Максим Сохацький

Випуск 1: Вбудовування теорії типів Мартіна-Льофа

**Проблематика.** Був пройдений довгий шлях від чистих типових систем AUTOMATH де Брейна до гомотопічних типових верифікаторів. Ця стаття стосується тільки формального ядра теорії типів Мартіна-Льофа: Π и Σ типів (які відповідають квантору загальності ∀ та квантору існування ∃ у класичній логіці) та типу-рівності.

**Мета дослідження.** Визначити типову систему як частину концептуальної моделі системи доведення теорем, у якій конструктивно виражається J елімінатор та його теореми, спираючись на більш абстрактні примітиви типа рівності. Це стало можливим завдяки кубічній теорії типів (2016) та типовому кубічному верифікатору **cubicaltt**13 (2017). Ціль статті — продемонструвати формальне вбудовування теорії типів Мартіна-Льофа в виконуючу авторську кубічну типову систему MLTT∞ з повним набором правил виводу.

**Методика реалізації.** Так як всі типи в теорії формулюються за допомогою п’яти правил: формації, інтро, елімінації, обчисленя, рівності) що в сутності є кодуванням ізоморфізмами ініальних об’єктів в категорія F-алгебр, ми зконструювали номінальні типи-синоніми для виконуючого верифікатора та довели, що це є реалізацією MLTT. Так як не всі можуть бути знайомі з теорією типів, це випуск також містить їх інтерпретації з точки зору різних розділів математики.

**Результати дослідження.** Ця робота веде до декількох результатів: 1) MLTT∞ — спеціальна версія теорії типів Мартіна-Льофа зі зліченною кількістю всесвітів та Path типом без eta-правила для HoTT застосування у яку ми будем вбудовувати класичну MLTT; 2) Власе сама інтерналізація MLTT в MLTT∞ з синтаксисом який дозволяє виводити поліморфні всесвіти; 3) Класифіковані різні інтерпретації цієї системи типів: теоретико-типова, категорна або топосо-теоретична, гомотопічна або кубічна; 4) Як результат цей випуск відкриває серію статей по формалізації різних розділів математики, та присвячений формалізації основам математики в кубічній теорії типів, MLTT моделюванню та кубічній верифікації; 5) Це може розглядатися як універсальний тест для імплементації типового верифікатора, позаяк компенсаця інтро правила та правила елімінатора пов’язані в правилі обчислення та рівності (бета та ета редукціях). Таким чином, доводжучи реалізацію MLTT, ми доводимо властивості самого виконуючого верифікатора; 6) Завдяки позитивним результатм кубічна теорія була вибрана як геометричне розширення системи індуктивних типів для математичної верифікації як частина концептуальної системи доведення теорем, яка включатимиме серію мов як середовище верифікації.

**Висновки.** Додамо, що це тільки вхід в техніку прямого вбудовування і після MLTT моделювання, ми можем піднятися вище — до вбудовування в систему індуктивних типів, і далі, до вбудовування CW-комплексів як зклейок вищих індуктивних типів, та далі до модальних логік. Це означає широкий спектр математичних теорії всередині HoTT аж до алегбраїчної топології. Подальша рефлексія веде до комбінації різних типових підсистем в спектральних категорія мовних рівнів з модулями-плагінами для синтаксичних розширень та алгоритмів нормалізації програм в цих синтаксисах.

**Ключові слова:** Теорія типів Мартіна-Льофа, Кубічна теорія типів.

Максим Сохацкий

Выпуск 1: Встраивание теории типов Мартина-Лёфа

**Проблематика.** Был пройден долгих путь от чистых типовых систем AUTOMATH де Брейна до гомотопических типовых верификаторов. Эта статья затрагивает только формализацию ядра теории типов Мартина-Лёфа: Π и Σ типов (которые соотвествуют квантору всеобщности ∀ и квантору существования ∃ в классической логике) и типу- равенству.

**Цель исследования.** Определить типовую систему для концептуальной модели системы доказательства теорем, в которой конструктивно выражетается J элиминатор и его теоремы, опираясь на более абстрактные примитивы типа равенства. Это стало возможным благодаря кубической интерпретации и двум статьям по кубической теории типов и по кубическому верификатору. Также стояла задача исследовать различные кубические системы типов для выбора своей минимальной подсистемы способной встроить MLTT. Цель статьи – демонстрация формального встраивания теории типов Мартина-Лёфа в авторскую кубическую систему MLTT∞ с полным набором правил вывода.

**Методика реализации.** Так как все типы в теории формулируются с помощью пяти правил: формации, интро, элиминации, вычисления, уникальности), что по существу есть кодированием изоморфизмами инициальных объектов в категориях F-алгебр, мы построили номиналные типы-синонимы для исполняющего верификатора и доказали, что это является реализацией MLTT. Так как не все могут быть знакомы с теорией типов, этот выпуск также включает интерпретации с точки зрения различных разделов математики.

