МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (НИЯУ МИФИ)

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1
ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ»

Вариант №7

Выполнил: студент гр. Б21-215

Воронков Никита Вадиомвич

Москва, 2024

Содержание

Цель работы: освоение аналитического описания кусочно-линейных функций и изучение принципов функционирования нелинейностей типа КЛФ.

1 Исходные данные

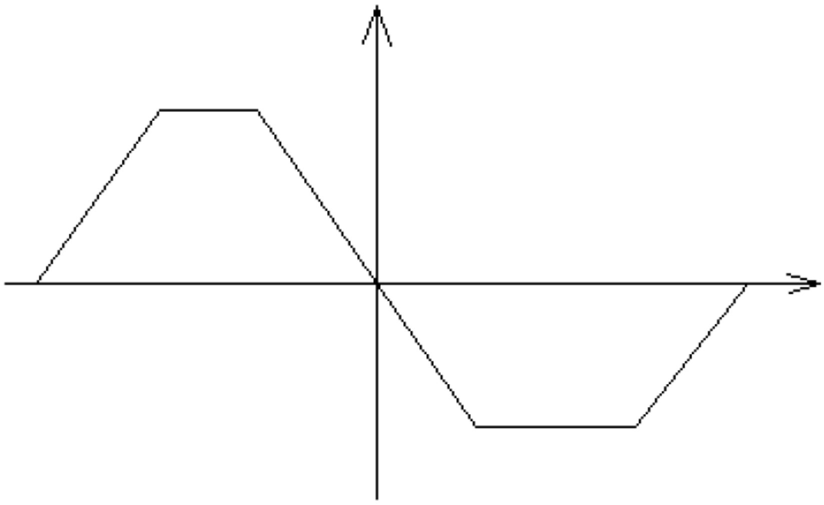

Рис. 1 – Однозначная КЛФ, заданная графически

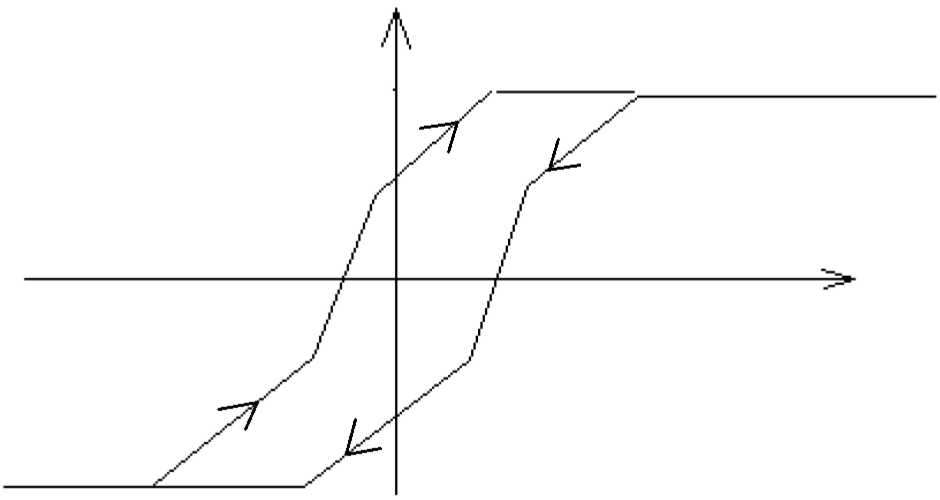

Рис. 2 – Двузначная КЛФ, заданная графически

2 Полученные аналитические описания КЛФ

Для получения аналитического описания КЛФ воспользуемся готовой формулой:

$$\begin{cases} f(x) = a_0 + a_1 x + \sum\limits_{j=1}^{N} \left\{ b_j |x - x_j| + c_j \operatorname{sgn}(x - x_j) \right\} \\ a_0 = f(0) - \sum\limits_{i=1}^{N} \left\{ b_i |x_i| - c_i \operatorname{sgn} x_i \right\} \\ a_1 = \dfrac{k_0 + k_N}{2} \\ b_j = \dfrac{k_j - k_{j-1}}{2} \\ c_j = \dfrac{f^+(x_j) - f^-(x_j)}{2} \end{cases} \tag{1}$$

Здесь N – число узлов, x_j – узлы ($j = 1, \ldots, N$), k_j – коэффициенты наклонов ($j = 0, 1, \ldots, N$), $f^-(x)$ и $f^+(x)$ – пределы функций в точке разрыва, $f(0)$ – значение функции в точке $x = 0$.

