

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (НИЯУ МИФИ)

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2  
ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ»

Фазовые портреты кусочно-линейных систем

Вариант №7

Выполнил: студент гр. Б21-215  
Воронков Никита Вадимович

Москва, 2024

# Содержание

1	Исходные данные	3
2	Анализ нелинейности и определение линий переключения	4
3	Построенные фазовые портреты	5
4	Анализ фазовых портретов	9
5	Заключение	9
6	Программная реализация	9

Цель работы: изучение особенностей фазовых портретов кусочно-линейных систем и практическое освоение компьютерных способов построения фазовых портретов нелинейных систем.

# 1 Исходные данные

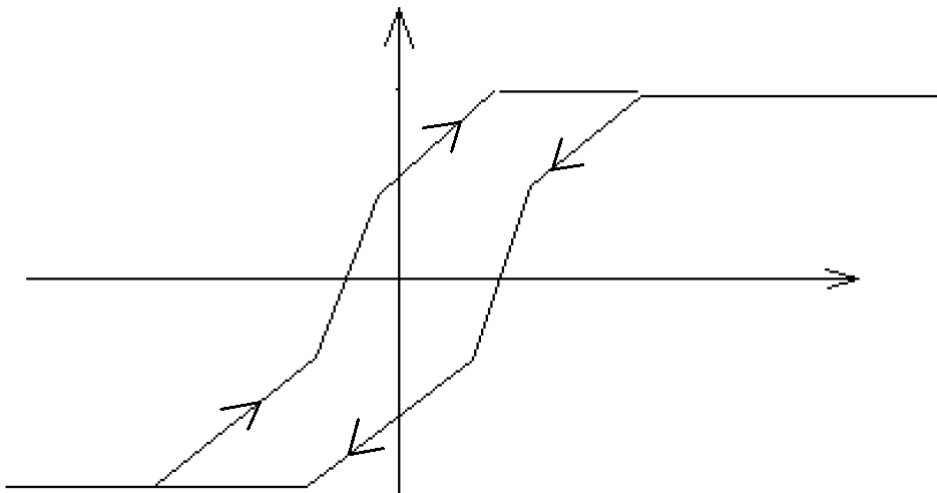


Рис. 1 – Двузначная КЛФ, заданная графически

Аналитические описания ветвей двузначной КЛФ:

$$F^+(x) = (|x + 4| + |x + 2| - |x + 1| - |x - 1|) \tag{1}$$

$$F^-(x) = (|x + 1| + |x - 1| - |x - 2| - |x - 4|) \tag{2}$$

Отличие двузначной КЛФ от двузначной КЛФ работы 1 в том, что опущен множитель 0.5.

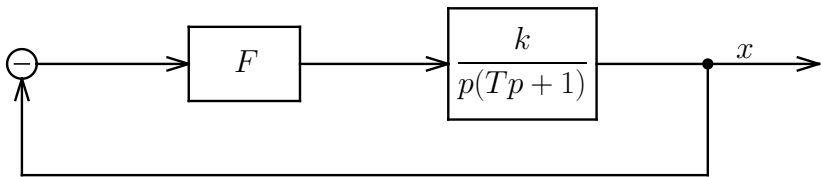


Рис. 2 – Исследуемая нелинейная система

Из рассматриваемой схемы получается следующая система дифференциальных уравнений, записанная в нормальной системе координат:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{1}{T}(y + kF(x, y)) \end{cases} \tag{3}$$

Исследуемые параметры здесь: *k* и *T*.

## 2 Анализ нелинейности и определение линий переключения

Рассмотрим для начала область  $y > 0$ , при которой будет задействована левая ветвь нелинейности  $F^+(x)$ . Она имеет четыре узла в точках  $x = -4$ ,  $x = -2$ ,  $x = -1$  и  $x = 1$ . Через них будет разделение на зоны, в которых будут линии переключения нелинейности – вертикальные лучи, направленные вверх. Так же будет одна горизонтальная прямая  $y = 0$

Теперь рассмотрим случай  $y < 0$ , при котором будет уже правая ветвь нелинейности  $F^-(x)$ . Она тоже имеет четыре узла в точках  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  и  $x = 4$ . Через них будет разделение на зоны, в которых будут линии переключения нелинейности – вертикальные лучи, направленные вниз. Так же будет одна горизонтальная прямая  $y = 0$

Так как скачков у нелинейности нет, то изломов на фазовом портрете не будет.

Отдельный интерес представляет случай  $k = 0$ , когда вклад нелинейности полностью пропадает:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{1}{T}y \end{cases} \quad (4)$$

Матрица системы  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{pmatrix}$

$\det A = 0 \rightarrow$  геометрическая кратность меньше алгебраической, фазовый портрет всегда является неустойчивыми.

