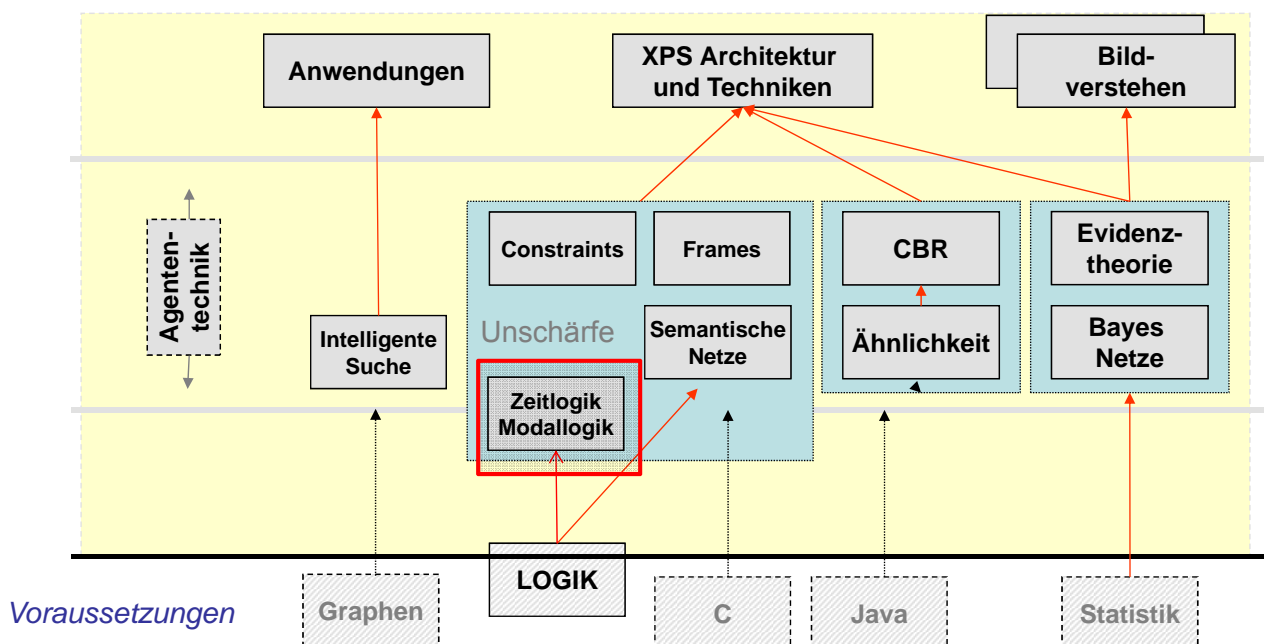


# Erweiterungen der Logik und Temporale Logik

Allen'sche Zeitlogik – Modallogik – Schlussregeln - Produktionssysteme

[www.dhbw-stuttgart.de](http://www.dhbw-stuttgart.de)

