Оглавление

1 Основы языка питон **3**

1.1 Числа . . . 4
1.2 Строки . . . 9
1.3 Списки . . . 15
1.4 Кортежи . . . 24
1.5 Множества . . . 26
1.6 Словари . . . 29
1.7 Функции . . . 33
1.8 Итераторы . . . 42
1.9 Объектно-ориентированное программирование . . . 48
1.10 Исключения . . . 63
1.11 Модули . . . 66
1.12 Ввод-вывод, файлы, директории . . . 79

2 Пакеты для научных вычислений **89**

2.1 numpy . . . 90
2.1.1 Одномерные массивы . . . 90
2.1.2 Операции над одномерными массивами . . . 96
2.1.3 2-мерные массивы . . . 103
2.1.4 Линейная алгебра . . . 108
2.1.5 Преобразование Фурье . . . 110
2.1.6 Интегрирование . . . 111
2.1.7 Дифференциальные уравнения . . . 111
2.2 matplotlib . . . 113
2.2.1 Логарифмический масштаб . . . 125
2.2.2 Полярные координаты . . . 127
2.2.3 Экпериментальные данные . . . 129
2.2.4 Гистограмма . . . 130
2.2.5 Контурные графики . . . 131
2.2.6 Images (пиксельные картинки) . . . 134
2.2.7 Трёхмерная линия . . . 135
2.2.8 Поверхности . . . 137
2.3 mpmath . . . 141
2.3.1 Специальные функции . . . 143
2.3.2 Решение уравнений . . . 146
2.3.3 Производные . . . 148
2.3.4 Интегралы . . . 148

2.3.5 Сумма ряда . . . 149
2.3.6 Дифференциальные уравнения . . . 149
2.3.7 Матрицы . . . 150
2.4 pandas . . . 153
2.4.1 Series . . . 153
2.4.2 DataFrame . . . 158
2.5 SymPy . . . 166
2.5.1 Многочлены и рациональные функции . . . 167
2.5.2 Элементарные функции . . . 169
2.5.3 Структура выражений . . . 173
2.5.4 Решение уравнений . . . 177
2.5.5 Ряды . . . 178
2.5.6 Производные . . . 181
2.5.7 Интегралы . . . 182
2.5.8 Суммирование рядов . . . 183
2.5.9 Пределы . . . 184
2.5.10 Дифференциальные уравнения . . . 184
2.5.11 Линейная алгебра . . . 185
2.5.12 Графики . . . 191
2.6 cython . . . 200
2.6.1 Функции . . . 200
2.6.2 Интерфейс к библиотеке на C . . . 202
2.6.3 Структуры . . . 203
2.6.4 cdef классы . . . 204
2.6.5 Интерфейс к библиотеке на C . . . 206

Глава 1

Основы языка питон

1.1 Числа

Арифметические операции имеют ожидаемые приоритеты. При необходимости используются скобки.

```
In [1]: 1+2*3

Out[1]: 7

In [2]: (1+2)*3

Out[2]: 9
```

Возведение целого числа в целую степень даёт целое число, если показатель степени ≥ 0, и число с плавающей точкой, если он < 0. Так что тип результата невозможно определить статически, если значение переменной `n` неизвестно.

```
In [3]: n=3
        2**n

Out[3]: 8

In [4]: n=-3
        2**n

Out[4]: 0.125
```

Арифметические операции можно применять к целым и числам с плавающей точкой в любых сочетаниях.

```
In [5]: n+1.0

Out[5]: -2.0
```

Деление целых чисел всегда даёт результат с плавающей точкой, даже если они делятся нацело. Операторы `//` и `%` дают целое частное и остаток.

```
In [6]: 7/4

Out[6]: 1.75

In [7]: 7//4

Out[7]: 1

In [8]: 7%4

Out[8]: 3

In [9]: 4/2

Out[9]: 2.0
```

Если Вы попытаетесь использовать переменную, которой не присвоено никакого значения, то получите сообщение об ошибке.

```
In [10]: x+1
```

```
---------------------------------------------------------------------------
NameError                                 Traceback (most recent call last)

<ipython-input-10-d9a77b2c0933> in <module>()
----> 1 x+1


NameError: name 'x' is not defined
```

`x+=1` означает `x=x+1`, аналогично для других операций. В питоне строго различаются операторы (например, присваивание) и выражения, так что таких операций, как ++ в C, нет. Хотя вызов функции в выражении может приводить к побочным эффектам.

```
In [11]: x=1
         x+=1
         print(x)
```

```
2
```

```
In [12]: x*=2
         print(x)
```

```
4
```

Оператор `del` уничтожает переменную.

```
In [13]: del x
         x
```

```
---------------------------------------------------------------------------
NameError                                 Traceback (most recent call last)

<ipython-input-13-726510e32795> in <module>()
  1 del x
----> 2 x


NameError: name 'x' is not defined
```

Любопытная особенность питона: можно использовать привычные из математики сравнения вроде $x < y < z$, которые в других языках пришлось бы записывать как `x<y and y<z`.

```
In [14]: 1<2<=2

Out[14]: True

In [15]: 1<2<2

Out[15]: False
```

Логические выражения можно комбинировать с помощью `and` и `or` (эти операции имеют более низкий приоритет, чем сравнения). Если результат уже ясен из первого операнда, второй операнд не вычисляется. А вот так выглядит оператор `if`.

```
In [16]: n=4
         # Кстати, это комментарий
         if 1<2 and n<3:
             print('T')
         else:
             print('F')

F


In [17]: if 1<2 or n<3:
             print('T')
         else:
             print('F')

T
```

После строчки, заканчивающейся `:`, можно писать последовательность операторов с одинаковым отступом (больше, чем у строчки `if`). Никакого признака конца такой группы операторов не нужно. Первая строчка после `else:`, имеющая тот же уровень отступа, что и `if` и `else:` — это следующий оператор после `if`.

Оператора, аналогичного `case` или `switch`, в питоне нет. Используйте длинную последовательность `if ... elif ... elif ... else`.

```
In [18]: if n==1:
             print('один')
         elif n==2:
             print('два')
         elif n==3:
             print('три')
         else:
             print('много')

много
```

Есть и условные выражения:

```
In [20]: (0 if n<0 else 1)+1

Out[20]: 2
```

Обычно в начале пишется *основное* выражение, оно защищается условием в `if`, а после `else` пишется *исключительный случай*.

В питоне немного встроенных функций. Большинство надо импортировать. Элементарные функции импортируют из модуля `math`. Заниматься импортозамещением (писать свою реализацию синуса) не нужно.

```
In [21]: from math import sin,pi

In [22]: pi

Out[22]: 3.141592653589793

In [23]: sin(pi/6)

Out[23]: 0.49999999999999994
```

Любой объект имеет тип.

```
In [24]: type(2)

Out[24]: int

In [25]: type(int)

Out[25]: type

In [26]: type(2.1)

Out[26]: float

In [27]: type(True)

Out[27]: bool
```

Имена типов по совместительству являются функциями, преобразующими в этот тип объекты других типов (если такое преобразование имеет смысл).

```
In [28]: float(2)

Out[28]: 2.0

In [29]: int(2.0)

Out[29]: 2

In [30]: int(2.9)
```

```
Out[30]: 2

In [31]: int(-2.9)

Out[31]: -2
```

Преобразование числа с плавающей точкой в целое производится путём отбрасывания дробной части, а не округления. Для округления используется функция `round`.

```
In [32]: round(2.9)

Out[32]: 3
```

1.2 Строки

Питон хорошо приспособлен для работы с текстовой информацией. В нём есть много операций для работы со строками, несколько способов записи строк (удобных в разных случаях). В современных версиях питона (3.x) строки юникодные, т.е. они могут содержать одновременно русские и греческие буквы, немецкие умляуты и китайские иероглифы.

```
In [1]: s='Какая-нибудь строка \u00F6 \u03B1'
        print(s)
```

```
Какая-нибудь строка ö α
```

```
In [2]: 'Эта строка может содержать " внутри'
```

```
Out[2]: 'Эта строка может содержать " внутри'
```

```
In [3]: "Эта строка может содержать ' внутри"
```

```
Out[3]: "Эта строка может содержать ' внутри"
```

```
In [4]: s='Эта содержит и \', и \"'
        print(s)
```

```
Эта содержит и ', и "
```

```
In [5]: s="""Строка,
        занимающая
        несколько
        строчек"""
        print(s)
```

```
Строка,
занимающая
несколько
строчек
```

```
In [6]: s=="Строка,\nзанимающая\nнесколько\nстрочек"
```

```
Out[6]: True
```

Несколько строковых литералов, разделённых лишь пробелами, слипаются в одну строку. Подчеркнём ещё раз: это должны быть литералы, а не переменные со строковыми значениями. Такой способ записи особенно удобен, когда ружно передать длинную строку при вызове функции.

```
In [7]: s='Такие ' 'строки ' 'слипаются'
        print(s)
```

```
Такие строки слипаются
```

```
In [8]: print('Такие\n'
              'строки\n'
              'слипаются')
```

```
Такие
строки
слипаются
```

В питоне нет специального типа `char`, его роль играют строки длины 1. Функция `ord` возвращает (юникодный) номер символа, а обратная ей функция `chr` возвращает символ (строку длины 1).

```
In [9]: n=ord('a')
        n
```

```
Out[9]: 1072
```

```
In [10]: chr(n)
```

```
Out[10]: 'a'
```

Функция `len` возвращает длину строки. Она применима не только к строкам, но и к спискам, словарям и многим другим типам, про объекты которых разумно спрашивать, какая у них длина.

```
In [11]: s='0123456789'
         len(s)
```

```
Out[11]: 10
```

Символы в строке индексируются с 0. Отрицательные индексы используются для счёта с конца: `s[-1]` — последний символ в строке, и т.д.

```
In [12]: s[0]
```

```
Out[12]: '0'
```

```
In [13]: s[3]
```

```
Out[13]: '3'
```

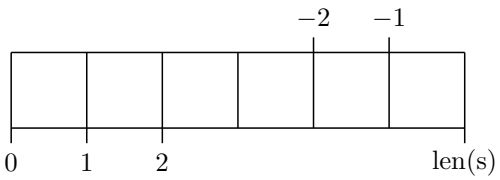
```
In [14]: s[-1]
```

```
Out[14]: '9'
```

```
In [15]: s[-2]
```

```
Out[15]: '8'
```

Можно выделить подстроку, указав диапазон индексов. Подстрока включает символ, соответствующий началу диапазона, но не включает соответствующий концу. Удобно представлять себе, что индексы соответствуют положениям между символами строки. Тогда подстрока `s[n:m]` будет расположена между индексами `n` и `m`.




```
In [16]: s[1:3]

Out[16]: '12'

In [17]: s[:3]

Out[17]: '012'

In [18]: s[3:]

Out[18]: '3456789'

In [19]: s[:-1]

Out[19]: '012345678'

In [20]: s[3:-2]

Out[20]: '34567'
```

Если не указано начало диапазона, подразумевается от начала строки; если не указан его конец — до конца строки.

Строки являются неизменяемым типом данных. Построив строку, нельзя изменить в ней один или несколько символов. Операции над строками строят новые строки — результаты, не меняя своих операндов. Сложение строк означает конкатенацию, а умножение на целое число (с любой стороны) — повторение строки несколько раз.

```
In [21]: s='abc'; t='def'
         s+t

Out[21]: 'abcdef'

In [22]: s*3

Out[22]: 'abcabcabc'
```

Операция `in` проверяет, содержится ли символ (или подстрока) в строке.

```
In [23]: 'a' in s

Out[23]: True

In [24]: 'd' in s

Out[24]: False

In [25]: 'ab' in s

Out[25]: True

In [26]: 'b' not in s

Out[26]: False
```

У объектов типа строка есть большое количество методов. Метод `lstrip` удаляет все whitespace-символы (пробел, `tab`, `newline`) в начале строки; `rstrip` — в конце; а `strip` — с обеих сторон. Им можно передать необязательный аргумент — символы, которые нужно удалять.

```
In [27]: s='   строка   '
         s.lstrip()

Out[27]: 'строка   '

In [28]: s.rstrip()

Out[28]: '   строка'

In [29]: s.strip()

Out[29]: 'строка'
```

`lower` и `upper` переводят все буквы в маленькие и заглавные.

```
In [30]: s='СтРоКа'
         s.lower()

Out[30]: 'строка'

In [31]: s.upper()

Out[31]: 'СТРОКА'
```

Проверки: буквы (маленькие и заглавные), цифры, пробелы.

```
In [32]: 'АбВг'.isalpha()

Out[32]: True

In [33]: 'абвг'.islower()
```

```
Out[33]: True

In [34]: 'АБВГ'.isupper()

Out[34]: True

In [35]: '0123'.isdigit()

Out[35]: True

In [36]: ' \t\n'.isspace()

Out[36]: True
```

Строки имеют тип `str`.

```
In [37]: type(s)

Out[37]: str

In [38]: s=str(123)
         s

Out[38]: '123'

In [39]: n=int(s)
         n

Out[39]: 123

In [40]: int('123x')


         ---------------------------------------------------------------------------

         ValueError                                Traceback (most recent call last)

         <ipython-input-40-528edaa9c06f> in <module>()
     ----> 1 int('123x')


         ValueError: invalid literal for int() with base 10: '123x'


In [41]: x=float('123.456E-7')
         x

Out[41]: 1.23456e-05
```

Часто требуется вставить в строку значения каких-нибудь переменных (или выражений). Такие строки особенно полезны для печати сообщений. Для этого используются форматные строки: в них в фигурных скобках можно писать выражения, они вычислятся, и их значения подставятся в строку.

```
In [42]: f's = {s},  n = {n},  x = {x}'
```

```
Out[42]: 's = 123,  n = 123,  x = 1.23456e-05'
```

После выражения можно поставить знак : и указать некоторые детали того, как это значение должно печататься. В частности, можно задать ширину поля (т.е. число символов). Если значение не влазит в эту ширину поля, для его печати будет использовано больше символов — столько, сколько надо, чтобы напечатать это значение полностью.

```
In [43]: print(f'"{s:5}"  "{n:5}"  "{x:5}"')
```

```
"123  "  "  123"  "1.23456e-05"
```

Целые числа можно печатать в десятичном, шестнадцатиричном или двоичном виде.

```
In [44]: print(f'десятичное "{n:5d}",  16-ричное "{n:5x}",  двоичное "{n:5b}"')
```

```
десятичное "  123",  16-ричное "   7b",  двоичное "1111011"
```

Для чисел с плавающей точкой можно задать число цифр после точки и формат с фиксированной точкой или экспоненциальный.

```
In [45]: print(f'{x:10.5f} {x:10.5e} {1/x:10.5f} {1/x:10.5e}')
```

```
   0.00001 1.23456e-05 81000.51840 8.10005e+04
```

1.3 Списки

Списки могут содержать объекты любых типов (в одном списке могут быть объекты разных типов). Списки индексируются так же, как строки.

```
In [1]: l=[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9]
        l

Out[1]: [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]

In [2]: len(l)

Out[2]: 10

In [3]: l[0]

Out[3]: 0

In [4]: l[3]

Out[4]: 3

In [5]: l[10]


        ---------------------------------------------------------------------------

        IndexError                                Traceback (most recent call last)

        <ipython-input-5-e4a648ff0fa9> in <module>()
    ----> 1 l[10]


        IndexError: list index out of range


In [6]: l[-2]

Out[6]: 8

In [7]: l[1:3]

Out[7]: [1, 2]
```

Обратите внимание, что `l[:3]+l[3:]==l`.

```
In [8]: l[:3]

Out[8]: [0, 1, 2]

In [9]: l[3:]
```

```
Out[9]: [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]

In [10]: l[3:3]

Out[10]: []

In [11]: l[3:-2]

Out[11]: [3, 4, 5, 6, 7]

In [12]: l[:-2]

Out[12]: [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]
```

Списки являются изменяемыми объектами. Это сделано для эффективности. В списке может быть 1000000 элементов. Создавать его копию каждый раз, когда мы изменили один элемент, слишком дорого.

```
In [13]: l[3]='три'
         l

Out[13]: [0, 1, 2, 'три', 4, 5, 6, 7, 8, 9]
```

Можно заменить какой-нибудь подсписок на новый список (в том числе другой длины).

```
In [14]: l[3:3]=[0]
         l

Out[14]: [0, 1, 2, 0, 'три', 4, 5, 6, 7, 8, 9]

In [15]: l[3:3]=[10,11,12]
         l

Out[15]: [0, 1, 2, 10, 11, 12, 0, 'три', 4, 5, 6, 7, 8, 9]

In [16]: l[5:7]=[0,0,0,0]
         l

Out[16]: [0, 1, 2, 10, 11, 0, 0, 0, 0, 'три', 4, 5, 6, 7, 8, 9]

In [17]: l[3:]=[]
         l

Out[17]: [0, 1, 2]

In [18]: l[len(l):]=[3,4]
         l

Out[18]: [0, 1, 2, 3, 4]
```

Некоторые из этих операций могут быть записаны в другой форме.

```
In [19]: l=[0,1,2,3,4,5,6,7]
         del l[3]
         l

Out[19]: [0, 1, 2, 4, 5, 6, 7]

In [20]: del l[3:5]
         l

Out[20]: [0, 1, 2, 6, 7]

In [21]: l.insert(3,0)
         l

Out[21]: [0, 1, 2, 0, 6, 7]

In [22]: l.append(8)
         l

Out[22]: [0, 1, 2, 0, 6, 7, 8]

In [23]: l.extend([9,10,11])
         l

Out[23]: [0, 1, 2, 0, 6, 7, 8, 9, 10, 11]
```

Элементы списка могут быть разных типов.

```
In [24]: l=[0,[1,2,3],'abc']
         l[1][1]='x'
         l

Out[24]: [0, [1, 'x', 3], 'abc']
```

