

# Теоретические основы информатики (концептуальные модели и математические основы)

Лекция № 1. Элементы теории вероятностей

А.С. Шундеев

# Содержание

- 1 Системы множеств
- 2 Мера и интеграл Лебега
- 3 Основные теоремы интеграла Лебега
- 4 Условное математическое ожидание
- 5 Измеримость супремума

Основной целью данного раздела является введение понятий

- $\sigma$ -алгебры,
- измеримого пространства,
- измеримого отображения.

Основной целью данного раздела является введение понятий

- $\sigma$ -алгебры,
- измеримого пространства,
- измеримого отображения.

Это необходимо для более глубокого понимания определений борелевской  $\sigma$ -алгебры и стандартного измеримого пространства.

# Содержание

## 1 Системы множеств

- Метрические пространства
- Измеримые пространства
- Прямое произведение измеримых пространств

## 2 Мера и интеграл Лебега

## 3 Основные теоремы интеграла Лебега

## 4 Условное математическое ожидание

## 5 Измеримость супремума

# Системы множеств

## Метрические пространства

### Определение 1.1.

**Метрическим пространством** называется пара  $(M, \rho)$ , где  $M$  – непустое множество, а функция  $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ , называемая **метрикой (расстояние)**, удовлетворяет следующим условиям:

1.  $\rho(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y$ ;
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  для любых  $x, y \in M$  (**симметричность**);
3.  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$  для любых  $x, y, z \in M$  (**неравенство треугольника**).

# Системы множеств

## Метрические пространства

### Определение 1.1.

**Метрическим пространством** называется пара  $(M, \rho)$ , где  $M$  – непустое множество, а функция  $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ , называемая **метрикой (расстояние)**, удовлетворяет следующим условиям:

1.  $\rho(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y$ ;
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  для любых  $x, y \in M$  (**симметричность**);
3.  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$  для любых  $x, y, z \in M$  (**неравенство треугольника**).

### Замечание

Замена в определении 1.1 условия 1 на условие

1'.  $\rho(x, x) = 0$  для любого  $x \in M$ ;

приводит к определению **псевдометрического пространства**. При этом функция  $\rho$  будет называться **псевдометрикой**.

# Системы множеств

## Метрические пространства

### Пример 1.1.

В качестве  $M$  возьмём  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$  или  $\mathbb{N}$ . Положим  $\rho_{\text{abs}} := |x - y|$  ( $x, y \in M$ ). Пара  $(M, \rho_{\text{abs}})$  является метрическим пространством.



# Системы множеств

## Метрические пространства

### Пример 1.1.

В качестве  $M$  возьмём  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$  или  $\mathbb{N}$ . Положим  $\rho_{\text{abs}} := |x - y|$  ( $x, y \in M$ ). Пара  $(M, \rho_{\text{abs}})$  является метрическим пространством.

### Пример 1.2.

Определим функцию

$$\rho_{\arctan}(x, y) := |\arctan(x) - \arctan(y)| \quad (x, y \in \overline{\mathbb{R}}),$$

где формально считаем  $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$  и  $\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$ . Пара  $(\overline{\mathbb{R}}, \rho_{\arctan})$  является метрическим пространством.

# Системы множеств

## Метрические пространства

### Пример 1.3.

На любом непустом множестве  $M$  метрикой будет

$$\rho_{0-1}(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ 1, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $x, y \in M$ .

# Системы множеств

## Метрические пространства

### Пример 1.3.

На любом непустом множестве  $M$  метрикой будет

$$\rho_{0-1}(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ 1, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $x, y \in M$ .

### Пример 1.4.

Пусть задано метрическое пространство  $(M, \rho)$  и непустое подмножество  $M' \subseteq M$ . Тогда пара  $(M', \rho)$  является метрическим пространством.

# Системы множеств

## Метрические пространства

### Пример 1.5.

Пусть заданы два метрических пространства  $(M_1, \rho_1)$  и  $(M_2, \rho_2)$ . На множестве  $M_1 \times M_2$  метриками будут

$$\rho_{\max} := \max \{ \rho_1(x_1, y_1), \rho_2(x_2, y_2) \},$$

$$\rho_{\text{sum}} := \rho_1(x_1, y_1) + \rho_2(x_2, y_2),$$

$$\rho_{\text{sqrt}} := [\rho_1(x_1, y_1)^2 + \rho_2(x_2, y_2)^2]^{1/2},$$

где  $x_1, y_1 \in M_1$  и  $x_2, y_2 \in M_2$ .

### Пример 1.5.

Пусть заданы два метрических пространства  $(M_1, \rho_1)$  и  $(M_2, \rho_2)$ . На множестве  $M_1 \times M_2$  метриками будут

$$\rho_{\max} := \max \{ \rho_1(x_1, y_1), \rho_2(x_2, y_2) \},$$

$$\rho_{\text{sum}} := \rho_1(x_1, y_1) + \rho_2(x_2, y_2),$$

$$\rho_{\text{sqrt}} := [\rho_1(x_1, y_1)^2 + \rho_2(x_2, y_2)^2]^{1/2},$$

где  $x_1, y_1 \in M_1$  и  $x_2, y_2 \in M_2$ .

Метрическое пространство может быть определено через нормированное пространство.

### Определение 1.2.

**Нормированным пространством** называется пара  $(L, \|\cdot\|)$ , где  $L$  – линейное пространство над полем  $\mathbb{R}$ , а функция  $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}_+$ , называемая **нормой**, удовлетворяет следующим условиям:

- $\|x\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$ ;
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  для любых  $\lambda \in \mathbb{R}$  и  $x \in L$ ;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  для любых  $x, y \in L$ .

### Определение 1.2.

**Нормированным пространством** называется пара  $(L, \|\cdot\|)$ , где  $L$  – линейное пространство над полем  $\mathbb{R}$ , а функция  $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}_+$ , называемая **нормой**, удовлетворяет следующим условиям:

- $\|x\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$ ;
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  для любых  $\lambda \in \mathbb{R}$  и  $x \in L$ ;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  для любых  $x, y \in L$ .

Заметим, что пара  $(L, \rho_{\|\cdot\|})$ , где  $\rho_{\|\cdot\|} := \|x - y\|$  для всех  $x, y \in L$ , является метрическим пространством. При этом говорят, что метрика  $\rho_{\|\cdot\|}$  порождена нормой  $\|\cdot\|$ .

# Системы множеств

## Метрические пространства

### Замечание

Отказ от первого условия в определении 1.2 приводит к понятиям *полунормы* и *полунормированного пространства*. Полунорма может принимать нулевое значение и на ненулевых элементах линейного пространства.



# Системы множеств

## Метрические пространства

### Замечание

Отказ от первого условия в определении 1.2 приводит к понятиям *полунормы* и *полунормированного пространства*. Полунорма может принимать нулевое значение и на ненулевых элементах линейного пространства.

Следует отметить, что точно также, как норма порождает метрику, полунорма порождает псевдометрику.

# Системы множеств

## Метрические пространства

### Замечание

Отказ от первого условия в определении 1.2 приводит к понятиям *полунормы* и *полунормированного пространства*. Полунорма может принимать нулевое значение и на ненулевых элементах линейного пространства.

Следует отметить, что точно также, как норма порождает метрику, полунорма порождает псевдометрику.

### Пример 1.6.

В пространстве  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) нормами будут

$$\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|\mathbf{x}\|_2 := \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\},$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ .

# Системы множеств

## Метрические пространства

Для произвольного метрического пространства  $(M, \rho)$  определим понятия открытого и замкнутого множества.

# Системы множеств

## Метрические пространства

Для произвольного метрического пространства  $(M, \rho)$  определим понятия открытого и замкнутого множества.

### Определение 1.3.

**Открытым шаром** радиуса  $r > 0$  с центром в точке  $x \in M$  называется множество  $B(x, r) := \{y \in M : \rho(x, y) < r\}$ .

# Системы множеств

## Метрические пространства

Для произвольного метрического пространства  $(M, \rho)$  определим понятия открытого и замкнутого множества.

### Определение 1.3.

**Открытым шаром** радиуса  $r > 0$  с центром в точке  $x \in M$  называется множество  $B(x, r) := \{y \in M : \rho(x, y) < r\}$ .

### Определение 1.4.

Множество  $G \subseteq M$  называется **открытым**, если для любой его точки  $x \in G$  существует  $r > 0$  такое, что  $B(x, r) \subseteq G$ .

# Системы множеств

## Метрические пространства

Для произвольного метрического пространства  $(M, \rho)$  определим понятия открытого и замкнутого множества.

### Определение 1.3.

**Открытым шаром** радиуса  $r > 0$  с центром в точке  $x \in M$  называется множество  $B(x, r) := \{y \in M : \rho(x, y) < r\}$ .

### Определение 1.4.

Множество  $G \subseteq M$  называется **открытым**, если для любой его точки  $x \in G$  существует  $r > 0$  такое, что  $B(x, r) \subseteq G$ .

### Определение 1.5.

Множество  $F \subseteq M$  называется **замкнутым**, если его дополнение  $F^c$  открыто.

# Системы множеств

## Метрические пространства

Множества  $M$  и  $\emptyset$  одновременно являются открытыми и замкнутыми. Любые объединения и конечные пересечения открытых множеств являются открытыми множествами. Любые пересечения и конечные объединения замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.

# Системы множеств

## Метрические пространства

Для произвольного метрического пространства  $(M, \rho)$  определим понятия, связанные со сходимостью последовательностей его элементов.



# Системы множеств

## Метрические пространства

Для произвольного метрического пространства  $(M, \rho)$  определим понятия, связанные со сходимостью последовательностей его элементов.

### Определение 1.6.

Последовательность  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  называется **фундаментальной**, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N$  такой, что для любых  $n, m \geq N$  выполняется неравенство  $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ .

# Системы множеств

## Метрические пространства

Для произвольного метрического пространства  $(M, \rho)$  определим понятия, связанные со сходимостью последовательностей его элементов.

### Определение 1.6.

Последовательность  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  называется **фундаментальной**, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N$  такой, что для любых  $n, m \geq N$  выполняется неравенство  $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ .

### Определение 1.7.

Последовательность  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  **сходится** к элементу  $x$  ( $x$  является **пределом** этой последовательности), если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$ .

# Системы множеств

## Метрические пространства

### Определение 1.8.

Метрики  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , заданные на непустом множестве  $M$ , называются **эквивалентными**, если существуют константы  $C_1, C_2 > 0$  такие, что

$$C_1\rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq C_2\rho_1(x, y) \quad (x, y \in M).$$

# Системы множеств

## Метрические пространства

### Определение 1.8.

Метрики  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , заданные на непустом множестве  $M$ , называются **эквивалентными**, если существуют константы  $C_1, C_2 > 0$  такие, что

$$C_1\rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq C_2\rho_1(x, y) \quad (x, y \in M).$$

На вещественной прямой  $\mathbb{R}$  метрики  $\rho_{\text{abs}}$  и  $\rho_{\text{arctan}}$  являются эквивалентными. В пространстве  $\mathbb{R}^n$  метрики, порождённые нормами  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  и  $\|\cdot\|_\infty$ , являются эквивалентными. На декартовых произведениях метрических пространств метрики  $\rho_{\text{max}}$ ,  $\rho_{\text{sum}}$  и  $\rho_{\text{sqrt}}$  также будут эквивалентными.

### Определение 1.8.

Метрики  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , заданные на непустом множестве  $M$ , называются **эквивалентными**, если существуют константы  $C_1, C_2 > 0$  такие, что

$$C_1\rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq C_2\rho_1(x, y) \quad (x, y \in M).$$

На вещественной прямой  $\mathbb{R}$  метрики  $\rho_{\text{abs}}$  и  $\rho_{\text{arctan}}$  являются эквивалентными. В пространстве  $\mathbb{R}^n$  метрики, порождённые нормами  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  и  $\|\cdot\|_\infty$ , являются эквивалентными. На декартовых произведениях метрических пространств метрики  $\rho_{\text{max}}$ ,  $\rho_{\text{sum}}$  и  $\rho_{\text{sqrt}}$  также будут эквивалентными.

Эквивалентные метрики определяют одни и те же системы открытых и замкнутых множеств. Фундаментальные (сходящиеся) последовательности у эквивалентных метрик совпадают.

# Системы множеств

## Метрические пространства

### Определение 1.9.

Метрическое пространство называется **полным**, если каждая фундаментальная последовательность в этом пространстве имеет предел.

# Системы множеств

## Метрические пространства

### Определение 1.9.

Метрическое пространство называется **полным**, если каждая фундаментальная последовательность в этом пространстве имеет предел.

Метрическое пространство  $(\mathbb{R}, \rho_{\text{abs}})$  полное. Метрическое пространство  $(\mathbb{Q}, \rho_{\text{abs}})$  не является полным.

# Системы множеств

## Метрические пространства

### Определение 1.10.

Пусть  $(M, \rho)$  – метрическое пространство и  $A \subseteq M$ . Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих  $A$ , называется **замыканием** множества  $A$  и обозначается через  $\overline{A}$ .



# Системы множеств

## Метрические пространства

### Определение 1.10.

Пусть  $(M, \rho)$  – метрическое пространство и  $A \subseteq M$ . Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих  $A$ , называется **замыканием** множества  $A$  и обозначается через  $\overline{A}$ .

### Определение 1.11.

Если  $\overline{A} = M$ , то говорят, что  $A$  **всюду плотное** в  $M$  множество.

# Системы множеств

## Метрические пространства

### Определение 1.10.

Пусть  $(M, \rho)$  – метрическое пространство и  $A \subseteq M$ . Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих  $A$ , называется **замыканием** множества  $A$  и обозначается через  $\bar{A}$ .

