МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (НИЯУ МИФИ)

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3
ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ»

Расчет и подавление автоколебаний в нелинейных системах

Вариант №7

Выполнил: студент гр. Б21-215

Воронков Никита Вадимович

Москва, 2024

Содержание

Цель работы: изучение метода гармонической линеаризации применительно к расчёту параметров автоколебаний в нелинейных системах, а также использование метода шаблонов при синтезе линейных корректирующих устройств.

1 Исходные данные

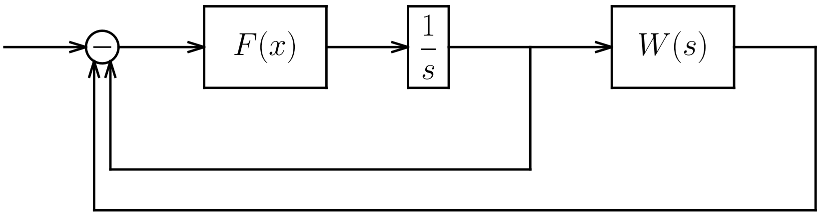

Рис. 1 – Нелинейная САУ

Узловые точки для КЛФ $F(x)$:

$(-5;-2)$, $(-1;-2)$, $(1;2)$, $(5;2)$

Величина входного воздействия:

$u = 2$

Передаточная функция линейной части САУ:

$$W(s) = \frac{2 + 30\,s}{s\,(s^2 + 0.4\,s + 20)}$$

2 Модель системы нащей системы

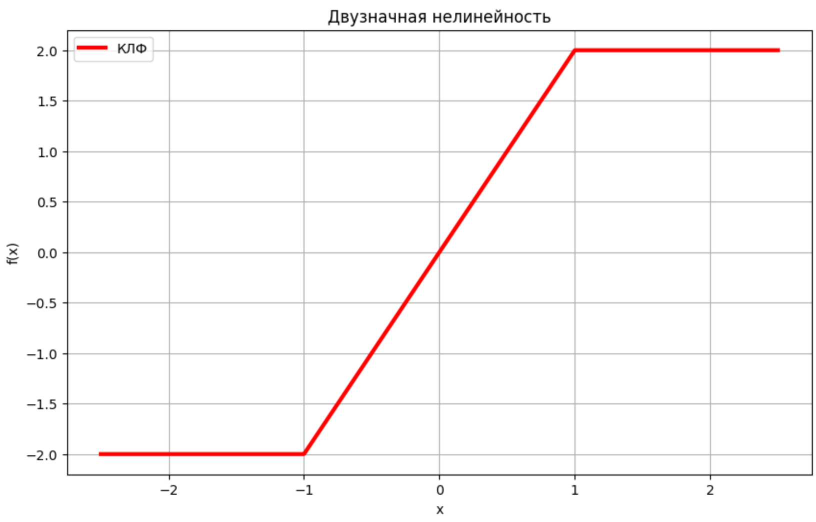

Рис. 2 – График КЛФ $F(x)$

Составим систему дифференциальных уравнений:

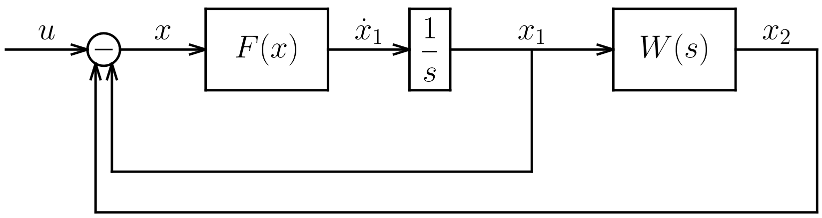

Рис. 3 – Нелинейная САУ

$$W(p) = \frac{2+30p}{p(p^2+0.4p+20)} = \frac{x_2(p)}{x_1(p)}$$

$$(p^3+0.4p^2+20p)x_2(p) = (2+30p)x_1(p)$$

$$\underbrace{p^3x_2}_{\frac{d^3x_2}{dt^3}} + 0.4\underbrace{p^2x_2}_{\frac{d^2x_2}{dt^2}} + 20\underbrace{px_2}_{\frac{dx_2}{dt}} = 2x_1 + 30\underbrace{px_1}_{\frac{dx_1}{dt}}$$

Данное дифференциальное уравнение эквивалентно системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = z \\ \dot{x}_2 = y_1 \\ \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = 2x_1 + 30z - 0.4y_2 - 20y_1 \end{cases}$$

Отсюда получим систему, описывающую систему в целом:

$$\begin{cases} x = u - x_1 - x_2 \\ \dot{x}_1 = F(x) \\ \dot{x}_2 = y_1 \\ \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = 2x_1 - 20y_1 - 0.4y_2 + 30F(x) \end{cases}$$