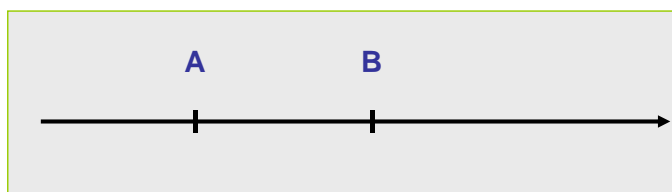
## Einordnung in die Vorlesungsstruktur



## Eine Erweiterung der Logik : Die Modellierung von Zeit

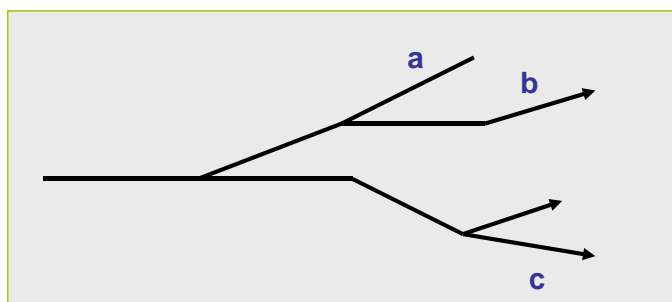
- ➔ Wie modelliere ich Bedeutungen wie „früher“ und „später“?
- ➔ Wie gehe ich mit Relationen um, die heute gelten, morgen aber nicht?
- ➔ Wie modelliere ich einen **zeitlichen Verlauf**?
- ➔ Wie kann man die **Zeit in einem Kalkül** erfassen?
- ➔ Ein kurzer Ausflug: **Modale Logik**

## Modellierung von Zeit



„A ist früher als B“

**Total geordnete** Zeitachse



**Partielle** Ordnung

a, b und c sind unvergleichbar

## Modellierung von Zeit

### Allen's Zeitlogik



Axiomatische Behandlung von Zeit auf Basis von Intervallen

Beschreibung von Relationen auf Basis der Menge  $I$  von Intervallen

| Relation       | Symbol | Inverses | Als Intervallsymbol: |
|----------------|--------|----------|----------------------|
| x vor y        | <      | >        |                      |
| x gleich y     | =      | =        |                      |
| x an y         | m      | mi       |                      |
| x überlagert y | o      | oi       |                      |
| x während y    | d      | di       |                      |
| x startet y    | s      | si       |                      |
| x beendet y    | f      | fi       |                      |

## Modellierung von Zeit

### Allen's Zeitlogik

Allen's Zeitlogik definiert zunächst 13 Relationen, mit denen Beziehungen zwischen Intervallen beschrieben werden können.

Die Menge **Rel** = {<,=,m,o,d,s,f,>,mi,oi,di,si,fi} beschreibt diese, während  $I$  die Menge der Intervalle repräsentiert.

Für weitere Betrachtungen stellt sich nun die folgende Frage:

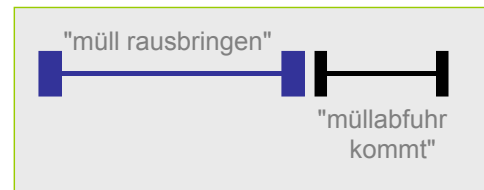
Wenn  $xRy$  und  $ySz$  für  $x,y$  in  $I$  und  $R,S$  in **Rel**,  
in welcher Relation **p(R,S)** stehen dann  $x$  und  $z$ ?

## Modellierung von Zeit

### Allen's Zeitlogik - ein Beispiel

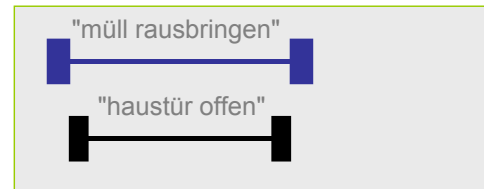
"müll rausbringen" { < } "müllabfuhr kommt"

Der Müll sollte draussen im Container sein bevor die Müllabfuhr kommt.



"haustür offen" { d } "müll rausbringen"

Man schnappt den Papierkorb, öffnet die Tür, geht raus zum Container, leert den Papierkorb, schließt die Tür hinter sich und stellt dem Korb an seinen Platz zurück.



- ➡ Offensichtlich gilt: "haustür offen" { < } "müllabfuhr kommt"
- ➡ Also formal:  $p(d, <) = <$
- ➡ Für alle Kombinationen von Zeitrelationen kann eine 13 x 13 Tabelle aufgestellt werden, die p definiert.

## Modellierung von Zeit

### Allen's Zeitlogik

Als Ergebnisse von p treten Teilmengen von Rel auf.

