Семестр 2 (2019), занятие 4. Решение нелинейных уравнений

Постановка задачи

Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ такая, что $f(a)f(b) < 0$. Требуется найти приближенное значение корня уравнения

$$f(x) = 0$$

с абсолютною погрешностью $\varepsilon > 0$.

В качестве решения выбирается точка $x^* \in [a, b]$ такая, что

$$f(x^* - \varepsilon)f(x^* + \varepsilon) < 0.$$

Если точка $x^* - \varepsilon$ или точка $x^* + \varepsilon$ выходит за границы отрезка $[a, b]$, то вместо них необходимо рассматривать точку $\max\{x^* - \varepsilon, a\}$ или точку $\min\{x^* + \varepsilon, b\}$.

Последовательность приближений

В большинстве рассматриваемых ниже методах строится последовательность приближений к корню уравнения вида

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$$

Каждый раз проверять условие

$$f(x_{n+1} - \varepsilon)f(x_{n+1} + \varepsilon) < 0 \qquad (1)$$

представляется излишним. Условие (1) будем проверять только, если $|x_n - x_{n+1}| < \varepsilon$. Если оно не выполняется, то следует уменьшить ε.

Метод половинного деления (бисекций)

Строим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$. Положим

$$\begin{aligned} l_n &= b_n - a_n, \\ x_n &= \tfrac{a_n + b_n}{2}, \\ a_0 &= a, \\ b_0 &= b. \end{aligned}$$

Если $f(a_n)f(x_n) < 0$, то

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n, \\ b_{n+1} &= x_n. \end{aligned}$$

Если $f(x_n)f(b_n) < 0$, то

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= x_n, \\ b_{n+1} &= b_n. \end{aligned}$$

Если $l_n < \varepsilon$ или $f(x_n) = 0$, то полагаем

$$x^* = x_n.$$

Метод Ньютона

Строится последовательность приближений к корню уравнения при помощи расчетной формулы

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

В качестве начального приближения можно положить $x_0 = b$.

Производная вычисляется по приближенной формуле

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

для некоторого малого h.

Метод секущих

Строится последовательность приближений к корню уравнения при помощи расчетной формулы

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

В качестве двух первых начальных приближений выберем

$$\begin{aligned} x_0 &= b, \\ x_1 &= b - h, \end{aligned}$$

для некоторого малого $h > 0$.

Метод хорд

Строится последовательность приближений к корню уравнения при помощи расчетной формулы

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} f(x_n), \quad f(x_0)f(x_1) < 0.$$

Можно положить

$$\begin{aligned} x_0 &= b, \\ x_1 &= a. \end{aligned}$$

В качестве неподвижного конца x_0 (правильно) выбирают тот конец, для которого знак $f(x)$ совпадает со знаком $f''(x)$.

Особенности использования метода Ньютона

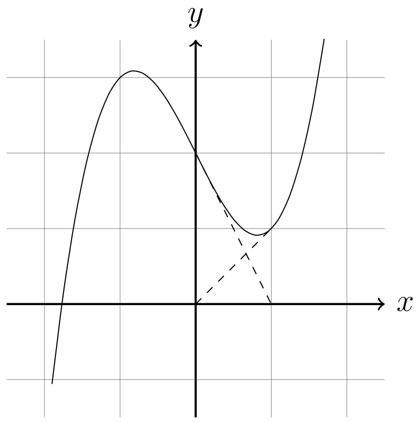

Рис. 1: График функции $f(x) = x^3 - 2x + 2$.

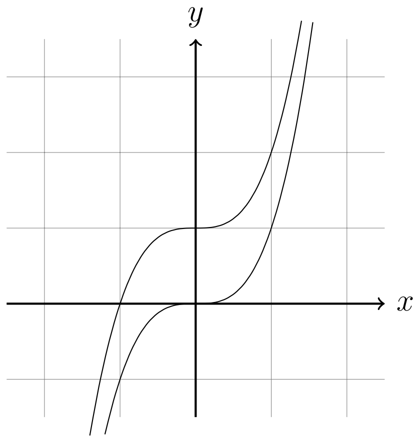

Рис. 2: Графики функций $f_1(x) = x^3$ и $f_2(x) = x^3 + 1$.