3 Определение параметров автоколебаний по данным моделирования системы

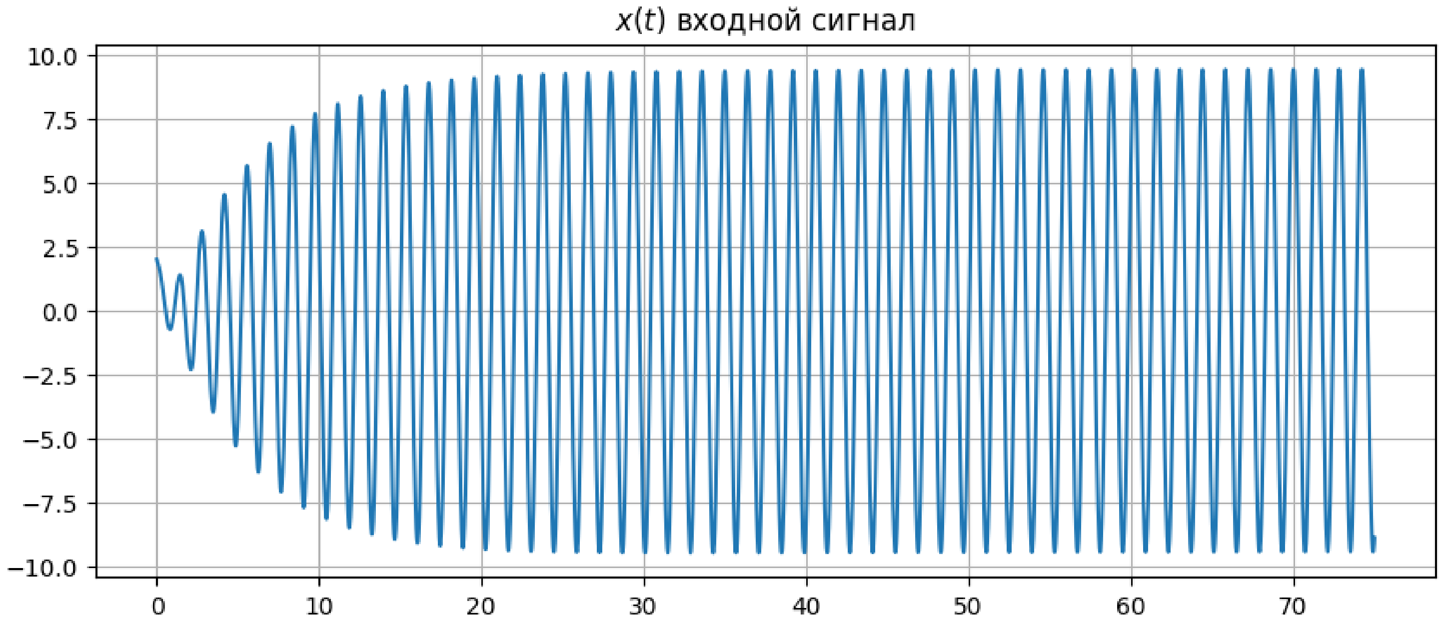

Рис. 4 – График входного сигнала $x(t)$

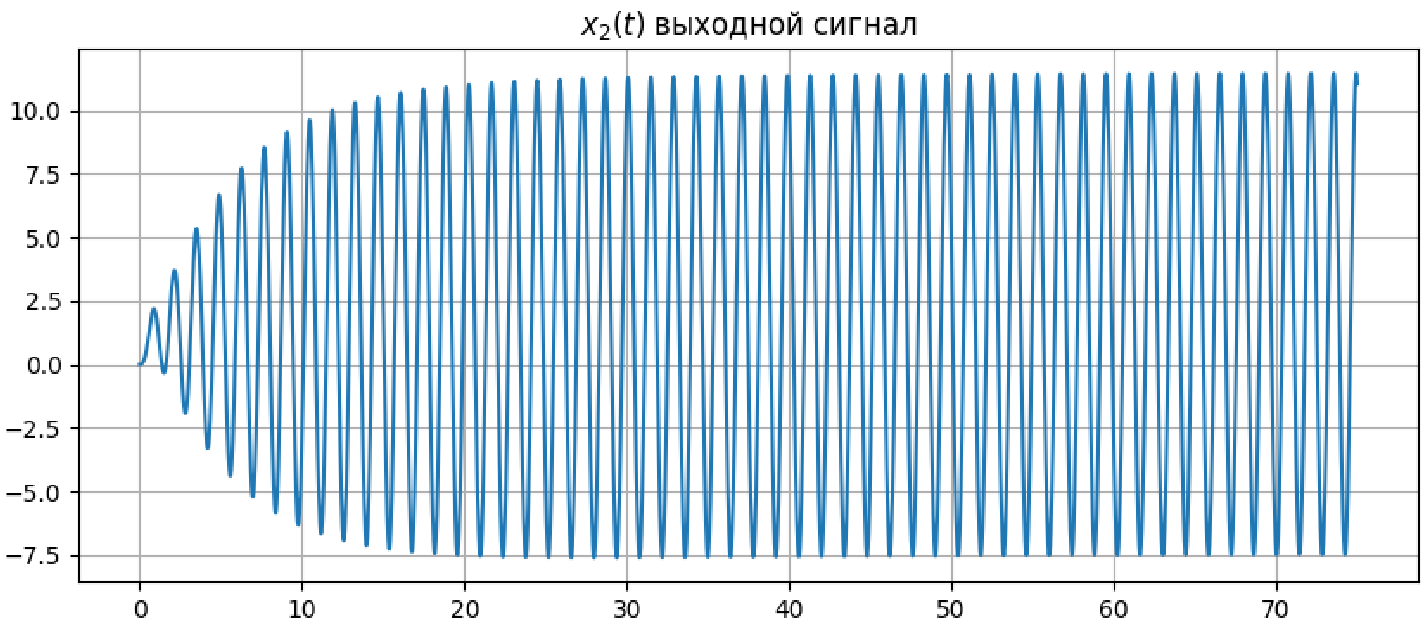

Рис. 5 – График выходного сигнала $x_2(t)$

По данным графикам можно определить параметры автоколебаний:

$$A_{\text{эксп}} = 9.44$$

$$\omega_{\text{эксп}} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1.40} = 4.46$$

4 Расчёт параметров автоколебаний методом гармонической линеаризации

$x = u - x_1 - x_2$

$\dot{x}_1 = px_1 = F(x) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{1}{p}F(x)$

$x_2 = W(p)\,x_1 = W(p)\,\dfrac{1}{p}F(x)$

$x = u - \big(1 + W(p)\big)\dfrac{1}{p}F(x) = u - \left(1 + \dfrac{2+30p}{p(p^2+0.4p+20)}\right)\dfrac{1}{p}F(x) =$

$= u - \dfrac{p^3+0.4p^2+20p+2+30p}{p^3+0.4p^2+20p}\,\dfrac{1}{p}F(x) =$

$= u - \dfrac{p^3+0.4p^2+50p+2}{p^4+0.4p^3+20p^2}F(x) = x$

$$\underbrace{(p^4+0.4p^3+20p^2)}_{Q(p)}\,x + \underbrace{(p^3+0.4p^2+50p+2)}_{R(p)}\,F(x) = \underbrace{(p^4+0.4p^3+20p^2)}_{S(p)}\,u$$

При приближённом описании сигнала $x(t) = x_0 + \overline{x}(t)$, $\overline{x}(t) = A\sin\omega t$, получим:

$$\begin{cases} Q(0)\,x_0 + R(0)\,F_0(x_0, A) = S(0)\,u \\ Q(i\omega) + R(i\omega)\big(q(x_0,A) + iq'(x_0,A)\big) = 0 \end{cases}$$

где $F_0(x_0, A) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} F(x_0 + A\sin\psi)\,d\psi$

$q(x_0, A) = \dfrac{1}{\pi A}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} F(x_0 + A\sin\psi)\sin\psi\,d\psi$

$q'(x_0, A) = \dfrac{1}{\pi A}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} F(x_0 + A\sin\psi)\cos\psi\,d\psi$

В данной системе $q'(x_0, A) = 0$, поскольку нелинейность однозначная.

Тогда получим систему для поиска A и ω:

$$\begin{cases} q(x_0, A) = -\dfrac{\operatorname{Re} Q(i\omega)}{\operatorname{Re} R(i\omega)} \\ \operatorname{Re} R(i\omega)\operatorname{Im} Q(i\omega) - \operatorname{Re} Q(i\omega)\operatorname{Im} R(i\omega) = 0 \end{cases}$$

$R(i\omega) = (i\omega)^3 + 0.4(i\omega)^2 + 50(i\omega) + 2 = -i\omega^3 - 0.4\omega^2 + 50i\omega + 2 = (-0.4w^2+2) + i(-\omega^3 + 50w)$

$Q(i\omega) = (i\omega)^4 + 0.4(i\omega)^3 + 20(i\omega)^2 = \omega^4 - 0.4i\omega^3 - 20w^2 = (\omega^4 - 20w^2) + i(-0.4\omega^3)$

$\operatorname{Re} R(i\omega)\operatorname{Im} Q(i\omega) - \operatorname{Re} Q(i\omega)\operatorname{Im} R(i\omega) =$

$= (-0.4w^2+2)(-0.4\omega^3) - (\omega^4 - 20w^2)(-\omega^3 + 50w) =$

$= \omega^7 - 69.84\omega^5 + 999.2\omega^3 = 0$

Положительные корни данного уравнения: $\omega_1 = 4.4811$, $\omega_2 = 7.0540$. Опираясь на полученные до этого данные из моделирования системы, возьмём $\omega_{\text{теор}} = \omega_1$:

$$q(x_0, A) = -\frac{\operatorname{Re} Q(i\omega_{\text{теор}})}{\operatorname{Re} R(i\omega_{\text{теор}})} = -\frac{\omega_{\text{теор}}^4 - 20\omega_{\text{теор}}^2}{-0.4\omega_{\text{теор}}^2 + 1} = 0.2671$$