Решением будут прямые вида  $y = -\frac{x}{T} + C$

### 3 Построенные фазовые портреты

Ниже приведены фазовые портреты, соответствующие различным заданным значениям параметров  $k$  и  $T$ . Всюду стрелки показывают направления движения по траекториям, а красные линии показывают линии переключения нелинейности. Во всех случаях начальные значения для фазовых траекторий брались разные, их значения отмечены на графике в легенде.

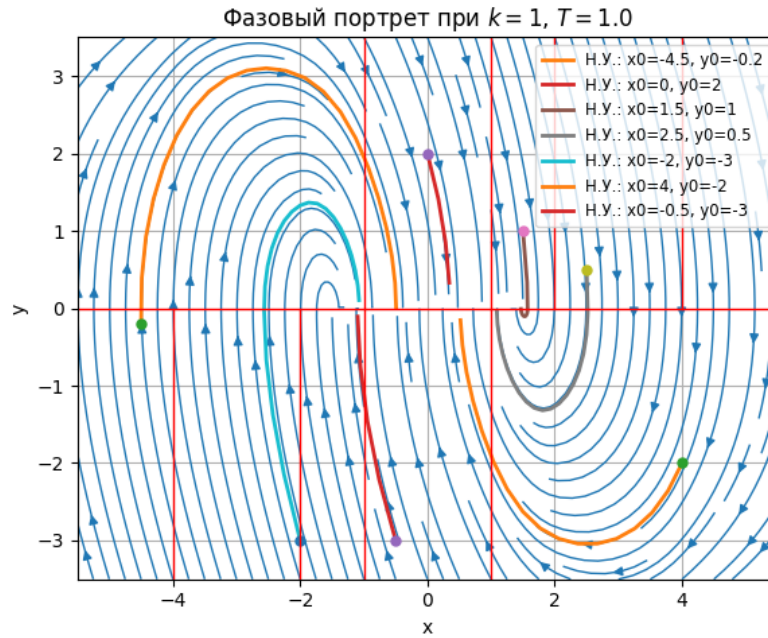


Рис. 3 – Фазовый портрет при заданных параметрах  $k = 1$  и  $T = 1$

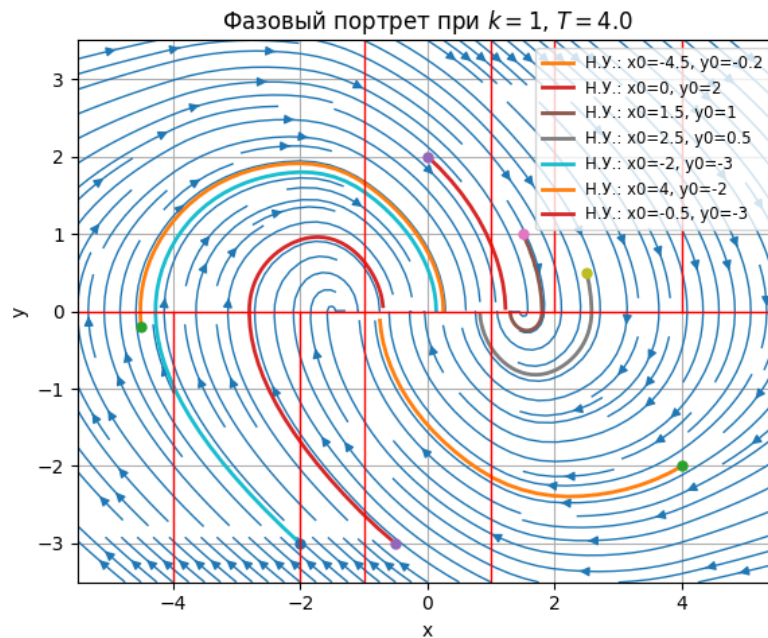


Рис. 4 – Фазовый портрет при заданных параметрах  $k = 1$  и  $T = 4$

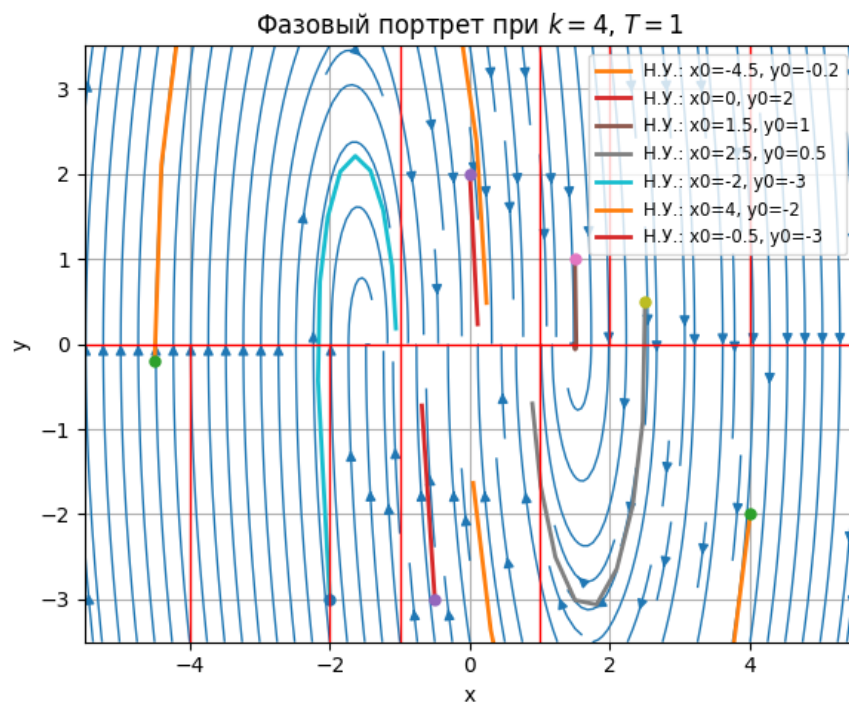