Предполагая из графического вида, что однозначная КЛФ имеет узлы $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ и $x_4 = 2$, коэффициенты наклонов $k_0 = 1$, $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = 0$ и $k_4 = 1$, а также обладает непрерывностью, из (1) получаем $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $b_1 = -0.5$, $b_2 = -0.5$, $b_3 = 0.5$, $b_4 = 0.5$, все $c_i = 0$:

$$f_1(x) = x + 0.5(-|x+2| - |x+1| + |x-1| + |x-2|) \tag{2}$$

Аналогичным образом опишем обе ветви двузначной КЛФ. Начнём с правой ветви, имеющей узлы $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ и $x_4 = 4$: предположим, что она имеет коэффициенты наклона $k_0 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 1$ и $k_4 = 0$. Тогда получаем $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ и $b_1 = 0.5$, $b_2 = 0.5$, $b_3 = -0.5$, $b_4 = -0.5$, все $c_i = 0$:

$$f_{2,1}(x) = 0.5(|x+1| + |x-1| - |x-2| - |x-4|) \tag{3}$$

Заметим, что левая ветвь - это правая, смещёная по оси x влево на 3. Нужно вместо x подставить $x+3$. Тогда получаем:

$$f_{2,2}(x) = 0.5(|x+4| + |x+2| - |x+1| - |x-1|) \tag{4}$$

Существует готовая формула для описания обратной КЛФ к (2):

$$\begin{cases} f^{-1}(y) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 y + \sum\limits_{j=1}^{N} \hat{b}_j |y - y_j| \\ \hat{a}_0 = -\hat{a}_1 y_0 - \sum\limits_{i=1}^{N} \hat{b}_i |y_0 - y_i| \\ \hat{a}_1 = \dfrac{a_1}{a_1^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{N} b_i \right)^2} \\ \hat{b}_j = \dfrac{b_j}{b_j^2 - \left(a_1 + \sum\limits_{i=1}^{j-1} b_i - \sum\limits_{i=j+1}^{N} b_i \right)^2} \end{cases} \tag{5}$$

Здесь она подходит, так как для всех значений найти обратную - невозможно. Для значений в пределах $[-1, 1]$ это удаётся сделать:

$$f_1^{-1}(y) = -x \tag{6}$$

3 Графики нелинейностей, построенные программно

Мною была написано программа на языке python с использование библиотек numpy и matplotlib. Ссылка на полный код программы указана в конце отчёта.

Однозначная КЛФ была задана при помощи кусочной функции из библиотеки numpy:

```
def f_klf(x):
    y = np.piecewise(x,
    [x < -2, (-2 <= x) & (x < -1), (-1 <= x) & (x < 1),
    (1 <= x) & (x < 2),  x >= 2],
    [lambda x: 1 * x + 3, lambda x: 0 * x + 1, lambda x: -1 * x + 0,
    lambda x: 0 * x - 1, lambda x: 1 * x - 3])
    return y}
```

Пользуясь теперь аналитическим описанием (2), можно задать данную КЛФ с помощью обычной функции:

```
def f_analytical(x):
    return x + 0.5 * (-np.abs(x + 2) - np.abs(x + 1) +
                      np.abs(x - 1) + np.abs(x - 2))
```