Когда мы пишем `m=l`, мы присваиваем переменной `m` ссылку на тот же объект, на который ссылается `l`. Поэтому, изменив этот объект (список) через `l`, мы увидим эти изменения и через `m` — ведь список всего один.

```
In [25]: l=[0,1,2,3,4,5]
         m=l
         l[3]='три'
         m

Out[25]: [0, 1, 2, 'три', 4, 5]
```

Операция `is` проверяет, являются ли `m` и `l` **одним и тем же объектом**.

```
In [26]: m is l

Out[26]: True
```

Если мы хотим видоизменять `m` и `l` независимо, нужно присвоить переменной `m` не список `l`, а его копию. Тогда это будут два различных списка, просто в начальный момент они состоят из одних и тех же элементов. Для этого в питоне есть идиома: `l[:]` — это подсписок списка `l` от начала до конца, а подсписок всегда копируется.

```
In [27]: m=l[:]
```

Теперь `m` и `l` — два независимых объекта, имеющих равные значения.

```
In [28]: m is l

Out[28]: False

In [29]: m==l

Out[29]: True
```

Их можно менять независимо.

```
In [30]: l[3]=0
         l

Out[30]: [0, 1, 2, 0, 4, 5]

In [31]: m

Out[31]: [0, 1, 2, 'три', 4, 5]
```

Как и для строк, сложение списков означает конкатенацию, а умножение на целое число — повторение списка несколько раз. Операция `in` проверяет, содержится ли элемент в списке.

```
In [32]: [0,1,2]+[3,4,5]

Out[32]: [0, 1, 2, 3, 4, 5]

In [33]: 2*[0,1,2]

Out[33]: [0, 1, 2, 0, 1, 2]

In [34]: l=[0,1,2]
         l+=[3,4,5]
         l

Out[34]: [0, 1, 2, 3, 4, 5]

In [35]: 2 in l

Out[35]: True
```

Простейший вид цикла в питоне — это цикл по элементам списка.

```
In [36]: for x in l:
             print(x)

0
1
2
3
4
5
```

Можно использовать цикл `while`. В этом примере он выполняется, пока список `l` не пуст. Этот цикл гораздо менее эффективен, чем предыдущий — в нём на каждом шаге меняется список `l`. Он тут приведён не для того, чтобы ему подражали, а просто чтобы показать синтаксис цикла `while`.

```
In [37]: while l:
             print(l[0])
             l=l[1:]

0
1
2
3
4
5


In [38]: l

Out[38]: []
```

Очень часто используются циклы по диапазонам целых чисел.

```
In [39]: for i in range(4):
             print(i)

0
1
2
3
```

Функция `range(n)` возвращает диапазон целых чисел от 0 до $n-1$ (всего n штук) в виде специального объекта `range`, который можно использовать в `for` цикле. Можно превратить этот объект в список функцией `list`. Но этого делать не нужно, если только такой список не нужен для проведения каких-нибудь списковых операций. Число `n` может быть равно 1000000. Зачем занимать память под длинный список, если он не нужен? Для написания цикла достаточно короткого объекта `range`, который хранит только пределы.

```
In [40]: r=range(4)
         r

Out[40]: range(0, 4)

In [41]: list(r)

Out[41]: [0, 1, 2, 3]
```

Функции `range` можно передать первый параметр — нижний предел.

```
In [42]: for i in range(2,4):
             print(i)

2
3


In [43]: r=range(2,4)
         r

Out[43]: range(2, 4)

In [44]: list(r)

Out[44]: [2, 3]
```

Функция `list` превращает строку в список символов.

```
In [45]: l=list('абвгд')
         l

Out[45]: ['а', 'б', 'в', 'г', 'д']
```

Как написать цикл, если в его теле нужно использовать и номера элементов списка, и сами эти элементы? Первая идея, которая приходит в голову по аналогии с C — это использовать `range`.

```
In [46]: for i in range(len(l)):
             print(i,'  ',l[i])

0    а
1    б
2    в
3    г
4    д
```

Можно поступить наоборот — устроить цикл по элементам списка, а индексы вычислять.

```
In [47]: i=0
         for x in l:
             print(i,'  ',x)
             i+=1
```

```
0    а
1    б
2    в
3    г
4    д
```

Оба этих способа не есть идиоматический питон. Более изящно использовать функцию `enumerate`, которая на каждом шаге возвращает пару из индекса `i` и `i`-го элемента списка.

```
In [48]: for i,x in enumerate(l):
             print(i,'  ',x)
```

```
0    а
1    б
2    в
3    г
4    д
```

Про такие пары мы поговорим в следующем параграфе.

Довольно часто удобно использовать цикл `while True:`, то есть пока рак на горе не свистнет, а выход (или несколько выходов) из него устраивать в нужном месте (или местах) при помощи `break`.

```
In [49]: while True:
             print(l[-1])
             l=l[:-1]
             if l==[]:
                 break
```

```
д
г
в
б
а
```

Этот конкретный цикл — отнюдь не пример для подражания, он просто показывает синтаксис.

Можно строить список поэлементно.

```
In [50]: l=[]
         for i in range(10):
             l.append(i**2)
         l
```

```
Out[50]: [0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81]
```

Но более компактно и элегантно такой список можно создать при помощи генератора списка (list comprehension). К тому же это эффективнее — размер списка известен заранее, и не нужно много раз увеличивать его. Опытные питон-программисты используют генераторы списков везде, где это возможно (и разумно).

```
In [51]: [i**2 for i in range(10)]

Out[51]: [0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81]

In [52]: [[i,j] for i in range(3) for j in range(2)]

Out[52]: [[0, 0], [0, 1], [1, 0], [1, 1], [2, 0], [2, 1]]
```

В генераторе списков могут присутствовать некоторые дополнительные элементы, хотя они используются реже. Например, в список-результат можно включить не все элементы.

```
In [53]: [i**2 for i in range(10) if i!=5]

Out[53]: [0, 1, 4, 9, 16, 36, 49, 64, 81]
```

Создадим список случайных целых чисел.

```
In [54]: from random import randint
         l=[randint(0,9) for i in range(10)]
         l

Out[54]: [6, 0, 5, 8, 9, 0, 9, 4, 0, 6]
```

Функция `sorted` возвращает отсортированную копию списка. Метод `sort` сортирует список на месте. Им можно передать дополнительный параметр — функцию, указывающую, как сравнивать элементы.

```
In [55]: sorted(l)

Out[55]: [0, 0, 0, 4, 5, 6, 6, 8, 9, 9]

In [56]: l

Out[56]: [6, 0, 5, 8, 9, 0, 9, 4, 0, 6]

In [57]: l.sort()
         l

Out[57]: [0, 0, 0, 4, 5, 6, 6, 8, 9, 9]
```

Аналогично, функция `reversed` возвращает обращённый список (точнее говоря, некий объект, который можно использовать в `for` цикле или превратить в список функцией `list`). Метод `reverse` обращает список на месте.

```
In [58]: list(reversed(l))

Out[58]: [9, 9, 8, 6, 6, 5, 4, 0, 0, 0]

In [59]: l

Out[59]: [0, 0, 0, 4, 5, 6, 6, 8, 9, 9]

In [60]: l.reverse()
         l

Out[60]: [9, 9, 8, 6, 6, 5, 4, 0, 0, 0]
```

Метод `split` расщепляет строку в список подстрок. По умолчанию расщепление производится по пустым промежуткам (последовательностям пробелов и символов `tab` и `newline`). Но можно передать ему дополнительный аргумент — подстроку-разделитель.

```
In [61]: s='abc \t def \n ghi'
         l=s.split()
         l

Out[61]: ['abc', 'def', 'ghi']
```

Чтобы напечатать элементы списка через запятую или какой-нибудь другой символ (или строку), очень полезен метод `join`. Он создаёт строку из всех элементов списка, разделяя их строкой-разделителем. Запрограммировать это в виде цикла было бы существенно длиннее, и такую программу было бы сложнее читать.

```
In [62]: s=', '.join(l)
         s

Out[62]: 'abc, def, ghi'

In [63]: s.split(', ')

Out[63]: ['abc', 'def', 'ghi']
```

1.4 Кортежи

Кортежи (tuples) очень похожи на списки, но являются неизменяемыми. Как мы видели, использование изменяемых объектов может приводить к неприятным сюрпризам.

Кортежи пишутся в круглых скобках. Если элементов > 1 или 0, это не вызывает проблем. Но как записать кортеж с одним элементом? Конструкция `(x)` абсолютно легальна в любом месте любого выражения, и означает просто `x`. Чтобы избежать неоднозначности, кортеж с одним элементом `x` записывается в виде `(x,)`.

```
In [1]: (1,2,3)

Out[1]: (1, 2, 3)

In [2]: ()

Out[2]: ()

In [3]: (1,)

Out[3]: (1,)
```

Скобки ставить не обязательно, если кортеж — единственная вещь в правой части присваивания.

```
In [4]: t=1,2,3
        t

Out[4]: (1, 2, 3)
```

Работать с кортежами можно так же, как со списками. Нельзя только изменять их.

```
In [5]: len(t)

Out[5]: 3

In [6]: t[1]

Out[6]: 2

In [7]: u=4,5
        t+u

Out[7]: (1, 2, 3, 4, 5)

In [8]: 2*u

Out[8]: (4, 5, 4, 5)
```

В левой части присваивания можно написать несколько переменных через запятую, а в правой кортеж. Это одновременное присваивание значений нескольким переменным.

```
In [9]: x,y=1,2
```

```
In [10]: x

Out[10]: 1

In [11]: y

Out[11]: 2
```

Сначала вычисляется кортеж в правой части, исходя из *старых* значений переменных (до этого присваивания). Потом одновременно всем переменным присваиваются новые значения из этого кортежа. Поэтому так можно обменять значения двух переменных.

```
In [12]: x,y=y,x

In [13]: x

Out[13]: 2

In [14]: y

Out[14]: 1
```

Это проще, чем в других языках, где приходится использовать третью переменную.

В стандартной библиотеке есть полезный тип `namedtuple`:

```
In [15]: from collections import namedtuple
         point=namedtuple('point',('x','y','z'))
         p=point(0,1,2)
         print(p)

point(x=0, y=1, z=2)
```

К его полям можно обращаться как по имени, так и по номеру (как для обычного кортежа).

```
In [16]: p.y,p[1]

Out[16]: (1, 1)
```

При создании объекта типа `namedtuple` аргументы можно задавать в любом порядке, если указывать их имена.

```
In [17]: p=point(y=1,z=2,x=0)
         p

Out[17]: point(x=0, y=1, z=2)
```

В этих объектах нет накладных расходов по памяти: только значения полей (как в `structure` в `C` или `record` в `Pascal`). Соответствие между именами полей и их номерами хранится в памяти один раз для всего типа (в нашем примере `point`). В этом состоит важное отличие от словарей с ключами-строками. Кроме того, невозможно длбавлять или удалять поля налету.

1.5 Множества

В соответствии с математическими обозначениями, множества пишутся в фигурных скобках. Элемент может содержаться в множестве только один раз. Порядок элементов в множестве не имеет значения, поэтому питон их сортирует. Элементы множества могут быть любых типов. Множества используются существенно реже, чем списки. Но иногда они бывают весьма полезны. Например, когда я собирался делать апгрейд системы на сервере, я написал на питоне программу, которая строила множество пакетов, установленных в системе до апгрейда; множество пакетов, имеющихся на инсталляционных CD; имеющихся на основных сайтах с дополнительными пакетами, и т.д. И она мне помогла восстановить функциональность после апгрейда.

```
In [1]: s={0,1,0,5,5,1,0}
        s

Out[1]: {0, 1, 5}
```

Принадлежит ли элемент множеству?

```
In [2]: 1 in s, 2 in s, 1 not in s

Out[2]: (True, False, False)
```

Множество можно получить из списка, или строки, или любого объекта, который можно использовать в `for` цикле (итерабельного).

```
In [3]: l=[0,1,0,5,5,1,0]
        set(l)

Out[3]: {0, 1, 5}

In [4]: set('абба')

Out[4]: {'а', 'б'}
```

Как записать пустое множество? Только так.

```
In [5]: set()

Out[5]: set()
```

Дело в том, что в фигурных скобках в питоне пишутся также словари (мы будем их обсуждать в следующем параграфе). Когда в них есть хоть один элемент, можно отличить словарь от множества. Но пустые фигурные скобки означают пустой словарь.

Работать с множествами можно как со списками.

```
In [6]: len(s)

Out[6]: 3

In [7]: for x in s:
            print(x)
```

```
0
1
5
```

Это генератор множества (set comprehension).

```
In [8]: {i for i in range(5)}
```

```
Out[8]: {0, 1, 2, 3, 4}
```

Объединение множеств.

```
In [9]: s2=s|{2,5}
        s2
```

```
Out[9]: {0, 1, 2, 5}
```

Проверка того, является ли одно множество подмножеством другого.

```
In [10]: s<s2, s>s2, s<=s2, s>=s2
```

```
Out[10]: (True, False, True, False)
```

Пересечение.

```
In [11]: s2&{1,2,3}
```

```
Out[11]: {1, 2}
```

Разность и симметричная разность.

```
In [12]: s2-{1,3,5}
```

```
Out[12]: {0, 2}
```

```
In [13]: s2^{1,3,5}
```

```
Out[13]: {0, 2, 3}
```

Множества (как и списки) являются изменяемыми объектами. Добавление элемента в множество и исключение из него.

```
In [14]: s2.add(4)
         s2
```

```
Out[14]: {0, 1, 2, 4, 5}
```

```
In [15]: s2.remove(1)
         s2
```

```
Out[15]: {0, 2, 4, 5}
```

Как и в случае `+=`, можно скомбинировать теоретико-множественную операцию с присваиванием.

```
In [16]: s2|={1,2}
         s2

Out[16]: {0, 1, 2, 4, 5}
```

Существуют также неизменяемые множества. Этот тип данных называется `frozenset`. Операции над такими множествами подобны обычным, только невозможно изменять их (добавлять и исключать элементы).

1.6 Словари

Словарь содержит пары ключ — значение (их порядок несущественен). Это один из наиболее полезных и часто используемых типов данных в питоне.

```
In [1]: d={'one':1,'two':2,'three':3}
        d

Out[1]: {'one': 1, 'three': 3, 'two': 2}
```

Можно узнать значение, соответствующее некоторому ключу. Словари реализованы как хэш-таблицы, так что поиск даже в больших словарях очень эффективен. В языках низкого уровня (например, C) для построения хэш-таблиц требуется использовать внешние библиотеки и писать заметное количество кода. В скриптовых языках (perl, python, php) они уже встроены в язык, и использовать их очень легко.

```
In [2]: d['two']

Out[2]: 2

In [3]: d['four']


        ---------------------------------------------------------------------------

        KeyError                                  Traceback (most recent call last)

        <ipython-input-3-a0944cd0c15b> in <module>()
    ----> 1 d['four']


        KeyError: 'four'
```

Можно проверить, есть ли в словаре данный ключ.

```
In [4]: 'one' in d, 'four' in d

Out[4]: (True, False)
```

Можно присваивать значения как имеющимся ключам, так и отсутствующим (они добавятся к словарю).

```
In [5]: d['one']=-1
        d

Out[5]: {'one': -1, 'three': 3, 'two': 2}

In [6]: d['four']=4
        d
```

```
Out[6]: {'four': 4, 'one': -1, 'three': 3, 'two': 2}
```

Длина — число ключей в словаре.

```
In [7]: len(d)

Out[7]: 4
```

Можно удалит ключ из словаря.

```
In [8]: del d['two']
        d

Out[8]: {'four': 4, 'one': -1, 'three': 3}
```

Метод `get`, если он будет вызван с отсутствующим ключом, не приводит к ошибке, а возвращает специальный объект `None`. Он используется всегда, когда необходимо указать, что объект отсутствует (в какой-то мере он аналогичен `null` в C). Если передать методу `get` второй аргумент — значение по умолчанию, то будет возвращаться это значение, а не `None`.

```
In [9]: d.get('one'),d.get('five')

Out[9]: (-1, None)

In [10]: type(None)

Out[10]: NoneType

In [11]: d.get('one',0),d.get('five',0)

Out[11]: (-1, 0)
```

Словари обычно строят последовательно: начинают с пустого словаря, а затем добавляют ключи со значениями.

```
In [12]: d={}
         d

Out[12]: {}

In [13]: d['zero']=0
         d

Out[13]: {'zero': 0}

In [14]: d['one']=1
         d

Out[14]: {'one': 1, 'zero': 0}
```

А это генератор словаря (dictionary comprehension).

```
In [15]: d={i:i**2 for i in range(5)}
         d

Out[15]: {0: 0, 1: 1, 2: 4, 3: 9, 4: 16}
```

Ключами могут быть любые неизменяемые объекты, например, целые числа, строки, кортежи.

```
In [16]: d={}
         d[0,0]=1
         d[0,1]=0
         d[1,0]=0
         d[1,1]=-1
         d

Out[16]: {(0, 0): 1, (0, 1): 0, (1, 0): 0, (1, 1): -1}

In [17]: d[0,0]+d[1,1]

Out[17]: 0
```

Словари, подобно спискам, можно использовать в `for` циклах. Перебираются имеющиеся в словаре ключи (в каком-то непредсказуемом порядке).

```
In [18]: d={'one':1,'two':2,'three':3}
         for x in d:
             print(x,'  ',d[x])

one    1
two    2
three    3
```

Метод `keys` возвращает список ключей, метод `values` — список соответствующих значений (в том же порядке), а метод `items` — список пар (ключ,значение). Точнее говоря, это не списки, а некоторые объекты, которые можно использовать в `for` циклах или превратить в списки функцией `list`. Если хочется написать цикл по упорядоченному списку ключей, то можно использовать `sorted(d.keys())`.

```
In [19]: d.keys(),d.values(),d.items()

Out[19]: (dict_keys(['one', 'two', 'three']),
          dict_values([1, 2, 3]),
          dict_items([('one', 1), ('two', 2), ('three', 3)]))

In [20]: for x in sorted(d.keys()):
             print(x,'  ',d[x])

one    1
three    3
two    2
```

```
In [21]: for x,y in d.items():
             print(x,'  ',y)

one    1
two    2
three    3


In [22]: del x,y
```

Что есть истина? И что есть ложь? Подойдём к этому философскому вопросу экспериментально.

```
In [23]: bool(False),bool(True)

Out[23]: (False, True)

In [24]: bool(None)

Out[24]: False

In [25]: bool(0),bool(123)

Out[25]: (False, True)

In [26]: bool(''),bool(' ')

Out[26]: (False, True)

In [27]: bool([]),bool([0])

Out[27]: (False, True)

In [28]: bool(set()),bool({0})

Out[28]: (False, True)

In [29]: bool({}),bool({0:0})

Out[29]: (False, True)
```

На варажения, стоящие в булевых позициях (после `if`, `elif` и `while`), неявно напускается функция `bool`. Некоторые объекты интерпретируются как `False`: число 0, пустая строка, пустой список, пустое множество, пустой словарь, `None` и некоторые другие. Все остальные объекты интерпретируются как `True`. В операторах `if` или `while` очень часто используется список, словарь или что-нибудь подобное, что означает делай что-то если этот список (словарь и т.д.) не пуст.