### Определение 1.11.

Если  $\bar{A} = M$ , то говорят, что  $A$  **всюду плотное** в  $M$  множество.

### Определение 1.12.

Метрическое пространство называется **сепарабельным**, если в нём существует не более чем счётное всюду плотное множество.

# Системы множеств

## Метрические пространства

### Определение 1.10.

Пусть  $(M, \rho)$  – метрическое пространство и  $A \subseteq M$ . Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих  $A$ , называется **замыканием** множества  $A$  и обозначается через  $\bar{A}$ .

### Определение 1.11.

Если  $\bar{A} = M$ , то говорят, что  $A$  **всюду плотное** в  $M$  множество.

### Определение 1.12.

Метрическое пространство называется **сепарабельным**, если в нём существует не более чем счётное всюду плотное множество.

Метрическое пространство  $(\mathbb{R}, \rho_{abs})$  сепарабельное. Метрическое пространство  $(\mathbb{R}, \rho_{0-1})$  не является сепарабельным.

# Системы множеств

## Метрические пространства

### Определение 1.13.

Полное и сепарабельное метрическое пространство называется **польским пространством**.

### Определение 1.13.

Полное и сепарабельное метрическое пространство называется **польским пространством**.

Метрическое пространство  $\mathbb{R}^n$  с метрикой, порождённой нормой  $\|\cdot\|_1$  ( $\|\cdot\|_2$ ,  $\|\cdot\|_\infty$ ), является польским пространством. Непустое замкнутое подмножество польского пространства является польским пространством.

# Системы множеств

## Метрические пространства

### Определение 1.13.

Полное и сепарабельное метрическое пространство называется **польским пространством**.

Метрическое пространство  $\mathbb{R}^n$  с метрикой, порождённой нормой  $\|\cdot\|_1$  ( $\|\cdot\|_2$ ,  $\|\cdot\|_\infty$ ), является польским пространством. Непустое замкнутое подмножество польского пространства является польским пространством.

### Определение 1.14.

Пусть заданы два метрических пространства  $(M_1, \rho_1)$  и  $(M_2, \rho_2)$ . Об отображение  $f : M_1 \rightarrow M_2$  называется **непрерывным**, если для любого открытого множества  $U \subseteq M_2$  множество  $f^{-1}(U)$  является открытым в  $(M_1, \rho_1)$ .

# Содержание

## 1 Системы множеств

- Метрические пространства
- Измеримые пространства
- Прямое произведение измеримых пространств

## 2 Мера и интеграл Лебега

## 3 Основные теоремы интеграла Лебега

## 4 Условное математическое ожидание

## 5 Измеримость супремума

# Системы множеств

## Измеримые пространства

### Определение 1.15.

Система подмножеств  $\mathcal{S} \subseteq 2^\Omega$  непустого множества  $\Omega$  называется  **$\sigma$ -алгеброй**, если выполняются следующие свойства:

- $\Omega \in \mathcal{S}$ ;
- для любого  $A \in \mathcal{S}$  верно, что  $A^c \in \mathcal{S}$ ;
- для любой последовательности  $\{A_k \in \mathcal{S}\}_{k \in \mathbb{N}}$  верно, что  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{S}$ .

Множество  $\Omega$  называется **единицей**  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{S}$ , а её элементы – **измеримыми множествами**. Пара  $(\Omega, \mathcal{S})$  называется **измеримым пространством**.



# Системы множеств

## Измеримые пространства

Из определения  $\sigma$ -алгебры следует, что она содержит пустое множество и замкнута относительно теоретико-множественных операций  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $\setminus$  и  $\Delta$ . Кроме того,  $\sigma$ -алгебра замкнута относительно взятия не более чем счётного числа пересечений своих элементов.

# Системы множеств

## Измеримые пространства

Из определения  $\sigma$ -алгебры следует, что она содержит пустое множество и замкнута относительно теоретико-множественных операций  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $\setminus$  и  $\Delta$ . Кроме того,  $\sigma$ -алгебра замкнута относительно взятия не более чем счётного числа пересечений своих элементов.

### Пример 1.7.

Примерами  $\sigma$ -алгебр являются  $\{\emptyset, \Omega\}$  и  $2^\Omega$ . Первая из них является самой «бедной». Она содержится в любой другой  $\sigma$ -алгебре. Вторая из них, наоборот, является самой «богатой». Она включает в себя любую другую  $\sigma$ -алгебру, заданную на  $\Omega$ . Каждое непустое подмножество  $A \subseteq \Omega$  определяет  $\sigma$ -алгебру вида  $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ .

# Системы множеств

## Измеримые пространства

Из определения  $\sigma$ -алгебры следует, что она содержит пустое множество и замкнута относительно теоретико-множественных операций  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $\setminus$  и  $\Delta$ . Кроме того,  $\sigma$ -алгебра замкнута относительно взятия не более чем счётного числа пересечений своих элементов.

### Пример 1.7.

Примерами  $\sigma$ -алгебр являются  $\{\emptyset, \Omega\}$  и  $2^\Omega$ . Первая из них является самой «бедной». Она содержится в любой другой  $\sigma$ -алгебре. Вторая из них, наоборот, является самой «богатой». Она включает в себя любую другую  $\sigma$ -алгебру, заданную на  $\Omega$ . Каждое непустое подмножество  $A \subseteq \Omega$  определяет  $\sigma$ -алгебру вида  $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ .

Прежде, чем перейти к рассмотрению более содержательных примеров, введём ряд определений.

# Системы множеств

## Измеримые пространства

### Определение 1.16.

Для семейства подмножеств  $\mathcal{C} \subseteq 2^\Omega$  непустого множества  $\Omega$  через  $\sigma\{\mathcal{C}\}$  будем обозначать **наименьшую**  $\sigma$ -алгебру, заданную на  $\Omega$  и содержащую  $\mathcal{C}$ . Будем также говорить, что  $\sigma\{\mathcal{C}\}$  **порождена**  $\mathcal{C}$ .

# Системы множеств

## Измеримые пространства

### Определение 1.16.

Для семейства подмножеств  $\mathcal{C} \subseteq 2^\Omega$  непустого множества  $\Omega$  через  $\sigma\{\mathcal{C}\}$  будем обозначать **наименьшую**  $\sigma$ -алгебру, заданную на  $\Omega$  и содержащую  $\mathcal{C}$ . Будем также говорить, что  $\sigma\{\mathcal{C}\}$  **порождена**  $\mathcal{C}$ .

Наименьшая  $\sigma$ -алгебра  $\sigma\{\mathcal{C}\}$  всегда существует и единственна. Она представляет собой пересечение всех  $\sigma$ -алгебр, содержащих  $\mathcal{C}$ .

# Системы множеств

## Измеримые пространства

### Определение 1.16.

Для семейства подмножеств  $\mathcal{C} \subseteq 2^\Omega$  непустого множества  $\Omega$  через  $\sigma\{\mathcal{C}\}$  будем обозначать **наименьшую**  $\sigma$ -алгебру, заданную на  $\Omega$  и содержащую  $\mathcal{C}$ . Будем также говорить, что  $\sigma\{\mathcal{C}\}$  **порождена**  $\mathcal{C}$ .

Наименьшая  $\sigma$ -алгебра  $\sigma\{\mathcal{C}\}$  всегда существует и единственна. Она представляет собой пересечение всех  $\sigma$ -алгебр, содержащих  $\mathcal{C}$ .

### Определение 1.17.

Пусть  $(M, \rho)$  – метрическое пространство и  $\mathcal{T}$  – семейство всех открытых множеств этого метрического пространства. По определению, **борелевской**  $\sigma$ -алгеброй называется  $\mathcal{B}(M, \rho) := \sigma\{\mathcal{T}\}$ , а её элементы называются **борелевскими множествами**.

# Системы множеств

## Измеримые пространства

### Определение 1.16.

Для семейства подмножеств  $\mathcal{C} \subseteq 2^\Omega$  непустого множества  $\Omega$  через  $\sigma\{\mathcal{C}\}$  будем обозначать **наименьшую**  $\sigma$ -алгебру, заданную на  $\Omega$  и содержащую  $\mathcal{C}$ . Будем также говорить, что  $\sigma\{\mathcal{C}\}$  **порождена**  $\mathcal{C}$ .

Наименьшая  $\sigma$ -алгебра  $\sigma\{\mathcal{C}\}$  всегда существует и единственна. Она представляет собой пересечение всех  $\sigma$ -алгебр, содержащих  $\mathcal{C}$ .

### Определение 1.17.

Пусть  $(M, \rho)$  – метрическое пространство и  $\mathcal{T}$  – семейство всех открытых множеств этого метрического пространства. По определению, **борелевской**  $\sigma$ -алгеброй называется  $\mathcal{B}(M, \rho) := \sigma\{\mathcal{T}\}$ , а её элементы называются **борелевскими множествами**.

Если из контекста понятно о какой метрике идет речь, то будет использоваться сокращенное обозначение  $\mathcal{B}(M)$ .

# Системы множеств

## Измеримые пространства

### Пример 1.8.

Система открытых подмножеств пространства  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) с евклидовой метрикой порождает борелевскую  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ . Для борелевской  $\sigma$ -алгебры на вещественной прямой  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  иногда используются другие эквивалентные определения. Например, она может быть порождена системой интервалов вида  $(a, b)$  или системой неограниченных промежутков вида  $(-\infty, b]$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$ .



# Системы множеств

## Измеримые пространства

### Пример 1.8.

Система открытых подмножеств пространства  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) с евклидовой метрикой порождает борелевскую  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ . Для борелевской  $\sigma$ -алгебры на вещественной прямой  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  иногда используются другие эквивалентные определения. Например, она может быть порождена системой интервалов вида  $(a, b)$  или системой неограниченных промежутков вида  $(-\infty, b]$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$ .

### Пример 1.9.

На расширенной вещественной прямой  $\overline{\mathbb{R}}$  борелевская  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}, \rho_{\arctan})$  порождается системой неограниченных промежутков вида  $(a, \infty]$  или  $[-\infty, a)$ , где  $a \in \mathbb{R}$ .

Ранее было отмечено, что на  $\mathbb{R}$  метрики  $\rho_{\arctan}$  и  $\rho_{\text{abs}}$  определяют общую систему открытых множеств. Поэтому имеет место включение  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ .

# Системы множеств

## Измеримые пространства

### Определение 1.18.

Пусть  $(\Omega_1, \mathcal{S}_1)$  и  $(\Omega_2, \mathcal{S}_2)$  – два произвольных измеримых пространства. Отображение  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  называется  $\mathcal{S}_1 | \mathcal{S}_2$ -**измеримым** (в дальнейшем, будет также использоваться запись  $f \in \mathcal{S}_1 | \mathcal{S}_2$ ), если

$$\sigma\{f\} := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{S}_2\} \subseteq \mathcal{S}_1.$$

# Системы множеств

## Измеримые пространства

### Определение 1.18.

Пусть  $(\Omega_1, \mathcal{S}_1)$  и  $(\Omega_2, \mathcal{S}_2)$  – два произвольных измеримых пространства. Отображение  $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$  называется  $\mathcal{S}_1 | \mathcal{S}_2$ -**измеримым** (в дальнейшем, будет также использоваться запись  $f \in \mathcal{S}_1 | \mathcal{S}_2$ ), если

$$\sigma\{f\} := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{S}_2\} \subseteq \mathcal{S}_1.$$

Система множеств  $\sigma\{f\}$  представляет собой  $\sigma$ -алгебру с единицей  $\Omega_1$ , о которой говорят, что она **порождена** измеримым отображением  $f$ .

# Системы множеств

## Измеримые пространства

### Определение 1.18.

Пусть  $(\Omega_1, \mathcal{S}_1)$  и  $(\Omega_2, \mathcal{S}_2)$  – два произвольных измеримых пространства. Отображение  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  называется  $\mathcal{S}_1 | \mathcal{S}_2$ -**измеримым** (в дальнейшем, будет также использоваться запись  $f \in \mathcal{S}_1 | \mathcal{S}_2$ ), если

$$\sigma\{f\} := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{S}_2\} \subseteq \mathcal{S}_1.$$

Система множеств  $\sigma\{f\}$  представляет собой  $\sigma$ -алгебру с единицей  $\Omega_1$ , о которой говорят, что она **порождена** измеримым отображением  $f$ .

Будем также говорить, что измеримые отображения  $f_1, \dots, f_n$  ( $n \geq 2$ ), заданные на  $(\Omega_1, \mathcal{S}_1)$ , **порождают**  $\sigma$ -алгебру  $\sigma\{f_1, \dots, f_n\} := \sigma\{\sigma\{f_1\}, \dots, \sigma\{f_n\}\}$ .

# Системы множеств

## Измеримые пространства

### Определение 1.19.

Пусть  $(\Omega_1, \mathcal{S}_1)$ ,  $(\Omega_2, \mathcal{S}_2)$  и  $(\Omega_3, \mathcal{S}_3)$  – произвольные измеримые пространства,  $f \in \mathcal{S}_1 | \mathcal{S}_2$  и  $g \in \mathcal{S}_1 | \mathcal{S}_3$ . Отображение  $g$  называется  **$f$ -измеримым**, если  $\sigma\{g\} \subseteq \sigma\{f\}$ .

# Системы множеств

## Измеримые пространства

### Определение 1.19.

Пусть  $(\Omega_1, \mathcal{S}_1)$ ,  $(\Omega_2, \mathcal{S}_2)$  и  $(\Omega_3, \mathcal{S}_3)$  – произвольные измеримые пространства,  $f \in \mathcal{S}_1 | \mathcal{S}_2$  и  $g \in \mathcal{S}_1 | \mathcal{S}_3$ . Отображение  $g$  называется  **$f$ -измеримым**, если  $\sigma\{g\} \subseteq \sigma\{f\}$ .