Для расчёта $q(x_0, A)$ можно воспользоваться одной из приближённых формул:

$$q(A) \approx \frac{2}{3A}\left(F(A) + F\left(\frac{A}{2}\right)\right)$$

Снова опираясь на полученные данные из моделирования, будем считать, что $A > 2$, за счёт чего $F(A) = F\left(\frac{A}{2}\right) = 2$:

$$q(x_0, A) \approx \frac{2}{3A}(2+2) = \frac{8}{3A}$$

$$\Rightarrow \quad A_{\text{теор}} = \frac{8}{3q(x_0, A)} = 9.9837$$

Итак, получены теоретические значения параметров автоколебаний:

$$A_{\text{теор}} = 9.9837$$

$$\omega_{\text{теор}} = 4.4811$$

5 Оценка погрешностей полученных результатов

$$\delta A = \frac{|A_{\text{теор}} - A_{\text{эксп}}|}{A_{\text{теор}}} = \frac{|9.9837 - 9.4400|}{9.9837} = 5.44\%$$

$$\delta \omega = \frac{|\omega_{\text{теор}} - \omega_{\text{эксп}}|}{\omega_{\text{теор}}} = \frac{|4.4811 - 4.4600|}{4.4811} = 0.47\%$$

6 Синтез линейного корректирующего устройства

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{p^3 + 0.4p^2 + 50p + 2}{p^4 + 0.4p^3 + 20p^2}$$

Построим ЛАФЧХ данной системы. Для начала получим $H(\omega)$ и $\theta(\omega)$, которые определяются из выражения $W(i\omega) = H(\omega)e^{i\theta(\omega)}$. Для удобства работы эти зависимости можно выразить так:

$$H(\omega) = |W(i\omega)|,$$

$$\theta(\omega) = \arg\big(W(i\omega)\big),$$

Сами логарифмическая амплитудная и фазовая частотная характеристики задаются следующим образом:

$$\text{ЛАЧХ:} \quad \begin{cases} x = \lg\omega \\ y = 20\lg H(\omega) \end{cases} \qquad \text{ФЧХ:} \quad \begin{cases} x = \lg\omega \\ y = \theta(\omega) \end{cases}$$