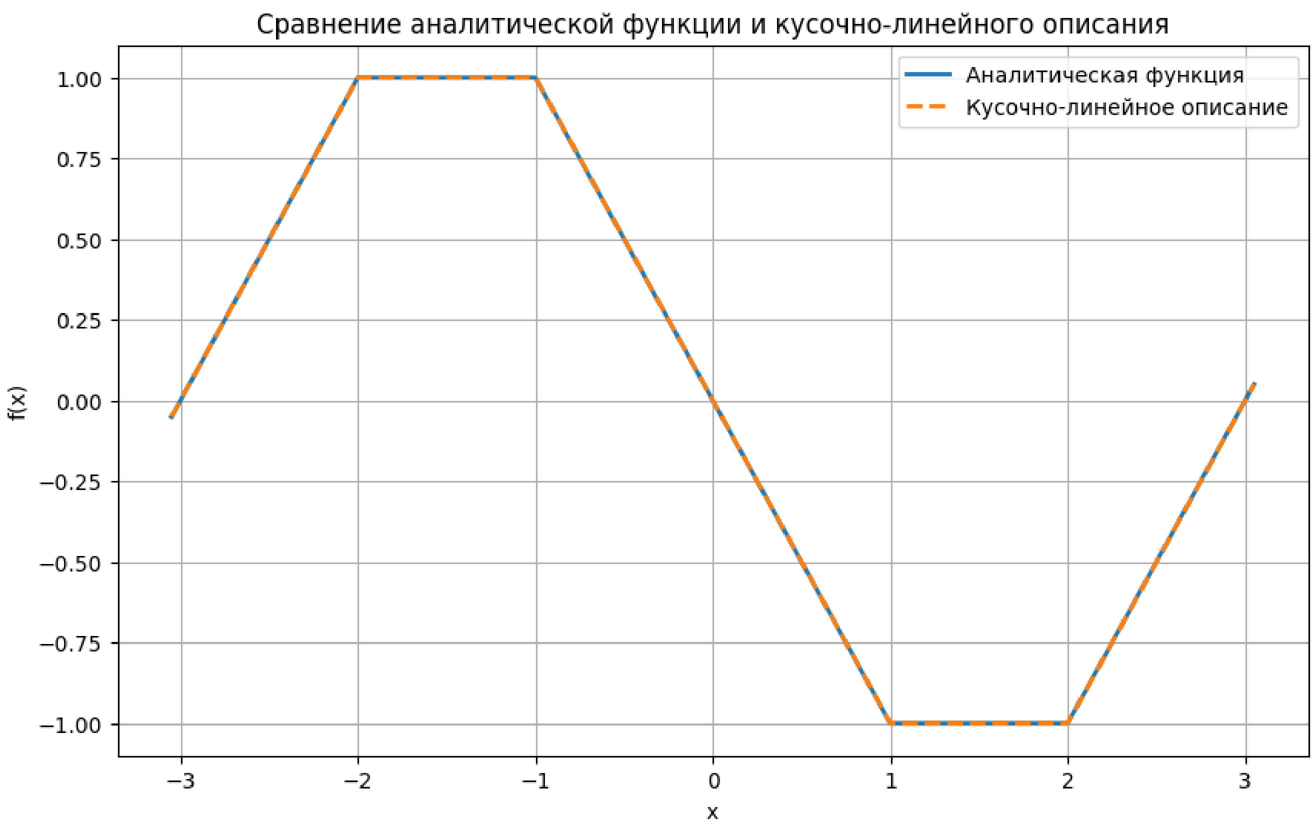

Рис. 3 – График однозначной КЛФ

Зададим аналогично ветви двузначной КЛФ. Для правой ветви была заданая кусочная функции из библиотеки numpy:

```
def f21_klf(x):
    y = np.piecewise(
        x, [x < -1, (-1 <= x) & (x < 1), (1 <= x) & (x < 2),
        (2 <= x) & (x < 4), x >= 4],
        [lambda x: 0 * x - 3, lambda x: 1 * x - 2, lambda x: 2 * x - 3,
        lambda x: 1 * x - 1, lambda x: 0 * x + 3]
    )
    return y
```

А для аналитического описания правой ветки воспользуемся обычной функцией, оответствующей записи (3):

```
def f21_analytical(x):
    return 0.5 * (np.abs(x + 1) + np.abs(x - 1) - np.abs(x - 2) - np.abs(x - 4))
```