- ➡ p muß auf Teilmengen von Rel erweitert werden, um eine Iteration zu erlauben
- ➡  $P(X, Y) = \cup (p(R, S) \mid R \in X, S \in Y)$

Eine zweite Relation: **Durchschnittsbildung**

- ➡ Durch diese Relationen werden nun Inferenzen auf dem Zeitkalkül möglich

**Definition:** Ein Zeitnetz ist ein gerichteter, beschrifteter Graph. Dabei sind Knoten Intervalle und Kanten Disjunktionen von Relationen.

## Modellierung von Zeit

### Hinweise zum Umgang mit Zeitnetzen

#### A) Konsistenzprüfung

- Konsistenz kann nur als lokale Konsistenz garantiert werden (d.h. in einem drei-knotigen Teilnetz)
- Globale Konsistenzprüfung ist NP-Hard.
- Es kann nur ein korrekter, jedoch kein vollständiger Konsistenzprüfungsalgorithmus für die globale Konsistenz angeboten werden
- Für lokale Konsistenz auch ein vollständiger.

#### B) Punktdarstellung

Die Zeitintervallbeschreibung kann in eine Punktbeschreibung überführt werden,

Dabei wird  $A(x)$  und  $E(x)$  für Anfangs- und Endpunkt des Intervalls verwendet, sowie die Relationen  $<, >, =$  und die logischen Verknüpfungen zur Beschreibung herangezogen.

Analog zur Intervallbeschreibung wird die „UND“-Verknüpfung und das Relationenprodukt (als Äquivalent zu  $p$ ) zur Inferenz verwendet.

## Eine weitere Erweiterung der Logik : Modale Logik

- ➡ Es gibt nicht mehr nur **eine** Wahrheit ...
- ➡ Modale Logik umfasst „mögliche Welten“ und „denkbare Situationen“.

### Modallogische Sprache

Sprache der Prädikatenlogik (PL) + 2 neue logische Symbole:

$\Box \Phi$  :  $\Phi$  gilt „notwendigerweise“

$\Diamond \Phi$  :  $\Phi$  gilt „möglicherweise“

Es gilt (analog zu Quantoren):  $\neg \Diamond \neg \Phi = \Box \Phi$



**"Possible Worlds Semantics"**

**Definition:** (Erweitern der Aussagenlogik)

Eine **Grapheninterpretation** (Kripkeinterpretation)  $M$  ist ein Paar  $M = (G, I)$  mit

(i)  $G = (G, \leq)$  (ein gerichteter Graph)

(ii)  $I : P \times G \rightarrow \{0, 1\}$  (eine Abbildung mit  $P$  = Prädikate)

Wenn  $I(A, p) = 1$ , dann heißt  $A$  wahr in Knoten  $p$  (oder „Welt  $p$ “) unter  $I$ .

Gesamtheit der Welten = Universum der Interpretation.

## Eine weitere Erweiterung der Logik : Modale Logik

### ➡ Modale Logik als Zeitlogik

Knoten = Welten zu bestimmten Zeiten

$\Box \Phi$  :  $\Phi$  gilt „immer“

$\Diamond \Phi$  :  $\Phi$  gilt „irgendwann einmal“

#### Weitere Operatoren:

$\circ \Phi$  :  $\Phi$  gilt im nächsten Zeitpunkt

$\Phi \cup \Psi$  :  $\Phi$  gilt solange bis  $\Psi$  gilt

*Bimodale* Zeitlogik:

$Z\Phi$  :  $\Phi$  gilt in Zukunft immer

$V\Phi$  :  $\Phi$  gilt in Vergangenheit immer

**Anwendung:** Verifikation von Programmen

➔ **Hoare-Kalkül**

$\{ \text{gerade-Zahl}(x) \} \quad x := x + 1 \quad \{ \text{ungerade-Zahl}(x) \}$

↙ „Welt 1“      ↘ „Welt 2“

## Schlussregeln

*Deduktiver* Schluss

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

Immer gültig, sicheres Schließen (apodiktisch)

*Induktiver* Schluss

$$\frac{P(a_1) \dots P(a_n)}{\forall x P(x)}$$

Nicht unbedingt gültig, Verallgemeinerung (dialektisch)