**Результаты исследования.** Эта робота ведет к нескольким результатам: 1) MLTT∞ — специальная версия теории типов Мартина-Лёфа со счетным количеством вселенных и Path типом без eta-правила для HoTT применений, в которую будет произведено встраивание классической MLTT; 2) Собственно сама интернализация MLTT в MLTT∞ с полиморфными вселенными; 3) Классификованы разные интерпретации этой системы типов: теоретико-типовая, категорная або топосо-теоретическая, гомотопическая или кубическая; 4) Как результат этот выпуск открывает серию статей по формализации разных разделов математики, которые посвящены формализации основам математики в кубической теории типов, MLTT моделюванию и кубической верификации; 5) Это может также рассмартриваться как универсальний тест для имплементации типового верификатора, как как компенсация интро правила и правила элиминации связаны в правилах бета и эта редукции, таким образом мы доказываем правила самого верификатора; 6) Благодаря позитивным результатам, кубическая теория была выбрана как геометрическое расширение системы индуктивных типов для маметамтической механизируемой верификации как часть более общей работы — концептуальной системы доказательства теорем, которая включает в себя серию языков и языковых средств как среду для верификации и экстракции доказанных программ.

**Выводы.** Заметим, что это только вход в технику прямого встраивания и после MLTT моделирования мы можем поднятся выше — до встраивания в систему индуктивных типов, и далее, до встраивание CW-комплексов как склее высших индуктивных типов, и далее до модальных логик. Это означает широкий спектр математических теорий внутри самой HoTT вплоть до алгебраической топологии и дифференциальной геометрии. Дальнейшая рефлекция ведет к рассмотрению комбинаций типовых подсистем в спектральных категория языковых уравней с модулями-плагинами для синтаксических расширений и алгоримов нормализации программ в этих синтаксисах.

**Ключевые слова:** Теория типов Мартина-Лёфа, Кубическая теория типов.

Maxim Sokhatsky

Issue I: Internalizing Martin-Löf Type Theory

**Background.** The long road from pure type systems of AUTOMATH by de Bruijn to type checkers with homotopical core was made. This article touches only the formal Martin-Löf Type Theory (MLTT) core type system with Π and Σ types (that correspond to ∀ and ∃ quantifiers for mathematical reasoning) and identity type. Expressing the MLTT embedding in a host type checker for a long time was inaccessible due to the non-derivability of the J eliminator in pure functions. This was recently made possible by cubical type theory and cubical type checker.

**Objective.** Select the type system as a part of conceptual model of theorem proving system that is able to derive the J eliminator and its theorems based on the latest research in cubical type systems. The goal of this article is to demonstrate the formal embedding of MLTT into MLTT∞ with constructive proofs of the complete set of inference rules including J eliminator.  
**Methods.** As types are formulated using 5 types of rules (formation, intro, elimination, computation, uniqueness) that are in essence the categorical isomorphism encoding of initial objects in categories of F-algebras, we constructed aliases for the host language primitives and used the cubical type checker to prove that it has the realization of MLTT. As many may not be familiar with types, this issue presents different interpretations of core types from other areas of mathematics to show the methods in action.

**Results.** This work leads to several results: 1) MLTT∞ — a special embedded version of type theory with infinite number of universes and Path type suitable for HoTT purposes without uniqueness rule of equality type; 2) The actual embedding of MLTT with syntax implying universe polymorphism and cubical primitives in MLTT∞; 3) The different interpretations of types were given: set-theoretical, groupoid, homotopical; 4) As a result, this issue opens a series of articles dedicated to the formalization of the foundations of mathematics in cubical type theory, MLTT modeling and theorems mechanization; 5) Internalization could be seen as an ultimate test sample for type checker as intro-elimination fusion resides in beta-eta rules, so by proving them, we prove properties of the host type checker; 6) Due to this success the cubical type system was chosen as a geometrical extension to inductive type system for mathematical reasoning and as a part of the conceptual model of theorem proving system.

**Conclusion.** We should note that this is an entrance to the internalization technique, and after formal MLTT embedding, we could go through inductive types up to embedding of CW-complexes as the indexed gluing of the higher inductive types. This means the implementation of a wide spectrum of math theories inside HoTT up to algebraic topology. The further reflection on type theories unveils the combinations in a spirit of do-it-yourself (DIY) type theories with unified higher-order abstract syntax (HOAS) for pluggable initial objects, normalization modules, and equation checkers.

**Keywords**: Martin-Löf Type Theory, Cubical Type Theory