Для левой ветви была заданая кусочная функции из библиотеки numpy::

```
def f22_klf(x):
    y = np.piecewise(
        x,[x < -4, (-4 <= x) & (x < -2), (-2 <= x) & (x < -1),
        (-1 <= x) & (x < 1), x >= 1],
        [lambda x: 0 * x - 3, lambda x: 1 * x + 1, lambda x: 2 * x + 3,
        lambda x: 1 * x + 2, lambda x: 0 * x + 3]
    )
    return y
```

И также для аналитического описания левой ветки воспользуемся обычной функцией, оответствующей записи (4):

```
def f22_analytical(x):
    return 0.5 * (np.abs(x + 4) + np.abs(x + 2) - np.abs(x + 1) - np.abs(x - 1))
```

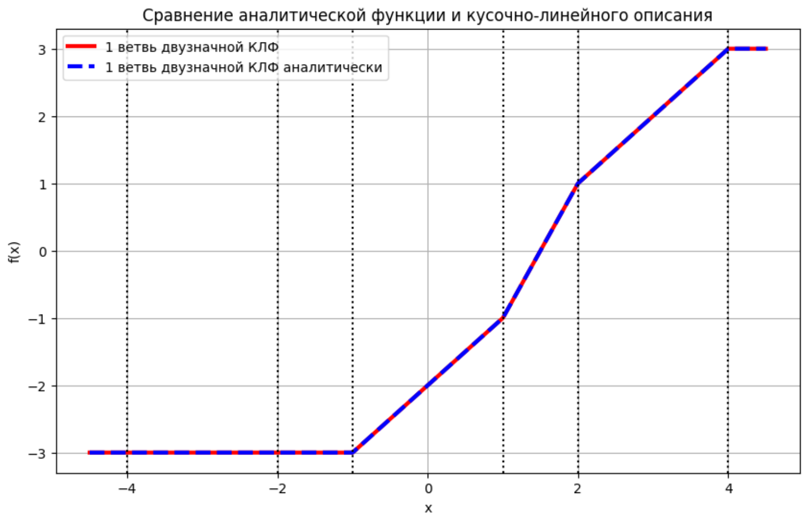

Рис. 4 – Первая ветвь двузначной КЛФ

Рис. 5 – Вторая ветвь двузначной КЛФ

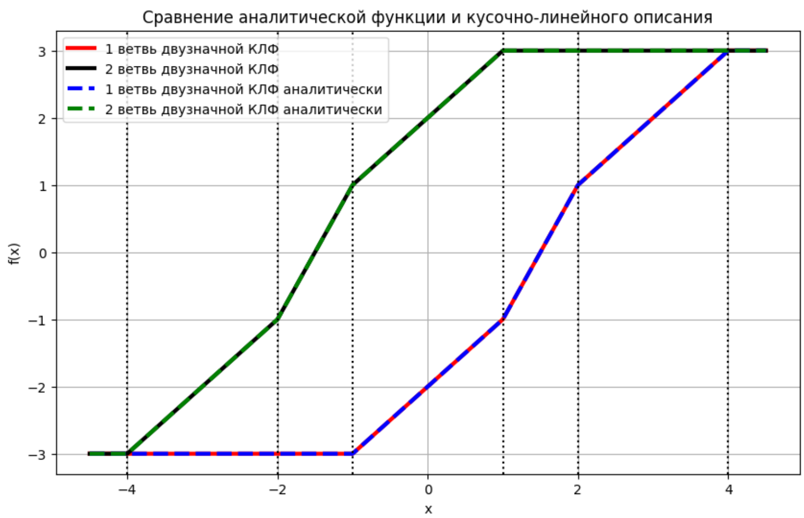

Рис. 6 – Двузначная КЛФ

Теперь зададим обратную к однозначной КЛФ следующим образом:

```
def y_obr(x):
        if (np.abs(x) < 1):
        return -x
   return x
```

4 Результаты экспериментов в виде графиков прохождения сигналов

Начнём с прохождения синусоидального сигнала через однозначную КЛФ. Эта КЛФ имеет по два симметричных узла на положительной и отрицательной полуосях: $x_3 = -x_2 = 1$ и $x_4 = -x_1 = 2$, так что необходимо рассмотреть прохождение синусоидальных сигналов разных амплитуд. Возьмём амплитуду $a = 0.5$, $a = 1.5$, и $a = 2.5$ и ещё как пример $a = 4$:

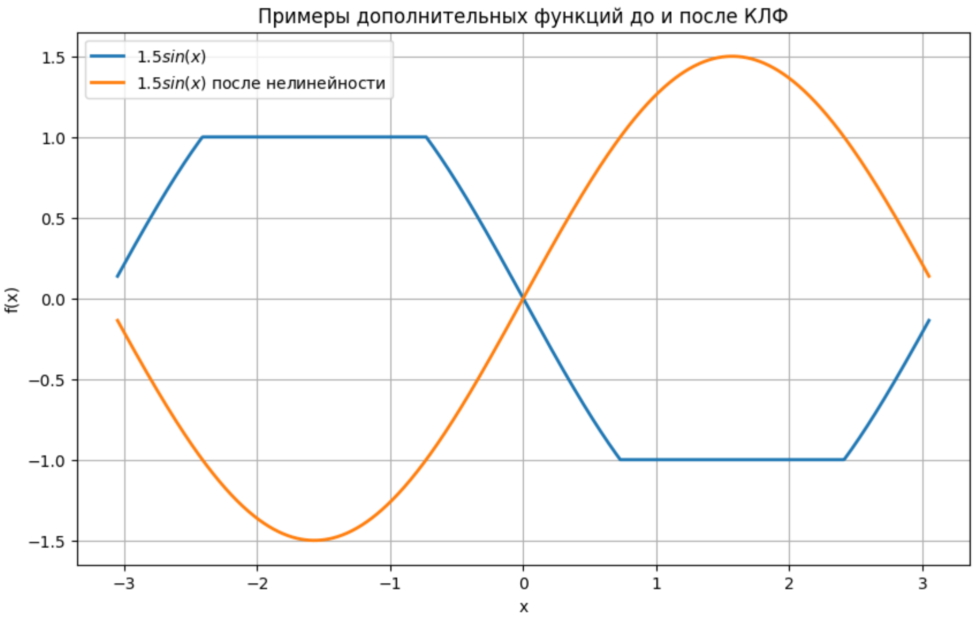

Рис. 7 – Результаты прохождения $1.5sin(x)$ через однозначную КЛФ

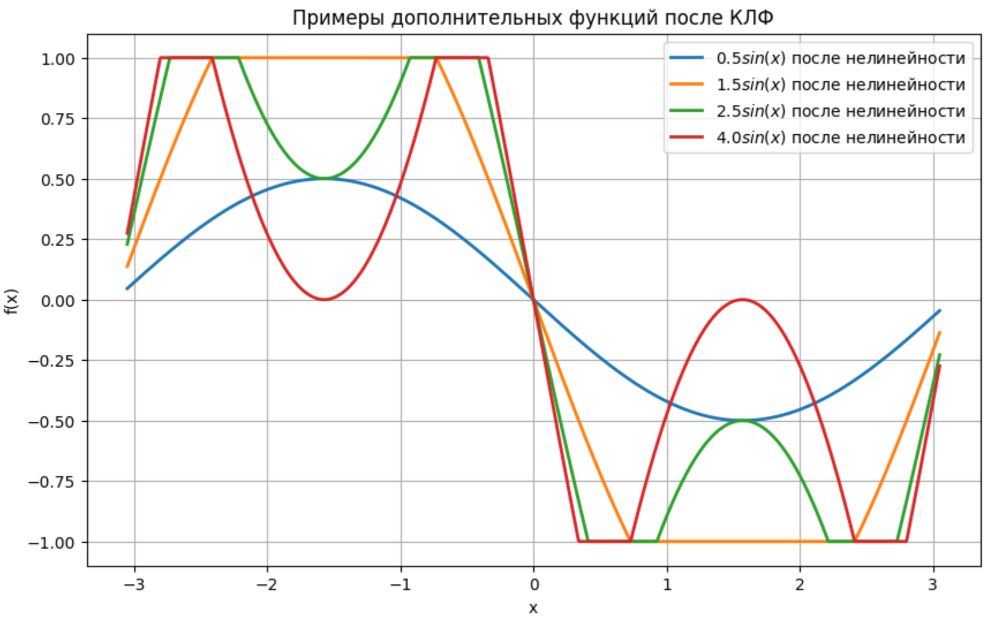

Рис. 8 – Результаты прохождения через однозначную КЛФ рахных сигналов

Теперь убедимся в том, что прохождение полученных сигналов через обратную однозначной КЛФ приведёт к частичной компенсации нелинейности:

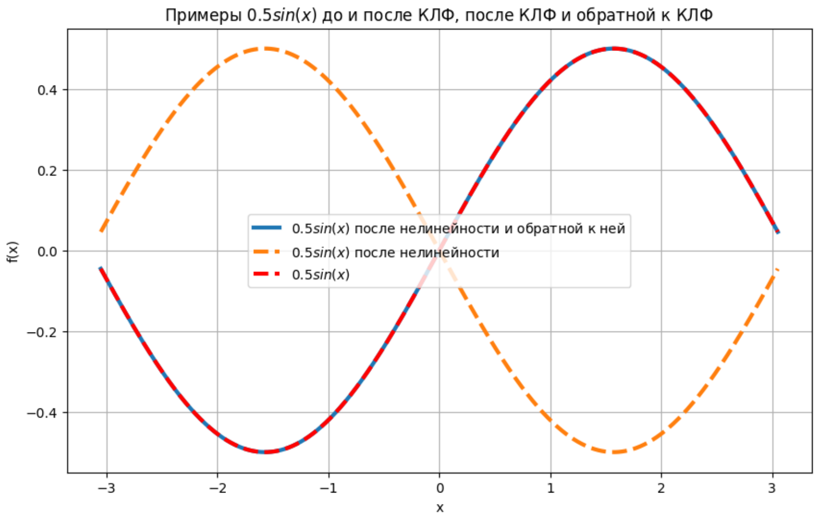

Рис. 9 – Результаты прохождения через обратную однозначной КЛФ результатов прохождения через однозначную КЛФ сигналов $x(t) = 0.5\sin x$

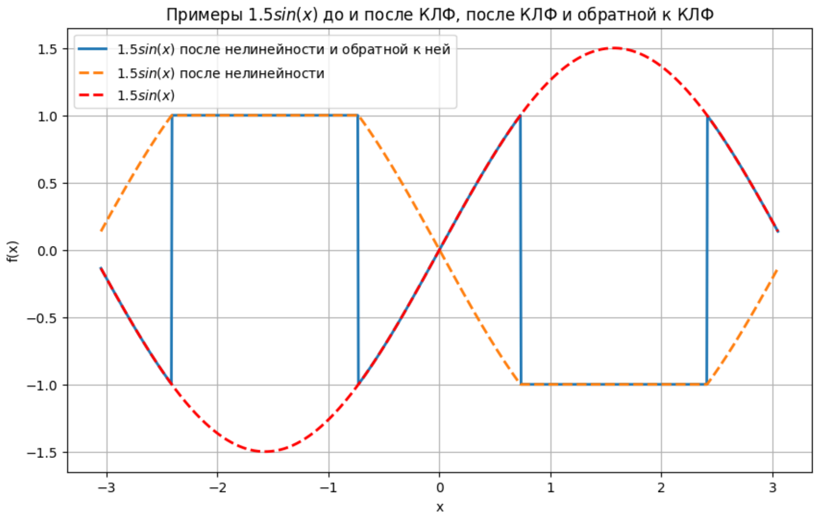

Рис. 10 – Результаты прохождения через обратную однозначной КЛФ результатов прохождения через однозначную КЛФ сигналов $x(t) = 1.5\sin x$

Подтверждается, что синусоидальные сигнали, прошедшие сначала через однозначную КЛФ, а потом через обратную ей, частично восстанавливают свой вид.

