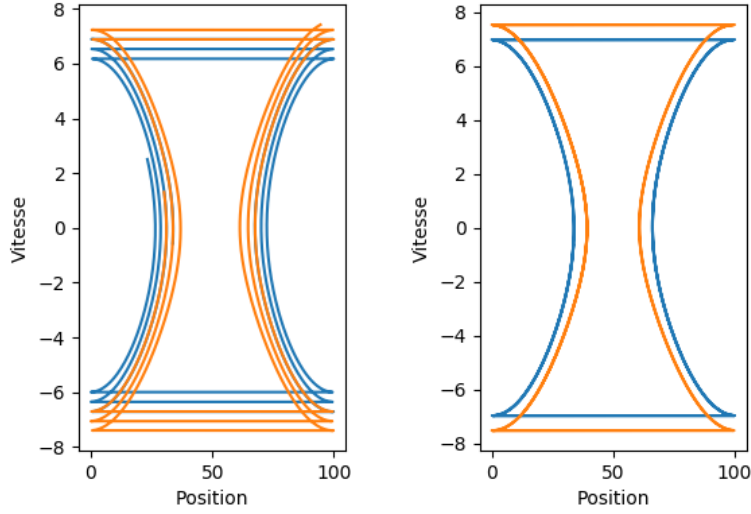
Le terme \sin de E_0 permet d'avoir une fonction périodique sur l'intervalle de temps étudié. La multiplication par le facteur $\frac{-m_e}{q_e} \simeq \frac{10^{-30}}{10^{-19}} \simeq 10^{-11}$ permet de diminuer la valeur du champs électrique, de façon à ce que la simulation soit exploitable. En discrétisant et avec la méthode d'Euler explicite :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + h.v_n \\ v_{n+1} &= v_n - h.\frac{q_e}{m_e}.E_0(x_n) \end{cases}$$

Ce système étant un système hamiltonien séparé, nous pouvons aussi effectué une discrétisation en utilisant la méthode d'Euler symplectique :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + h.v_n \\ v_{n+1} &= v_n - h.\frac{q_e}{m_e}.E_0(x_{n+1}) \end{cases}$$

*Comparaison d'euler explicite et euler symplectique
avec 2 particules en 1D avec champs électrique
(T=100, N=1000, L=100)*



On remarque que la méthode d'euler symplectique est plus précise sans devoir faire de discrétisation plus fine. Pour cette raison, nous utiliserons autant que possible la méthode d'euler symplectique.

5.2.3 Avec un champs électrique discrétisé

Dans les deux cas précédent, le champs électrique est donné par une fonction continue. De ce fait, on pouvait savoir la valeur du champs électrique en n'importe quelle position.

Chaque particule est soumise à un champs électrique. Plus précisément, il y a deux champs électrique. Le champs électrique extérieur, et celui créé par les particules, qui est auto-consistant. Il se modifie donc à chaque pas de temps, en fonction du mouvement des électrons.

De ce fait il faut le calculer à chaque pas de temps, et donc le discrétisé. Cela implique que le champs électrique est une liste finie de valeurs.

Pour simplifier la modélisation, nous considérons qu'un seul et unique champs électrique agit.

Le calcul de la force électrique auquel est soumise un électron se fait donc de la façon suivante :

Notons E_{elec} la force électrique exercée sur un électron. A un t instant, l'électron se trouve à une position que nous noterons x_0 .

Etant donné que le champs électrique est une liste finie de valeurs, dans la majorité des cas, nous ne connaissons pas la valeur du champs électrique au point x_0 .

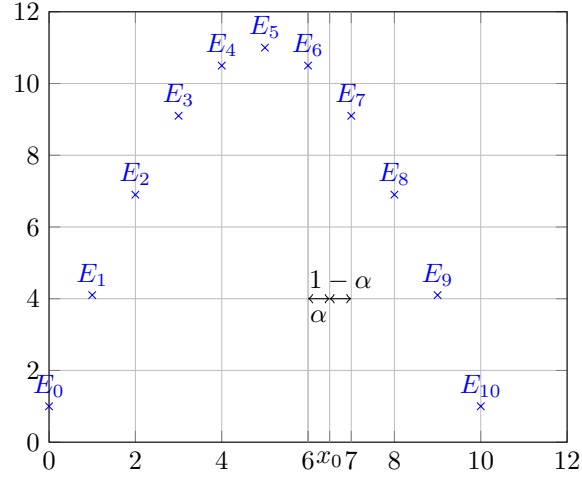
On a $\lfloor x_0 \rfloor \leq x_0 < \lfloor x_0 \rfloor + 1$. Nous considérons donc qu'un électron à la position x_0 est soumis aux champs électrique des points $\lfloor x_0 \rfloor$ et $\lfloor x_0 \rfloor + 1$, car nous connaissons la valeur du champs électrique en ces deux points (par la discrétisation du champs).

