# Мови програмування для квантових обчислень

Максим Сохацький [1]

[1] Національний технічний університет України
«Київський Політехнічний Інститут» ім. Ігора Сікорського
28 жовтня 2018

**Аннотація**

Ця робота є спробою огляду існуючих мов програмування для квантових обчислень та їх особливостей.
**Ключові слова**: Теорія типів, Мови порграмування, Квантові обчислення

## Зміст

# 1 Попередні відомості

## 1.1 Лінійна алгебра

Нотація Дірака це компактний формалізм лінійної алгебри який будемо застосовувати для визначень квантової механіки.

Таблиця 1: Нотація Дірака

| Нотація | Визначення |
|---|---|
| $\|\psi\rangle$ | загальний кет-вектор, наприклад $(c_0, ..., c_n)^T$ |
| $\langle\psi\|$ | дуальний бра-вектор, наприклад $(c_0^*, ..., c_n^*)$ |
| $\|n\rangle$ | n-й базис вектор стандартного базису $N = (\|0\rangle, ..., \|n\rangle)$ |
| $\|\tilde{n}\rangle$ | n-й базис вектор альтернативного базису $\tilde{N} = (\|\tilde{0}\rangle, ..., \|\tilde{n}\rangle)$ |
| $\langle\phi\|\psi\rangle$ | скалярний добуток |
| $\|\phi\rangle \otimes \|\psi\rangle$ | тензорний добуток |

**Визначення 1.** (Векторний простір). Множина V називається векторни мпростором над скалярним полем F, тоді і тільки тоді, коли визначені операції $+ : V \times V \to V$ (сума векторів) та $\cdot : F \times V \to V$ (добуток скаляра та вектора) з наступними властивостями: i) $(V, +)$ утворюють комутативну групу; ii) $\lambda|\psi\rangle = |\psi\rangle\lambda$; iii) $\lambda(\mu|\psi\rangle) = (\lambda\mu)|\psi\rangle$; iv) $(\lambda + \mu)|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle + \mu|\psi\rangle$; v) $\lambda(|\psi\rangle + |\varphi\rangle) = \lambda|\psi\rangle + \lambda|\varphi\rangle$. Далі будемо розглядати скалярне поле комплексних чисел $F = C$.

**Визначення 2.** (Скалярний добуток). Функція $\langle\cdot|\cdot\rangle : V \times V \to C$ називається скалярним добутком, тоді і тільки тоді, коли: i) $\langle\psi|(\lambda\varphi\rangle + \mu|\chi\rangle) = \lambda\langle\psi|\varphi\rangle + \mu\langle\psi|\varphi\rangle$; ii) $\langle\psi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle^*$; iii) $0 < \langle\psi|\psi\rangle \in \mathbb{R}$. Скалярний добутов визначає норму $\parallel |\psi\rangle \parallel = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} = \parallel \psi \parallel$.

**Визначення 3.** (Повний векторний простір). Нехай V векторний простір з нормою $\parallel \cdot \parallel$ та $|\psi_n\rangle \in V$ послідовність векторів. i) $|\psi\rangle$ є послідовністю Коші ттт. $\forall\epsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n, m > N, \parallel |\psi_n\rangle - |\psi_{n+1}\rangle \parallel < \epsilon$. ii) $|\psi\rangle$ сходиться ттт. $\forall\epsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n > N, \parallel |\psi_n\rangle - |\psi\rangle \parallel < \epsilon$. Простір V повний ттт. кожна послідовність Коші сходиться.

**Визначення 4.** (Гільбертів простір). Повний векторний простір H зі скалярний добутком $\langle\cdot|\cdot\rangle$ та відповідною нормою $\parallel \psi \parallel = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$ називається Гільбертовим.

**Визначення 5.** (Лінійний оператор). Нехай V – векторний простір, а A – функція $A : V \to V$. Тоді A називається лінійним оператором ттт.

$$A(\lambda|\psi\rangle + \mu|\varphi\rangle) = \lambda A|\psi\rangle + \mu A|\varphi\rangle$$

В $C^n$ лінійний оператор є матрицею $m \times n$ з елементами $a_{i,j} = \langle i|A|j\rangle$, де $A = \Sigma_{i,j} a_{i,j}|i\rangle\langle j|$. За визначенням лінійності оператор A можно записати через лінійну суму векторів базису B:

$$A : |n\rangle \to \Sigma_k a_{kn}|k\rangle, \text{ де } |k\rangle \in B.$$

**Визначення 6.** (Тензорний добуток гільбертових просторів). Нехай $H_1$ та $H_2$ — Гільбертові простори з базисами $B_1$ та $B_2$. Тоді тензорний добуток

$$H = H_1 \otimes H_2 = \{\Sigma_{|i\rangle \in B_1} \Sigma |j\rangle \in B_2 c_{ij} |i, j\rangle \| c_{ij} \in \mathbb{C}\}.$$

також Гільбертів простір з базисом $B = B_1 \times B_2$ та скалярним добутком:

$$\langle i, j | i', j' \rangle = \langle i | i' \rangle \langle j | j' \rangle = \delta_{ii'} \delta j j', \text{ де } |i\rangle, |i'\rangle \in B_1, |j\rangle, |j'\rangle \in B_2.$$

**Визначення 7.** (Тензорний добуток лінійних операторів). Нехай A та B лінійні оператори на Гільбертових протосторах $H_1$ та $H_2$, тоді тензорний добуток

$$A \otimes B = \Sigma_{i,j} \Sigma i', j' |i, j\rangle \langle i|A|i'\rangle \langle j|B|j'\rangle \langle i', j'|$$

лінійний оператор на на гільбертовому просторі $H_1 \otimes H_2$.