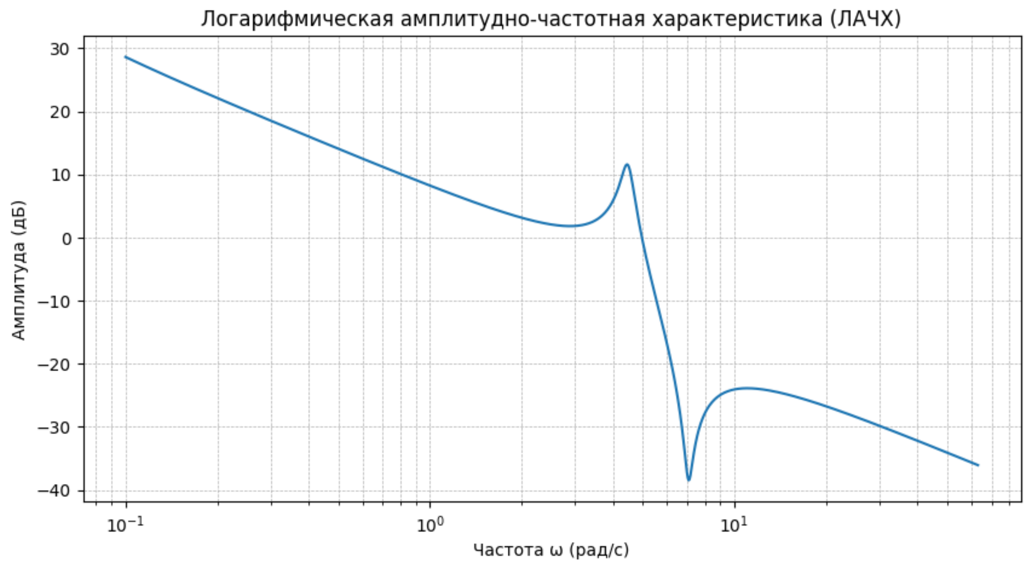

Рис. 6 – ЛАЧХ исходной системы

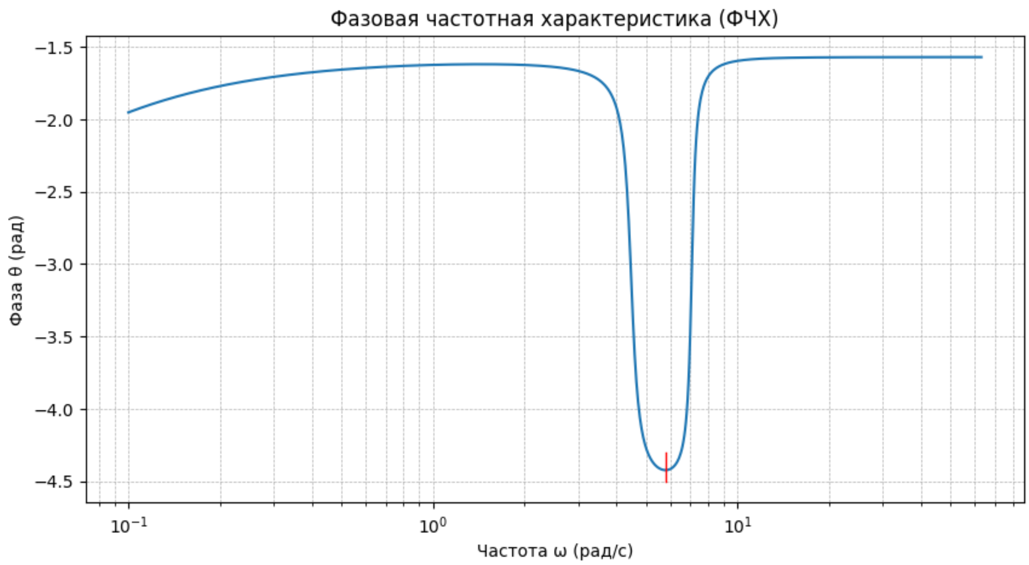

Рис. 7 – ФЧХ исходной системы

Для устранения автоколебаний необходимо поднять фазовую характеристику выше шаблона $\theta(\omega) = -\pi - \mu(A) = -\pi$, где $\mu(A) = \operatorname{arctg}\dfrac{q'(A)}{q(A)} = 0$. Выберем требуемое корректирующее устройство по наибольшей разности фазовых углов:

$\theta_\text{к} = 4.42376 - 3.1416 = 1.28216\,\text{рад} = 73.4624°$

Определим значение ω, соответствующее минимуму ФЧХ:

$\omega = 10^{0.76296} = 5.7938$

Ищем корректирующее устройство в виде:

$W_1 = W_\text{к}(s) = \dfrac{\lambda_\text{к}(T_\text{к}s+1)}{(\lambda_\text{к}T_\text{к}s+1)}$ и $W_2 = W_\text{к}(s) = \dfrac{\lambda_\text{к}^2(T_\text{к}s+1)^2}{(\lambda_\text{к}T_\text{к}s+1)^2}$

Определим параметры корректирующего устройства с помощью номограммы:

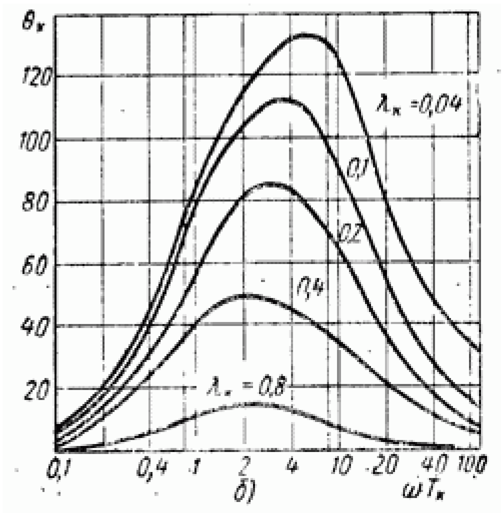

Рис. 8 – Номограмма

Получаем: $\lambda_\text{к} = 0.1$, $\omega T_\text{к} = 1$, т.е. $T_\text{к} = \dfrac{1}{5.7937} = 0.1726$

Отсюда $W_1 = W_\text{к}(s) = \dfrac{0.1(0.1726\,s+1)}{(0.01726\,s+1)}$ и $W_2 = W_\text{к}(s) = \dfrac{0.01(0.1726\,s+1)^2}{(0.01726\,s+1)^2}$

7 Модель системы с корректирующим устройством W_1

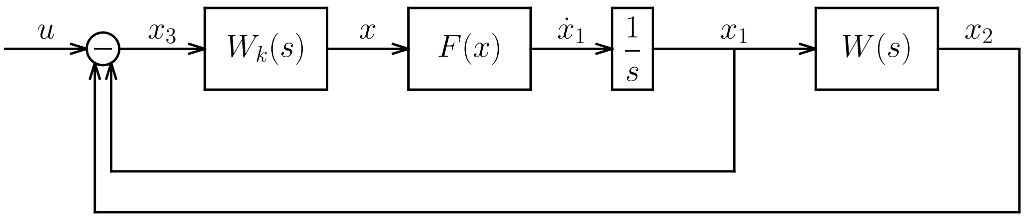

Рис. 9 – Нелинейная САУ с корректирующим устройством

Выпишем новую систему с учётом корректирующего устройства:

$$\begin{cases} x_3 = u - x_1 - x_2 \\ \dot{x}_1 = F(x) \\ \dot{x}_2 = y_1 \\ \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = 2x_1 - 20y_1 - 0.4y_2 + 30F(x) \\ \dot{x} = \lambda_{\text{к}} T_{\text{к}} \big(-F(x) - y_1 \big) + \lambda_{\text{к}} x_3 - x \end{cases}$$