*Abduktiver* Schluss

$$\frac{B, A \rightarrow B}{A}$$

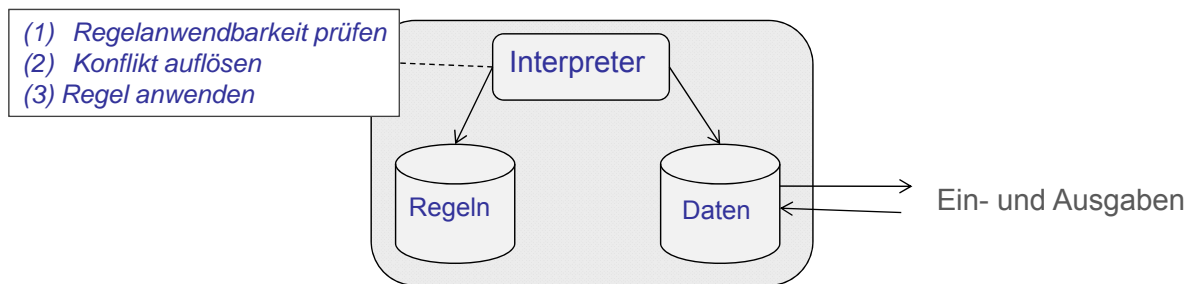
Hypothetisch, von Symptom auf Ursache schließen (rhetorisch)

## Produktionssysteme / Regelsysteme

Produktionen bzw. Produktionsregeln geben an, wie ein Ausdruck transformiert werden kann:

<Condition> → <Action>

Komponenten eines Produktionssystems:



## Produktionssysteme / Regelsysteme

### Forward Chaining

Eine Regel wird auf Daten angewandt und erzeugt dadurch ggf. neue Daten welche die Eingangsbedingungen weiterer Regeln erfüllen.

#### **Reasoning:**

*Datengetrieben* – es werden Daten (Lösungen/Aussagen) generiert, bis das Ziel erreicht ist.

### Backward Chaining

Auf der Bedingungsseite der Regel sind die Aussagen angegeben, welche gelten müssen um die rechte Regelseite gültig zu machen. Eine Produktion erzeugt nun jeweils alle nötigen Aussagen als neue Datenelemente.

#### **Reasoning:**

*Ergebnisgetrieben* – Ableiten und Lösen von Teilzielen, bis diese alle bewiesen werden konnten.

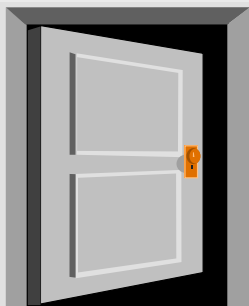
## Produktionssysteme - Konfliktlösungen

### Konflikte

- Eine Produktionsregel ist auf mehr als ein Datum anwendbar
- Es sind mehrere Produktionsregeln auf die vorliegenden Daten anwendbar.

### Lösungsstrategien

- Most specific first (MSF) – je detaillierter die Regel desto eher wird sie bevorzugt
- Most general first (MGF) – je globaler die Regel anwendbar ist desto eher wird sie bevorzugt
- Most recently used (MRU) – die Regel deren letzte Anwendung noch nicht so lange her ist wird bevorzugt ...
- Least recently used (LRU) – die Regel deren Anwendung am längsten zurückliegt wird bevorzugt
- Time tagged data (TTD) – das Alter der Datenelemente wird zur Priorisierung verwendet
- Rule ranking (RR) – Die Produktionsregeln werden vorab in eine Rangfolge gebracht.



### Erweiterungen der LOGIK

*Welches ist die bekannteste Logik für Zeitintervalle?*

*Wenn  $x \{<\} y$  und  $y \{>\} z$  was gilt für  $x$  und  $z$  ?*

*Wie lautet die Definition einer Kripkeinterpretation?*

*Was ist ein Produktionssystem?*