Рис. 5 – Фазовый портрет при заданных параметрах  $k = 4$  и  $T = 1$

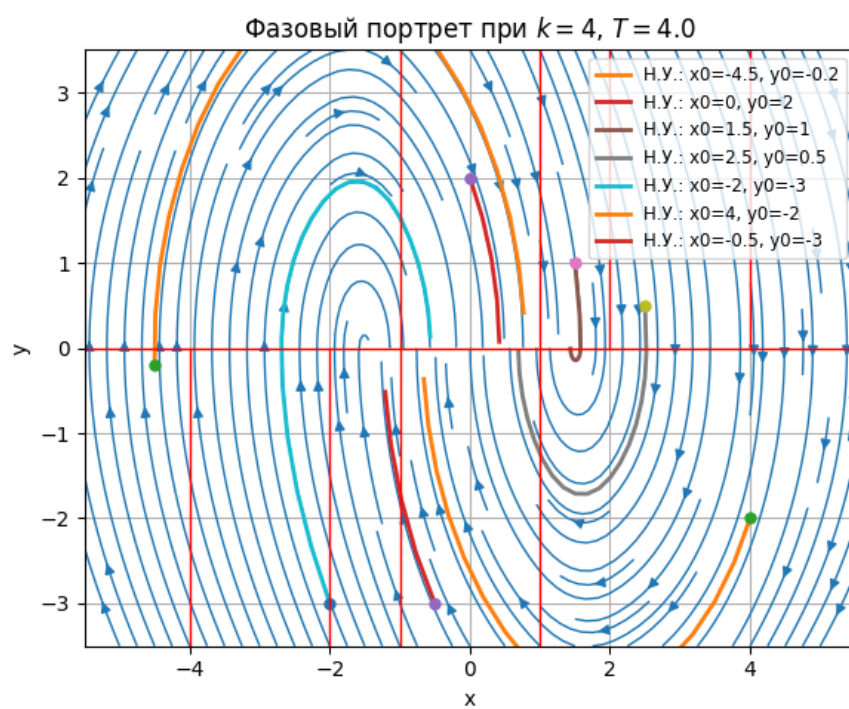


Рис. 6 – Фазовый портрет при заданных параметрах  $k = 4$  и  $T = 4$

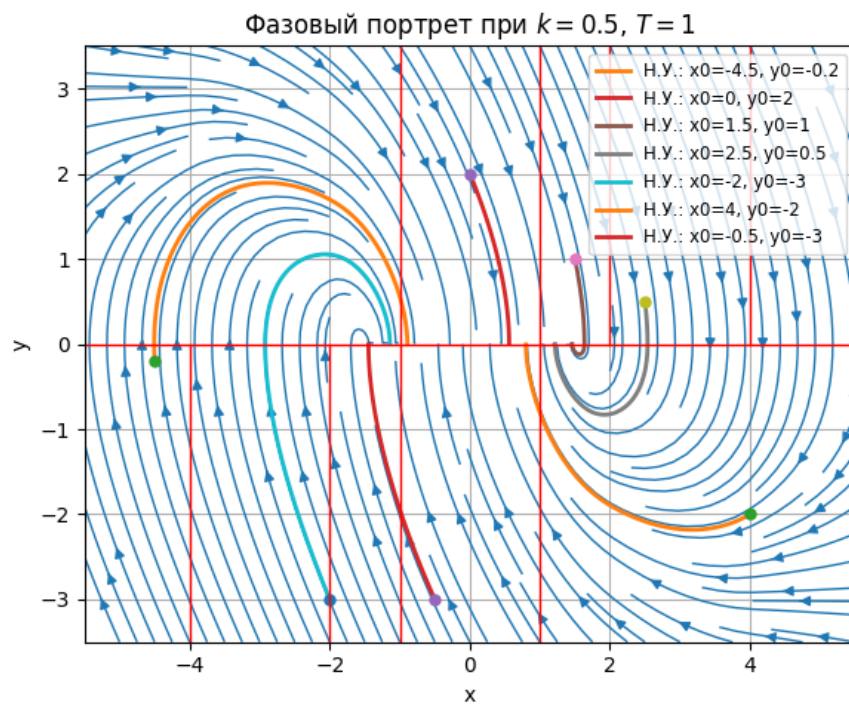


Рис. 7 – Фазовый портрет при заданных параметрах  $k = 0.5$  и  $T = 1$

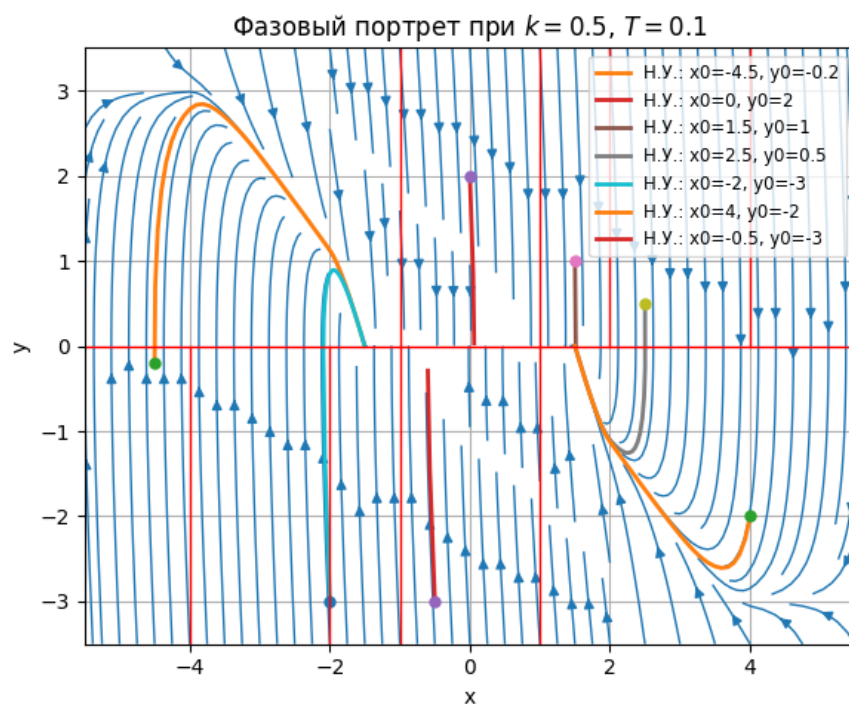


Рис. 8 – Фазовый портрет при заданных параметрах  $k = 0.5$  и  $T = 0.1$

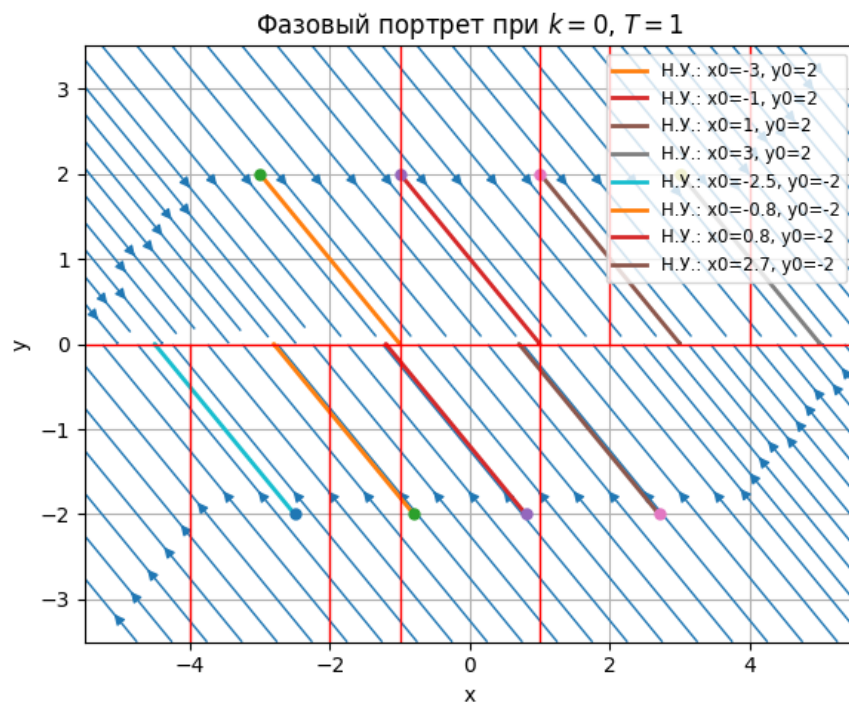


Рис. 9 – Фазовый портрет при заданных параметрах  $k = 0$  и  $T = 1$

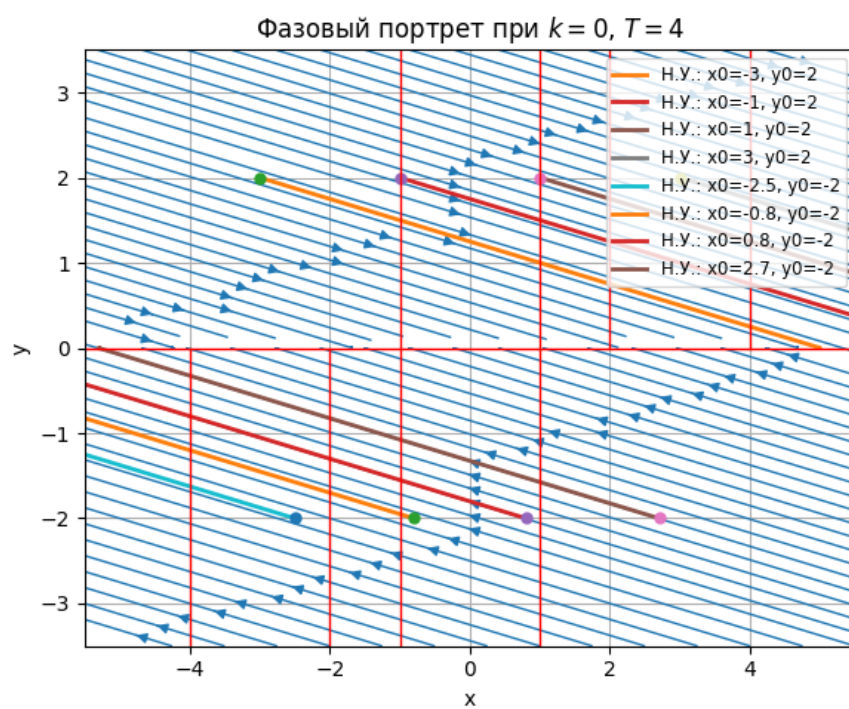


Рис. 10 – Фазовый портрет при заданных параметрах  $k = 0$  и  $T = 4$