Теперь рассмотрим прохождение синусоидальных сигналов через двузначную КЛФ в двух случаях: когда ветви $\dot{x} > 0$ соответствует левая ветвь, а ветви $\dot{x} < 0$ – правая. Рассмотрим прохождение синусов различных амплитуд. Возьмём $a = 1$ и $a = 2$, а так же $sin(\frac{x}{0.33})$:

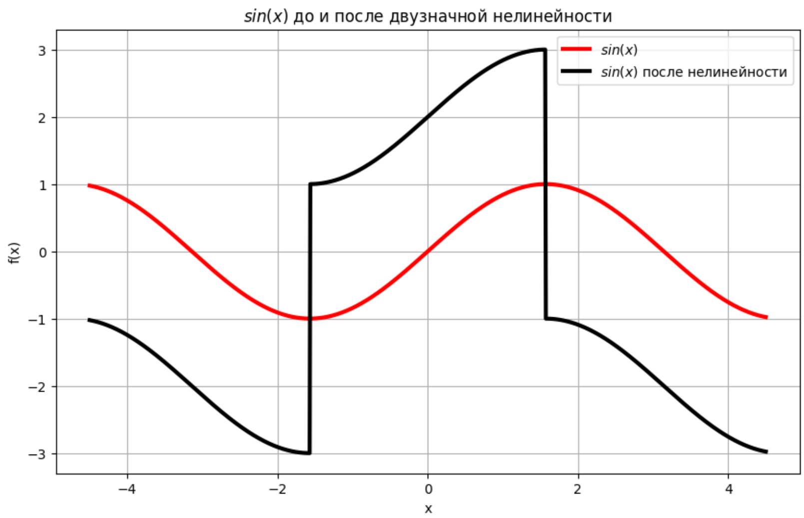

Рис. 11 – Результаты прохождения через двузначную КЛФ (ветви $\dot{x} > 0$ соответствует левая ветвь, ветви $\dot{x} < 0$ – правая) сигнала $x(t) = \sin t$

Рис. 12 – Результаты прохождения через двузначную КЛФ (ветви $\dot{x} > 0$ соответствует левая ветвь, ветви $\dot{x} < 0$ – правая) сигнала $x(t) = 2\sin t$

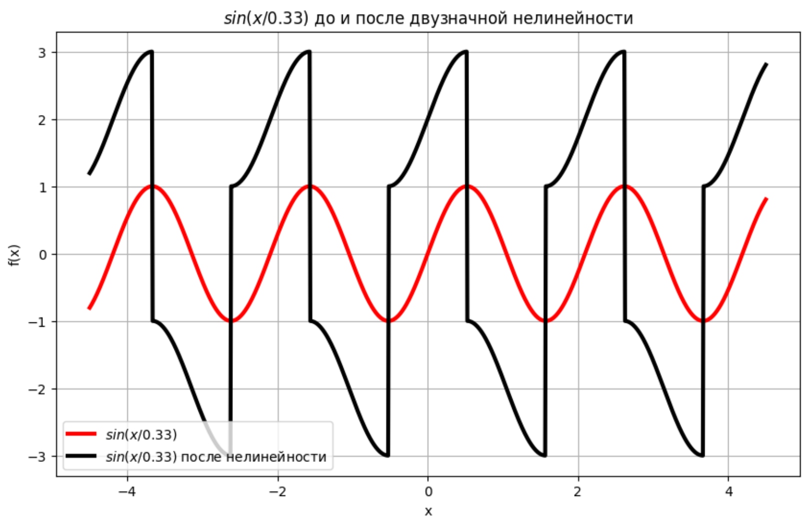

Рис. 13 – Результаты прохождения через двузначную КЛФ (ветви $\dot{x} > 0$ соответствует левая ветвь, ветви $\dot{x} < 0$ – правая) сигнала $sin(\frac{t}{0.33})$ (синяя кривая)

5 Заключение

В ходе выполнения работы были изучены методы задания кусочно-линейных функций, в том числе функции, обратной к заданной. Было рассмотрено поведение синусоидальных сигналов с различными амплитудами через заданные однозначную КЛФ вместе с обратной ей, а также через двузначную КЛФ в двух вариантах распределения ветвей.

6 Програмная реализация

https://github.com/grownike/TNSR_Lab1