Заметим, что число с плавающей точкой 0.0 тоже интерпретируется как `False`. Это использовать категорически не рекомендуется: вычисления с плавающей точкой всегда приближённые, и неизвестно, получите Вы 0.0 или `1.234E-12`. Лучше напишите `if abs(x)<epsilon:`.

1.7 Функции

Это простейшая в мире функция. Она не имеет параметров, ничего не делает и ничего не возвращает. Оператор `pass` означает "ничего не делай"; он используется там, где синтаксически необходим оператор, а делать ничено не нужно (после `if` или `elif`, после `def` и т.д.).

```
In [1]: def f():
            pass

In [2]: f

Out[2]: <function __main__.f>

In [3]: pass

In [4]: type(f)

Out[4]: function

In [5]: r=f()
        print(r)

None
```

Эта функция более полезна: она имеет параметр и что-то возвращает.

```
In [6]: def f(x):
            return x+1

In [7]: f(1),f(1.0)

Out[7]: (2, 2.0)

In [8]: f('abc')


        ---------------------------------------------------------------------------

        TypeError                                 Traceback (most recent call last)

        <ipython-input-8-410386031a44> in <module>()
    ----> 1 f('abc')


        <ipython-input-6-e9c32f618734> in f(x)
          1 def f(x):
    ----> 2     return x+1


        TypeError: must be str, not int
```

Если у функции много параметров, то возникает желание вызывать её попроще в наиболее часто встречающихся случаях. Для этого в операторе `def` можно задать значения некоторых параметров по умолчанию (они должны размещаться в конце списка параметров). При вызове необходимо указать все обязательные параметры (у которых нет значений по умолчанию), а необязательные можно и не указывать. Если при вызове указывать параметры в виде `имя=значение`, то это можно делать в любом порядке. Это гораздо удобнее, чем вспоминать, является данный параметр восьмым или девятым при вызове какой-нибудь сложной функции.

```
In [9]: def f(x,a=0,b='b'):
            print(x,'  ',a,'  ',b)

In [10]: f(1.0)

1.0    0    b


In [11]: f(1.0,1)

1.0    1    b


In [12]: f(1.0,b='a')

1.0    0    a


In [13]: f(1.0,b='a',a=2)

1.0    2    a


In [14]: f(a=2,x=2.0)

2.0    2    b
```

Переменные, использующиеся в функции, являются локальными. Присваивание им не меняет значений глобальных переменных с такими же именами.

```
In [15]: a=1

In [16]: def f():
             a=2
             return a

In [17]: f()

Out[17]: 2

In [18]: a
```

```
Out[18]: 1
```

Если в функции нужно использовать какие-нибудь глобальные переменные, их нужно описать как `global`.

```
In [19]: def f():
             global a
             a=2
             return a

In [20]: f()

Out[20]: 2

In [21]: a

Out[21]: 2
```

Пространство имён устанавливает соответствие между именами переменных и объектами — их значениями. Есть пространство имён локальных переменных функции, пространство имён глобальных переменных программы и пространство имён встроенных функций языка питон. Для реализации пространств имён используются словари.

Если функции передаётся в качестве аргумента какой-нибудь изменяемый объект, и функция его изменяет, то это изменение будет видно снаружи после этого вызова. Мы уже обсуждали эту ситуацию, когда две переменные (в данном случае глобальная переменная и параметр функции) указывают на один и тот же изменяемый объект объект.

```
In [22]: def f(x,l):
             l.append(x)
             return l

In [23]: l=[1,2,3]
         f(0,l)

Out[23]: [1, 2, 3, 0]

In [24]: l

Out[24]: [1, 2, 3, 0]
```

Если в качестве значения какого-нибудь параметра по умолчанию используется изменяемый объект, то это может приводить к неожиданным последствиям. В данном случае исполнение определения функции приводит к созданию двух объектов: собственно функции и объекта-списка, первоначально пустого, который используется для инициализации параметра функции при вызове. Функция изменяет этот объект. При следующем вызове он опять используется для инициализации параметра, но его значение уже изменилось.

```
In [25]: def f(x,l=[]):
             l.append(x)
             return l
```

```
In [26]: f(0)

Out[26]: [0]

In [27]: f(1)

Out[27]: [0, 1]

In [28]: f(2)

Out[28]: [0, 1, 2]
```

Чтобы избежать таких сюрпризов, в качестве значений по умолчанию лучше использовать только неизменяемые объекты.

```
In [29]: def f(x,l=None):
             if l is None:
                 l=[]
             l.append(x)
             return l

In [30]: f(0)

Out[30]: [0]

In [31]: f(1)

Out[31]: [1]

In [32]: f(2,[0,1])

Out[32]: [0, 1, 2]
```

Эта функция имеет один обязательный параметр плюс произвольное число необязательных. При вызове все такие дополнительные аргументы объединяются в кортеж, который функция может использовать по своему усмотрению.

```
In [33]: def f(x,*l):
             print(x,'  ',l)

In [34]: f(0)

0    ()


In [35]: f(0,1)

0    (1,)


In [36]: f(0,1,2)
```

```
0    (1, 2)
```

```
In [37]: f(0,1,2,3)
```

```
0    (1, 2, 3)
```

Звёздочку можно использовать и при вызове функции. Можно заранее построить список (или кортеж) аргументов, а потом вызвать функцию с этими аргументами.

```
In [38]: l=[1,2]
         f(*l)
```

```
1    (2,)
```

```
In [39]: c=('a','b')
         f(*l,0,*c)
```

```
1    (2, 0, 'a', 'b')
```

Такую распаковку из списков и кортежей можно использовать не только при вызове функции, но и при построении списка или кортежа.

```
In [40]: (*l,0,*c)
```

```
Out[40]: (1, 2, 0, 'a', 'b')
```

```
In [41]: [*l,0,*c]
```

```
Out[41]: [1, 2, 0, 'a', 'b']
```

```
In [42]: [*l,3]
```

```
Out[42]: [1, 2, 3]
```

```
In [43]: [3,*l]
```

```
Out[43]: [3, 1, 2]
```

Эта функция имеет два обязательных параметра плюс произвольное число необязательных ключевых параметров. При вызове они должны задаваться в виде `имя=значение`. Они собираются в словарь, который функция может использовать по своему усмотрению.

```
In [44]: def f(x,y,**d):
             print(x,'  ',y,'  ',d)
```

```
In [45]: f(0,1,foo=2,bar=3)
```

```
0    1    {'foo': 2, 'bar': 3}
```

Двойную звёздочку можно использовать и при вызове функции. Можно заранее построить словарь аргументов, сопоставляющий значения именам параметров, а потом вызвать функцию с этими ключевыми аргументами.

```
In [46]: d={'foo':2,'bar':3}
         f(0,1,**d)

0    1    {'foo': 2, 'bar': 3}


In [47]: d['x']=0
         d['y']=1
         f(**d)

0    1    {'foo': 2, 'bar': 3}
```

Вот любопытный способ построить словарь с ключами-строками.

```
In [48]: def f(**d):
             return d

In [49]: f(x=0,y=1,z=2)

Out[49]: {'x': 0, 'y': 1, 'z': 2}
```

Двойную звёздочку можно использовать не только при вызове функции, но и при построении словаря.

```
In [50]: d={0:'a',1:'b'}
         {**d,2:'c'}

Out[50]: {0: 'a', 1: 'b', 2: 'c'}
```

Вот простой способ объединить два словаря.

```
In [51]: d1={0:'a',1:'b'}
         d2={2:'c',3:'d'}
         {**d1,**d2}

Out[51]: {0: 'a', 1: 'b', 2: 'c', 3: 'd'}
```

Если один и тот же ключ встречается несколько раз, следующее значение затирает предыдущее.

```
In [52]: d2={1:'B',2:'C'}
         {**d1,3:'D',**d2,3:'d'}
```

```
Out[52]: {0: 'a', 1: 'B', 2: 'C', 3: 'd'}
```

Это наиболее общий вид списка параметров функции. Сначала идут обязательные параметры (в данном случае два), затем произвольное число необязательных (при вызове они будут объединены в кортеж), а затем произвольное число ключевых параметров (при вызове они будут объединены в словарь).

```
In [53]: def f(x,y,*l,**d):
             print(x,'  ',y,'  ',l,'  ',d)

In [54]: f(0,1,2,3,foo=4,bar=5)

0    1    (2, 3)    {'foo': 4, 'bar': 5}
```

Функции можно передать функцию в качестве аргумента. Например, эта функция реализует численное интегрирование по формуле Симпсона. Её первый параметр — функция, которую надо проинтегрировать; далее задаются пределы интегрирования и число интервалов, на которое нужно разбить область интегрирования.

```
In [55]: def simpson(f,a,b,n):
             h=(b-a)/(2*n)
             s=0.5*(f(a)+f(b))+2*f(a+h)
             x=a+2*h
             for i in range(n-1):
                 s+=f(x)+2*f(x+h)
                 x+=2*h
             return 2/3*h*s

In [56]: from math import sin,pi
         [simpson(sin,0,pi,n) for n in [1,10,100,1000]]

Out[56]: [2.0943951023931953, 2.0000067844418012, 2.000000000676474, 2.000000000000091]
```

В питоне функции являются гражданами первого сорта. Они могут присутствовать везде, где допустимы объекты других типов — среди элементов списков, значений в словарях и т.д.

```
In [57]: def f0(x):
             return x+2

In [58]: def f1(x):
             return 2*x

In [59]: l=[f0,f1]
         l

Out[59]: [<function __main__.f0>, <function __main__.f1>]

In [60]: x=2.0
         n=1
         l[n](x)
```

```
Out[60]: 4.0
```

Если Вы пишете функцию не для того, чтобы один раз её вызвать и навсегда забыть, то нужна документация, объясняющая, что эта функция делает. Для этого сразу после строчки `def` пишется строка. Она называется док-строкой, и сохраняется при трансляции исходного текста на питоне в байт-код (в отличие от комментариев, которые при этом отбрасываются). Обычно эта строка заключается в тройные кавычки и занимает несколько строчек. Док-строка доступна как атрибут `__doc__` функции, и используется функцией `help`. Вот пример культурно написанной функции, вычисляющей n-е число Фибоначчи.

Для проверки типов аргументов, переданных функции, удобно использовать оператор `assert`. Если условие в нём истинно, всё в порядке, и он ничего не делает; если же оно ложно, выдаётся сообщение об ошибке.

```
In [61]: def fib(n):
             "вычисляет n-е число Фибоначчи"
             assert type(n) is int and n>0
             if n<=2:
                 return 1
             x,y=1,1
             for i in range(n-2):
                 x,y=y,x+y
             return y

In [62]: fib.__doc__

Out[62]: 'вычисляет n-е число Фибоначчи'

In [63]: help(fib)

Help on function fib in module __main__:

fib(n)
    вычисляет n-е число Фибоначчи



In [64]: [fib(n) for n in range(1,10)]

Out[64]: [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34]

In [65]: fib(-1)


        ---------------------------------------------------------------------------

        AssertionError                            Traceback (most recent call last)

        <ipython-input-66-b876e14fb318> in <module>()
    ----> 1 fib(-1)
```

```
        <ipython-input-62-800ccd3a2d90> in fib(n)
          1 def fib(n):
          2     "вычисляет n-е число Фибоначчи"
    ----> 3     assert type(n) is int and n>0
          4     if n<=2:
          5         return 1


        AssertionError:
```

```
In [66]: fib(2.0)
```

```
        ---------------------------------------------------------------------------
        AssertionError                            Traceback (most recent call last)

        <ipython-input-67-363564e722ae> in <module>()
    ----> 1 fib(2.0)


        <ipython-input-62-800ccd3a2d90> in fib(n)
          1 def fib(n):
          2     "вычисляет n-е число Фибоначчи"
    ----> 3     assert type(n) is int and n>0
          4     if n<=2:
          5         return 1


        AssertionError:
```

1.8 Итераторы

На выражение, стоящее после `for x in`, питон автоматически напускает функцию `iter`. Она возвращает объект — итератор. Существуют и выражения-итераторы. Они выглядят как генераторы списков, но пишутся в круглых скобках, а не в квадратных. Сравним следующие 2 примера:

```
In [1]: s=0
        for n in [i**2 for i in range(1000)]:
            s+=n
        s

Out[1]: 332833500

In [2]: s=0
        for n in (i**2 for i in range(1000)):
            s+=n
        s

Out[2]: 332833500
```

В первом случае в памяти создаётся список из 1000 элементов. Во втором в памяти хранится только короткое выражение — итератор. Оно выдаёт очередные члены последовательности по одному, по мере надобности.

Посмотрим, как работает такое выражение.

```
In [3]: it=(i**2 for i in range(4) if i!=2)
        it

Out[3]: <generator object <genexpr> at 0x7fceb40e6e60>

In [4]: next(it)

Out[4]: 0

In [5]: next(it)

Out[5]: 1

In [6]: next(it)

Out[6]: 9

In [7]: next(it)


        ---------------------------------------------------------------------------

        StopIteration                             Traceback (most recent call last)

        <ipython-input-7-2cdb14c0d4d6> in <module>()
```

```
----> 1 next(it)


    StopIteration:
```

Итераторы могут использоваться не только в циклах. Есть много функций с аргументами - итераторами.

```
In [8]: max((10*x-x**2 for x in range(10)))

Out[8]: 25
```

Функция `min` аналогична. В таких случаях, когда выражение - итератор является единственных аргументом функции, заключать его в скобки не обязательно.

```
In [9]: sum(10*x-x**2 for x in range(10))

Out[9]: 165
```

Часто хочется применить какую-нибудь функцию к каждому элементу последовательности. Это делает функция `map`, она возвращает объект `map`, который тоже является итератором.

```
In [10]: def f(x):
             return x**2

In [11]: m=map(f,[0,1,2])
         m

Out[11]: <map at 0x7fceb40a0cc0>

In [12]: list(m)

Out[12]: [0, 1, 4]
```

Часто бывает нужна какая-нибудь очень простая функция. Не хочется придумывать для неё имя, которое будет использовано всего 1 раз, и засорять пространство имён. В таких случаях лучше использовать анонимную функцию:

```
In [13]: list(map(lambda x:2*x,[0,1,2]))

Out[13]: [0, 2, 4]
```

Анонимные функции записываются так:

```
In [14]: f=lambda x,y:x+2*y
         f

Out[14]: <function __main__.<lambda>>
```

Их, естественно, можно вызывать:

```
In [15]: f(1,2)

Out[15]: 5
```

К сожалению, только очень простые функции можно записать в виде анонимных — они должны состоять из одного единственного выражения. Для многострочных функций это невозможно.