La dernière étape consiste à pondérer le poids de chacun de ces deux champs électrique. Plus l'électron est proche de $\lfloor x_0 \rfloor$, plus le champs électrique en ce point a de l'influence. De même pour $\lfloor x_0 \rfloor + 1$.

D'où au final, en prenant $\alpha = x_0 - \lfloor x_0 \rfloor$:

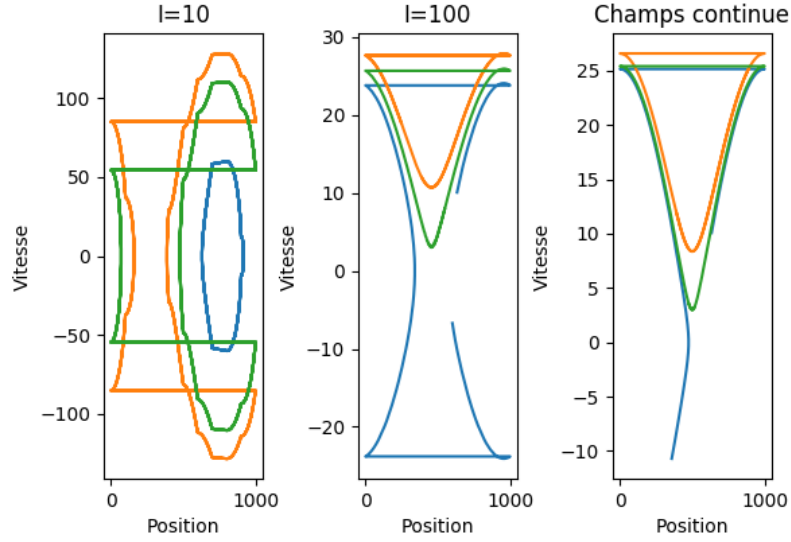
$$E_{elec} = (1 - \alpha) \times E_{\lfloor x_0 \rfloor} + \alpha \times E_{\lfloor x_0 \rfloor + 1}$$

Exemple de discrétisation du champs électrique



On observe qu'un électron à la position x_0 subira une force électrique $E_{elec} = (1 - \alpha) \times E_6 + \alpha \times E_7$.

Discrétisation du champs électrique avec 3 particules ($T=100$, $N=100000$, $L=1000$)



On note que plus la subdivision est fine, plus le mouvement des particules dans le champs discrétisé se rapproche du mouvement idéal, qui est celui lorsque le champs est continu.

Rappelons tout de même qu'étant donné qu'une méthode numérique est utilisée, bien que le mouvement se rapproche de celui voulu, il y a toujours une petite erreur d'approximation qui est introduite à chaque pas.

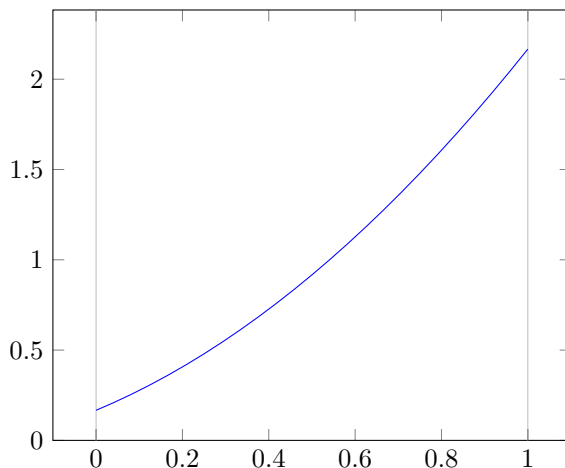
5.3 Calculs relatifs aux densité

5.3.1 Méthode d'acceptation-rejet

La méthode d'acceptation-rejet est une méthode permettant de simuler une loi de probabilité de densité f lorsqu'il est compliqué de simuler directement cette densité. Nous expliquons ci-après le fonctionnement de la méthode d'acceptation-rejet.

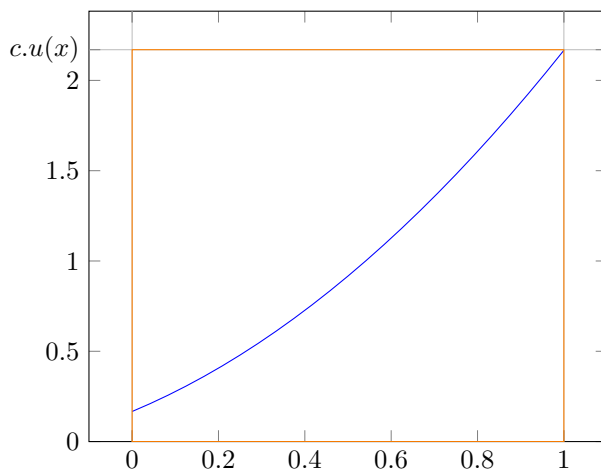
Considérons par exemple une variable aléatoire X dont la fonction de densité f_X est donnée par : $f_X(x) = (x^2 + x + \frac{1}{6}) \times \mathbf{1}_{[0;1]}(x)$.