### Утверждение 1.1.

Пусть заданы измеримые пространства  $(\Omega_1, \mathcal{S}_1)$ ,  $(\Omega_2, \mathcal{S}_2)$  и  $(\Omega_3, \mathcal{S}_3)$ , а также измеримые отображения  $f \in \mathcal{S}_1 | \mathcal{S}_2$  и  $g \in \mathcal{S}_2 | \mathcal{S}_3$ . Тогда измеримым будет отображение  $g \circ f \in \mathcal{S}_1 | \mathcal{S}_3$ .

# Системы множеств

## Измеримые пространства

### Определение 1.19.

Пусть  $(\Omega_1, \mathcal{S}_1)$ ,  $(\Omega_2, \mathcal{S}_2)$  и  $(\Omega_3, \mathcal{S}_3)$  – произвольные измеримые пространства,  $f \in \mathcal{S}_1 | \mathcal{S}_2$  и  $g \in \mathcal{S}_1 | \mathcal{S}_3$ . Отображение  $g$  называется  **$f$ -измеримым**, если  $\sigma\{g\} \subseteq \sigma\{f\}$ .

### Утверждение 1.1.

Пусть заданы измеримые пространства  $(\Omega_1, \mathcal{S}_1)$ ,  $(\Omega_2, \mathcal{S}_2)$  и  $(\Omega_3, \mathcal{S}_3)$ , а также измеримые отображения  $f \in \mathcal{S}_1 | \mathcal{S}_2$  и  $g \in \mathcal{S}_2 | \mathcal{S}_3$ . Тогда измеримым будет отображение  $g \circ f \in \mathcal{S}_1 | \mathcal{S}_3$ .

Рассмотрим два важных типа измеримых отображений.

# Системы множеств

## Измеримые пространства

### Определение 1.20.

Предположим, что непустые множества  $\Omega$  и  $\Sigma$  имеют структуру метрического пространства. В этом случае  $\mathcal{B}(\Omega) | \mathcal{B}(\Sigma)$ -измеримое отображение будет называться **борелевским**.



# Системы множеств

## Измеримые пространства

### Определение 1.20.

Предположим, что непустые множества  $\Omega$  и  $\Sigma$  имеют структуру метрического пространства. В этом случае  $\mathcal{B}(\Omega) | \mathcal{B}(\Sigma)$ -измеримое отображение будет называться **борелевским**.

### Утверждение 1.2.

Предположим, что непустые множества  $\Omega$  и  $\Sigma$  имеют структуру метрического пространства. Тогда непрерывное отображение  $f : \Omega \longrightarrow \Sigma$  является борелевским.

# Системы множеств

## Измеримые пространства

### Определение 1.20.

Предположим, что непустые множества  $\Omega$  и  $\Sigma$  имеют структуру метрического пространства. В этом случае  $\mathcal{B}(\Omega) \mid \mathcal{B}(\Sigma)$ -измеримое отображение будет называться **борелевским**.

### Утверждение 1.2.

Предположим, что непустые множества  $\Omega$  и  $\Sigma$  имеют структуру метрического пространства. Тогда непрерывное отображение  $f : \Omega \longrightarrow \Sigma$  является борелевским.

### Определение 1.21.

Пусть задано измеримое пространство  $(\Omega, \mathcal{S})$ . В этом случае  $\mathcal{S} \mid \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ -измеримое отображение называется  **$\mathcal{S}$ -измеримой (измеримой) функцией**. При этом, измеримая функция называется **конечной**, если она принимает свои значения только из множества  $\mathbb{R}$ .

### Замечание

В теории вероятностей используется следующая терминология. В контексте вероятностного пространства (это понятие будет введено позже) измеримое отображение называется **случайным элементом**. Конечная измеримая функция называется **случайной величиной**. Если измеримая функция может принимать бесконечные значения, то о ней говорят как о **расширенной случайной величине**. **Случайным вектором** размерности  $n$  ( $n \geq 2$ ) называется  $\mathcal{S} | \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ -измеримое отображение.

### Утверждение 1.3.

Пусть заданы конечные  $\mathcal{S}$ -измеримые функции  $f_1, \dots, f_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), открытое множество  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  и непрерывная функция  $h : G \rightarrow \mathbb{R}$ . Предположим, что  $f_i(\Omega) \subseteq G$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Тогда функция  $h(f_1(\omega), \dots, f_n(\omega))$  является  $\mathcal{S}$ -измеримой.

# Системы множеств

## Измеримые пространства

### Утверждение 1.3.

Пусть заданы конечные  $\mathcal{S}$ -измеримые функции  $f_1, \dots, f_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), открытое множество  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  и непрерывная функция  $h : G \rightarrow \mathbb{R}$ . Предположим, что  $f_i(\Omega) \subseteq G$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Тогда функция  $h(f_1(\omega), \dots, f_n(\omega))$  является  $\mathcal{S}$ -измеримой.

### Утверждение 1.4.

Пусть заданы  $\mathcal{S}$ -измеримые функции  $f$  и  $g$ , измеримое множество  $A \in \mathcal{S}$  и  $a \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\mathcal{S}$ -измеримыми будут функции  $\mathbf{1}_A$ ,  $af$ ,  $f + g$ ,  $fg$  и  $\frac{1}{f}$  (если  $f$  нигде не обращается в нуль).

# Системы множеств

## Измеримые пространства

### Замечание

При работе с бесконечными значениями используются следующие правила:

$\infty \pm a = \infty$ ;  $-\infty \pm a = -\infty$ ;  $a \times (\pm\infty) = \pm\infty$  при  $a > 0$ ;  $a \times (\pm\infty) = \mp\infty$

при  $a < 0$ ;  $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ ;  $\infty + \infty = \infty - (-\infty) = \infty$ ;

$-\infty - \infty = -\infty + (-\infty) = -\infty$ ;  $\infty \times \infty = (-\infty) \times (-\infty) = \infty$ ;

$-\infty \times \infty = \infty \times (-\infty) = -\infty$ ;  $0 \times (\pm\infty) = 0$ ;  $\infty - \infty = -\infty - (-\infty) = 0$ .

# Системы множеств

## Измеримые пространства

### Замечание

При работе с бесконечными значениями используются следующие правила:

$\infty \pm a = \infty$ ;  $-\infty \pm a = -\infty$ ;  $a \times (\pm\infty) = \pm\infty$  при  $a > 0$ ;  $a \times (\pm\infty) = \mp\infty$  при  $a < 0$ ;  $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ ;  $\infty + \infty = \infty - (-\infty) = \infty$ ;

$-\infty - \infty = -\infty + (-\infty) = -\infty$ ;  $\infty \times \infty = (-\infty) \times (-\infty) = \infty$ ;

$-\infty \times \infty = \infty \times (-\infty) = -\infty$ ;  $0 \times (\pm\infty) = 0$ ;  $\infty - \infty = -\infty - (-\infty) = 0$ .

### Утверждение 1.5.

Пусть задана бесконечная последовательность  $\mathcal{S}$ -измеримых функций  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Тогда  $\mathcal{S}$ -измеримыми будут функции

$$\omega \mapsto \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(\omega), \quad \omega \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(\omega), \quad \omega \mapsto \varliminf_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega), \quad \omega \mapsto \overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega)}.$$

# Системы множеств

## Измеримые пространства

### Определение 1.22.

Предположим, что  $(M, \rho)$  – метрическое пространство. В этом случае измеримое пространство  $(M, \mathcal{B}(M))$  называется **стандартным** (или **борелевским**).



# Системы множеств

## Измеримые пространства

### Определение 1.22.

Предположим, что  $(M, \rho)$  – польское пространство. В этом случае измеримое пространство  $(M, \mathcal{B}(M))$  называется **стандартным** (или **борелевским**).

### Лемма 1.1. (Дуб-Дынкин)

Пусть  $(\Omega_1, \mathcal{S}_1)$ ,  $(\Omega_2, \mathcal{S}_2)$  и  $(\Omega_3, \mathcal{S}_3)$  – измеримые пространства,  $f \in \mathcal{S}_1 | \mathcal{S}_2$  и  $g \in \mathcal{S}_1 | \mathcal{S}_3$ . Предположим, что

- $g$  –  $f$ -измеримая функция;
- $(\Omega_3, \mathcal{S}_3)$  – стандартное измеримое пространство.

Тогда существует измеримое отображение  $\varphi \in \mathcal{S}_2 | \mathcal{S}_3$  такое, что  $g = \varphi \circ f$ .

# Содержание

## 1 Системы множеств

- Метрические пространства
- Измеримые пространства
- Прямое произведение измеримых пространств

## 2 Мера и интеграл Лебега

## 3 Основные теоремы интеграла Лебега

## 4 Условное математическое ожидание

## 5 Измеримость супремума

# Системы множеств

## Прямое произведение измеримых пространств

### Определение 1.23.

Пусть  $(\Omega_1, \mathcal{S}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{S}_n)$  ( $n \geq 2$ ) – произвольные измеримые пространства. Определим

$$\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n := \sigma\{A_1 \times \dots \times A_n : A_1 \in \mathcal{S}_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}_n\}.$$

Измеримое пространство  $(\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n, \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n)$  называется **прямым произведением** измеримых пространств  $(\Omega_1, \mathcal{S}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{S}_n)$ .

# Системы множеств

## Прямое произведение измеримых пространств

### Определение 1.23.

Пусть  $(\Omega_1, \mathcal{S}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{S}_n)$  ( $n \geq 2$ ) – произвольные измеримые пространства. Определим

$$\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n := \sigma\{A_1 \times \dots \times A_n : A_1 \in \mathcal{S}_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}_n\}.$$

Измеримое пространство  $(\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n, \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n)$  называется **прямым произведением** измеримых пространств  $(\Omega_1, \mathcal{S}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{S}_n)$ .

Для краткости, прямое произведение  $n$  копий измеримого пространства  $(\Omega, \mathcal{S})$  будем обозначать через  $(\Omega^n, \otimes^n \mathcal{S})$ .

# Системы множеств

## Прямое произведение измеримых пространств

Ранее в примере 1.5 было продемонстрировано, как может быть задана метрика на декартовом произведении метрических пространств. Естественно возникает вопрос о том, как могут быть связаны друг с другом декартово произведение метрических пространств и прямое произведение их борелевских  $\sigma$ -алгебр. Ответ на этот вопрос даёт следующее утверждение

# Системы множеств

## Прямое произведение измеримых пространств

Ранее в примере 1.5 было продемонстрировано, как может быть задана метрика на декартовом произведении метрических пространств. Естественно возникает вопрос о том, как могут быть связаны друг с другом декартово произведение метрических пространств и прямое произведение их борелевских  $\sigma$ -алгебр. Ответ на этот вопрос даёт следующее утверждение

### Утверждение 1.6.

Пусть заданы два сепарабельных метрических пространства  $(M_1, \rho_1)$  и  $(M_2, \rho_2)$ . Тогда  $\mathcal{B}(M_1 \times M_2) = \mathcal{B}(M_1) \otimes \mathcal{B}(M_2)$ .

# Системы множеств

## Прямое произведение измеримых пространств

Ранее в примере 1.5 было продемонстрировано, как может быть задана метрика на декартовом произведении метрических пространств. Естественно возникает вопрос о том, как могут быть связаны друг с другом декартово произведение метрических пространств и прямое произведение их борелевских  $\sigma$ -алгебр. Ответ на этот вопрос даёт следующее утверждение

### Утверждение 1.6.

Пусть заданы два сепарабельных метрических пространства  $(M_1, \rho_1)$  и  $(M_2, \rho_2)$ . Тогда  $\mathcal{B}(M_1 \times M_2) = \mathcal{B}(M_1) \otimes \mathcal{B}(M_2)$ .

В качестве следствия заметим, что борелевская  $\sigma$ -алгебра в  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) может быть представлена в виде  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \otimes^n \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

# Системы множеств

## Прямое произведение измеримых пространств

### Утверждение 1.7.

Пусть  $(\Omega, \mathcal{S}), (\Omega_1, \mathcal{S}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{S}_n)$  ( $n \geq 2$ ) – измеримые пространства. Определим функции координатных проекций

$$\pi_i : \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n \longrightarrow \Omega_i, \quad \pi_i : (\omega_1, \dots, \omega_n) \longmapsto \omega_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Отображение  $f$  является  $\mathcal{S} | \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$ -измеримым тогда и только тогда, когда отображение  $\pi_i \circ f$  является  $\mathcal{S} | \mathcal{S}_i$ -измеримым для каждого  $i = 1, \dots, n$ .



# Содержание

- 1 Системы множеств
- 2 Мера и интеграл Лебега**
  - Понятие меры
  - Интеграл Лебега
- 3 Основные теоремы интеграла Лебега
- 4 Условное математическое ожидание
- 5 Измеримость супремума

# Мера и интеграл Лебега

## Понятие меры

Далее, будем предполагать, что задано некоторое произвольное измеримое пространство  $(\Omega, \mathcal{S})$ .

# Мера и интеграл Лебега

## Понятие меры

Далее, будем предполагать, что задано некоторое произвольное измеримое пространство  $(\Omega, \mathcal{S})$ .

### Определение 1.24.

**Мерой**, заданной на  $(\Omega, \mathcal{S})$  (на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{S}$ ), называется функция вида  $\mu : \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ , которая одновременно удовлетворяет двум условиям:

- $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- (**счётная аддитивность**) для любой последовательности  $\{A_k \in \mathcal{S}\}_{k \in \mathbb{N}}$  попарно непересекающихся множеств выполняется равенство

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

# Мера и интеграл Лебега

## Понятие меры

Далее, будем предполагать, что задано некоторое произвольное измеримое пространство  $(\Omega, \mathcal{S})$ .