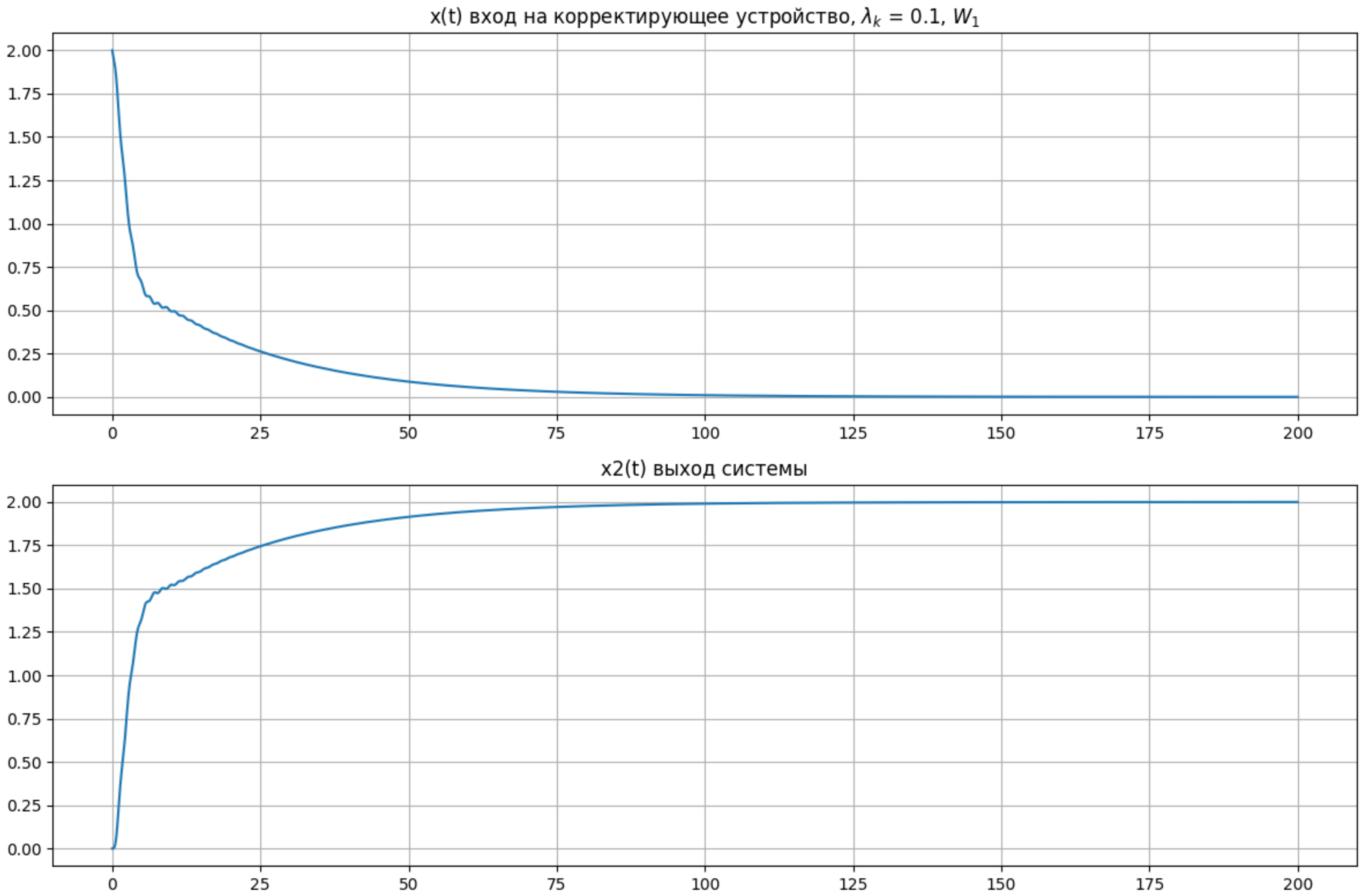

Рис. 10 – Корректирующее устройство W_1

Видны какие-то колебания на участке $[5, 15]$, попробуем сгладить их взяв $\lambda_\text{к} = 0.05$