Ещё одна полезная функция — `filter`, она позволяет отфильтровать последовательность, оставив в ней только те элементы, которые удовлетворяют некоторому условию.

```
In [16]: list(filter(lambda x:x>0,[0,1,-2,3,-4]))

Out[16]: [1, 3]
```

Выражения-итераторы позволяют задавать только довольно простые последовательности. Значительно более широкие возможности предоставляют функции-генераторы. Они выглядят как функции, в которых вместо `return` используется `yield`.

```
In [17]: def gen():
             yield 0
             yield -1
             yield 4
```

Вызвав такую функцию, мы получим некоторый объект, являющийся итератором.

```
In [18]: it=gen()
         it

Out[18]: <generator object gen at 0x7fceb407ddb0>
```

Его можно использовать любым обычным образом.

```
In [19]: for x in it:
             print(x)

0
-1
4
```

Вызвав функцию `gen` снова, мы получим новый итератор, который опять можно использовать.

```
In [20]: it=gen()
         list(it)

Out[20]: [0, -1, 4]
```

При первом вызове `next` операторы функции выполняются до первого `yield`. Возвращается указанное в нём значение; текущее состояние функции (точка выполнения, значения локальных переменных) запоминается. При следующем вызове `next` выполнение продолжается с того же места до тех пор, пока опять не встретится `yield`. Когда выполнение дойдёт до конца (или до `return`), выдаётся исключение `StopIteration`.

```
In [21]: it=gen()
         next(it)

Out[21]: 0

In [22]: next(it)

Out[22]: -1

In [23]: next(it)

Out[23]: 4

In [24]: next(it)


         ---------------------------------------------------------------------------

         StopIteration                             Traceback (most recent call last)

         <ipython-input-24-2cdb14c0d4d6> in <module>()
    ----> 1 next(it)


         StopIteration:
```

Много интересных функций для работы с итераторами имеется в модуле `itertools` стандартной библиотеки.

```
In [25]: from itertools import repeat,count,islice,cycle,chain,accumulate
```

Вызов `repeat(x)` возвращает итератор, повторяющий значение `x` до бесконечности; `repeat(x,n)` повторяет его `n` раз.

```
In [26]: list(repeat('abc',3))

Out[26]: ['abc', 'abc', 'abc']
```

Бесконечные итераторы могут использоваться для написания циклов, выход из которых производится по `break`; они также полезны как аргументы различных операций над итераторами. Одна из таких операций - `islice`: `islice(it,n)` — это итератор, воввращающий первые `n` элементов итератора `it`, а `islice(it,n,m)` возвращает элементы с `n`-ного (включительно) до `m`-го (не включая его).

```
In [27]: list(islice([0,1,4,9],2))

Out[27]: [0, 1]

In [28]: list(islice([0,1,4,9],1,3))
```

```
Out[28]: [1, 4]
```

Вызов `count()` возвращает итератор, выдающий бесконечную последовательность 0, 1, 2, ...; `count(n)` - начиная с `n`; `count(n,h)` - с шагом `h`.

```
In [29]: list(islice(count(),10))

Out[29]: [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]

In [30]: list(islice(count(4),10))

Out[30]: [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]

In [31]: list(islice(count(4,2),10))

Out[31]: [4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22]
```

Вызов `cycle(it)` возвращает итератор, выдающий элементы `it` по циклу до бесконечности (для этого, разумеется, итератор `it` должен быть конечным; в противном случае мы никогда не доберёмся до конца первого цикла).

```
In [32]: list(islice(cycle('ку'),10))

Out[32]: ['к', 'у', 'к', 'у', 'к', 'у', 'к', 'у', 'к', 'у']
```

Вызов `chain(i1,i2)` возвращает итератор, выдающий сначала все элементы `i1`, а затем все элементы `i2`. Аргументов может быть и > 2. Разумеется, если среди аргументов встретится бесконечный итератор, то до его конца мы никогда не доберёмся.

```
In [33]: for i in chain([0,1],[4,9]):
             print(i)

0
1
4
9
```

Есть и несколько встроенных функций для работы с итераторами, их не нужно импортировать из `itertools`. Так, `zip` работает следующим образом:

```
In [34]: list(zip([0,1],[4,9]))

Out[34]: [(0, 4), (1, 9)]
```

Он прекращает работу, когда закончится более короткая последовательность. Аргументов может быть и > 2.

```
In [35]: list(zip(count(),[1,2,4],'abcdefgh'))

Out[35]: [(0, 1, 'a'), (1, 2, 'b'), (2, 4, 'c')]
```

Отсюда видно, что `enumerate(x)`, который мы уже обсуждали, эквивалентен `zip(count(),x)`.

Из числовой последовательности x_0, x_1, x_2, ... можно построить последовательность кумулятивных сумм $s_0 = x_0$, $s_1 = s_0 + x_1$, $s_2 = s_1 + x_2$, ...

```
In [36]: list(islice(accumulate(count(1)),10))
```

```
Out[36]: [1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55]
```

Вместо сложения можно использовать любую функцию 2 переменных.

```
In [37]: list(islice(accumulate(count(1),lambda x,y:x*y),10))
```

```
Out[37]: [1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800]
```

Кстати, вместо этого `lambda` выражения мы могли бы использовать функцию `mul`, которую надо импортировать из модуля `operator`. Там есть и `add`, и другие инфиксные операции в виде функций, так что их можно использовать как фактические параметры в вызовах.

Функция `reduce` из модуля `functools` стандартной библиотеки фактически возвращает последний элемент последовательности s_i, то есть $(((x_0 + x_1) + x_2) + x_3)\ldots$ Вместо сложения может использоваться любая функция 2 переменных.

```
In [38]: from functools import reduce
         from operator import add
         reduce(add,[1,4,9,16])
```

```
Out[38]: 30
```

С помощью итераторов можно делать поразительные вещи. Вот, например, бесконечная последовательность простых чисел (методом решета Эратосфена).

```
In [39]: def primes():
             yield 2
             d={}
             for q in count(3,2):
                 p=d.pop(q,None)
                 if p is None: # q простое
                     d[q**2]=q
                     yield q
                 else:         # q составное
                     x=q+2*p
                     while x in d:
                         x+=2*p
                     d[x]=p
```

```
In [40]: list(islice(primes(),10))
```

```
Out[40]: [2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29]
```

1.9 Объектно-ориентированное программирование

Питон является развитым объектно-ориентированным языком. Всё, с чем он работает, является объектами — целые числа, строки, словари, функции и т.д. Каждый объект принадлежит определённому типу (или классу, что одно и то же). Класс тоже является объектом. Классы наследуют друг от друга. Класс `object` является корнем дерева классов — каждый класс наследует от него прямо или через какие-то промежуточные классы.

```
In [1]: object,type(object)

Out[1]: (object, type)
```

Функция `dir` возвращает список атрибутов класса.

```
In [2]: dir(object)

Out[2]: ['__class__',
         '__delattr__',
         '__dir__',
         '__doc__',
         '__eq__',
         '__format__',
         '__ge__',
         '__getattribute__',
         '__gt__',
         '__hash__',
         '__init__',
         '__init_subclass__',
         '__le__',
         '__lt__',
         '__ne__',
         '__new__',
         '__reduce__',
         '__reduce_ex__',
         '__repr__',
         '__setattr__',
         '__sizeof__',
         '__str__',
         '__subclasshook__']
```

Атрибуты, имена которых начинаются и кончаются двойным подчерком, используются интерпретатором для особых целей. Например, атрибут `__doc__` содержит док-строку.

```
In [3]: object.__doc__

Out[3]: 'The most base type'

In [4]: help(object)
```

```
Help on class object in module builtins:

class object
 |  The most base type
```

Ниже мы рассмотрим цели некоторых других специальных атрибутов.

Вот простейший класс. Поскольку не указано, от чего он наследует, он наследует от `object`.

```
In [5]: class A:
            pass

In [6]: A,type(A)

Out[6]: (__main__.A, type)
```

Создать объект какого-то класса можно, вызвав имя класса как функцию (возможно, с какими-нибудь аргументами). Мы уже это видели: имена классов `int`, `str`, `list` и т.д. создают объекты этих классов.

```
In [7]: o=A()
        o,type(o)

Out[7]: (<__main__.A at 0x7f5cb30bcbe0>, __main__.A)
```

Узнать, какому классу принадлежит объект, можно при помощи функции `type` или атрибута `__class__`.

```
In [8]: type(o),o.__class__

Out[8]: (__main__.A, __main__.A)
```

У только что созданного объекта `o` нет атрибутов. Их можно создавать (и удалять) налету.

```
In [9]: o.x=1
        o.y=2
        o.x,o.y

Out[9]: (1, 2)

In [10]: o.z

         ---------------------------------------------------------------------------

         AttributeError                            Traceback (most recent call last)

         <ipython-input-10-c8c0d478b237> in <module>()
        ----> 1 o.z


         AttributeError: 'A' object has no attribute 'z'
```

```
In [11]: del o.y
         o.y


         ---------------------------------------------------------------------------

         AttributeError                            Traceback (most recent call last)

         <ipython-input-11-68acd6859c06> in <module>()
           1 del o.y
     ----> 2 o.y


         AttributeError: 'A' object has no attribute 'y'
```

Такой объект похож на словарь, ключами которого являются имена атрибутов: можно узнать значение атрибута, изменить его, добавить новый или удалить старый. Это и неудивительно: для реализации атрибутов объекта используется именно словарь.

```
In [12]: o.__dict__

Out[12]: {'x': 1}
```

Класс вводит пространство имён. В описании класса мы определяем его атрибуты (атрибуты, являющиеся функциями, называются методами). Потом эти атрибуты можно использовать как `Class.attribute`. Принято, чтобы имена классов начинались с заглавной буквы.

Вот более полный пример класса. В нём есть док-строка, метод `f`, статический атрибут `x` (атрибут класса, а не конкретного объекта) и статический метод `getx` (опять же принадлежащий классу, а не конкретному объекту).

```
In [13]: class S:
             'Простой класс'

             x=1

             def f(self):
                 print(self)

             @staticmethod
             def getx():
                 return S.x
```

Заклинание тёмной магии, начинающееся с `@`, называется декоратором. Запись

```
@dec
def fun(x):
    ...
```

эквивалентна

```
def fun(x):
    ...
fun=dec(fun)
```

То есть `dec` — это функция, параметр которой — функция, и он возвращает эту функцию, преобразованную некоторым образом. Мы не будем обсуждать, как самим сочинять такие заклинания — за этим обращайтесь в Дурмстранг.

Функция `dir` возвращает список атрибутов класса. Чтобы не смотреть снова на атрибуты, унаследованные от `object`, мы их вычтем.

```
In [14]: set(dir(S))-set(dir(object))

Out[14]: {'__dict__', '__module__', '__weakref__', 'f', 'getx', 'x'}

In [15]: dict(S.__dict__)

Out[15]: {'__dict__': <attribute '__dict__' of 'S' objects>,
          '__doc__': 'Простой класс',
          '__module__': '__main__',
          '__weakref__': <attribute '__weakref__' of 'S' objects>,
          'f': <function __main__.S.f>,
          'getx': <staticmethod at 0x7f5cb28553c8>,
          'x': 1}

In [16]: S.x

Out[16]: 1

In [17]: S.x=2
         S.x

Out[17]: 2

In [18]: S.f,S.getx

Out[18]: (<function __main__.S.f>, <function __main__.S.getx>)

In [19]: S.getx()

Out[19]: 2
```

Теперь создадим объект этого класса.

```
In [20]: o=S()
         o,type(o)

Out[20]: (<__main__.S at 0x7f5cb2855c88>, __main__.S)
```

Метод класса можно вызвать и через объект.

```
In [21]: o.getx()
```

```
Out[21]: 2
```

Следующее присваивание создаёт атрибут объекта `o` с именем `x`. Когда мы запрашиваем `o.x`, атрибут `x` ищется сначала в объекте `o`, а если он там не найден — в его классе. В данном случае он найдётся в объекте `o`. На атрибут класса `S.x` это присваивание не влияет.

```
In [22]: o.x=5
         o.x,S.x,o.getx()
```

```
Out[22]: (5, 2, 2)
```

Как мы уже обсуждали, можно вызвать метод класса `S.f` с каким-нибудь аргументом, например, `o`.

```
In [23]: S.f(o)
```

```
<__main__.S object at 0x7f5cb2855c88>
```

Следующий вызов означает в точности то же самое. Интерпретатор питон фактически преобразует его в предыдущий.

```
In [24]: o.f()
```

```
<__main__.S object at 0x7f5cb2855c88>
```

То есть текущий объект передаётся методу в качестве первого аргумента. Этот первый аргумент любого метода принято называть `self`. В принципе, Вы можете назвать его как угодно, но это затруднит понимание Вашего класса читателями, воспитанными в этой традиции.

Отличие метода класса (`@staticmethod`) от метода объекта состоит в том, что такое автоматическое вставление первого аргумента не производится.

`o.f` — это связанный метод: `S.f` связанный с объектом `o`.

```
In [25]: o.f
```

```
Out[25]: <bound method S.f of <__main__.S object at 0x7f5cb2855c88>>
```

```
In [26]: g=o.f
         g()
```

```
<__main__.S object at 0x7f5cb2855c88>
```

Док-строка доступна как атрибут `__doc__` и используется функцией `help`.

```
In [27]: S.__doc__
```

```
Out[27]: 'Простой класс'
```

```
In [28]: help(S)
```

```
Help on class S in module __main__:

class S(builtins.object)
 |  Простой класс
 |
 |  Methods defined here:
 |
 |  f(self)
 |
 |  ----------------------------------------------------------------------
 |  Static methods defined here:
 |
 |  getx()
 |
 |  ----------------------------------------------------------------------
 |  Data descriptors defined here:
 |
 |  __dict__
 |      dictionary for instance variables (if defined)
 |
 |  __weakref__
 |      list of weak references to the object (if defined)
 |
 |  ----------------------------------------------------------------------
 |  Data and other attributes defined here:
 |
 |  x = 2
```

Классу можно добавить новый атрибут налету (равно как и удалить имеющийся).

```
In [29]: S.y=2
         S.y
```

```
Out[29]: 2
```

Можно добавить и атрибут, являющийся функцией, т.е. метод. Сначала опишем (вне тела класса!) какую-нибудь функцию, а потом добавим её к классу в качестве нового метода.

```
In [30]: def g(self):
             print(self.y)
         S.g=g
         o.g()
```

```
2
```

Менять класс налету таким образом — плохая идея. Когда в каком-то месте программы Вы видете, что используется какой-то объект некоторого класса, первое, что Вы сделаете

— это посмотрите определение этого класса. И если текущее его состояние отлично от его определения, это сильно затрудняет понимание программы.

Класс `S`, который мы рассмотрели в качестве примера — отнюдь не пример для подражания. В нормальном объектно-ориентированном подходе объект класса должен создаваться в допустимом (пригодном к использованию) состоянии, со всеми необходимыми атрибутами. В других языках за это твечает конструктор. В питоне аналогичную роль играет метод инициализации `__init__`. Вот пример такого класса.

```
In [31]: class C:

             def __init__(self,x):
                 self.x=x

             def getx(self):
                 return self.x

             def setx(self,x):
                 self.x=x
```

Теперь для создания объекта мы должны вызвать `C` с одним аргументом `x` (первый аргумент метода `__init__`, `self`, это свежесозданный объект, в котором ещё ничего нет и который надо инициализировать).

```
In [32]: o=C(1)
         o.getx()

Out[32]: 1

In [33]: o.setx(2)
         o.getx()

Out[33]: 2
```

Этот класс — тоже не пример для подражания. В некоторых объектно-ориентированных языках считается некошерным напрямую читать и писать атрибуты; считается, что вся работа должна производиться через вызов методов. В питоне этот предрассудок не разделяют. Так что писать методы типа `getx` и `setx` абсолютно излишне. Они не добавляют никакой полезной функциональности — всё можно сделать, просто используя атрибут `x`.

```
In [34]: o.x

Out[34]: 2
```

Любой объектно-ориентированный язык, заслуживающий такого названия, поддерживает наследование. Класс `C2` наследует от `C`. Его объекты являются вполне законными для класса `C` (имеют атрибут `x`), но в добавок к этому имеют ещё и атрибут `y`. Метод `__init__` теперь должен иметь 2 параметра `x` и `y` (не считая обязательного `self`). К методам `getx` и `setx`, унаследованным от `C`, добавляются методы `gety` и `sety`.

Чтобы инициализировать атрибут `x`, который был в родительском классе, мы могли бы, конечно, скопировать код из метода `__init__` класса `C`. В данном случае он столь прост, что

это не преступление. Но, вообще говоря, копировать куски кода из одного места в другое категорически не рекомендуется. Допустим, в скопированном куске найден и исправлен баг. А в копии он остался. Поэтому для инициализации нового объекта, рассматриваемого как объект родительского класса `C`, нам следует вызвать метод `__init__` класса `C`, а после этого довавить инициализацию атрибута `y`, специфичного для дочернего класса `C2`. Первую часть задачи можно выполнить, вызвав `C.__init__(self,x)` (мы ведь только что написали строчку `class`, в которой указали, что класс-предок называется `C`). Но есть более универсальный метод, не требующий второй раз писать имя родительского класса. Функция super() возвращает текущий объект `self`, *рассматриваемый как объект родительского класса `C`*. Поэтому мы можем написать `super().__init__(x)`.

Конечно, не только `__init__`, но и другие методы дочернего класса могут захотеть вызвать методы родительского класса. Для этого используется либо вызов через имя родительского класса, либо `super()`.

```
In [35]: class C2(C):

             def __init__(self,x,y):
                 super().__init__(x)
                 self.y=y

             def gety(self):
                 return self.y

             def sety(self,y):
                 self.y=y
```

```
In [36]: o=C2(1,2)
         o.getx(),o.gety()
```

```
Out[36]: (1, 2)
```

`o` является объектом класса `C2`, а также его родительского класса `C` (и, конечно, класса `object`), но не является объектом класса `S`.

```
In [37]: isinstance(o,C2),isinstance(o,C),isinstance(o,object),isinstance(o,S)
```

```
Out[37]: (True, True, True, False)
```

`C2` является подклассом (потомком) себя, класса `C` и `object`, но не является подклассом `S`.

```
In [38]: issubclass(C2,C2),issubclass(C2,C),issubclass(C2,object),issubclass(C2,S)
```

```
Out[38]: (True, True, True, False)
```

Эти функции используются редко. В питоне придерживаются принципа утиной типизации: *если объект ходит, как утка, плавает, как утка, и крякает, как утка, значит, он утка.* Пусть у нас есть класс `Утка` с методами `иди`, `плыви` и `крякни`. Конечно, можно создать подкласс `Кряква`, наследующий эти методы и что-то в них переопределяющий. Но можно написать класс `Кряква` с нуля, без всякой генетической связи с классом `Утка`, и реализовать эти методы. Тогда

в любую программу, ожидающую получить объект класса `Утка` (и общающуюся с ним при помощи методов `иди`, `плыви` и `крякни`), можно вместо этого подставить объект класса `Кряква`, и программа будет по-прежнему работать. А функции `isinstance` и `issubclass` нарушают принцип утиной типизации.