### Определение 1.24.

**Мерой**, заданной на  $(\Omega, \mathcal{S})$  (на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{S}$ ), называется функция вида  $\mu : \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ , которая одновременно удовлетворяет двум условиям:

- $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- (**счётная аддитивность**) для любой последовательности  $\{A_k \in \mathcal{S}\}_{k \in \mathbb{N}}$  попарно непересекающихся множеств выполняется равенство

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Тройка  $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$  называется **измеримым пространством с мерой**.

# Мера и интеграл Лебега

## Понятие меры

### Определение 1.24. (продолжение)

Если мера принимает только конечные значения (значения из  $\mathbb{R}$ ), то она называется **конечной**. В частности, если  $\mu(\Omega) = 1$ , то мера  $\mu$  называется **вероятностной**.

# Мера и интеграл Лебега

## Понятие меры

### Определение 1.24. (продолжение)

Если мера принимает только конечные значения (значения из  $\mathbb{R}$ ), то она называется **конечной**. В частности, если  $\mu(\Omega) = 1$ , то мера  $\mu$  называется **вероятностной**.

Мера  $\mu$  называется  **$\sigma$ -конечной**, если существует последовательность измеримых множеств  $\{\Omega_k \in \mathcal{S}\}_{k \in \mathbb{N}}$  такая, что

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k \quad \text{и} \quad \mu(\Omega_k) < \infty \quad (k \in \mathbb{N}).$$

# Мера и интеграл Лебега

## Понятие меры

### Определение 1.24. (продолжение)

Если мера принимает только конечные значения (значения из  $\mathbb{R}$ ), то она называется **конечной**. В частности, если  $\mu(\Omega) = 1$ , то мера  $\mu$  называется **вероятностной**.

Мера  $\mu$  называется  **$\sigma$ -конечной**, если существует последовательность измеримых множеств  $\{\Omega_k \in \mathcal{S}\}_{k \in \mathbb{N}}$  такая, что

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k \quad \text{и} \quad \mu(\Omega_k) < \infty \quad (k \in \mathbb{N}).$$

### Замечание

Относительно произвольного измеримого отображения, заданного на  $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ , будем говорить, что оно  **$\mu$ -измеримо**.

# Мера и интеграл Лебега

## Понятие меры

### Замечание

Введённое понятие меры может быть обобщено. Если в определении 1.24 заменить область значений функции  $\mu$  на  $\overline{\mathbb{R}}$  или  $\mathbb{R}$ , то соответственно получатся определения **меры со знаком** и **конечной меры со знаком**.



# Мера и интеграл Лебега

## Понятие меры

### Замечание

Введённое понятие меры может быть обобщено. Если в определении 1.24 заменить область значений функции  $\mu$  на  $\overline{\mathbb{R}}$  или  $\mathbb{R}$ , то соответственно получатся определения **меры со знаком** и **конечной меры со знаком**.

### Замечание

В теории вероятностей используется следующая терминология. Измеримое пространство с вероятностной мерой  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$  называется **вероятностным пространством**. Элементы множества  $\Omega$  называются **элементарными событиями**, а элементы  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{S}$  называются просто **событиями**.

# Мера и интеграл Лебега

## Понятие меры

### Замечание

Введённое понятие меры может быть обобщено. Если в определении 1.24 заменить область значений функции  $\mu$  на  $\overline{\mathbb{R}}$  или  $\mathbb{R}$ , то соответственно получатся определения **меры со знаком** и **конечной меры со знаком**.

### Замечание

В теории вероятностей используется следующая терминология. Измеримое пространство с вероятностной мерой  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$  называется **вероятностным пространством**. Элементы множества  $\Omega$  называются **элементарными событиями**, а элементы  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{S}$  называются просто **событиями**.

Множество всех вероятностных мер, заданных на  $(\Omega, \mathcal{S})$ , будем обозначать через  $\mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathcal{S})$ . Если из контекста понятно, о какой  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{S}$  идёт речь, то будет использоваться сокращённая запись  $\mathcal{M}_+^1(\Omega)$ .

# Мера и интеграл Лебега

## Понятие меры

### Утверждение 1.8.

Пусть  $\mu$  –  $\sigma$ -конечная мера на  $(\Omega, \mathcal{S})$  и  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ . Тогда

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

# Мера и интеграл Лебега

## Понятие меры

### Утверждение 1.8.

Пусть  $\mu$  –  $\sigma$ -конечная мера на  $(\Omega, \mathcal{S})$  и  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ . Тогда

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

### Утверждение 1.9.

Пусть  $P$  – вероятностная мера на  $(\Omega, \mathcal{S})$ ,  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$  и  $\delta \in (0, 1)$ . Предположим что

$$P(A_i) \geq 1 - \frac{\delta}{n} \quad (i = 1, \dots, n),$$

тогда

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq 1 - \delta.$$

# Мера и интеграл Лебега

## Понятие меры

### Пример 1.10.

На произвольном измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{S})$  каждый фиксированный элемент  $a \in \Omega$  задаёт **меру Дирака** по правилу

$$\delta_a(A) := \begin{cases} 1, & \text{если } a \in A; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

для любого  $A \in \mathcal{S}$ .

# Мера и интеграл Лебега

## Понятие меры

### Пример 1.11.

Предположим, что функция  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  неубывает, непрерывна справа и ограничена. Тогда на измеримом пространстве  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  существует и единственна конечная мера  $\mu_F$  такая, что

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a) \quad (a < b; a, b \in \mathbb{R}).$$

Таким образом определённая мера  $\mu_F$  называется **мерой Лебега-Стилтьеса**.

# Мера и интеграл Лебега

## Понятие меры

### Пример 1.12.

Важную роль на измеримом пространстве  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  играет *классическая мера Лебега*  $\lambda_1$ , которая каждому интервалу  $(a, b)$  ставит в соответствие его длину  $b - a$ . Заметим, что классическая мера Лебега одноточечного множества равна нулю.

# Мера и интеграл Лебега

## Понятие меры

### Пример 1.12.

Важную роль на измеримом пространстве  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  играет *классическая мера Лебега*  $\lambda_1$ , которая каждому интервалу  $(a, b)$  ставит в соответствие его длину  $b - a$ . Заметим, что классическая мера Лебега одноточечного множества равна нулю.

Возникает закономерный вопрос. Почему нельзя меру  $\lambda_1$  определить на  $\sigma$ -алгебре  $2^{\mathbb{R}}$ ?



# Мера и интеграл Лебега

## Понятие меры

### Пример 1.12.

Важную роль на измеримом пространстве  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  играет *классическая мера Лебега*  $\lambda_1$ , которая каждому интервалу  $(a, b)$  ставит в соответствие его длину  $b - a$ . Заметим, что классическая мера Лебега одноточечного множества равна нулю.

Возникает закономерный вопрос. Почему нельзя меру  $\lambda_1$  определить на  $\sigma$ -алгебре  $2^{\mathbb{R}}$ ?

Ответ на этот вопрос даёт теорема Улама. Эта теорема утверждает, что конечная мера, заданная на множестве всех подмножеств множества мощности континуума, и принимающая нулевое значение на всех одноэлементных множествах, принимает только нулевое значение и на всех остальных подмножествах.

# Мера и интеграл Лебега

## Понятие меры

### Определение 1.25.

Пусть  $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$  – измеримое пространство с мерой,  $A \in \mathcal{S}$  и  $\mu(A) = 0$ . Если некоторое свойство выполняется для всех элементов множества  $\Omega \setminus A$ , то говорят, что это свойство выполняется  **$\mu$ -почти всюду**. Используются также сокращения ( **$\mu$ -п.в.**) или просто (**п.в.**).

# Мера и интеграл Лебега

## Понятие меры

### Определение 1.25.

Пусть  $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$  – измеримое пространство с мерой,  $A \in \mathcal{S}$  и  $\mu(A) = 0$ . Если некоторое свойство выполняется для всех элементов множества  $\Omega \setminus A$ , то говорят, что это свойство выполняется  **$\mu$ -почти всюду**. Используются также сокращения ( **$\mu$ -п.в.**) или просто (**п.в.**).

### Замечание

Теория вероятностей использует другую терминологию. В контексте рассматриваемого вероятностного пространства  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$  говорят о свойствах, которые выполняются  **$P$ -почти наверное**. Используются также сокращения ( **$P$ -п.н.**) или просто (**п.н.**).

# Содержание

- 1 Системы множеств
- 2 Мера и интеграл Лебега**
  - Понятие меры
  - Интеграл Лебега**
- 3 Основные теоремы интеграла Лебега
- 4 Условное математическое ожидание
- 5 Измеримость супремума

# Мера и интеграл Лебега

## Интеграл Лебега

Будем предполагать, что задано измеримое пространство с  $\sigma$ -конечной мерой  $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ .

# Мера и интеграл Лебега

## Интеграл Лебега

Будем предполагать, что задано измеримое пространство с  $\sigma$ -конечной мерой  $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ .

### Определение 1.26.

Измеримая функция  $h$  называется **простой**, если она может быть представлена в виде

$$h(\omega) = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{1}_{A_k}(\omega) \quad (\omega \in \Omega),$$

где  $c_k \in \mathbb{R}$ ,  $A_k \in \mathcal{S}$ ,  $\mu(A_k) < \infty$ .

# Мера и интеграл Лебега

## Интеграл Лебега

Будем предполагать, что задано измеримое пространство с  $\sigma$ -конечной мерой  $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ .

### Определение 1.26.

Измеримая функция  $h$  называется **простой**, если она может быть представлена в виде

$$h(\omega) = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{1}_{A_k}(\omega) \quad (\omega \in \Omega),$$

где  $c_k \in \mathbb{R}$ ,  $A_k \in \mathcal{S}$ ,  $\mu(A_k) < \infty$ .

**Интеграл Лебега** от простой функции  $h$  по множеству  $\Omega$  определяется формулой

$$\int_{\Omega} h d\mu := \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k).$$

# Мера и интеграл Лебега

## Интеграл Лебега

### Определение 1.27.

Для неотрицательной измеримой функции  $f$  через  $Q_f$  обозначим множество всех простых функций  $h$ , удовлетворяющих условию  $0 \leq h(\omega) \leq f(\omega)$  ( $\omega \in \Omega$ ).

**Интеграл Лебега** от неотрицательной измеримой функции  $f$  по множеству  $\Omega$  определяется формулой

$$\int_{\Omega} f d\mu := \sup_{h \in Q_f} \int_{\Omega} h d\mu$$



# Мера и интеграл Лебега

## Интеграл Лебега

### Определение 1.27.

Для неотрицательной измеримой функции  $f$  через  $Q_f$  обозначим множество всех простых функций  $h$ , удовлетворяющих условию  $0 \leq h(\omega) \leq f(\omega)$  ( $\omega \in \Omega$ ).

**Интеграл Лебега** от неотрицательной измеримой функции  $f$  по множеству  $\Omega$  определяется формулой

$$\int_{\Omega} f d\mu := \sup_{h \in Q_f} \int_{\Omega} h d\mu$$

Заметим, что в этом определении интеграл Лебега может принимать бесконечное значение.

# Мера и интеграл Лебега

## Интеграл Лебега

### Определение 1.28.

Для произвольной измеримой функции  $f$  определим две неотрицательные измеримые функции

$$f_+(\omega) := \max\{f(\omega), 0\}, \quad f_-(\omega) := \max\{-f(\omega), 0\} \quad (\omega \in \Omega).$$

Предположим, что функции  $f_+$  и  $f_-$  имеют конечные интегралы Лебега. В этом случае **интеграл Лебега** от измеримой функции  $f$  по множеству  $\Omega$  определяется формулой

$$\int_{\Omega} f(\omega) \mu(d\omega) = \int_{\Omega} f d\mu := \int_{\Omega} f_+ d\mu - \int_{\Omega} f_- d\mu,$$

а сама функция  $f$  называется **интегрируемой по Лебегу** на  $\Omega$ .

# Мера и интеграл Лебега

## Интеграл Лебега

### Определение 1.28. (продолжение)

Множество всех интегрируемых по Лебегу функций будем обозначать через  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$  или сокращённо  $\mathcal{L}^1(\Omega)$ , если из контекста понятно о какой  $\sigma$ -алгебре и мере идёт речь.

# Мера и интеграл Лебега

## Интеграл Лебега

### Определение 1.28. (продолжение)

Множество всех интегрируемых по Лебегу функций будем обозначать через  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$  или сокращённо  $\mathcal{L}^1(\Omega)$ , если из контекста понятно о какой  $\sigma$ -алгебре и мере идёт речь.

### Замечание

В теории вероятностей интеграл Лебега случайной величины  $\xi$ , заданной на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ , называется **математическим ожиданием**, для которого используются обозначения  $E\xi$  или  $E_{\omega \sim P} [\xi(\omega)]$ .

# Мера и интеграл Лебега

## Интеграл Лебега

### Определение 1.28. (продолжение)

Множество всех интегрируемых по Лебегу функций будем обозначать через  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$  или сокращённо  $\mathcal{L}^1(\Omega)$ , если из контекста понятно о какой  $\sigma$ -алгебре и мере идёт речь.

### Замечание

В теории вероятностей интеграл Лебега случайной величины  $\xi$ , заданной на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ , называется **математическим ожиданием**, для которого используются обозначения  $E\xi$  или  $E_{\omega \sim P} [\xi(\omega)]$ .