Fonction de densité de $(x^2 + x + \frac{1}{6}) \times \mathbf{1}_{[0;1]}(x)$



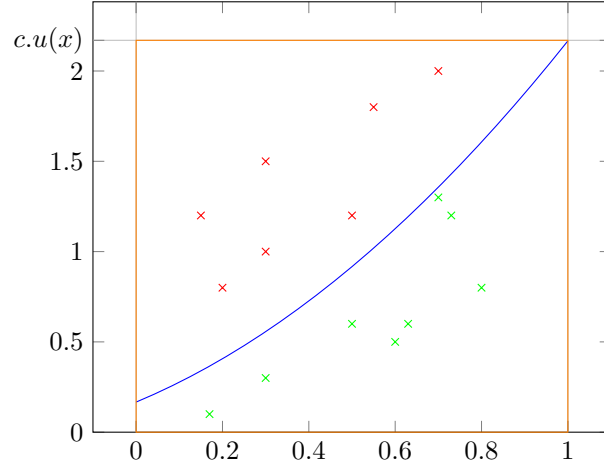
Le support de la loi de X est de la forme $[a; b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. On peut donc l'inscrire dans un rectangle. Ce rectangle correspond à la densité d'une loi uniforme u , augmenté d'un facteur c . Dans notre exemple, comme la f_X est définie sur $[0; 1]$, on a $c = f(1)$. De manière générale, si f_X est définie sur $[a; b]$, on a $c = \max_{x \in [a; b]} f_X(x)$.

Fonction de densité de $(x^2 + x + \frac{1}{6}) \times \mathbf{1}_{[0;1]}(x)$ inscrite dans un rectangle



Cela fait, il faut générer des valeurs issues de la densité de u , et en accepter seulement une partie, de sorte que les valeurs retenus semblent provenir de la densité de X . On applique ensuite l'algorithme suivant :

1. On prend une valeur α sur $[0; 1]$, obtenue de la loi uniforme sur $[0; 1]$.
2. On prend une valeur β sur $[0; c.u(x)]$ obtenue de la loi uniforme sur $[0; 1]$ et multiplié par le facteur c .
3. On positionne cette valeur sur le graphique de la densité de X . Si le point $(\alpha; \beta)$ se situe sous la courbe de f_X , c'est-à-dire si $\beta \leq f_X(\alpha)$, alors la valeur est acceptée. Sinon, elle est refusée.
4. Reprendre à l'étape 1 autant de fois que nécessaire pour avoir le nombre de points suffisant.



La méthode d'acceptation-rejet peut-être utilisé pour simuler n'importe qu'elle variable aléatoire X de densité de probabilité f_X , tant que f_X peut-être borné par une autre densité g_Y à un facteur multiplicatif près, et que le support de f_X est de la forme $[a; b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.

Parler des performance algorithmique pour générer le nuage de points

5.3.2 Densité à partir d'un nuage de points

Dans la sous-sous-section 5.3.1, nous avons vu comment constitué un nuage de points correspondant à une densité. Ici, nous allons étudié comment faire le processus inverse : constitué une densité correspondant à un nuage de points.

Pour cela, on considère un nuage de points sur un intervalle $[a; b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. L'algorithme à appliquer est le suivant :

1. Discrétiser $[a; b]$ en N sous-intervalles noté $[a_i; b_i]$ pour $i \in \{0, \dots, N\}$. On a donc $a_j = b_{j+1}$ pour $j \in \{1, \dots, N-2\}$.
2. Compter le nombre de particules dans chaque intervalles $[a_i, b_i]$, que nous notons $n_{p,i}$. Le nombre de particules aux points a_0, a_1, \dots, a_{N-1} sont respectivement $n_{p,0}, n_{p,1}, \dots, n_{p,N-1}$.
3. Pour avoir le nombre de particules en a_N , nous appliquons la méthode suivante : on compte le nombre de particules dans l'intervalle $[\frac{a_{N-1}+a_N}{2}; a_N]$ que nous multiplions par 2. En effet, étant donné que le point a_{N+1} n'existe pas, nous ne pouvons pas appliquer la même méthode que précédemment.

6 Conclusion