Класс может наследовать от нескольких классов. Мы не будем обсуждать множественное наследование, оно используется редко. Атрибут `__bases__` даёт кортеж родительских классов.

```
In [39]: C2.__bases__

Out[39]: (__main__.C,)

In [40]: C.__bases__

Out[40]: (object,)

In [41]: object.__bases__

Out[41]: ()

In [42]: set(dir(C))-set(dir(object))

Out[42]: {'__dict__', '__module__', '__weakref__', 'getx', 'setx'}

In [43]: set(dir(C2))-set(dir(object))

Out[43]: {'__dict__', '__module__', '__weakref__', 'getx', 'gety', 'setx', 'sety'}

In [44]: set(dir(C2))-set(dir(C))

Out[44]: {'gety', 'sety'}

In [45]: help(C2)

Help on class C2 in module __main__:

class C2(C)
 |  Method resolution order:
 |      C2
 |      C
 |      builtins.object
 |
 |  Methods defined here:
 |
 |  __init__(self, x, y)
 |      Initialize self.  See help(type(self)) for accurate signature.
 |
 |  gety(self)
 |
 |  sety(self, y)
 |
```

```
 |  ----------------------------------------------------------------------
 |  Methods inherited from C:
 |
 |  getx(self)
 |
 |  setx(self, x)
 |
 |  ----------------------------------------------------------------------
 |  Data descriptors inherited from C:
 |
 |  __dict__
 |      dictionary for instance variables (if defined)
 |
 |  __weakref__
 |      list of weak references to the object (if defined)
```

В питоне все методы являются, в терминах других языков, виртуальными. Пусть у нас есть класс `A`; метод `get` вызывает метод `str`.

```
In [46]: class A:

             def __init__(self,x):
                 self.x=x

             def str(self):
                 return str(self.x)

             def get(self):
                 print(self.str())
                 return self.x
```

Класс `B` наследует от него и переопределяет метод `str`.

```
In [47]: class B(A):

             def str(self):
                 return 'The value of x is '+super().str()
```

Создадим объект класса `A` и вызовем метод `get`. Он вызывает `self.str()`; `str` ищется (и находится) в классе `A`.

```
In [48]: oa=A(1)
         oa.get()
```

```
1


Out[48]: 1
```

Теперь создадим объект класса `B` и вызовем метод `get`. Он ищется в `B`, не находится, потом ищется и находится в `A`. Этот метод `A.get(ob)` вызывает `self.str()`, где `self` — это `ob`. Поэтому метод `str` ищется в классе `B`, находится и вызывается. То есть метод родительского класса вызывает переопределённый метод дочернего класса.

```
In [49]: ob=B(1)
         ob.get()
```

```
The value of x is 1
```

```
Out[49]: 1
```

Напишем класс 2-мерных векторов, определяющий некоторые специальные методы для того, чтобы к его объектам можно было применять встроенные операции и функции языка питон (в тех случаях, когда это имеет смысл).

```
In [50]: from math import sqrt
```

```
In [51]: class Vec2:
             '2-dimensional vectors'

             def __init__(self,x=0,y=0):
                 self.x=x
                 self.y=y

             def __repr__(self):
                 return 'Vec2({},{})'.format(self.x,self.y)

             def __str__(self):
                 return '({},{})'.format(self.x,self.y)

             def __bool__(self):
                 return self.x!=0 or self.y!=0

             def __eq__(self,other):
                 return self.x==other.x and self.y==other.y

             def __abs__(self):
                 return sqrt(self.x**2+self.y**2)

             def __neg__(self):
                 return Vec2(-self.x,-self.y)

             def __add__(self,other):
                 return Vec2(self.x+other.x,self.y+other.y)

             def __sub__(self,other):
                 return Vec2(self.x-other.x,self.y-other.y)
```

```
    def __iadd__(self,other):
        self.x+=other.x
        self.y+=other.y
        return self

    def __isub__(self,other):
        self.x-=other.x
        self.y-=other.y
        return self

    def __mul__(self,other):
        return Vec2(self.x*other,self.y*other)

    def __rmul__(self,other):
        return Vec2(self.x*other,self.y*other)

    def __imul__(self,other):
        self.x*=other
        self.y*=other
        return self

    def __truediv__(self,other):
        return Vec2(self.x/other,self.y/other)

    def __itruediv__(self,other):
        self.x/=other
        self.y/=other
        return self
```

Создадим вектор. Когда в командной строке питона написано выражение, его значение печатается при помощи метода `__repr__`. Он старается напечатать объект в таком виде, чтобы эту строку можно было вставить в исходный текст программы и воссоздать этот объект. (Для объектов некоторых классов это невозможно, тогда `__repr__` печатает некоторую информацию в угловых скобках $<\ldots>$).

```
In [52]: u=Vec2(1,2)
         u

Out[52]: Vec2(1,2)
```

Метод `__str__` печатает объект в виде, наиболее простом для восприятия человека (не обязательно машинно-читаемом). Функция `print` использует этот метод.

```
In [53]: print(u)

(1,2)
```

Это выражение автоматически преобразуется в следующий вызов.

```
In [54]: u*2

Out[54]: Vec2(2,4)

In [55]: u.__mul__(2)

Out[55]: Vec2(2,4)
```

А это выражение — в следующий.

```
In [56]: 3*u,u.__rmul__(3)

Out[56]: (Vec2(3,6), Vec2(3,6))
```

Такой оператор преобразуется в вызов `u.__imul__(2)`.

```
In [57]: u*=2
         u

Out[57]: Vec2(2,4)
```

Другие арифметические операторы работают аналогично.

```
In [58]: v=Vec2(-1,2)
         2*u+3*v

Out[58]: Vec2(1,14)
```

Унарный минус преобразуется в `__neg__`.

```
In [59]: -v,v.__neg__()

Out[59]: (Vec2(1,-2), Vec2(1,-2))
```

Вызов встроенной функции `abs` — в метод `__abs__`.

```
In [60]: abs(u),u.__abs__()

Out[60]: (4.47213595499958, 4.47213595499958)

In [61]: u+=v
         u

Out[61]: Vec2(1,6)
```

Питон позволяет переопределять то, что происходит при чтении и записи атрибута (а также при его удалении). Эту тёмную магию мы изучать не будем, за одним исключением. Можно определить пару методов, один из которых будет вызываться при чтении некоторого "атрибута", а другой при его записи. Такой "атрибут", которого на самом деле нет, называется свойством. Пользователь класса будес спокойно читать и писать этот "атрибут", не подозревая, что на самом деле для этого вызываются какие-то методы.

В питоне нет приватных атрибутов (в том числе приватных методов). По традиции, атрибуты (включая методы), имена которых начинаются с `_`, считаются приватными. Технически ничто не мешает пользователю класса обращаться к таким "приватным" атрибутам. Но автор класса может в любой момент изменить детали реализации, включая "приватные" атрибуты. Использующий их код пользователя при этом сломается. Сам дурак.

В этом классе есть свойство `x`. Его чтение и запись приводят к вызову пары методов, которые читают и пишут "приватный" атрибут `_x`, а также выполняют некоторый код. Свойство создаётся при помощи декораторов. В принципе свойство может быть и чисто синтетическим (без соответствующего "приватного" атрибута) — его "чтение" возвращает результат некоторого вычисления, исходящего из реальных атрибутов, а "запись" меняет значения таких реальных атрибутов.

```
In [62]: class D:

             def __init__(self,x):
                 self._x=x

             @property
             def x(self):
                 print('getting x')
                 return self._x

             @x.setter
             def x(self,x):
                 print('setting x')
                 self._x=x
```

```
In [63]: o=D('a')
         o.x
```

```
getting x
```

```
Out[63]: 'a'
```

```
In [64]: o.x='b'
```

```
setting x
```

```
In [65]: o.x
```

```
getting x
```

```
Out[65]: 'b'
```

Я использовал свойство, когда писал Монте-Карловское моделирование модели Изинга. У изинговской решётки было свойство — температура, которую можно было читать и писать. Но соответствующего атрибута не было. Был атрибут $x = \exp(-J/T)$, где J — энергия взаимодействия.

Свойства полезны также для обёртки GUI библиотек. Например, окно имеет свойство — заголовок. Чтение или изменение заголовка требует вызова соответствующих функций из низкоуровневой библиотеки (на `C` или `C++`). Но на питоне гораздо приятнее написать

```
w.title='Моё окно'
```

1.10 Исключения

Всякие недопустимые операции типа деления на 0 или открытия несуществующего файла приводят к возбуждению исключений. Интерпретатор питон печатает подробную и понятную информацию об исключении. Если это интерактивный интерпретатор, то сессия продолжается; исли это программа, то её выполнение прекращается. В питоне отладчик приходится использовать гораздо реже, чем в более низкоуровневых языках, потому что эти сообщения интерпретатора позволяют сразу понять, где и что неверно. Впрочем, иногда приходится использовать и отладчик. Допустим, из сообщения об ошибке Вы поняли, что некоторая функция вызвана со строковым аргументом, а Вы про него думали, что он число. Тогда приходится искать — какая сволочь испортила мою переменную?

```
In [1]: 1/0


        ---------------------------------------------------------------------------

        ZeroDivisionError                         Traceback (most recent call last)

        <ipython-input-1-05c9758a9c21> in <module>()
    ----> 1 1/0


        ZeroDivisionError: division by zero
```

Исключения можно отлавливать, и в случае, если они произошли, выполнять какой-нибудь корректирующий код.

```
In [2]: try:
            x=0
            x=1/x
        except ZeroDivisionError:
            x=5

In [3]: x

Out[3]: 5

In [4]: try:
            s='xyzzy'
            f=open(s)
        except IOError:
            print('cannot open '+s)

cannot open xyzzy
```

Исключения — это объекты. Класс `Exception` являестя корнем дерева классов исключений. Этот объект можно поймать и исследовать.

```
In [5]: try:
            x=1/0
        except Exception as err:
            print(type(err))
            print(err)
            print(repr(err))
            print(err.args)

<class 'ZeroDivisionError'>
division by zero
ZeroDivisionError('division by zero',)
('division by zero',)
```

Если в Вашем коде возникла недопустимая ситуация, нужно возбудить исключение оператором `raise`.

```
In [6]: raise NameError('Hi there')


        ---------------------------------------------------------------------------

        NameError                                 Traceback (most recent call last)

        <ipython-input-6-d36a3cf2a944> in <module>()
    ----> 1 raise NameError('Hi there')


        NameError: Hi there
```

Вот более полезный пример.

```
In [7]: def f(x):
            if x==0:
                raise ValueError('x should not be 0')
            return x

In [8]: try:
            x=f(1)
            x=f(0)
        except ValueError as err:
            print(repr(err))

ValueError('x should not be 0',)


In [9]: x

Out[9]: 1
```

Естественно, можно определять свои классы исключений, наследуя от `Exception` или от какого-нибудь его потомка, подходящего по смыслу. Именно так и нужно делать, чтобы Ваши исключения не путались с системными.

```
In [10]: class MyError(Exception):

             def __init__(self,value):
                 self.value=value

             def __str__(self):
                 return str(self.value)
```

```
In [11]: def f(x):
             if x<0:
                 raise MyError(x)
             else:
                 return x
```

```
In [12]: try:
             x=f(2)
             x=f(-2)
         except MyError as err:
             print(err)
```

```
-2
```

```
In [13]: x
```

```
Out[13]: 2
```

1.11 Модули

Модуль — это просто файл типа `.py`, содержащий последовательность операторов питона. Его можно использовать двумя способами: либо запустить как программу, либо импортировать в другой модуль, чтобы сделать доступными определённые там функции и переменные. При импортировании все операторы модуля выполняются от начала до конца, включая определения функций и классов и присваивания переменным. Впрочем, при повторном импортировании модуль не выполняется. Если Вы его изменили и хотите импортировать изменённую версию, нужно приложить специальные усилия.

```
In [1]: import math
        math,type(math)

Out[1]: (<module 'math' from '/usr/lib64/python3.6/lib-dynload/math.cpython-36m-x86_64-linux-gnu
         module)
```

Модуль имеет своё пространство имён. Оператор `import math` вводит *объект типа модуль* `math` в текущее пространство имён. Имена, определённые в модуле, при этом в текущем пространстве имён не появляются — их нужно использовать как `math.что_то`. Функция `dir` возвращает список имён в модуле (как и в классе или объекте).

```
In [2]: dir(math)

Out[2]: ['__doc__',
         '__file__',
         '__loader__',
         '__name__',
         '__package__',
         '__spec__',
         'acos',
         'acosh',
         'asin',
         'asinh',
         'atan',
         'atan2',
         'atanh',
         'ceil',
         'copysign',
         'cos',
         'cosh',
         'degrees',
         'e',
         'erf',
         'erfc',
         'exp',
         'expm1',
         'fabs',
         'factorial',
         'floor',
```

```
         'fmod',
         'frexp',
         'fsum',
         'gamma',
         'gcd',
         'hypot',
         'inf',
         'isclose',
         'isfinite',
         'isinf',
         'isnan',
         'ldexp',
         'lgamma',
         'log',
         'log10',
         'log1p',
         'log2',
         'modf',
         'nan',
         'pi',
         'pow',
         'radians',
         'sin',
         'sinh',
         'sqrt',
         'tan',
         'tanh',
         'tau',
         'trunc']
```

```
In [3]: math.__doc__
```

```
Out[3]: 'This module is always available.  It provides access to the\nmathematical functions def
```

```
In [4]: math.pi,math.exp
```

```
Out[4]: (3.141592653589793, <function math.exp>)
```

```
In [5]: math.exp(math.pi)
```

```
Out[5]: 23.140692632779267
```

Встроенные функции, классы и т.д. языка питон живут в модуле `builtins`.

```
In [6]: import builtins
        dir(builtins)
```

```
Out[6]: ['ArithmeticError',
         'AssertionError',
```

```
'AttributeError',
'BaseException',
'BlockingIOError',
'BrokenPipeError',
'BufferError',
'BytesWarning',
'ChildProcessError',
'ConnectionAbortedError',
'ConnectionError',
'ConnectionRefusedError',
'ConnectionResetError',
'DeprecationWarning',
'EOFError',
'Ellipsis',
'EnvironmentError',
'Exception',
'False',
'FileExistsError',
'FileNotFoundError',
'FloatingPointError',
'FutureWarning',
'GeneratorExit',
'IOError',
'ImportError',
'ImportWarning',
'IndentationError',
'IndexError',
'InterruptedError',
'IsADirectoryError',
'KeyError',
'KeyboardInterrupt',
'LookupError',
'MemoryError',
'ModuleNotFoundError',
'NameError',
'None',
'NotADirectoryError',
'NotImplemented',
'NotImplementedError',
'OSError',
'OverflowError',
'PendingDeprecationWarning',
'PermissionError',
'ProcessLookupError',
'RecursionError',
'ReferenceError',
'ResourceWarning',
'RuntimeError',
```

```
'RuntimeWarning',
'StopAsyncIteration',
'StopIteration',
'SyntaxError',
'SyntaxWarning',
'SystemError',
'SystemExit',
'TabError',
'TimeoutError',
'True',
'TypeError',
'UnboundLocalError',
'UnicodeDecodeError',
'UnicodeEncodeError',
'UnicodeError',
'UnicodeTranslateError',
'UnicodeWarning',
'UserWarning',
'ValueError',
'Warning',
'ZeroDivisionError',
'__IPYTHON__',
'__build_class__',
'__debug__',
'__doc__',
'__import__',
'__loader__',
'__name__',
'__package__',
'__spec__',
'abs',
'all',
'any',
'ascii',
'bin',
'bool',
'bytearray',
'bytes',
'callable',
'chr',
'classmethod',
'compile',
'complex',
'copyright',
'credits',
'delattr',
'dict',
'dir',
```

```
'divmod',
'dreload',
'enumerate',
'eval',
'exec',
'filter',
'float',
'format',
'frozenset',
'get_ipython',
'getattr',
'globals',
'hasattr',
'hash',
'help',
'hex',
'id',
'input',
'int',
'isinstance',
'issubclass',
'iter',
'len',
'license',
'list',
'locals',
'map',
'max',
'memoryview',
'min',
'next',
'object',
'oct',
'open',
'ord',
'pow',
'print',
'property',
'range',
'repr',
'reversed',
'round',
'set',
'setattr',
'slice',
'sorted',
'staticmethod',
'str',
```

```
         'sum',
         'super',
         'tuple',
         'type',
         'vars',
         'zip']
```

Если Вам лень полностью писать имя модуля перед каждым использованием функции из него, можно использовать `as` и задать ему краткое имя.

```
In [7]: import random as r
        r

Out[7]: <module 'random' from '/usr/lib64/python3.6/random.py'>

In [8]: dir(r)

Out[8]: ['BPF',
         'LOG4',
         'NV_MAGICCONST',
         'RECIP_BPF',
         'Random',
         'SG_MAGICCONST',
         'SystemRandom',
         'TWOPI',
         '_BuiltinMethodType',
         '_MethodType',
         '_Sequence',
         '_Set',
         '__all__',
         '__builtins__',
         '__cached__',
         '__doc__',
         '__file__',
         '__loader__',
         '__name__',
         '__package__',
         '__spec__',
         '_acos',
         '_bisect',
         '_ceil',
         '_cos',
         '_e',
         '_exp',
         '_inst',
         '_itertools',
         '_log',
         '_pi',
         '_random',
```

```
         '_sha512',
         '_sin',
         '_sqrt',
         '_test',
         '_test_generator',
         '_urandom',
         '_warn',
         'betavariate',
         'choice',
         'choices',
         'expovariate',
         'gammavariate',
         'gauss',
         'getrandbits',
         'getstate',
         'lognormvariate',
         'normalvariate',
         'paretovariate',
         'randint',
         'random',
         'randrange',
         'sample',
         'seed',
         'setstate',
         'shuffle',
         'triangular',
         'uniform',
         'vonmisesvariate',
         'weibullvariate']
```

```
In [9]: [r.random() for i in range(10)]
```

```
Out[9]: [0.09637772172557402,
         0.89551664168298,
         0.9426823013506337,
         0.4094328234976712,
         0.7232184697800689,
         0.8586383884595843,
         0.2778551445357017,
         0.4321903116808209,
         0.30183017632492515,
         0.3057854562362986]
```

Такая форма оператора `import` вводит перечисленные имена (функции, переменные, классы) из модуля в текущее пространство имён. Мне она нравится — использовать импортированные таким образом объекты удобно, не надо писать перед каждым имя модуля.

```
In [10]: from sys import path
```

Переменная `path` — это список имён директорий, в которых оператор `import` ищет модули. В начале в него входит `''` — директория, в которой находится текущая программа (или текущая директория в случае интерактивной сессии); директории, перечисленные в переменной окружения `PYTHONPATH` (если такая переменная есть); и стандартные директории для данной версии питона. Но это обычный список, его можно менять стандартными языковыми средствами. Например, ревнители безопасности считают, что опасно включать текущую директорию в `path` — если пользователю в его директорию кто-нибудь подсунет зловредную версию `math.py`, а программа пользователя выполнит `import math`, то этот модуль выполнится, и может, скажем, удалить все файлы этого пользователя. Такие ревнители могут сделать `path=path[1:]`.

```
In [11]: path

Out[11]: ['',
          '/usr/lib64/python36.zip',
          '/usr/lib64/python3.6',
          '/usr/lib64/python3.6/lib-dynload',
          '/usr/lib64/python3.6/site-packages',
          '/usr/lib64/python3.6/site-packages/IPython/extensions',
          '/home/grozin/.ipython']

In [12]: path.append('/home/grozin/python')
         path

Out[12]: ['',
          '/usr/lib64/python36.zip',
          '/usr/lib64/python3.6',
          '/usr/lib64/python3.6/lib-dynload',
          '/usr/lib64/python3.6/site-packages',
          '/usr/lib64/python3.6/site-packages/IPython/extensions',
          '/home/grozin/.ipython',
          '/home/grozin/python']
```

Если Вам лень писать каждый раз длинное имя функции из модуля, можно дать ему короткий псевдоним.

```
In [13]: from math import factorial as f

In [14]: f(100)

Out[14]: 933262154439441526816992388562667004907159682643816214685929638952175999932299156089414
```

Для самых ленивых есть оператор `from ... import *`, который импортирует в текущее пространство имён все имена, определённые в модуле. Обычно это плохая идея — Вы засоряете текущее пространство имён, и даже не знаете, чем. Такую форму импорта разумно использовать, когда Вы импортируете свой модуль, про который Вы всё знаете. Ну или в интерактивной сессии, когда Вы хотите попробовать всякие функции из какого-нибудь модуля. Но не в программе, которая пишется всерьёз и надолго.