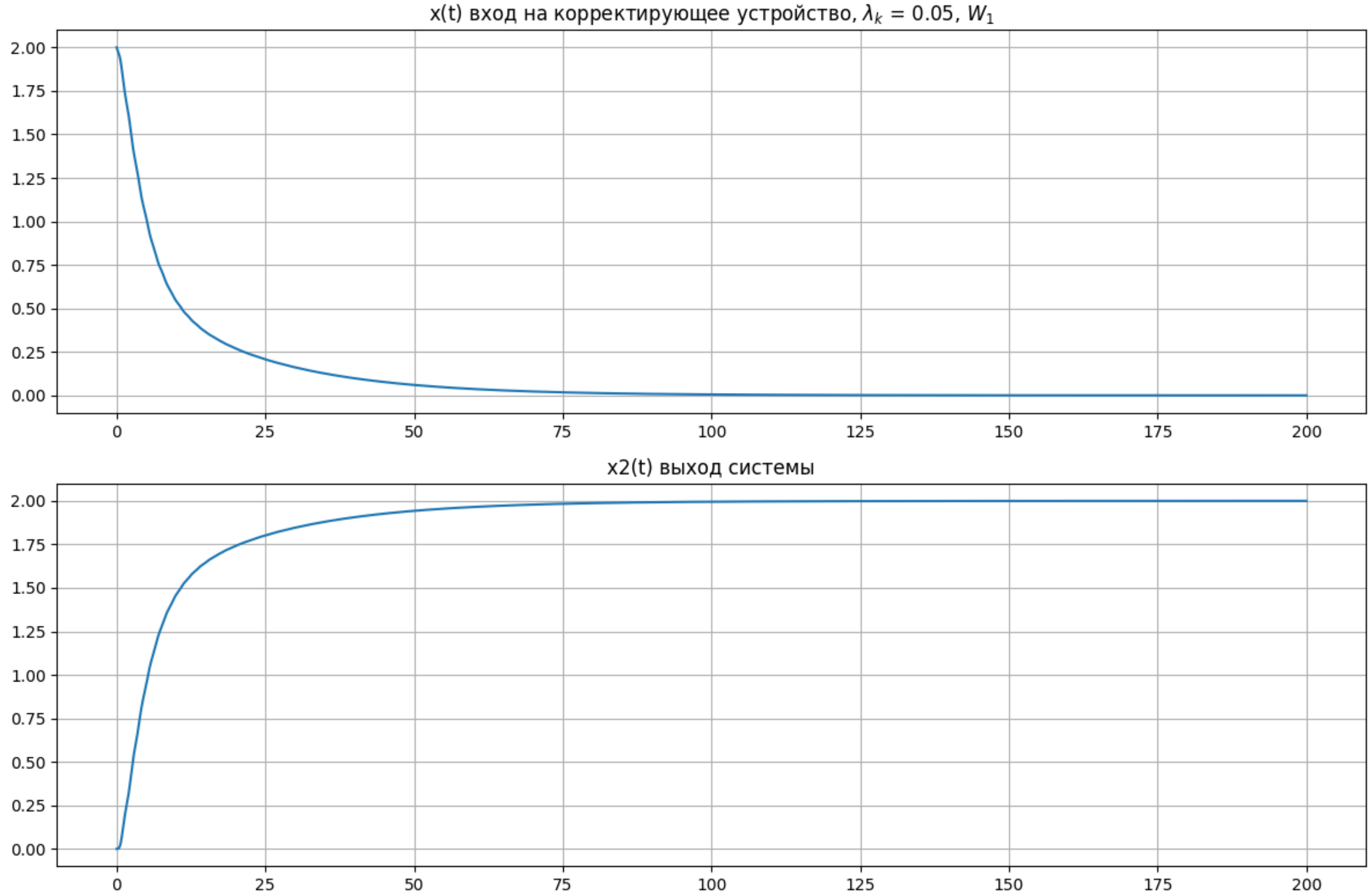

Рис. 11 – Корректирующее устройство W_1

По построенным графикам сигналов в скорректированной системе можно утверждать, что автоколебания были подавлены.

8 Модель системы с корректирующим устройством W_2

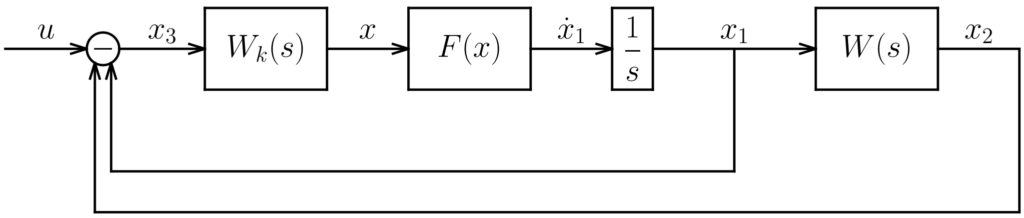

Рис. 12 – Нелинейная САУ с корректирующим устройством

Выпишем новую систему с учётом корректирующего устройства:

$$
\begin{cases}
x_3 = u - x_1 - x_2 \\
\dot{x}_1 = F(x) \\
\dot{x}_2 = y_1 \\
\dot{y}_1 = y_2 \\
\dot{y}_2 = 2x_1 - 20y_1 - 0.4y_2 + 30F(x) \\
\dot{x} = z\dot{z} = \dfrac{1}{\lambda_{\text{к}}^2 T_{\text{к}}^2}\Big(-2\lambda_{\text{к}}T_{\text{к}}z - x + \lambda_{\text{к}}^2 x_3 + 2\lambda_{\text{к}}^2 T_{\text{к}}\big(-F(x) - y_1\big) + \lambda_{\text{к}}^2 T_{\text{к}}^2\big(-zF'(x) - y_2\big)\Big)
\end{cases}
$$