**Дисперсией** случайной величины  $\xi$  называется число  $D\xi := E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$ . Случайная величина  $\xi$  называется **вырожденной**, если  $D\xi = 0$ .

# Мера и интеграл Лебега

## Интеграл Лебега

### Утверждение 1.10.

Пусть  $f$  – измеримая функция и  $A \in \mathcal{S}$ . Тогда условие  $f \in \mathcal{L}^1(A)$  эквивалентно условию  $f\mathbf{1}_A \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ , и если  $f \in \mathcal{L}^1(A)$ , то

$$\int_A f d\mu = \int_{\Omega} f\mathbf{1}_A d\mu$$

# Мера и интеграл Лебега

## Интеграл Лебега

### Утверждение 1.10.

Пусть  $f$  – измеримая функция и  $A \in \mathcal{S}$ . Тогда условие  $f \in \mathcal{L}^1(A)$  эквивалентно условию  $f\mathbf{1}_A \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ , и если  $f \in \mathcal{L}^1(A)$ , то

$$\int_A f d\mu = \int_{\Omega} f\mathbf{1}_A d\mu$$

### Утверждение 1.11.

Пусть  $f$  и  $g$  – измеримые функции. Тогда

- если  $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  и  $a, b \in \mathbb{R}$ , то  $af + bg \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  и

$$\int_{\Omega} (af + bg) d\mu = a \int_{\Omega} f d\mu + b \int_{\Omega} g d\mu;$$

- $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  тогда и только тогда, когда  $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ;

# Мера и интеграл Лебега

## Интеграл Лебега

### Утверждение 1.11. (продолжение)

- если  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ , то

$$\left| \int_{\Omega} f d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu;$$

- если  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  и  $|g| \leq |f|$  ( $\mu$ -п.в.), то  $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ;
- если  $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  и  $g \leq f$  ( $\mu$ -п.в.), то

$$\int_{\Omega} g d\mu \leq \int_{\Omega} f d\mu;$$

- если  $\mu(\Omega) < \infty$  и  $|f| \leq C$  ( $\mu$ -п.в.) для некоторого  $C \geq 0$ , то  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  и

$$\left| \int_{\Omega} f d\mu \right| \leq C\mu(\Omega).$$



# Мера и интеграл Лебега

## Интеграл Лебега

Для формулировки следующего свойства нам потребуется ввести понятие выпуклой функции.

# Мера и интеграл Лебега

## Интеграл Лебега

Для формулировки следующего свойства нам потребуется ввести понятие выпуклой функции.

### Определение 1.29.

Пусть  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ . Функция  $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  называется **выпуклой**, если для любых  $x_1, x_2 \in (a, b)$  и  $\lambda \in [0, 1]$  выполняется неравенство

$$\varphi(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda \varphi(x_1) + (1 - \lambda)\varphi(x_2).$$

# Мера и интеграл Лебега

## Интеграл Лебега

Для формулировки следующего свойства нам потребуется ввести понятие выпуклой функции.

### Определение 1.29.

Пусть  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ . Функция  $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  называется **выпуклой**, если для любых  $x_1, x_2 \in (a, b)$  и  $\lambda \in [0, 1]$  выполняется неравенство

$$\varphi(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda \varphi(x_1) + (1 - \lambda)\varphi(x_2).$$

### Утверждение 1.12.

Пусть  $\mu(\Omega) = 1$ ,  $f$  – измеримая функция, принимающая свои значения из интервала  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  и  $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  – выпуклая борелевская функция. Тогда

$$\int_{\Omega} \varphi \circ f \, d\mu \geq \varphi\left(\int_{\Omega} f \, d\mu\right).$$

# Мера и интеграл Лебега

## Интеграл Лебега

Для каждого  $1 \leq p < \infty$  на множестве измеримых функций

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{S}, \mu) := \left\{ f \in \mathcal{S} \mid \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) : \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

определим полунорму

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{S}, \mu)} := \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad (f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{S}, \mu)).$$

# Мера и интеграл Лебега

## Интеграл Лебега

Для каждого  $1 \leq p < \infty$  на множестве измеримых функций

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{S}, \mu) := \left\{ f \in \mathcal{S} \mid \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) : \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

определим полунорму

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{S}, \mu)} := \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad (f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{S}, \mu)).$$

Если из контекста понятно, о каком измеримом пространстве с мерой идёт речь, будут использоваться сокращения  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  и  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$ .

# Мера и интеграл Лебега

## Интеграл Лебега

Следующее утверждение является простейшим вариантом теоремы вложения.

# Мера и интеграл Лебега

## Интеграл Лебега

Следующее утверждение является простейшим вариантом теоремы вложения.

### Утверждение 1.13.

Пусть  $\mu(\Omega) < \infty$  и  $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$ . Тогда  $\mathcal{L}^{p_2} \subset \mathcal{L}^{p_1}(\Omega)$  и существует константа  $C > 0$  такая, что

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p_1}(\Omega)} \leq C \|f\|_{\mathcal{L}^{p_2}(\Omega)}.$$

# Содержание

1 Системы множеств

2 Мера и интеграл Лебега

3 Основные теоремы интеграла Лебега

- Замена переменных в интеграле Лебега
- Меры на прямых произведениях измеримых пространств
- Теорема Радона-Никодима

4 Условное математическое ожидание

5 Измеримость супремума



# Основные теоремы интеграла Лебега

## Замена переменных в интеграле Лебега

### Теорема 1.1. (о замене переменных в интеграле Лебега)

Пусть заданы измеримое пространство с  $\sigma$ -конечной мерой  $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ , измеримое пространство  $(\Sigma, \mathcal{E})$  и  $\mathcal{S} | \mathcal{E}$ -измеримое отображение  $h$ .

# Основные теоремы интеграла Лебега

## Замена переменных в интеграле Лебега

### Теорема 1.1. (о замене переменных в интеграле Лебега)

Пусть заданы измеримое пространство с  $\sigma$ -конечной мерой  $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ , измеримое пространство  $(\Sigma, \mathcal{E})$  и  $\mathcal{S} | \mathcal{E}$ -измеримое отображение  $h$ .

Тогда выполняются следующие условия:

- 1 функция множеств  $\mu \circ h^{-1} : \mathcal{E} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  является мерой, при этом говорят, что она индуцирована отображением  $h$ ;

# Основные теоремы интеграла Лебега

## Замена переменных в интеграле Лебега

### Теорема 1.1. (о замене переменных в интеграле Лебега)

Пусть заданы измеримое пространство с  $\sigma$ -конечной мерой  $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ , измеримое пространство  $(\Sigma, \mathcal{E})$  и  $\mathcal{S} | \mathcal{E}$ -измеримое отображение  $h$ .

Тогда выполняются следующие условия:

- 1 функция множеств  $\mu \circ h^{-1} : \mathcal{E} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  является мерой, при этом говорят, что она индуцирована отображением  $h$ ;
- 2 для любой неотрицательной  $\mathcal{E}$ -измеримой функции  $f$  выполняется равенство

$$\int_{\Omega} (f \circ h)(\omega) \mu(d\omega) = \int_{\Sigma} f(x) (\mu \circ h^{-1})(dx); \quad (1)$$

# Основные теоремы интеграла Лебега

## Замена переменных в интеграле Лебега

### Теорема 1.1. (о замене переменных в интеграле Лебега)

Пусть заданы измеримое пространство с  $\sigma$ -конечной мерой  $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ , измеримое пространство  $(\Sigma, \mathcal{E})$  и  $\mathcal{S} | \mathcal{E}$ -измеримое отображение  $h$ .

Тогда выполняются следующие условия:

- 1 функция множеств  $\mu \circ h^{-1} : \mathcal{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  является мерой, при этом говорят, что она индуцирована отображением  $h$ ;
- 2 для любой неотрицательной  $\mathcal{E}$ -измеримой функции  $f$  выполняется равенство

$$\int_{\Omega} (f \circ h)(\omega) \mu(d\omega) = \int_{\Sigma} f(x) (\mu \circ h^{-1})(dx); \quad (1)$$

- 3 для любой  $\mathcal{E}$ -измеримой функции  $f$  условие  $f \circ h \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$  эквивалентно условию  $f \in \mathcal{L}^1(\Sigma, \mathcal{E}, \mu \circ h^{-1})$ , при этом выполняется равенство (1).

# Основные теоремы интеграла Лебега

## Замена переменных в интеграле Лебега

### Замечание

В теории вероятностей используется следующая терминология. Индуцируемая случайным элементом мера, называется его *распределением (вероятностей)*. Для распределения случайного элемента  $\zeta$ , заданного на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ , используется обозначение  $P_\zeta$ . Заметим, что любую вероятностную меру можно рассматривать в качестве распределения некоторого случайного элемента.

# Основные теоремы интеграла Лебега

## Замена переменных в интеграле Лебега

### Замечание

В теории вероятностей используется следующая терминология. Индуцируемая случайным элементом мера, называется его *распределением (вероятностей)*. Для распределения случайного элемента  $\zeta$ , заданного на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ , используется обозначение  $P_\zeta$ . Заметим, что любую вероятностную меру можно рассматривать в качестве распределения некоторого случайного элемента.

Функция  $F_\xi(x) := P\{\xi \leq x\}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) называется *функцией распределения случайной величины  $\xi$* . Функция  $F_\xi$  однозначно определяет распределение  $P_\xi$  (пример 1.11) этой случайной величины. Таким образом,  $P_\xi$  является вероятностной мерой Лебега-Стилтьеса.

# Содержание

1 Системы множеств

2 Мера и интеграл Лебега

3 Основные теоремы интеграла Лебега

- Замена переменных в интеграле Лебега
- Меры на прямых произведениях измеримых пространств
- Теорема Радона-Никодима

4 Условное математическое ожидание

5 Измеримость супремума

# Основные теоремы интеграла Лебега

Меры на прямых произведениях измеримых пространств

Вначале рассмотрим частный случай, связанный с понятием прямого произведения мер.



# Основные теоремы интеграла Лебега

## Меры на прямых произведениях измеримых пространств

Вначале рассмотрим частный случай, связанный с понятием прямого произведения мер.

### Определение 1.30.

Пусть заданы измеримые пространства с  $\sigma$ -конечными мерами  $(\Omega_1, \mathcal{S}_1, \mu_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{S}_n, \mu_n)$  ( $n \geq 2$ ). **Прямым произведением** мер  $\mu_1, \dots, \mu_n$  называется мера  $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ , заданная на  $\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$  и удовлетворяющая условию

$$\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n(A_1 \times \dots \times A_n) = \prod_{i=1}^n \mu_i(A_i) \quad (A_1 \in \mathcal{S}_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}_n).$$

# Основные теоремы интеграла Лебега

## Меры на прямых произведениях измеримых пространств

Вначале рассмотрим частный случай, связанный с понятием прямого произведения мер.

### Определение 1.30.

Пусть заданы измеримые пространства с  $\sigma$ -конечными мерами  $(\Omega_1, \mathcal{S}_1, \mu_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{S}_n, \mu_n)$  ( $n \geq 2$ ). **Прямым произведением** мер  $\mu_1, \dots, \mu_n$  называется мера  $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ , заданная на  $\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$  и удовлетворяющая условию

$$\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n (A_1 \times \dots \times A_n) = \prod_{i=1}^n \mu_i(A_i) \quad (A_1 \in \mathcal{S}_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}_n).$$

В дальнейшем, прямое произведение  $n$  копий меры  $\mu$  будем обозначать через  $\mu^n$ .

# Основные теоремы интеграла Лебега

Меры на прямых произведениях измеримых пространств

## Теорема 1.2 (Тонелли)

Пусть  $(\Omega_1, \mathcal{S}_1, \mu_1)$  и  $(\Omega_2, \mathcal{S}_2, \mu_2)$  – измеримые пространства с  $\sigma$ -конечными мерами,  $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$  – неотрицательная  $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$ -измеримая функция.

# Основные теоремы интеграла Лебега

Меры на прямых произведениях измеримых пространств

## Теорема 1.2 (Тонелли)

Пусть  $(\Omega_1, \mathcal{S}_1, \mu_1)$  и  $(\Omega_2, \mathcal{S}_2, \mu_2)$  – измеримые пространства с  $\sigma$ -конечными мерами,  $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$  – неотрицательная  $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$ -измеримая функция.

Тогда функция

$$g_1 : \Omega_1 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, \quad g_1 : \omega_1 \longmapsto \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2).$$

является  $\mathcal{S}_1$ -измеримой, функция

$$g_2 : \Omega_2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, \quad g_2 : \omega_2 \longmapsto \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) \mu_1(d\omega_1).$$

является  $\mathcal{S}_2$ -измеримой и

# Основные теоремы интеграла Лебега

Меры на прямых произведениях измеримых пространств

## Теорема 1.2 (Тонелли, продолжение)

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{\Omega_1} g_1 \, d\mu_1 = \int_{\Omega_2} g_2 \, d\mu_2.$$

# Основные теоремы интеграла Лебега

Меры на прямых произведениях измеримых пространств

## Теорема 1.3 (Фубини)

Пусть  $(\Omega_1, \mathcal{S}_1, \mu_1)$  и  $(\Omega_2, \mathcal{S}_2, \mu_2)$  – измеримые пространства с  $\sigma$ -конечными мерами,  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ .

# Основные теоремы интеграла Лебега

Меры на прямых произведениях измеримых пространств

## Теорема 1.3 (Фубини)

Пусть  $(\Omega_1, \mathcal{S}_1, \mu_1)$  и  $(\Omega_2, \mathcal{S}_2, \mu_2)$  – измеримые пространства с  $\sigma$ -конечными мерами,  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ .

Тогда

- существует  $B_1 \in \mathcal{S}_1$  такое, что  $\mu_1(\Omega_1 \setminus B_1) = 0$ ,  
 $\omega_2 \mapsto f(\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{L}^1(\Omega_2, \mathcal{S}_2, \mu_2)$  при  $\omega_1 \in B_1$  и функция  
 $g_1 : \Omega_1 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ ,

$$g_1 : \omega_1 \longmapsto \begin{cases} \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2), & \text{если } \omega_1 \in B_1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

является  $\mathcal{S}_1$ -измеримой;

# Основные теоремы интеграла Лебега

Меры на прямых произведениях измеримых пространств

## Теорема 1.3 (Фубини, продолжение)

- существует  $B_2 \in \mathcal{S}_2$  такое, что  $\mu_2(\Omega_2 \setminus B_2) = 0$ ,  
 $\omega_1 \mapsto f(\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{L}^1(\Omega_1, \mathcal{S}_1, \mu_1)$  при  $\omega_2 \in B_2$  и функция  
 $g_2 : \Omega_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ ,

$$g_2 : \omega_2 \mapsto \begin{cases} \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) \mu_1(d\omega_1), & \text{если } \omega_2 \in B_2; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

является  $\mathcal{S}_2$ -измеримой;

- $$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{\Omega_1} g_1 d\mu_1 = \int_{\Omega_2} g_2 d\mu_2.$$



# Основные теоремы интеграла Лебега

## Меры на прямых произведениях измеримых пространств

Используя идеи доказательства теоремы Фубини, может быть получено следующее утверждение, которое в дальнейшем будет использовано при доказательстве неравенства МакДиармида.

# Основные теоремы интеграла Лебега

## Меры на прямых произведениях измеримых пространств

Используя идеи доказательства теоремы Фубини, может быть получено следующее утверждение, которое в дальнейшем будет использовано при доказательстве неравенства МакДиармида.

### Лемма 1.2.

Предположим, что  $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$  – измеримое пространство с вероятностной мерой и  $f$  –  $\otimes^n \mathcal{S}$ -измеримая ( $n \geq 2$ ) ограниченная снизу функция. Тогда существует  $\otimes^{n-1} \mathcal{S}$ -измеримая функция  $\hat{f}$  такая, что

$$\inf_{\omega \in \Omega} f(\omega, \omega_2, \dots, \omega_n) \leq \hat{f}(\omega_2, \dots, \omega_n) \leq f(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \quad (\mu^n - \text{п.в.}).$$

# Основные теоремы интеграла Лебега

Меры на прямых произведениях измеримых пространств

Перейдём к рассмотрению общего случая, связанного с понятием ядра перехода.

# Основные теоремы интеграла Лебега

## Меры на прямых произведениях измеримых пространств

Перейдём к рассмотрению общего случая, связанного с понятием ядра перехода.

### Определение 1.31.

Пусть заданы измеримые пространства  $(X, \mathcal{S}_X)$  и  $(Y, \mathcal{S}_Y)$ .

Отображение  $K : X \times \mathcal{S}_Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  называется *ядром перехода* от  $(X, \mathcal{S}_X)$  к  $(Y, \mathcal{S}_Y)$ , если выполнены следующие условия:

- функция  $x \longmapsto K(x, B)$  является  $\mathcal{S}_X$ -измеримой для каждого  $B \in \mathcal{S}_Y$ ;
- функция множеств  $B \longmapsto K(x, B)$  является мерой на  $(Y, \mathcal{S}_Y)$  для каждого  $x \in X$ .

# Основные теоремы интеграла Лебега

## Меры на прямых произведениях измеримых пространств

Перейдём к рассмотрению общего случая, связанного с понятием ядра перехода.

### Определение 1.31.

Пусть заданы измеримые пространства  $(X, \mathcal{S}_X)$  и  $(Y, \mathcal{S}_Y)$ .

Отображение  $K : X \times \mathcal{S}_Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  называется *ядром перехода* от  $(X, \mathcal{S}_X)$  к  $(Y, \mathcal{S}_Y)$ , если выполнены следующие условия:

- функция  $x \longmapsto K(x, B)$  является  $\mathcal{S}_X$ -измеримой для каждого  $B \in \mathcal{S}_Y$ ;
- функция множеств  $B \longmapsto K(x, B)$  является мерой на  $(Y, \mathcal{S}_Y)$  для каждого  $x \in X$ .

### Определение 1.32.

Ядро перехода  $K$  называется *вероятностным*, если  $K(x, Y) = 1$  для каждого  $x \in X$ .

# Основные теоремы интеграла Лебега

Меры на прямых произведениях измеримых пространств

## Теорема 1.4.

Пусть  $(X, \mathcal{S}_X)$  и  $(Y, \mathcal{S}_Y)$  – измеримые пространства,  $\mu$  – вероятностная мера на  $(X, \mathcal{S}_X)$ ,  $K$  – вероятностное ядро перехода от  $(X, \mathcal{S}_X)$  к  $(Y, \mathcal{S}_Y)$ .

# Основные теоремы интеграла Лебега

Меры на прямых произведениях измеримых пространств

## Теорема 1.4.

Пусть  $(X, \mathcal{S}_X)$  и  $(Y, \mathcal{S}_Y)$  – измеримые пространства,  $\mu$  – вероятностная мера на  $(X, \mathcal{S}_X)$ ,  $K$  – вероятностное ядро перехода от  $(X, \mathcal{S}_X)$  к  $(Y, \mathcal{S}_Y)$ .

Тогда существует единственная вероятностная мера  $\nu$  на  $(X \times Y, \mathcal{S}_X \otimes \mathcal{S}_Y)$  такая, что

- для любых  $A \in \mathcal{S}_X$  и  $B \in \mathcal{S}_Y$  верно равенство

$$\nu(A \times B) = \int_A K(x, B) \mu(dx); \quad (2)$$

# Основные теоремы интеграла Лебега

Меры на прямых произведениях измеримых пространств

## Теорема 1.4. (продолжение)

- для любой неотрицательной  $\mathcal{S}_X \otimes \mathcal{S}_Y$ -измеримой функции  $f$  функция

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) K(x, dy)$$

является  $\mathcal{S}_X$ -измеримой и верно равенство

$$\int_{X \times Y} f d\nu = \int_X \mu(dx) \int_Y f(x, y) K(x, dy). \quad (3)$$



# Основные теоремы интеграла Лебега

Меры на прямых произведениях измеримых пространств

## Теорема 1.4. (продолжение)

- для любой неотрицательной  $\mathcal{S}_X \otimes \mathcal{S}_Y$ -измеримой функции  $f$  функция

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) K(x, dy)$$

является  $\mathcal{S}_X$ -измеримой и верно равенство

$$\int_{X \times Y} f d\nu = \int_X \mu(dx) \int_Y f(x, y) K(x, dy). \quad (3)$$

Для краткости, условия (2) и (3), связывающие  $\nu$ ,  $\mu$  и  $K$ , будем обозначать

$$\nu(dx, dy) = \mu(dx) K(x, dy).$$

# Основные теоремы интеграла Лебега

Меры на прямых произведениях измеримых пространств

## Теорема 1.5 (о дезинтеграции)

Пусть  $(X, \mathcal{S}_X)$  – измеримое пространство,  $(Y, \mathcal{S}_Y)$  – стандартное измеримое пространство,  $\nu$  – вероятностная мера на  $(X \times Y, \mathcal{S}_X \otimes \mathcal{S}_Y)$ . Тогда существует вероятностная мера  $\mu$  на  $(X, \mathcal{S}_X)$  и вероятностное ядро перехода  $K$  от  $(X, \mathcal{S}_X)$  к  $(Y, \mathcal{S}_Y)$  такие, что  $\nu(dx, dy) = \mu(dx)K(x, dy)$ .

# Содержание

1 Системы множеств

2 Мера и интеграл Лебега

3 Основные теоремы интеграла Лебега

- Замена переменных в интеграле Лебега
- Меры на прямых произведениях измеримых пространств
- Теорема Радона-Никодима

4 Условное математическое ожидание

5 Измеримость супремума

# Основные теоремы интеграла Лебега

Теорема Радона-Никодима

## Определение 1.33.

Пусть  $\mu$  и  $\nu$  – меры, заданные на измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{S})$ . Будем говорить, что мера  $\nu$  обладает свойством **абсолютной непрерывности** относительно меры  $\mu$  (и записывать  $\nu \ll \mu$ ), если для любого  $A \in \mathcal{S}$  из условия  $\mu(A) = 0$  следует  $\nu(A) = 0$ .

# Основные теоремы интеграла Лебега

## Теорема Радона-Никодима

### Определение 1.33.

Пусть  $\mu$  и  $\nu$  – меры, заданные на измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{S})$ . Будем говорить, что мера  $\nu$  обладает свойством **абсолютной непрерывности** относительно меры  $\mu$  (и записывать  $\nu \ll \mu$ ), если для любого  $A \in \mathcal{S}$  из условия  $\mu(A) = 0$  следует  $\nu(A) = 0$ .

### Теорема 1.6 (Радон-Никодим)

Пусть  $\mu$  –  $\sigma$ -конечная мера,  $\nu$  – конечная мера со знаком, заданные на измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{S})$ , и  $\nu \ll \mu$ .

Тогда существует и единственна ( $\mu$ -п.в.) функция  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$  такая, что для любого  $A \in \mathcal{S}$  выполняется равенство

$$\nu(A) = \int_A f(\omega) \mu(d\omega).$$

# Основные теоремы интеграла Лебега

## Теорема Радона-Никодима

### Теорема 1.6 (Радон-Никодим, продолжение)

При этом, функция  $f$  называется *производной Радона-Никодима* и обозначается через  $\frac{d\nu}{d\mu}$ .

# Основные теоремы интеграла Лебега

## Теорема Радона-Никодима

### Теорема 1.7.

Пусть  $\nu, \mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3$  – конечные меры, заданные на измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{S})$ .

# Основные теоремы интеграла Лебега

## Теорема Радона-Никодима

### Теорема 1.7.

Пусть  $\nu, \mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3$  – конечные меры, заданные на измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{S})$ .

Тогда

1 если  $\mu_1 \ll \mu_2, \mu_2 \ll \mu_3$ , то  $\mu_1 \ll \mu_3$  и

$$\frac{d\mu_1}{d\mu_3} = \frac{d\mu_1}{d\mu_2} \frac{d\mu_2}{d\mu_3} \quad (\mu_3\text{-п.в.});$$



# Основные теоремы интеграла Лебега

## Теорема Радона-Никодима

### Теорема 1.7.

Пусть  $\nu, \mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3$  – конечные меры, заданные на измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{S})$ .

Тогда

- ① если  $\mu_1 \ll \mu_2, \mu_2 \ll \mu_3$ , то  $\mu_1 \ll \mu_3$  и

$$\frac{d\mu_1}{d\mu_3} = \frac{d\mu_1}{d\mu_2} \frac{d\mu_2}{d\mu_3} \quad (\mu_3\text{-п.в.});$$

- ② если  $\nu \ll \mu$  и  $\frac{d\nu}{d\mu} > 0$  ( $\mu$ -п.в.), то  $\mu \ll \nu$  и

$$\frac{d\mu}{d\nu} = \left( \frac{d\nu}{d\mu} \right)^{-1} \quad (\nu\text{-п.в.}).$$

# Условное математическое ожидание

Действительный анализ и теория вероятностей используют общий математический аппарат, который был кратко изложен в предыдущих разделах настоящей главы. Однако предмет исследования у этих дисциплин разный.

# Условное математическое ожидание

Действительный анализ и теория вероятностей используют общий математический аппарат, который был кратко изложен в предыдущих разделах настоящей главы. Однако предмет исследования у этих дисциплин разный.

В частности, в теории вероятностей ключевую роль играет понятие независимости. Прежде, чем перейти к рассмотрению свойств условного математического ожидания, формализуем понятие независимости системы событий и случайных элементов.

# Условное математическое ожидание

Действительный анализ и теория вероятностей используют общий математический аппарат, который был кратко изложен в предыдущих разделах настоящей главы. Однако предмет исследования у этих дисциплин разный.

В частности, в теории вероятностей ключевую роль играет понятие независимости. Прежде, чем перейти к рассмотрению свойств условного математического ожидания, формализуем понятие независимости системы событий и случайных элементов.

Далее, будем предполагать заданным некоторое произвольное вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ .

# Содержание

- 1 Системы множеств
- 2 Мера и интеграл Лебега
- 3 Основные теоремы интеграла Лебега
- 4 Условное математическое ожидание**
  - **Понятие независимости**
  - Условное математическое ожидание
  - Условное распределение случайного элемента
- 5 Измеримость супремума

# Условное математическое ожидание

## Понятие независимости

### Определение 1.34.

Системы событий  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{S}$  ( $n \geq 2$ ), содержащих  $\Omega$ , называются **независимыми (в совокупности)**, если

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n),$$

для любых  $A_1 \in \mathcal{S}_1, A_2 \in \mathcal{S}_2, \dots, A_n \in \mathcal{S}_n$ .

# Условное математическое ожидание

## Понятие независимости

### Определение 1.34.

Системы событий  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{S}$  ( $n \geq 2$ ), содержащих  $\Omega$ , называются **независимыми (в совокупности)**, если

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n),$$

для любых  $A_1 \in \mathcal{S}_1, A_2 \in \mathcal{S}_2, \dots, A_n \in \mathcal{S}_n$ .

### Определение 1.35.

События  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{S}$  ( $n \geq 2$ ) называются **независимыми (в совокупности)**, если независимы системы событий  $\{A_1, \Omega\}, \{A_2, \Omega\}, \dots, \{A_n, \Omega\}$ .