Например, в текущей директории есть файл `fac.py`. Мы работаем в `ipython`, который предоставляет всякие удобства для интерактивной работы. Например, можно выполнить `shell` команду, если в начале строки поставить `!` (только не пробуйте этого делать в обычном интерпретаторе питон). Так что легко распечатать этот файл. В нём определена одна функция `fac`.

```
In [15]: !cat fac.py

#!/usr/bin/env python3
'В этом модуле определена функция fac'

def fac(n):
    'calculate factorial of n'
    assert type(n) is int and n >= 0
    r = 1
    for i in range(2, n + 1):
        r *= i
    return r

if __name__ == '__main__':
    from sys import argv, exit
    if len(argv) != 2:
        print('usage: ./fac.py n')
        exit(1)
    print(fac(int(argv[1])))


In [16]: from fac import *
         fac(10)

Out[16]: 3628800
```

Файл `fac.py` показывает типичное устройство любого файла на питоне. Первая строка позволяет запустить такой файл, если у него установлен бит, позволяющий исполнять его текущему пользователю. Почему не просто `#!/usr/bin/python3` ? Потому что на некоторых машинах питон может быть в `/usr/local/bin` или ещё где-то; стандартная `unix`-утилита `env` (предположительно) всегда живёт в `/usr/bin`. Она позволяет установить какие-нибудь переменные окружения, а затем, если есть аргумент — имя программы, запускает эту программу в этом модифицированном окружении; если такого аргумента нет, просто печатает это окружение. Так что, вызвав просто `env`, Вы получите список всех текущих переменных окружения с их значениями. В данном случае вызывается `/usr/bin/env python3`, то есть никакие изменения окружения не произвадятся, и `env` вызывает `python3`, расположенный где угодно в `$PATH`. Почему `python3`? `python` может быть симлинком либо на `python2`, либо на `python3`; в свою очередь, `python3` может быть симлинком, скажем, на `python3.6`. Если наша программа предназначена для питона 3, то в первой строке лучше указывать `python3`, иначе на некоторых машинах могут возникнуть неприятные сюрпризы.

Дальше следует док-строка модуля. Потом определения всех функций, классов и т.д. Заключительная часть файла выполняется, если он запущен как программа, а не импортируется куда-то. В этой части обычно пишут какие-нибудь простые тесты определённых в файле функций. В данном случае используется `sys.argv` — список строк-аргументов командной строки. `argv[0]` — это имя программы, нас интересует переданный ей параметр, `argv[1]`.

```
In [17]: import fac
         fac.__doc__
```

```
Out[17]: 'В этом модуле определена функция fac'

In [18]: help(fac)

Help on module fac:

NAME
    fac - В этом модуле определена функция fac

FUNCTIONS
    fac(n)
        calculate factorial of n

FILE
    /home/grozin/python/book/fac.py
```

Функция `dir` без аргумента возвращает список имён в текущем пространстве имён. Многие имена в этом списке определены `ipython`-ом; в сессии с обычным интерпретатором питон их бы не было.

```
In [19]: dir()

Out[19]: ['In',
          'Out',
          '_',
          '_1',
          '_11',
          '_12',
          '_14',
          '_16',
          '_17',
          '_2',
          '_3',
          '_4',
          '_5',
          '_6',
          '_7',
          '_8',
          '_9',
          '__',
          '___',
          '__builtin__',
          '__builtins__',
          '__doc__',
          '__loader__',
          '__name__',
```

```
          '__package__',
          '__spec__',
          '_dh',
          '_exit_code',
          '_i',
          '_i1',
          '_i10',
          '_i11',
          '_i12',
          '_i13',
          '_i14',
          '_i15',
          '_i16',
          '_i17',
          '_i18',
          '_i19',
          '_i2',
          '_i3',
          '_i4',
          '_i5',
          '_i6',
          '_i7',
          '_i8',
          '_i9',
          '_ih',
          '_ii',
          '_iii',
          '_oh',
          '_sh',
          'builtins',
          'exit',
          'f',
          'fac',
          'get_ipython',
          'math',
          'path',
          'quit',
          'r']
```

В локальном пространстве имён этой функции два имени.

```
In [20]: def f(x):
             y=0
             print(dir())

In [21]: f(0)

['x', 'y']
```

В каждом модуле есть строковая переменная `__name__`, она содержит имя модуля. Главная программа (или интерактивная сессия) тоже является модулем, его имя `__main__`. Этим и объясняется вид оператора `if`, который стоит в конце файла `fac.py`.

```
In [22]: __name__

Out[22]: '__main__'

In [23]: r.__name__

Out[23]: 'random'
```

Модули не обязательно должны размещаться непосредственно в какой-нибудь директории из `sys.path`; они могут находиться в поддиректории. Например, в текущей директории (включённой в `path`) есть поддиректория `d1`, в ней поддиректория `d2`.

```
In [24]: !ls d1

__pycache__  d2  m1.py


In [25]: !ls d1/d2

__pycache__  m2.py
```

Мы можем импортировать модули `m1` и `m2` так.

```
In [26]: import d1.m1
         d1.m1.f1()

Out[26]: 1

In [27]: import d1.d2.m2
         d1.d2.m2.f2()

Out[27]: 2
```

Такое поддерево директорий с модулями можно превратить в пакет, который с точки зрения пользователя выглядит как единый модуль. Для этого нужно добавить файл `__init__.py`. Вот другое поддерево с теми же файлами `m1.py` и `m2.py`.

```
In [28]: !ls p1

__init__.py  __pycache__  m1.py  p2


In [29]: !ls p1/p2

__pycache__  m2.py
```

Только добавлен файл `__init__.py`.

```
In [30]: !cat p1/__init__.py
```

```
'Пакет, экспортирующий f1 из модуля m1 и f2 из модуля m2'
from p1.m1 import f1
from p1.p2.m2 import f2
```

Теперь мы можем импортировать этот пакет.

```
In [31]: import p1
```

Питон находит в `sys.path` директорию `p1`, содержащую `__init__.py`, и интерпретирует её как пакет. При импорте выполняется этот файл `__init__.py`, инициализирующий пакет. Все функции, переменные и т.д., определённые в этом файле (непосредственно или через импорт), становятся символами этого пакета. `__init__.py` может включать не все функции из модулей этого дерева директорий (и даже не все модули); символы, не определённые в `__init__.py`, недоступны после импорта пакета (конечно, пользователь всегда может импортировать любой модуль напрямую и получить доступ ко всем его символам).

```
In [32]: p1.__doc__
```

```
Out[32]: 'Пакет, экспортирующий f1 из модуля m1 и f2 из модуля m2'
```

```
In [33]: p1.f1(),p1.f2()
```

```
Out[33]: (1, 2)
```

1.12 Ввод-вывод, файлы, директории

Откроем текстовый файл на чтение (когда второй аргумент не указан, файл открывается именно на чтение).

```
In [1]: f=open('text.txt')
        f,type(f)

Out[1]: (<_io.TextIOWrapper name='text.txt' mode='r' encoding='UTF-8'>,
         _io.TextIOWrapper)
```

Получился объект `f` одного из файловых типов. Что с ним можно делать? Можно его использовать в `for` цикле, каждый раз будет возвращаться очередная строка файла (включая `'\n'` в конце; в конце последней строки текстового файла `'\n'` может и не быть).

```
In [2]: for s in f:
            print(s)

abcd

efgh

ijkl
```

Теперь файл нужно закрыть.

```
In [3]: f.close()
```

Такой стиль работы с файлом (`f=open(...)`; работа с `f`; `f.close()`) на самом деле не рекомендуется. Гораздо правильнее использовать оператор `with`. Он гарантирует, что файл будет закрыт как в том случае, когда исполнение тела `with` нормально дошло до конца, так и тогда, когда при этом произошло исключение, и мы покинули тело `with` аварийно.

В операторе with может использоваться любой объект класса, реализующего методы `__enter__` и `__exit__`. Обычно это объект-файл, возвращаемый функцией `open`.

```
In [4]: with open('text.txt') as f:
            for s in f:
                print(s[:-1])

abcd
efgh
ijkl
```

Метод `f.read(n)` читает `n` символов (когда файл близится к концу и прочитать именно `n` символов уже невозможно, читает меньше; в самый последний раз он читает 0 символов и возвращает `''`). Прочитаем файл по 1 символу.

```
In [5]: with open('text.txt') as f:
            while True:
                c=f.read(1)
                if c=='':
                    break
                else:
                    print(c)
```

```
a
b
c
d


e
f
g
h


i
j
k
l
```

Вызов `f.read()` без аргумента читает файл целиком (что не очень разумно, если в нём много гигабайт).

```
In [6]: with open('text.txt') as f:
            s=f.read()
        s
```

```
Out[6]: 'abcd\nefgh\nijkl\n'
```

`f.readline()` читает очередную строку (хотя проще использовать `for s in f:`).

```
In [7]: with open('text.txt') as f:
            while True:
                s=f.readline()
                if s=='':
                    break
                else:
                    print(s)
```

```
abcd
```

```
efgh

ijkl
```

Метод `f.readlines()` возвращает список строк (опять же его лучше не применять для очень больших файлов).

```
In [8]: with open('text.txt') as f:
            l=f.readlines()
        l

Out[8]: ['abcd\n', 'efgh\n', 'ijkl\n']
```

Теперь посмотрим, чем же оператор `with` лучше, чем пара `open` — `close`.

```
In [9]: def a(name):
            global f
            f=open(name)
            s=f.readline()
            n=1/0
            f.close()
            return s

In [10]: a('text.txt')


        ---------------------------------------------------------------------------
        ZeroDivisionError                         Traceback (most recent call last)

        <ipython-input-10-d62372657d26> in <module>()
    ----> 1 a('text.txt')


        <ipython-input-9-7f445757684d> in a(name)
          3     f=open(name)
          4     s=f.readline()
    ----> 5     n=1/0
          6     f.close()
          7     return s


        ZeroDivisionError: division by zero


In [11]: f.closed

Out[11]: False
```

```
In [12]: f.close()
```

Произошло исключение, мы покинули функцию до строчки `close`, и файл не закрылся.

```
In [13]: def a(name):
             global f
             with open(name) as f:
                 s=f.readline()
                 n=1/0
             return s

In [14]: a('text.txt')


         ---------------------------------------------------------------------------

         ZeroDivisionError                         Traceback (most recent call last)

         <ipython-input-14-d62372657d26> in <module>()
     ----> 1 a('text.txt')


         <ipython-input-13-cabd1416e96c> in a(name)
           3     with open(name) as f:
           4         s=f.readline()
     ----> 5         n=1/0
           6     return s


         ZeroDivisionError: division by zero


In [15]: f.closed

Out[15]: True
```

Теперь всё в порядке.
Чтобы открыть файл на запись, нужно включить второй аргумент `'w'`.

```
In [16]: f=open('newtext.txt','w')

In [17]: f.write('aaa\n')

Out[17]: 4

In [18]: f.write('bbb\n')

Out[18]: 4

In [19]: f.write('ccc\n')
```

```
Out[19]: 4

In [20]: f.close()
```

Метод `write` возвращает число записанных символов.

Опять же, лучше использовать with.

```
In [21]: with open('newtext.txt','w') as f:
             f.write('aaa\n')
             f.write('bbb\n')
             f.write('ccc\n')

In [22]: !cat newtext.txt

aaa
bbb
ccc
```

Эта функция копирует старый текстовый файл в новый. Если строки нужно как-нибудь обработать, в последней строчке вместо `line` будет стоять что-нибудь вроде `f(line)`.

```
In [23]: def copy(old_name,new_name):
             with open(old_name) as old,open(new_name,'w') as new:
                 for line in old:
                     new.write(line)

In [24]: copy('text.txt','newtext.txt')

In [25]: !cat newtext.txt

abcd
efgh
ijkl
```

В интерактивной сессии (или в программе, запущенной с командной строки) можно попросить пользователя что-нибудь ввести. Аргумент функции `input` — это приглашение для ввода (prompt). Можно использовать просто `input()`, тогда приглашения не будет. Но это неудобно, т.к. в этом случае трудно заметить, что программа чего-то ждёт.

```
In [26]: s=input('Введите целое число ')

Введите целое число 123


In [27]: s

Out[27]: '123'
```

```
In [28]: n=int(s)
         n

Out[28]: 123
```

Питон — интерпретатор, поэтому он может во время выполнения программы интерпретировать строки как куски исходного текста на языке питон. Так, функция `eval` интерпретирует строку как выражение и вычисляет его (в текущем контексте — подставляя текущие значения переменных).

```
In [29]: s=input('Введите выражение ')

Введите выражение n+1


In [30]: s

Out[30]: 'n+1'

In [31]: eval(s)

Out[31]: 124
```

А функция `exec` интерпретирует строку как оператор и выполняет его. Оператор может менять значения переменных в текущем пространстве имён.

```
In [32]: s=input('Введите оператор ')

Введите оператор x=0


In [33]: s

Out[33]: 'x=0'

In [34]: exec(s)
         x

Out[34]: 0
```

Строка `s` может быть результатом длинного и сложного вычисления. Но лучше таких фокусов не делать, так как программа фактически становится самомодифицирующейся. Такие программы очень сложно отлаживать.

Для работы с путями к файлам и директориям в стандартной библиотеке существует модуль `pathlib`. Объект класса `Path` представляет собой путь к файлу или директории.

```
In [35]: from pathlib import Path
```

`Path()` возвращает текущую директорию.

```
In [36]: p=Path()
         p
```

```
Out[36]: PosixPath('.')
```

Очень полезный метод `resolve` приводит путь к каноническому виду.

```
In [37]: p.resolve()
```

```
Out[37]: PosixPath('/home/grozin/python/book')
```

Путь может быть записан в совершенно идиотском виде; `resolve` его исправит.

```
In [38]: p=Path('.././/book')
         p=p.resolve()
         p
```

```
Out[38]: PosixPath('/home/grozin/python/book')
```

Статический метод `cwd` возвращает текущую директорию (current working directory).

```
In [39]: Path.cwd()
```

```
Out[39]: PosixPath('/home/grozin/python/book')
```

Если `p` — путь к директории, то можно посмотреть все файлы в ней.

```
In [40]: for f in p.iterdir():
             print(f)
```

```
/home/grozin/python/book/b102_strings.ipynb
/home/grozin/python/book/tex
/home/grozin/python/book/.ipynb_checkpoints
/home/grozin/python/book/b103_lists.ipynb
/home/grozin/python/book/b109_exceptions.ipynb
/home/grozin/python/book/fac.py
/home/grozin/python/book/d1
/home/grozin/python/book/newtext.txt
/home/grozin/python/book/b108_oop.ipynb
/home/grozin/python/book/b106_dictionaries.ipynb
/home/grozin/python/book/b101_numbers.ipynb
/home/grozin/python/book/text.txt
/home/grozin/python/book/b104_tuples.ipynb
/home/grozin/python/book/__pycache__
/home/grozin/python/book/p1
/home/grozin/python/book/b107_functions.ipynb
/home/grozin/python/book/b110_modules.ipynb
/home/grozin/python/book/b105_sets.ipynb
/home/grozin/python/book/b111_input_output.ipynb
```

Если `p` — путь к директории, то `p/'fname'` — путь к файлу `fname` в ней (он, конечно, тоже может быть директорией).

```
In [41]: p2=p/'b101_numbers.ipynb'
         p2

Out[41]: PosixPath('/home/grozin/python/book/b101_numbers.ipynb')
```

Существует ли такой файл?

```
In [42]: p2.exists()

Out[42]: True
```

Является ли он симлинком, директорией, файлом?

```
In [43]: p2.is_symlink(),p2.is_dir(),p2.is_file()

Out[43]: (False, False, True)
```

Части пути `p2`.

```
In [44]: p2.parts

Out[44]: ('/', 'home', 'grozin', 'python', 'book', 'b101_numbers.ipynb')
```

Родитель — директория, в которой находится этот файл.

```
In [45]: p2.parent,p2.parent.parent

Out[45]: (PosixPath('/home/grozin/python/book'), PosixPath('/home/grozin/python'))
```

Имя файла, его основа и суффикс.

```
In [46]: p2.name,p2.stem,p2.suffix

Out[46]: ('b101_numbers.ipynb', 'b101_numbers', '.ipynb')
```

Метод `stat` возвращает всякую ценную информацию о файле.

```
In [47]: s=p2.stat()
         s

Out[47]: os.stat_result(st_mode=33188, st_ino=2097706, st_dev=2052, st_nlink=1, st_uid=1000, st_
```

Например, его размер в байтах.

```
In [48]: s.st_size

Out[48]: 17223
```

Я написал полезную утилиту для поиска одинаковых файлов. Ей передаётся произвольное число аргументов — директорий и файлов. Она рекурсивно обходит директории, находит размер всех файлов (симлинки игнорируются) и строит словарь, сопоставляющий каждому размеру список файлов, имеющих такой размер. Это простой этап, не требующий чтения (возможно больших) файлов. После этого файлы из тех списков, длина которых > 1, сравниваются внешней программой `diff` (что, конечно, требует их чтения).