## 4 Анализ фазовых портретов

Фазовые портреты дают понять, что при увеличении параметра  $T$  фазовые траектории растягиваются вдоль оси  $x$  и сжимаются вдоль  $y$ . (Рис. 3 и 4)

При уменьшении - наоборот фазовые траектории растягиваются вдоль оси  $y$  и сжимаются вдоль  $x$  (Рис. 8 и 9)

При увеличении параметра  $k$  фазовая траектория увеличивается в обоих направлениях. А при уменьшении - соответственно становится меньше. (Рис. 4 и 6)

На всех фазовых портретах при  $k \neq 0$  мы можем наблюдать устойчивый узел. Особенно хорошо это видно на рис. 8 - фазовые траектории "приходят" из углов графика.

При  $k = 0$  получаем вырожденный случай. Из вида фазового портрета и направления движения делаем вывод, что это параллельные прямые. Они всегда являются неустойчивыми. Это полностью согласуется с рассуждениями выше.

## 5 Заключение

В ходе выполнения работы были изучены особенности фазовых портретов кусочно-линейных систем, а также освоен компьютерный способ построения фазовых портретов с использованием языка python и библиотек `scipy`, `matplotlib`, `numpy`. Помимо этого было исследовано влияние параметров линейной части на фазовые портреты систем. Было выявлено два типа фазовых портретов: устойчивый узел и параллельные прямые. Направление движения в каждом случае определялось методом пробных точек.

## 6 Программная реализация

[https://github.com/grownike/TNSR\\_Lab2](https://github.com/grownike/TNSR_Lab2)