# Условное математическое ожидание

## Понятие независимости

### Определение 1.36.

Случайные элементы  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$  ( $n \geq 2$ ) называются **независимыми (в совокупности)**, если независимы порождённые ими  $\sigma$ -алгебры  $\sigma\{\zeta_1\}, \sigma\{\zeta_2\}, \dots, \sigma\{\zeta_n\}$ .



# Условное математическое ожидание

## Понятие независимости

### Определение 1.36.

Случайные элементы  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$  ( $n \geq 2$ ) называются **независимыми (в совокупности)**, если независимы порождённые ими  $\sigma$ -алгебры  $\sigma\{\zeta_1\}, \sigma\{\zeta_2\}, \dots, \sigma\{\zeta_n\}$ .

Множество событий называется  **$\pi$ -системой**, если она замкнута относительно взятия конечных пересечений.

# Условное математическое ожидание

## Понятие независимости

### Определение 1.36.

Случайные элементы  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$  ( $n \geq 2$ ) называются **независимыми (в совокупности)**, если независимы порождённые ими  $\sigma$ -алгебры  $\sigma\{\zeta_1\}, \sigma\{\zeta_2\}, \dots, \sigma\{\zeta_n\}$ .

Множество событий называется  **$\pi$ -системой**, если она замкнута относительно взятия конечных пересечений.

### Утверждение 1.14.

Предположим, что  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{S}$  ( $n \geq 2$ ) – независимые  $\pi$ -системы, содержащие  $\Omega$ . Тогда независимыми будут порождённые ими  $\sigma$ -алгебры  $\sigma\{\mathcal{S}_1\}, \sigma\{\mathcal{S}_2\}, \dots, \sigma\{\mathcal{S}_n\}$ .

# Условное математическое ожидание

## Понятие независимости

### Утверждение 1.15.

Пусть заданы измеримые пространства  $(\Sigma_i, \mathcal{E}_i)$ ,  $(\Upsilon_i, \mathcal{I}_i)$ , случайные элементы  $\zeta_i \in \mathcal{S} \mid \mathcal{E}_i$  и измеримые отображения  $g_i \in \mathcal{E}_i \mid \mathcal{I}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $n \geq 2$ ).

Тогда из независимости случайных элементов  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$  следует независимость случайных элементов  $g_1(\zeta_1), g_2(\zeta_2), \dots, g_n(\zeta_n)$ .

# Условное математическое ожидание

## Понятие независимости

### Утверждение 1.15.

Пусть заданы измеримые пространства  $(\Sigma_i, \mathcal{E}_i)$ ,  $(\Upsilon_i, \mathcal{I}_i)$ , случайные элементы  $\zeta_i \in \mathcal{S} \mid \mathcal{E}_i$  и измеримые отображения  $g_i \in \mathcal{E}_i \mid \mathcal{I}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $n \geq 2$ ).

Тогда из независимости случайных элементов  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$  следует независимость случайных элементов  $g_1(\zeta_1), g_2(\zeta_2), \dots, g_n(\zeta_n)$ .

Из определения прямого произведения измеримых пространств и утверждений 1.14 и 1.15 вытекает полезное следствие.

# Условное математическое ожидание

## Понятие независимости

### Утверждение 1.15.

Пусть заданы измеримые пространства  $(\Sigma_i, \mathcal{E}_i)$ ,  $(\Upsilon_i, \mathcal{I}_i)$ , случайные элементы  $\zeta_i \in \mathcal{S} \mid \mathcal{E}_i$  и измеримые отображения  $g_i \in \mathcal{E}_i \mid \mathcal{I}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $n \geq 2$ ).

Тогда из независимости случайных элементов  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$  следует независимость случайных элементов  $g_1(\zeta_1), g_2(\zeta_2), \dots, g_n(\zeta_n)$ .

Из определения прямого произведения измеримых пространств и утверждений 1.14 и 1.15 вытекает полезное следствие.

### Следствие 1.1.

Если случайные элементы  $\zeta_1, \dots, \zeta_k, \zeta_{k+1}, \dots, \zeta_n$  ( $1 < k < n$ ) независимы, то независимыми будут и случайные элементы вида  $g(\zeta_1, \dots, \zeta_k), \zeta_{k+1}, \dots, \zeta_n$ , где  $g$  – измеримое отображение.

# Условное математическое ожидание

## Понятие независимости

### Утверждение 1.16.

Пусть случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы и  $\mathbf{E}|\xi|, \mathbf{E}|\eta| < \infty$ . Тогда  $\mathbf{E}|\xi\eta| < \infty$  и  $\mathbf{E}\xi\eta = \mathbf{E}\xi \cdot \mathbf{E}\eta$ .

# Содержание

- 1 Системы множеств
- 2 Мера и интеграл Лебега
- 3 Основные теоремы интеграла Лебега
- 4 Условное математическое ожидание**
  - Понятие независимости
  - Условное математическое ожидание**
  - Условное распределение случайного элемента
- 5 Измеримость супремума

# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

Пусть задана некоторая произвольная  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ .



# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

Пусть задана некоторая произвольная  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ .

### Определение 1.37.

*Условным математическим ожиданием* случайной величины  $\xi$  относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{S}'$  называется  $\mathcal{S}'$ -измеримая случайная величина  $\xi'$  такая, что для любого события  $A \in \mathcal{S}'$  выполняется равенство  $\mathbf{E}[\xi \mathbf{1}_A] = \mathbf{E}[\xi' \mathbf{1}_A]$ .

# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

Пусть задана некоторая произвольная  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ .

### Определение 1.37.

*Условным математическим ожиданием* случайной величины  $\xi$  относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{S}'$  называется  $\mathcal{S}'$ -измеримая случайная величина  $\xi'$  такая, что для любого события  $A \in \mathcal{S}'$  выполняется равенство  $\mathbf{E}[\xi \mathbf{1}_A] = \mathbf{E}[\xi' \mathbf{1}_A]$ .

В дальнейшем, для условного математического ожидания будет использоваться обозначение  $\mathbf{E}[\xi \mid \mathcal{S}']$ .

# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

### Теорема 1.8.

Для любой случайной величины  $\xi \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{S}, \mathbf{P})$  условное математическое ожидание  $\mathbf{E}[\xi | \mathcal{S}']$  существует и единственно (п.н.).

# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

### Теорема 1.8.

Для любой случайной величины  $\xi \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{S}, P)$  условное математическое ожидание  $\mathbf{E}[\xi | \mathcal{S}']$  существует и единственно (п.н.).

Приведённое достаточное условие существования условного математического ожидания вытекает из теоремы Радона-Никодима. Действительно, из свойств интеграла Лебега следует, что функция  $A \mapsto \mathbf{E}[\xi \mathbf{1}_A]$  является конечной мерой на измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{S}')$  абсолютно непрерывной относительно сужения вероятностной меры  $P$  на это измеримое пространство.

# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

### Утверждение 1.17.

Пусть  $\xi, \zeta \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{S}, \mathbf{P})$ . Справедливы следующие утверждения:

# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

### Утверждение 1.17.

Пусть  $\xi, \zeta \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{S}, P)$ . Справедливы следующие утверждения:

1. если случайная величина  $\xi$  является  $\mathcal{S}'$ -измеримой и  $\xi\zeta \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{S}, P)$ , то

$$\mathbf{E}[\xi\zeta \mid \mathcal{S}'] = \xi \mathbf{E}[\zeta \mid \mathcal{S}'] \quad (\text{п.н.}),$$

в том числе

$$\mathbf{E}[\xi \mid \mathcal{S}'] = \xi \quad (\text{п.н.}).$$

# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

### Утверждение 1.17.

Пусть  $\xi, \zeta \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{S}, P)$ . Справедливы следующие утверждения:

1. если случайная величина  $\xi$  является  $\mathcal{S}'$ -измеримой и  $\xi\zeta \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{S}, P)$ , то

$$\mathbf{E}[\xi\zeta \mid \mathcal{S}'] = \xi \mathbf{E}[\zeta \mid \mathcal{S}'] \quad (\text{п.н.}),$$

в том числе

$$\mathbf{E}[\xi \mid \mathcal{S}'] = \xi \quad (\text{п.н.}).$$

2. для любых  $a, b \in \mathbb{R}$  выполняется равенство

$$\mathbf{E}[a\xi + b\zeta \mid \mathcal{S}'] = a\mathbf{E}[\xi \mid \mathcal{S}'] + b\mathbf{E}[\zeta \mid \mathcal{S}'] \quad (\text{п.н.});$$

# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

### Утверждение 1.17.

Пусть  $\xi, \zeta \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$ . Справедливы следующие утверждения:

1. если случайная величина  $\xi$  является  $\mathcal{S}'$ -измеримой и  $\xi\zeta \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$ , то

$$\mathbf{E}[\xi\zeta \mid \mathcal{S}'] = \xi \mathbf{E}[\zeta \mid \mathcal{S}'] \quad (\text{п.н.}),$$

в том числе

$$\mathbf{E}[\xi \mid \mathcal{S}'] = \xi \quad (\text{п.н.}).$$

2. для любых  $a, b \in \mathbb{R}$  выполняется равенство

$$\mathbf{E}[a\xi + b\zeta \mid \mathcal{S}'] = a\mathbf{E}[\xi \mid \mathcal{S}'] + b\mathbf{E}[\zeta \mid \mathcal{S}'] \quad (\text{п.н.});$$

3. если  $\xi \leq \zeta$  (п.н.), то  $\mathbf{E}[\xi \mid \mathcal{S}'] \leq \mathbf{E}[\zeta \mid \mathcal{S}']$  (п.н.);



# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

### Утверждение 1.17.

4. если  $\xi$  не зависит от  $\mathcal{S}'$  ( $\sigma$ -алгебры  $\sigma\{\xi\}$  и  $\mathcal{S}'$  независимы), то  $\mathbf{E}[\xi | \mathcal{S}'] = \mathbf{E}\xi$  (п.н.);

# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

### Утверждение 1.17.

4. если  $\xi$  не зависит от  $\mathcal{S}'$  ( $\sigma$ -алгебры  $\sigma\{\xi\}$  и  $\mathcal{S}'$  независимы), то  $\mathbf{E}[\xi | \mathcal{S}'] = \mathbf{E}\xi$  (п.н.);
5. (телескопическое свойство) для любых  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{S}$  таких, что  $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2$  выполняются равенства

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[\xi | \mathcal{S}_1] | \mathcal{S}_2] = \mathbf{E}[\xi | \mathcal{S}_1] \quad (\text{п.н.}),$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[\xi | \mathcal{S}_2] | \mathcal{S}_1] = \mathbf{E}[\xi | \mathcal{S}_1] \quad (\text{п.н.});$$

# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

### Утверждение 1.17.

4. если  $\xi$  не зависит от  $\mathcal{S}'$  ( $\sigma$ -алгебры  $\sigma\{\xi\}$  и  $\mathcal{S}'$  независимы), то  $\mathbf{E}[\xi | \mathcal{S}'] = \mathbf{E}\xi$  (п.н.);
5. (телескопическое свойство) для любых  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{S}$  таких, что  $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2$  выполняются равенства

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[\xi | \mathcal{S}_1] | \mathcal{S}_2] = \mathbf{E}[\xi | \mathcal{S}_1] \quad (\text{п.н.}),$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[\xi | \mathcal{S}_2] | \mathcal{S}_1] = \mathbf{E}[\xi | \mathcal{S}_1] \quad (\text{п.н.});$$

6. (формула полной вероятности)  $\mathbf{E}[\mathbf{E}[\xi | \mathcal{S}']] = \mathbf{E}\xi$ ;

# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

### Утверждение 1.17.

4. если  $\xi$  не зависит от  $\mathcal{S}'$  ( $\sigma$ -алгебры  $\sigma\{\xi\}$  и  $\mathcal{S}'$  независимы), то  $\mathbf{E}[\xi | \mathcal{S}'] = \mathbf{E}\xi$  (п.н.);
5. (телескопическое свойство) для любых  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{S}$  таких, что  $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2$  выполняются равенства

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\mathbf{E}[\xi | \mathcal{S}_1] | \mathcal{S}_2] &= \mathbf{E}[\xi | \mathcal{S}_1] \quad (\text{п.н.}), \\ \mathbf{E}[\mathbf{E}[\xi | \mathcal{S}_2] | \mathcal{S}_1] &= \mathbf{E}[\xi | \mathcal{S}_1] \quad (\text{п.н.});\end{aligned}$$

6. (формула полной вероятности)  $\mathbf{E}[\mathbf{E}[\xi | \mathcal{S}']] = \mathbf{E}\xi$ ;
7. (неравенство Йенсена) если  $\varphi$  – выпуклая борелевская функция и  $\mathbf{E}|\varphi(\xi)| < \infty$ , то

$$\mathbf{E}[\varphi(\xi) | \mathcal{S}] \geq \varphi(\mathbf{E}[\xi | \mathcal{S}]) \quad (\text{п.н.}).$$

# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

### Определение 1.38.

**Условным математическим ожиданием** случайной величины  $\xi$  относительно случайного элемента  $\zeta$  называется случайная величина  $\mathbf{E}[\xi | \zeta] := \mathbf{E}[\xi | \sigma\{\zeta\}]$ .

# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

### Определение 1.38.

**Условным математическим ожиданием** случайной величины  $\xi$  относительно случайного элемента  $\zeta$  называется случайная величина  $\mathbf{E}[\xi | \zeta] := \mathbf{E}[\xi | \sigma\{\zeta\}]$ .