В питоне можно работать с переменными окружения как с обычным словарём.

```
In [49]: from os import environ

In [50]: environ['PATH']

Out[50]: '/usr/lib/python-exec/python3.6:/home/grozin/bin:/home/grozin/reduce-3783/bin:/usr/loca

In [51]: environ['ABCD']


        ---------------------------------------------------------------------------

        KeyError                                  Traceback (most recent call last)

        <ipython-input-51-71e016be80d8> in <module>()
    ----> 1 environ['ABCD']


        /usr/lib64/python3.6/os.py in __getitem__(self, key)
        667         except KeyError:
        668             # raise KeyError with the original key value
    --> 669             raise KeyError(key) from None
        670         return self.decodevalue(value)
        671


        KeyError: 'ABCD'


In [52]: environ['ABCD']='abcd'

In [53]: environ['ABCD']

Out[53]: 'abcd'
```

Мы не просто добавили пару ключ-значение в словарь, а действительно добавили новую переменную к текущему окружению. Если теперь вызвать из питона какую-нибудь внешнюю программу, то она эту переменную увидит. Эта переменная исчезнет, когда закончится выполнение текущей программы на питоне (или интерактивная сессия).

Глава 2

Пакеты для научных вычислений

2.1 numpy

Пакет `numpy` предоставляет n-мерные однородные массивы (все элементы одного типа); в них нельзя вставить или удалить элемент в произвольном месте. В `numpy` реализовано много операций над массивами в целом. Если задачу можно решить, произведя некоторую последовательность операций над массивами, то это будет столь же эффективно, как в `C` или `matlab` — львиная доля времени тратится в библиотечных функциях, написанных на `C`.

2.1.1 Одномерные массивы

```
In [1]: from numpy import (array,zeros,ones,arange,linspace,logspace,
                           float64,int64,sin,cos,pi,exp,log,sqrt,abs,
                           nan,inf,any,all,sort,hstack,vstack,hsplit,
                           delete,insert,append,eye,fromfunction,
                           trace,diag,average,std,outer,meshgrid)
```

Можно преобразовать список в массив.

```
In [2]: a=array([0,2,1])
        a,type(a)

Out[2]: (array([0, 2, 1]), numpy.ndarray)
```

`print` печатает массивы в удобной форме.

```
In [3]: print(a)

[0 2 1]
```

Класс `ndarray` имеет много методов.

```
In [4]: set(dir(a))-set(dir(object))

Out[4]: {'T',
         '__abs__',
         '__add__',
         '__and__',
         '__array__',
         '__array_finalize__',
         '__array_interface__',
         '__array_prepare__',
         '__array_priority__',
         '__array_struct__',
         '__array_wrap__',
         '__bool__',
         '__complex__',
         '__contains__',
         '__copy__',
         '__deepcopy__',
```

```
'__delitem__',
'__divmod__',
'__float__',
'__floordiv__',
'__getitem__',
'__iadd__',
'__iand__',
'__ifloordiv__',
'__ilshift__',
'__imatmul__',
'__imod__',
'__imul__',
'__index__',
'__int__',
'__invert__',
'__ior__',
'__ipow__',
'__irshift__',
'__isub__',
'__iter__',
'__itruediv__',
'__ixor__',
'__len__',
'__lshift__',
'__matmul__',
'__mod__',
'__mul__',
'__neg__',
'__or__',
'__pos__',
'__pow__',
'__radd__',
'__rand__',
'__rdivmod__',
'__rfloordiv__',
'__rlshift__',
'__rmatmul__',
'__rmod__',
'__rmul__',
'__ror__',
'__rpow__',
'__rrshift__',
'__rshift__',
'__rsub__',
'__rtruediv__',
'__rxor__',
'__setitem__',
'__setstate__',
```

```
'__sub__',
'__truediv__',
'__xor__',
'all',
'any',
'argmax',
'argmin',
'argpartition',
'argsort',
'astype',
'base',
'byteswap',
'choose',
'clip',
'compress',
'conj',
'conjugate',
'copy',
'ctypes',
'cumprod',
'cumsum',
'data',
'diagonal',
'dot',
'dtype',
'dump',
'dumps',
'fill',
'flags',
'flat',
'flatten',
'getfield',
'imag',
'item',
'itemset',
'itemsize',
'max',
'mean',
'min',
'nbytes',
'ndim',
'newbyteorder',
'nonzero',
'partition',
'prod',
'ptp',
'put',
'ravel',
```

```
 'real',
 'repeat',
 'reshape',
 'resize',
 'round',
 'searchsorted',
 'setfield',
 'setflags',
 'shape',
 'size',
 'sort',
 'squeeze',
 'std',
 'strides',
 'sum',
 'swapaxes',
 'take',
 'tobytes',
 'tofile',
 'tolist',
 'tostring',
 'trace',
 'transpose',
 'var',
 'view'}
```

Наш массив одномерный.

```
In [5]: a.ndim
```

```
Out[5]: 1
```

В n-мерном случае возвращается кортеж размеров по каждой координате.

```
In [6]: a.shape
```

```
Out[6]: (3,)
```

`size` — это полное число элементов в массиве; `len` — размер по первой координате (в 1-мерном случае это то же самое).

```
In [7]: len(a),a.size
```

```
Out[7]: (3, 3)
```

`numpy` предоставляет несколько типов для целых (`int16`, `int32`, `int64`) и чисел с плавающей точкой (`float32`, `float64`).

```
In [8]: a.dtype,a.dtype.name,a.itemsize
```

```
Out[8]: (dtype('int64'), 'int64', 8)
```

Индексировать массив можно обычным образом.

```
In [9]: a[1]
```

```
Out[9]: 2
```

Массивы — изменяемые объекты.

```
In [10]: a[1]=3
         print(a)
```

```
[0 3 1]
```

Массивы, разумеется, можно использовать в `for` циклах. Но при этом теряется главное преимущество `numpy` — быстродействие. Всегда, когда это возможно, лучше использовать операции над массивами как едиными целыми.

```
In [11]: for i in a:
             print(i)
```

```
0
3
1
```

Массив чисел с плавающей точкой.

```
In [12]: b=array([0.,2,1])
         b.dtype
```

```
Out[12]: dtype('float64')
```

Точно такой же массив.

```
In [13]: c=array([0,2,1],dtype=float64)
         print(c)
```

```
[ 0.  2.  1.]
```

```
In [ ]: array([1.2,1.5,1.8],dtype=int64)
```

Массив, значения которого вычисляются функцией. Функции передаётся массив. Так что в ней можно использовать только такие операции, которые применимы к массивам.

```
In [14]: def f(i):
             print(i)
             return i**2
         a=fromfunction(f,(5,),dtype=int64)
         print(a)
```

```
[0 1 2 3 4]
[ 0  1  4  9 16]
```

```
In [15]: a=fromfunction(f,(5,),dtype=float64)
         print(a)
```

```
[ 0.  1.  2.  3.  4.]
[  0.   1.   4.   9.  16.]
```

Массивы, заполненные нулями или единицами. Часто лучше сначала создать такой массив, а потом присваивать значения его элементам.

```
In [16]: a=zeros(3)
         print(a)
```

```
[ 0.  0.  0.]
```

```
In [17]: b=ones(3,dtype=int64)
         print(b)
```

```
[1 1 1]
```

Функция `arange` подобна `range`. Аргументы могут быть с плавающей точкой. Следует избегать ситуаций, когда $(b-a)/s$ — целое число, потому что в этом случае включение последнего элемента зависит от ошибок округления. Лучше, чтобы конец диапазона был где-то посредине шага.

```
In [18]: a=arange(0,9,2)
         print(a)
```

```
[0 2 4 6 8]
```

```
In [19]: b=arange(0.,9,2)
         print(b)
```

```
[ 0.  2.  4.  6.  8.]
```

Последовательности чисел с постоянным шагом можно также создавать функцией `linspace`. Начало и конец диапазона включаются; последний аргумент — число точек.

```
In [20]: a=linspace(0,8,5)
         print(a)
```

```
[ 0.  2.  4.  6.  8.]
```

Последовательность чисел с постоянным шагом по логарифмической шкале от 10^0 до 10^1.

```
In [21]: b=logspace(0,1,5)
         print(b)
```

```
[  1.           1.77827941   3.16227766   5.62341325  10.        ]
```

Массив случайных чисел.

```
In [22]: from numpy.random import random,normal
         print(random(5))
```

```
[ 0.63038745  0.24031792  0.75969506  0.98191274  0.9023238 ]
```

Случайные числа с нормальным (гауссовым) распределением (среднее 0, среднеквадратичное отклонение 1).

```
In [24]: print(normal(size=5))
```

```
[-0.06409544  0.26656068 -1.83718422 -1.01312915  0.0445343 ]
```

2.1.2 Операции над одномерными массивами

Арифметические операции проводятся поэлементно.

```
In [25]: print(a+b)
```

```
[  1.           3.77827941   7.16227766  11.62341325  18.        ]
```

```
In [26]: print(a-b)
```

```
[-1.          0.22172059  0.83772234  0.37658675 -2.        ]
```

```
In [27]: print(a*b)
```

```
[  0.           3.55655882  12.64911064  33.74047951  80.        ]
```

Скалярное произведение

```
In [28]: a@b
```

```
Out[28]: 129.9461489721723
```

```
In [29]: print(a/b)
```

```
[ 0.          1.12468265  1.26491106  1.06696765  0.8       ]
```

```
In [30]: print(a**2)
```

```
[  0.   4.  16.  36.  64.]
```

Когда операнды разных типов, они пиводятся к большему типу.

```
In [31]: i=ones(5,dtype=int64)
         print(a+i)
```

```
[ 1.  3.  5.  7.  9.]
```

`numpy` содержит элементарные функции, которые тоже применяются к массивам поэлементно. Они называются универсальными функциями (`ufunc`).

```
In [32]: sin,type(sin)
```

```
Out[32]: (<ufunc 'sin'>, numpy.ufunc)
```

```
In [33]: print(sin(a))
```

```
[ 0.          0.90929743 -0.7568025  -0.2794155   0.98935825]
```

Один из операндов может быть скаляром, а не массивом.

```
In [34]: print(a+1)
```

```
[ 1.  3.  5.  7.  9.]
```

```
In [35]: print(2*a)
```

```
[  0.   4.   8.  12.  16.]
```

Сравнения дают булевы массивы.

```
In [36]: print(a>b)
```

```
[False  True  True  True False]
```

```
In [37]: print(a==b)
```

```
[False False False False False]
```

```
In [38]: c=a>5
         print(c)
```

```
[False False False  True  True]
```

Кванторы “существует” и “для всех”.

```
In [39]: any(c),all(c)
```

```
Out[39]: (True, False)
```

Модификация на месте.

```
In [40]: a+=1
         print(a)
```

```
[ 1.  3.  5.  7.  9.]
```

```
In [41]: b*=2
         print(b)
```

```
[  2.           3.55655882   6.32455532  11.2468265   20.        ]
```

```
In [42]: b/=a
         print(b)
```

```
[ 2.          1.18551961  1.26491106  1.6066895   2.22222222]
```

Так делать можно.

```
In [43]: a+=i
```

А так нельзя.

```
In [44]: i+=a
```

```
        ---------------------------------------------------------------------------
        TypeError                                 Traceback (most recent call last)

        <ipython-input-44-300abee39dd1> in <module>()
    ----> 1 i+=a


        TypeError: Cannot cast ufunc add output from dtype('float64') to dtype('int64') with cas
```

При выполнении операций над массивами деление на 0 не возбуждает исключения, а даёт значения `np.nan` или `np.inf`.

```
In [45]: print(array([0.0,0.0,1.0,-1.0])/array([1.0,0.0,0.0,0.0]))

[  0.  nan  inf -inf]


/usr/lib64/python3.6/site-packages/ipykernel/__main__.py:1: RuntimeWarning: divide by zero encou
  if __name__ == '__main__':
/usr/lib64/python3.6/site-packages/ipykernel/__main__.py:1: RuntimeWarning: invalid value encoun
  if __name__ == '__main__':


In [46]: nan+1,inf+1,inf*0,1./inf,inf/inf

Out[46]: (nan, inf, nan, 0.0, nan)

In [47]: nan==nan,inf==inf

Out[47]: (False, True)
```

Сумма и произведение всех элементов массива; максимальный и минимальный элемент; среднее и среднеквадратичное отклонение.

```
In [48]: b.sum(),b.prod(),b.max(),b.min(),b.mean(),b.std()

Out[48]: (8.2793423935260435,
          10.708241812210389,
          2.2222222222222223,
          1.1855196066926152,
          1.6558684787052087,
          0.40390033426607452)

In [49]: x=normal(size=1000)
         x.mean(),x.std()

Out[49]: (-0.048736395274562645, 0.98622825985036244)
```

Функция `sort` возвращает отсортированную копию, метод `sort` сортирует на месте.

```
In [50]: print(sort(b))
         print(b)

[ 1.18551961  1.26491106  1.6066895   2.          2.22222222]
[ 2.          1.18551961  1.26491106  1.6066895   2.22222222]


In [51]: b.sort()
         print(b)
```

```
[ 1.18551961  1.26491106  1.6066895   2.          2.22222222]
```

Объединение массивов.

```
In [52]: a=hstack((a,b))
         print(a)
```

```
[  2.          4.          6.          8.         10.          1.18551961
   1.26491106  1.6066895   2.          2.22222222]
```

Расщепление массива в позициях 3 и 6.

```
In [53]: hsplit(a,[3,6])
```

```
Out[53]: [array([ 2.,  4.,  6.]),
          array([  8.        ,  10.        ,   1.18551961]),
          array([ 1.26491106,  1.6066895 ,  2.        ,  2.22222222])]
```

Функции `delete`, `insert` и `append` не меняют массив на месте, а возвращают новый массив, в котором удалены, вставлены в середину или добавлены в конец какие-то элементы.

```
In [54]: a=delete(a,[5,7])
         print(a)
```

```
[  2.          4.          6.          8.         10.          1.26491106
   2.          2.22222222]
```

```
In [55]: a=insert(a,2,[0,0])
         print(a)
```

```
[  2.          4.          0.          0.          6.          8.         10.
   1.26491106  2.          2.22222222]
```

```
In [56]: a=append(a,[1,2,3])
         print(a)
```

```
[  2.          4.          0.          0.          6.          8.         10.
   1.26491106  2.          2.22222222  1.          2.          3.        ]
```

Есть несколько способов индексации массива. Вот обычный индекс.

```
In [57]: a=linspace(0,1,11)
         print(a)
```

```
[ 0.   0.1  0.2  0.3  0.4  0.5  0.6  0.7  0.8  0.9  1. ]
```

```
In [58]: b=a[2]
         print(b)
```

```
0.2
```

Диапазон индексов. Создаётся новый заголовок массива, указывающий на те же данные. Изменения, сделанные через такой массив, видны и в исходном массиве.

```
In [59]: b=a[2:6]
         print(b)
```

```
[ 0.2  0.3  0.4  0.5]
```

```
In [60]: b[0]=-0.2
         print(b)
```

```
[-0.2  0.3  0.4  0.5]
```

```
In [61]: print(a)
```

```
[ 0.   0.1 -0.2  0.3  0.4  0.5  0.6  0.7  0.8  0.9  1. ]
```

Диапазон с шагом 2.

```
In [62]: b=a[1:10:2]
         print(b)
```

```
[ 0.1  0.3  0.5  0.7  0.9]
```

```
In [63]: b[0]=-0.1
         print(a)
```

```
[ 0.  -0.1 -0.2  0.3  0.4  0.5  0.6  0.7  0.8  0.9  1. ]
```

Массив в обратном порядке.

```
In [64]: b=a[len(a):0:-1]
         print(b)
```

```
[ 1.   0.9  0.8  0.7  0.6  0.5  0.4  0.3 -0.2 -0.1]
```

Подмассиву можно присвоить значение — массив правильного размера или скаляр.

```
In [65]: a[1:10:3]=0
         print(a)
```

```
[ 0.   0.  -0.2  0.3  0.   0.5  0.6  0.   0.8  0.9  1. ]
```

Тут опять создаётся только новый заголовок, указывающий на те же данные.

```
In [66]: b=a[:]
         b[1]=0.1
         print(a)

[ 0.   0.1 -0.2  0.3  0.   0.5  0.6  0.   0.8  0.9  1. ]
```