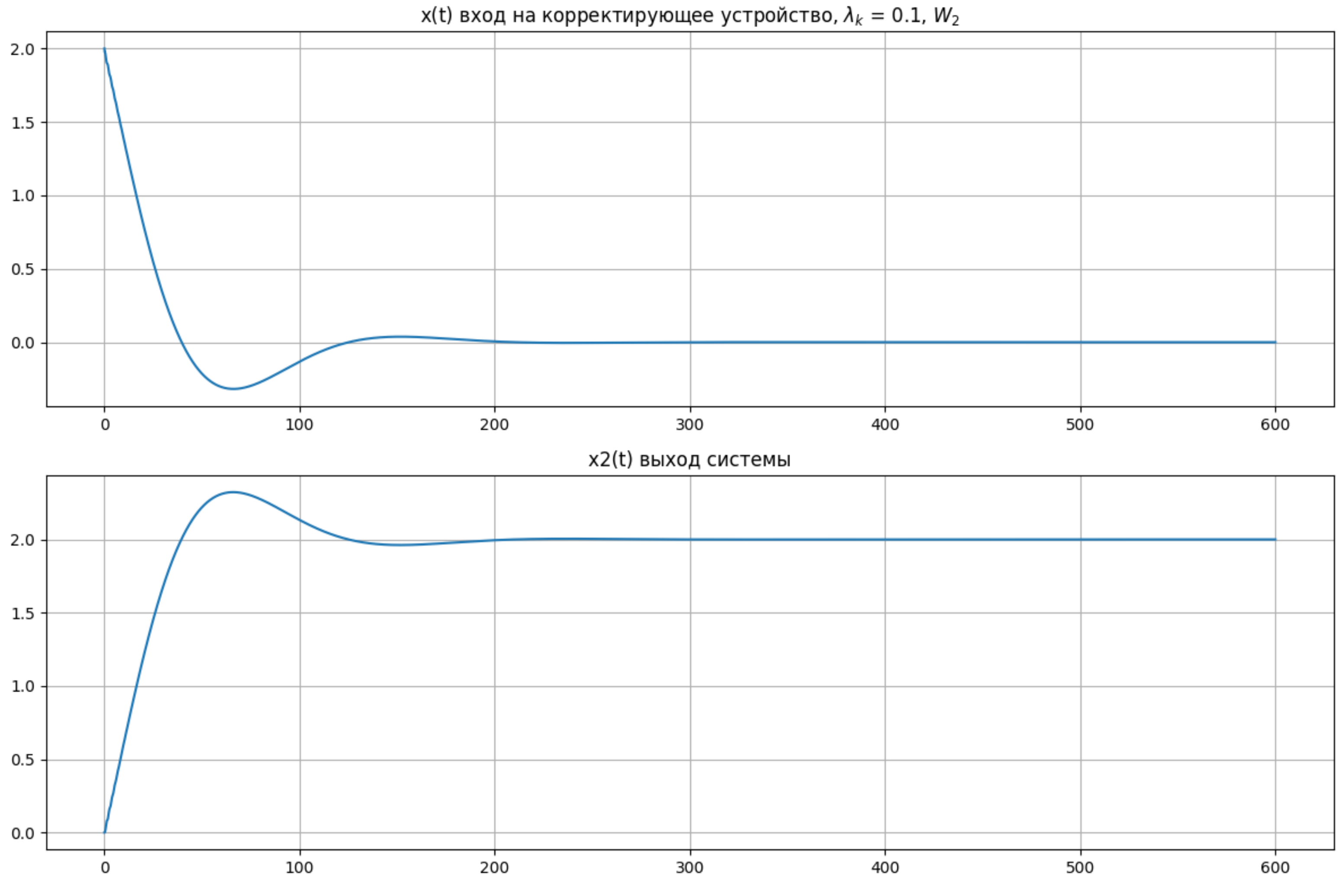

Рис. 13 – Корректирующее устройство W_2

По построенным графикам сигналов в скорректированной системе можно утверждать, что автоколебания были подавлены.

9 Анализ результатов

В ходе выполнения данной лабораторной работы был изучен метод гармонической линеаризации применительно к расчету параметров автоколебаний в нелинейных системах. Наличие автоколебаний было определено путем моделирования системы в программе на языке python с использованием библиотек numpy, matplotlib и scipy.

Параметры автоколебаний смоделированной системы:

$$A_{\text{эксп}} = 9.44$$
$$\omega_{\text{эксп}} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1.40} = 4.46$$

Далее при помощи метода гармонической линеаризации были рассчитаны параметры автоколебаний:

$$A_{\text{теор}} = 9.9837$$
$$\omega_{\text{теор}} = 4.4811$$

Погрешности расчетов составили 5.44% по амплитуде и 0.47% по частоте.

Для подавления автоколебаний было синтезировано линейное корректирующее устройство. Для синтеза корректирующего устройства был использован метод шаблонов. Наибольшая разность фазовых углов составила $\theta_{\text{к}} = 73.4624°$ при частоте $\omega = 5.7938$.

Параметры синтезируемыз корректирующих устройств были получены с использованием номограммы и составили:

W_1: $T_{\text{к}} = 0.1726$, $\lambda_{\text{к}} = 0.1$ и, в качестве эксперимента $\lambda_{\text{к}} = 0.05$

W_2: $T_{\text{к}} = 0.1726$, $\lambda_{\text{к}} = 0.1$

Таким образом передаточные функции корректирующих устройств имеют вид:

$$W_1 = W_{\text{к}}(s) = \frac{0.1(0.1726s + 1)}{(0.01726s + 1)} \text{ при } \lambda_{\text{к}} = 0.1$$

$$W_1 = W_{\text{к}}(s) = \frac{0.05(0.1726s + 1)}{(0.00863s + 1)} \text{ при } \lambda_{\text{к}} = 0.05$$

$$W_2 = W_{\text{к}}(s) = \frac{0.01(0.1726s + 1)^2}{(0.01726s + 1)^2}$$

Графики зависимости входного и выходного сигнала от времени показали, что автоколебания были подавлены.

10 Програмная реализация

https://github.com/grownike/TNSR_Lab3