### Определение 1.39.

**Условным математическим ожиданием** случайной величины  $\xi$  относительно события  $\{\zeta = x\}$  называется такая измеримая функция  $\varphi(x)$ , что  $\mathbf{E}[\xi | \zeta] = \varphi \circ \zeta$ .

В дальнейшем, для таким образом определённой функции  $\varphi(x)$  будет использоваться обозначение  $\mathbf{E}[\xi | \zeta = x]$ .

# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

### Определение 1.38.

**Условным математическим ожиданием** случайной величины  $\xi$  относительно случайного элемента  $\zeta$  называется случайная величина  $\mathbf{E}[\xi | \zeta] := \mathbf{E}[\xi | \sigma\{\zeta\}]$ .

### Определение 1.39.

**Условным математическим ожиданием** случайной величины  $\xi$  относительно события  $\{\zeta = x\}$  называется такая измеримая функция  $\varphi(x)$ , что  $\mathbf{E}[\xi | \zeta] = \varphi \circ \zeta$ .

В дальнейшем, для таким образом определённой функции  $\varphi(x)$  будет использоваться обозначение  $\mathbf{E}[\xi | \zeta = x]$ .

Из леммы Дуба-Дынкина следует корректность определения  $\mathbf{E}[\xi | \zeta = x]$ .

# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

### Утверждение 1.18.

Пусть  $(\Sigma_1, \mathcal{E}_1)$  и  $(\Sigma_2, \mathcal{E}_2)$  – измеримые пространства,  $\xi \in \mathcal{S} | \mathcal{E}_1$  и  $\zeta \in \mathcal{S} | \mathcal{E}_2$  – независимые случайные элементы,  $g$  –  $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ -измеримая функция. Предположим, что  $\mathbf{E}|g(\xi, \zeta)| < \infty$ . Тогда

$$\mathbf{E}[g(\xi, \zeta) | \zeta = x] = \mathbf{E}[g(\xi, x)] \quad (x \in \Sigma_2).$$



# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

Введём важный частный случай условного математического ожидания.

# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

Введём важный частный случай условного математического ожидания.

### Определение 1.40.

Условное математическое ожидание вида  $P[A | \mathcal{S}'] := \mathbf{E}[\mathbf{1}_A | \mathcal{S}']$  называется **условной вероятностью события  $A \in \mathcal{S}$  относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{S}'$** .

Условное математическое ожидание вида  $P[A | \zeta] := \mathbf{E}[\mathbf{1}_A | \zeta]$  называется **условной вероятностью события  $A \in \mathcal{S}$  относительно случайного элемента  $\zeta$** .

**Условной вероятностью события  $A \in \mathcal{S}$  относительно события  $\{\zeta = x\}$**  называется  $P[A | \zeta = x] := \mathbf{E}[\mathbf{1}_A | \zeta = x]$ .

# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

### Пример 1.13.

Пусть заданы случайная величина  $\xi \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{S}, P)$  и система попарно непересекающихся множеств  $\mathcal{D} = \{D_k, k \in \mathbb{N}\}$ . Предположим, что  $\mathcal{S}' = \sigma\{\mathcal{D}\}$  и вероятность каждого события  $P(D_k) > 0$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).

# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

### Пример 1.13.

Пусть заданы случайная величина  $\xi \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{S}, P)$  и система попарно непересекающихся множеств  $\mathcal{D} = \{D_k, k \in \mathbb{N}\}$ . Предположим, что  $\mathcal{S}' = \sigma\{\mathcal{D}\}$  и вероятность каждого события  $P(D_k) > 0$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Тогда

$$E[\xi | \mathcal{S}'] = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{E[\xi \mathbf{1}_{D_k}]}{P(D_k)} \mathbf{1}_{D_k}.$$

# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

### Пример 1.13.

Пусть заданы случайная величина  $\xi \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{S}, P)$  и система попарно непересекающихся множеств  $\mathcal{D} = \{D_k, k \in \mathbb{N}\}$ . Предположим, что  $\mathcal{S}' = \sigma\{\mathcal{D}\}$  и вероятность каждого события  $P(D_k) > 0$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Тогда

$$E[\xi | \mathcal{S}'] = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{E[\xi \mathbf{1}_{D_k}]}{P(D_k)} \mathbf{1}_{D_k}.$$

В частности, если  $A \in \mathcal{S}$ , то

$$P[A | \mathcal{S}'] = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{P(A \cap D_k)}{P(D_k)} \mathbf{1}_{D_k}.$$

# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

### Пример 1.14.

Пусть заданы случайная величина  $\xi \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{S}, P)$  и случайный элемент  $\eta$ , принимающий не более чем счетное число значений  $\{x_1, x_2, \dots\}$ . Предположим, что  $P\{\eta = x_k\} > 0$  ( $k \geq 1$ ) и  $\sum_{k \geq 1} P\{\eta = x_k\} = 1$ .

# Условное математическое ожидание

## Условное математическое ожидание

### Пример 1.14.

Пусть заданы случайная величина  $\xi \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{S}, P)$  и случайный элемент  $\eta$ , принимающий не более чем счетное число значений  $\{x_1, x_2, \dots\}$ . Предположим, что  $P\{\eta = x_k\} > 0$  ( $k \geq 1$ ) и  $\sum_{k \geq 1} P\{\eta = x_k\} = 1$ .

Тогда

$$E[\xi | \eta = x_k] = \frac{E[\xi \mathbf{1}\{\eta = x_k\}]}{P\{\eta = x_k\}}, \quad (k \geq 1).$$

Для  $x \notin \{x_1, x_2, \dots\}$  значение  $E[\xi | \eta = x]$  выбирается произвольным образом.

# Содержание

- 1 Системы множеств
- 2 Мера и интеграл Лебега
- 3 Основные теоремы интеграла Лебега
- 4 Условное математическое ожидание**
  - Понятие независимости
  - Условное математическое ожидание
  - **Условное распределение случайного элемента**
- 5 Измеримость супремума



# Условное математическое ожидание

## Условное распределение случайного элемента

Предположим, что на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$  задан случайный элемент  $X$  со значениями в измеримом пространстве  $(X, \mathcal{S}_X)$  и случайный элемент  $Y$  со значениями в стандартном измеримом пространстве  $(Y, \mathcal{S}_Y)$ . Из утверждения 1.7 следует, что пара  $(X, Y)$  представляет собой случайный элемент со значениями в  $(X \times Y, \mathcal{S}_X \otimes \mathcal{S}_Y)$ .

# Условное математическое ожидание

## Условное распределение случайного элемента

Предположим, что на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$  задан случайный элемент  $X$  со значениями в измеримом пространстве  $(X, \mathcal{S}_X)$  и случайный элемент  $Y$  со значениями в стандартном измеримом пространстве  $(Y, \mathcal{S}_Y)$ . Из утверждения 1.7 следует, что пара  $(X, Y)$  представляет собой случайный элемент со значениями в  $(X \times Y, \mathcal{S}_X \otimes \mathcal{S}_Y)$ .

Через  $P_{X,Y}$  обозначим распределение случайного элемента  $(X, Y)$ , которое будем называть **совместным распределением**  $X$  и  $Y$ , а через  $P_X$  обозначим распределение случайного элемента  $X$ , которое будем называть **маргинальным распределением**. По теореме 1.5 существует вероятностное ядро перехода  $P_{Y|X}$  такое, что

$$P_{X,Y}(dx, dy) = P_X(dx) P_{Y|X}(x, dy).$$

# Условное математическое ожидание

## Условное распределение случайного элемента

### Определение 1.41.

Вероятностное ядро перехода  $P_{Y|X}$  называется **условным распределением** случайного элемента  $Y$  относительно случайного элемента  $X$ .

# Условное математическое ожидание

## Условное распределение случайного элемента

### Определение 1.41.

Вероятностное ядро перехода  $P_{Y|X}$  называется **условным распределением** случайного элемента  $Y$  относительно случайного элемента  $X$ .

Для каждого фиксированного  $B \in \mathcal{S}_Y$  случайная величина  $P_{Y|X}(X(\omega), B)$  является вариантом условной вероятности  $P[Y^{-1}(B) | X]$ . При этом выполняется так называемое свойство регулярности относительно заданных с помощью  $P_{Y|X}$  вариантов условных вероятностей. Для каждого фиксированного  $\omega \in \Omega$  функция множеств  $C \mapsto P[C | X](\omega)$  является мерой на  $\sigma\{Y\}$ .

# Условное математическое ожидание

## Условное распределение случайного элемента

### Пример 1.15.

Будем считать  $X$  и  $Y$  случайными величинами, совместное распределение которых имеет плотность  $p_{X,Y}$ . Это означает, что

$$P\{(X, Y) \in B\} = \int_B p_{X,Y}(x, y) dx dy, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

В этом случае распределение случайной величины  $X$  то же будет иметь плотность

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

# Условное математическое ожидание

## Условное распределение случайного элемента

### Пример 1.15. (продолжение)

Определим **условную плотность** случайной величины  $Y$  относительно случайной величины  $X$  по правилу

$$p_{Y|X}(x, y) := \begin{cases} \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)}, & \text{если } p_X(x) \neq 0; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$P_{Y|X}(x, B) = \int_B p_{Y|X}(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

# Условное математическое ожидание

## Условное распределение случайного элемента

### Пример 1.15. (продолжение)

В частности, для произвольной борелевской функции  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  верно равенство

$$\mathbf{E} [f(X, Y)] = \int_{\mathbb{R}} p_X(x) dx \int_{\mathbb{R}} f(x, y) p_{Y|X}(x, y) dy$$

(если определена левая часть равенства, то определена и его правая часть, и наоборот).

# Измеримость супремума

В дальнейшем нам потребуется работать с функциями вида

$$\omega \longmapsto \sup_{f \in \mathcal{F}} f(\omega) \quad \text{и} \quad \omega \longmapsto \inf_{f \in \mathcal{F}} f(\omega) \quad (\omega \in \Omega), \quad (4)$$

где  $\mathcal{F}$  – семейство измеримых функций, заданных на некотором измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{S})$ . Возникает закономерный вопрос об измеримости таких функций.



# Измеримость супремума

В дальнейшем нам потребуется работать с функциями вида

$$\omega \longmapsto \sup_{f \in \mathcal{F}} f(\omega) \quad \text{и} \quad \omega \longmapsto \inf_{f \in \mathcal{F}} f(\omega) \quad (\omega \in \Omega), \quad (4)$$

где  $\mathcal{F}$  – семейство измеримых функций, заданных на некотором измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{S})$ . Возникает закономерный вопрос об измеримости таких функций.

Из утв. 1.5 следует, что если семейство  $\mathcal{F}$  не более чем счётное, то функции (4) будут измеримыми. Однако в общем случае это не всегда так.

# Измеримость супремума

Из примера 1.12 следует существование множества  $B \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .  
Заметим также, что любое одноэлементное множество на прямой является борелевским. Имеет место представление

$$\mathbf{1}_B = \sup_{b \in B} \mathbf{1}_{\{b\}} = \inf_{b \in B} \mathbf{1}_{\{b\}}.$$

# Измеримость супремума

Из примера 1.12 следует существование множества  $B \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Заметим также, что любое одноэлементное множество на прямой является борелевским. Имеет место представление

$$\mathbf{1}_B = \sup_{b \in B} \mathbf{1}_{\{b\}} = \inf_{b \in B} \mathbf{1}_{\{b\}}.$$

Таким образом, построено представление для неизмеримой функции  $\mathbf{1}_B$  в виде супремума и инфимума семейства измеримых функций.

# Измеримость супремума

Из примера 1.12 следует существование множества  $B \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Заметим также, что любое одноэлементное множество на прямой является борелевским. Имеет место представление

$$\mathbf{1}_B = \sup_{b \in B} \mathbf{1}_{\{b\}} = \inf_{b \in B} \mathbf{1}_{\{b\}}.$$

Таким образом, построено представление для неизмеримой функции  $\mathbf{1}_B$  в виде супремума и инфимума семейства измеримых функций.

Заметим, что проблемы измеримости супремума и инфимума сводятся к друг другу. Для этого достаточно перейти к рассмотрению семейства функций  $\{-f\}_{f \in \mathcal{F}}$ .

# Измеримость супремума

Достаточным условием измеримости супремума является существование не более чем счётного подмножества  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$  такого, что

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} f(\omega) = \sup_{f' \in \mathcal{F}'} f'(\omega) \quad (\omega \in \Omega). \quad (5)$$

# Измеримость супремума

Достаточным условием измеримости супремума является существование не более чем счётного подмножества  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$  такого, что

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} f(\omega) = \sup_{f' \in \mathcal{F}'} f'(\omega) \quad (\omega \in \Omega). \quad (5)$$

Условие (5) в свою очередь будет выполняться, если для любой функции  $f \in \mathcal{F}$  существует последовательность  $\{f'_n \in \mathcal{F}'\}_{n \in \mathbb{N}}$  такая, что

$$f'_n(\omega) \longrightarrow f(\omega) \quad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty \quad (\omega \in \Omega). \quad (6)$$

# Измеримость супремума

Достаточным условием измеримости супремума является существование не более чем счётного подмножества  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$  такого, что

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} f(\omega) = \sup_{f' \in \mathcal{F}'} f'(\omega) \quad (\omega \in \Omega). \quad (5)$$

Условие (5) в свою очередь будет выполняться, если для любой функции  $f \in \mathcal{F}$  существует последовательность  $\{f'_n \in \mathcal{F}'\}_{n \in \mathbb{N}}$  такая, что

$$f'_n(\omega) \longrightarrow f(\omega) \quad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty \quad (\omega \in \Omega). \quad (6)$$

В дальнейшем при рассмотрении функций вида (4) будет неявно предполагаться выполнение условия (5) или (6).