**Визначення 8.** (Комутатор та антикомутатор). Нехай A та B лінійні оператори на гільбертовому просторі H. Оператор $[A, B] = AB - BA$ називається комутатором, а $A, B = AB + BA$ називається антикомутатором.

## 2 Інтерпретація квантової механіки

В залежності від того як саме моделюються та конструюються гільбертові простори та гамільтоніани, виникають різні теорії, від нерятивістської квантової електродинаміки до квантової хронодинаміки яка вводить поняття кварків та глюонів.

Теорія квантових обчислень — це ще одна теорія поверх абстрактного квантового формалізму та є інтерпретацією квантової механіки. Однак це не фізична теорія в тому сенсі, що вона не описує природній процес, а є ближчою до схемотехніки, з квабітами та квантовими вентилями, без визначення як саме моделюється квантова система, вона може бути або фізичним об'єктом або симулятором.

Точно так як для апаратного забезпечення будуються мови порграмування та вищі мови програмування, так само для квантових обчислень, квантових станів та квантових логічних елементів (вентилів), існують свої мови програмування. У наступній секції дамо огляд існуючих мов та підходів до їх побудови, а тут дамо основні принципи та компоненти архітектури квантових обчислень, аби пояснити основні мовні елементи.

## 2.1 Пам'ять квантового комп'ютера

**Визначення 9.** (Квантовий біт). Квантовий біт або квабіт визначається як квантова система, стан якої може бути повністю виражений як суперпозиція двох ортонормованих власних базових станів позначених $|0\rangle$ та $|1\rangle$. Загальний стан $|\psi\rangle$ квабіта тоді визначається як $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Значення квабіта описується спостереженням $N = |1\rangle\langle 1|$. $\langle N\rangle$ дає вірогідність знайти систему в стані $|1\rangle$, якщо над квабітом були проведені виміри. Простір станів квабіта є гільбертовим простором $H = \mathbb{C}^2$. Ортонормована система $|0\rangle, |1\rangle$ називається обчислювальним базисом.

**Визначення 10.** (Сфера Блоха). Загальний стан квабіта може бути виражений в полярних координатах $\theta$ та $\phi$:

$$|\psi\rangle = cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}sin\frac{\theta}{2}|1\rangle.$$

Одиничний вектор стану $|\psi\rangle$ називається вектором Блоха $\tilde{r}_\psi$, та має наступну властивість $\tilde{r}_\phi = -\tilde{r}_\xi \leftrightarrow \langle\phi|\xi\rangle = 0$.

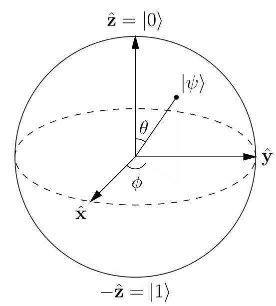


Рис. 1: Сфера Блоха як представлення квабіта $|\psi\rangle$

**Визначення 11.** (Вимірювання). Проективне вимірювання визначається як самоспряжений оператор M який називається спостереженням зі спектральною композицією $M = \Sigma_m m P_m$, де $P_m$ проекція на власний простір власного значення m. Власні значення m оператора M відповідаються усім можливим результатам вимірювання. Вимірювання $|\psi\rangle$ дасть результат m з вірогідністю $p(m) = \langle\psi|P_m|\psi\rangle$, таким чином через скорочення $|\psi\rangle$ отримаємо новий стан системи $|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{p(m)}}P_m|\psi\rangle$. Для стану квабіта, самоспряжений оператор N знаний як стандартне вимірювання.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot |0\rangle\langle 0| + 1 \cdot |1\rangle\langle 1|.$$

Біль загально для простору стану $H = C^n$ стандартне вимірювання визначається як $N = \Sigma_i i|i\rangle\langle i|$.

**Визначення 12.** (Виважене середнє). Виважене середнє $\langle M \rangle$ усіх можливих результатів вимірювання М називється очікуваним значенням та визначається як

$$\langle M \rangle = \Sigma_n p(m) m = \Sigma_m \langle \psi | m P_m | \psi \rangle = \langle \psi | M | \psi \rangle.$$

**Визначення 13.** (Машинне слово).

# 3 Огляд існуючих мов

## 3.1 QCL

## 3.2 Quantum Lambda

# 4 Висновки