Чтобы скопировать и данные массива, нужно использовать метод `copy`.

```
In [67]: b=a.copy()
         b[2]=0
         print(b)
         print(a)

[ 0.   0.1  0.   0.3  0.   0.5  0.6  0.   0.8  0.9  1. ]
[ 0.   0.1 -0.2  0.3  0.   0.5  0.6  0.   0.8  0.9  1. ]
```

Можно задать список индексов.

```
In [68]: print(a[[2,3,5]])

[-0.2  0.3  0.5]


In [69]: print(a[array([2,3,5])])

[-0.2  0.3  0.5]
```

Можно задать булев массив той же величины.

```
In [70]: b=a>0
         print(b)

[False  True False  True False  True  True False  True  True  True]


In [71]: print(a[b])

[ 0.1  0.3  0.5  0.6  0.8  0.9  1. ]
```

2.1.3 2-мерные массивы

```
In [72]: a=array([[0.0,1.0],[-1.0,0.0]])
         print(a)

[[ 0.  1.]
 [-1.  0.]]


In [73]: a.ndim

Out[73]: 2

In [74]: a.shape

Out[74]: (2, 2)

In [75]: len(a),a.size

Out[75]: (2, 4)

In [76]: a[1,0]

Out[76]: -1.0
```

Атрибуту `shape` можно присвоить новое значение — кортеж размеров по всем координатам. Получится новый заголовок массива; его данные не изменятся.

```
In [77]: b=linspace(0,3,4)
         print(b)

[ 0.  1.  2.  3.]


In [78]: b.shape

Out[78]: (4,)

In [79]: b.shape=2,2
         print(b)

[[ 0.  1.]
 [ 2.  3.]]
```

Поэлементное и матричное умножение.

```
In [80]: print(a*b)

[[ 0.  1.]
 [-2.  0.]]
```

```
In [81]: print(a@b)

[[ 2.  3.]
 [ 0. -1.]]


In [82]: print(b@a)

[[-1.  0.]
 [-3.  2.]]
```

Умножение матрицы на вектор.

```
In [83]: v=array([1,-1],dtype=float64)
         print(b@v)

[-1. -1.]


In [84]: print(v@b)

[-2. -2.]
```

Внешнее произведение $a_{ij} = u_i v_j$

```
In [85]: u=linspace(1,2,2)
         v=linspace(2,4,3)
         print(u)
         print(v)

[ 1.  2.]
[ 2.  3.  4.]


In [86]: a=outer(u,v)
         print(a)

[[ 2.  3.  4.]
 [ 4.  6.  8.]]
```

Двумерные массивы, зависящие только от одного индекса: $x_{ij} = u_j$, $y_{ij} = v_i$

```
In [87]: x,y=meshgrid(u,v)
         print(x)
         print(y)
```

```
[[ 1.  2.]
 [ 1.  2.]
 [ 1.  2.]]
[[ 2.  2.]
 [ 3.  3.]
 [ 4.  4.]]
```

Единичная матрица.

```
In [88]: I=eye(4)
         print(I)
```

```
[[ 1.  0.  0.  0.]
 [ 0.  1.  0.  0.]
 [ 0.  0.  1.  0.]
 [ 0.  0.  0.  1.]]
```

Метод `reshape` делает то же самое, что присваивание атрибуту `shape`.

```
In [89]: print(I.reshape(16))
```

```
[ 1.  0.  0.  0.  0.  1.  0.  0.  0.  0.  1.  0.  0.  0.  0.  1.]
```

```
In [90]: print(I.reshape(2,8))
```

```
[[ 1.  0.  0.  0.  0.  1.  0.  0.]
 [ 0.  0.  1.  0.  0.  0.  0.  1.]]
```

Строка.

```
In [91]: print(I[1])
```

```
[ 0.  1.  0.  0.]
```

Цикл по строкам.

```
In [92]: for row in I:
             print(row)
```

```
[ 1.  0.  0.  0.]
[ 0.  1.  0.  0.]
[ 0.  0.  1.  0.]
[ 0.  0.  0.  1.]
```

Столбец.

```
In [93]: print(I[:,2])
```

```
[ 0.  0.  1.  0.]
```

Подматрица.

```
In [94]: print(I[0:2,1:3])
```

```
[[ 0.  0.]
 [ 1.  0.]]
```

Можно построить двумерный массив из функции.

```
In [95]: def f(i,j):
             print(i)
             print(j)
             return 10*i+j
         print(fromfunction(f,(4,4),dtype=int64))
```

```
[[0 0 0 0]
 [1 1 1 1]
 [2 2 2 2]
 [3 3 3 3]]
[[0 1 2 3]
 [0 1 2 3]
 [0 1 2 3]
 [0 1 2 3]]
[[ 0  1  2  3]
 [10 11 12 13]
 [20 21 22 23]
 [30 31 32 33]]
```

Транспонированная матрица.

```
In [96]: print(b.T)
```

```
[[ 0.  2.]
 [ 1.  3.]]
```

Соединение матриц по горизонтали и по вертикали.

```
In [97]: a=array([[0,1],[2,3]])
         b=array([[4,5,6],[7,8,9]])
         c=array([[4,5],[6,7],[8,9]])
         print(a)
         print(b)
         print(c)
```

```
[[0 1]
 [2 3]]
[[4 5 6]
 [7 8 9]]
[[4 5]
 [6 7]
 [8 9]]
```

```
In [98]: print(hstack((a,b)))
```

```
[[0 1 4 5 6]
 [2 3 7 8 9]]
```

```
In [99]: print(vstack((a,c)))
```

```
[[0 1]
 [2 3]
 [4 5]
 [6 7]
 [8 9]]
```

Сумма всех элементов; суммы столбцов; суммы строк.

```
In [100]: print(b.sum())
          print(b.sum(0))
          print(b.sum(1))
```

```
39
[11 13 15]
[15 24]
```

Аналогично работают `prod`, `max`, `min` и т.д.

```
In [101]: print(b.max(0))
          print(b.min(1))
```

```
[7 8 9]
[4 7]
```

След — сумма диагональных элементов.

```
In [102]: trace(a)
```

```
Out[102]: 3
```

2.1.4 Линейная алгебра

```
In [103]: from numpy.linalg import det,inv,solve,eig
          det(a)

Out[103]: -2.0
```

Обратная матрица.

```
In [104]: a1=inv(a)
          print(a1)

[[-1.5  0.5]
 [ 1.   0. ]]


In [105]: print(a@a1)
          print(a1@a)

[[ 1.  0.]
 [ 0.  1.]]
[[ 1.  0.]
 [ 0.  1.]]
```

Решение линейной системы $au = v$.

```
In [106]: v=array([0,1],dtype=float64)
          print(a1@v)

[ 0.5  0. ]


In [107]: u=solve(a,v)
          print(u)

[ 0.5  0. ]
```

Проверим.

```
In [108]: print(a@u-v)

[ 0.  0.]
```

Собственные значения и собственные векторы: $au_i = \lambda_i u_i$. `l` — одномерный массив собственных значений λ_i, столбцы матрицы u — собственные векторы u_i.

```
In [109]: l,u=eig(a)
          print(l)
```

```
[-0.56155281  3.56155281]
```

```
In [110]: print(u)
```

```
[[-0.87192821 -0.27032301]
 [ 0.48963374 -0.96276969]]
```

Проверим.

```
In [111]: for i in range(2):
              print(a@u[:,i]-l[i]*u[:,i])
```

```
[  0.00000000e+00   1.66533454e-16]
[  1.11022302e-16   0.00000000e+00]
```

Функция `diag` от одномерного массива строит диагональную матрицу; от квадратной матрицы — возвращает одномерный массив её диагональных элементов.

```
In [112]: L=diag(l)
          print(L)
          print(diag(L))
```

```
[[-0.56155281  0.        ]
 [ 0.          3.56155281]]
[-0.56155281  3.56155281]
```

Все уравнения $au_i = \lambda_i u_i$ можно собрать в одно матричное уравнение $au = u\Lambda$, где Λ — диагональная матрица с собственными значениями λ_i по диагонали.

```
In [113]: print(a@u-u@L)
```

```
[[  0.00000000e+00   1.11022302e-16]
 [  1.66533454e-16   0.00000000e+00]]
```

Поэтому $u^{-1}au = \Lambda$.

```
In [114]: print(inv(u)@a@u)
```

```
[[ -5.61552813e-01   0.00000000e+00]
 [ -2.22044605e-16   3.56155281e+00]]
```

Найдём теперь левые собственные векторы $v_i a = \lambda_i v_i$ (собственные значения λ_i те же самые).

```
In [115]: l,v=eig(a.T)
          print(l)
          print(v)
```

```
[-0.56155281  3.56155281]
[[-0.96276969 -0.48963374]
 [ 0.27032301 -0.87192821]]
```

Собственные векторы нормированы на 1.

```
In [116]: print(u.T@u)
          print(v.T@v)
```

```
[[ 1.         -0.23570226]
 [-0.23570226  1.        ]]
[[ 1.          0.23570226]
 [ 0.23570226  1.        ]]
```

Левые и правые собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны, потому что $v_i a u_j = \lambda_i v_i u_j = \lambda_j v_i u_j$.

```
In [117]: print(v.T@u)
```

```
[[  9.71825316e-01   0.00000000e+00]
 [ -5.55111512e-17   9.71825316e-01]]
```

2.1.5 Преобразование Фурье

```
In [118]: a=linspace(0,1,11)
          print(a)
```

```
[ 0.   0.1  0.2  0.3  0.4  0.5  0.6  0.7  0.8  0.9  1. ]
```

```
In [119]: from numpy.fft import fft,ifft
          b=fft(a)
          print(b)
```

```
[ 5.50+0.j         -0.55+1.87312798j -0.55+0.85581671j -0.55+0.47657771j
 -0.55+0.25117658j -0.55+0.07907806j -0.55-0.07907806j -0.55-0.25117658j
 -0.55-0.47657771j -0.55-0.85581671j -0.55-1.87312798j]
```

Обратное преобразование Фурье.

```
In [120]: print(ifft(b))
```

```
[  1.61486985e-15+0.j   1.00000000e-01+0.j   2.00000000e-01+0.j
   3.00000000e-01+0.j   4.00000000e-01+0.j   5.00000000e-01+0.j
   6.00000000e-01+0.j   7.00000000e-01+0.j   8.00000000e-01+0.j
   9.00000000e-01+0.j   1.00000000e+00+0.j]
```

2.1.6 Интегрирование

```
In [121]: from scipy.integrate import quad,odeint
          from scipy.special import erf

In [122]: def f(x):
              return exp(-x**2)
```

Адаптивное численное интегрирование (может быть до бесконечности). `err` — оценка ошибки.

```
In [123]: res,err=quad(f,0,inf)
          print(sqrt(pi)/2,res,err)

0.886226925453 0.8862269254527579 7.101318390472462e-09


In [124]: res,err=quad(f,0,1)
          print(sqrt(pi)/2*erf(1),res,err)

0.746824132812 0.7468241328124271 8.291413475940725e-15
```

2.1.7 Дифференциальные уравнения

Уравнение осциллятора с затуханием $\ddot{x}+2a\dot{x}+x=0$. Перепишем его в виде системы уравнений первого порядка для x, $v=\dot{x}$:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v\\-2av-x\end{pmatrix}$$

Решим эту систему численно при $a=0.2$ с начальным условием $\begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

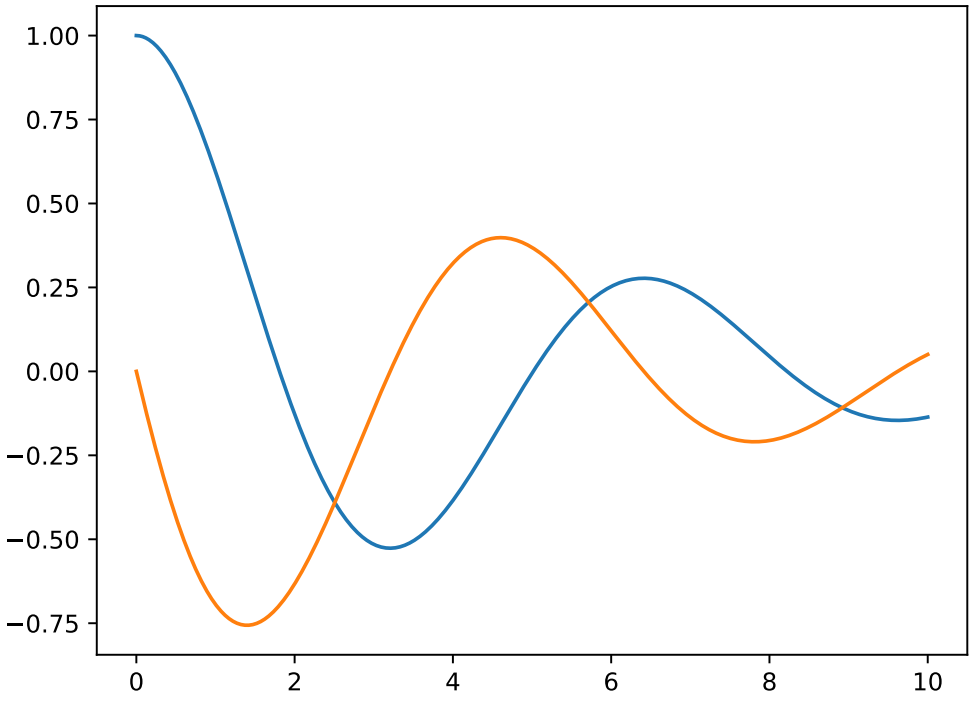
```
In [125]: a=0.2
          def f(x,t):
              global a
              return [x[1],-x[0]-2*a*x[1]]

In [126]: t=linspace(0,10,1000)
          x=odeint(f,[1,0],t)
```

Графики координаты и скорости.

```
In [127]: from matplotlib.pyplot import plot
          %matplotlib inline
          plot(t,x)

Out[127]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f2fade9a6d8>,
           <matplotlib.lines.Line2D at 0x7f2fade9a8d0>]
```



Точное решение для координаты.

```
In [128]: b=sqrt(1-a**2)
          x0=exp(-a*t)*(cos(b*t)+a/b*sin(b*t))
```

Максимальное отличие численного решения от точного.

```
In [129]: abs(x[:,0]-x0).max()
```

```
Out[129]: 7.4104573116740013e-08
```

2.2 matplotlib

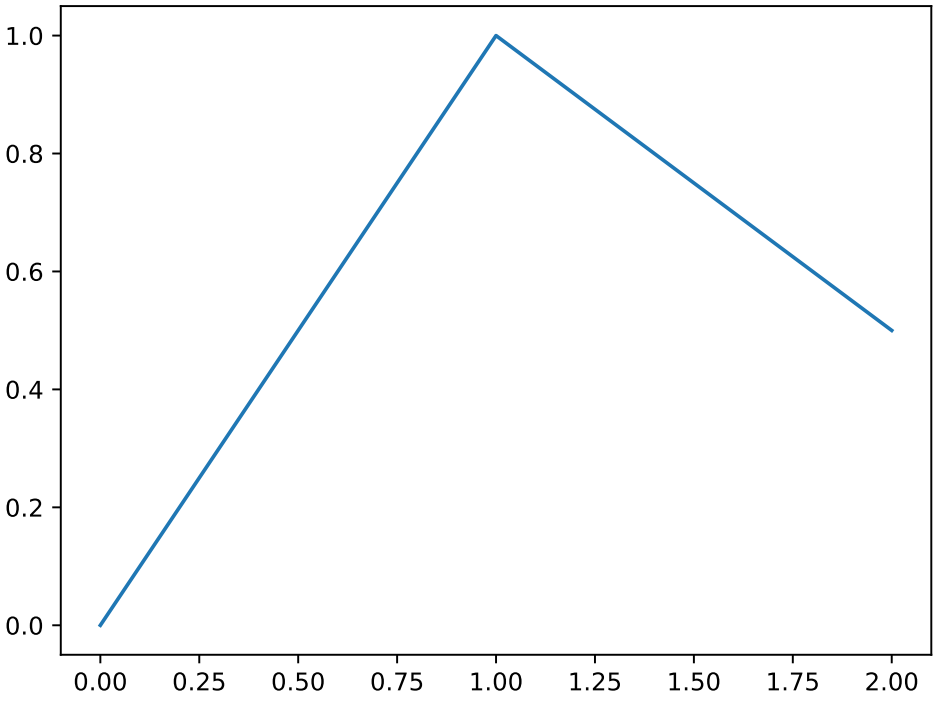
Есть несколько пакетов для построения графиков. Один из наиболее популярных — `matplotlib`. Если в `jupyter notebook` выполнить специальную `ipython` команду `%matplotlib inline`, то графики будут строиться в том же окне браузера. Есть другие варианты, в которых графики показываются в отдельных окнах. Это удобно для трёхмерных графиков — тогда их можно вертеть мышкой (в случае inline графиков это невозможно). Графики можно также сохранять в файлы, как в векторных форматах (`eps`, `pdf`, `svg`), так и в растровых (`png`, `jpg`; конечно, растровые форматы годятся только для размещения графиков на web-страницах). `matplotlib` позволяет строить двумерные графики практически всех нужных типов, с достаточно гибкой регулировкой их параметров; он также поддерживает основные типы трёхмерных графиков, но для серьёзной трёхмерной визуализации данных лучше пользоваться более мощными специализированными системами.

```
In [1]: from matplotlib.pyplot import (axes,axis,title,legend,figure,
                                       xlabel,ylabel,xticks,yticks,
                                       xscale,yscale,text,grid,
                                       plot,scatter,errorbar,hist,polar,
                                       contour,contourf,colorbar,clabel,
                                       imshow)
        from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
        from numpy import (linspace,logspace,zeros,ones,outer,meshgrid,
                           pi,sin,cos,sqrt,exp)
        from numpy.random import normal
        %matplotlib inline
```

Список y координат; x координаты образуют последовательность 0, 1, 2, ...

```
In [2]: plot([0,1,0.5])
```

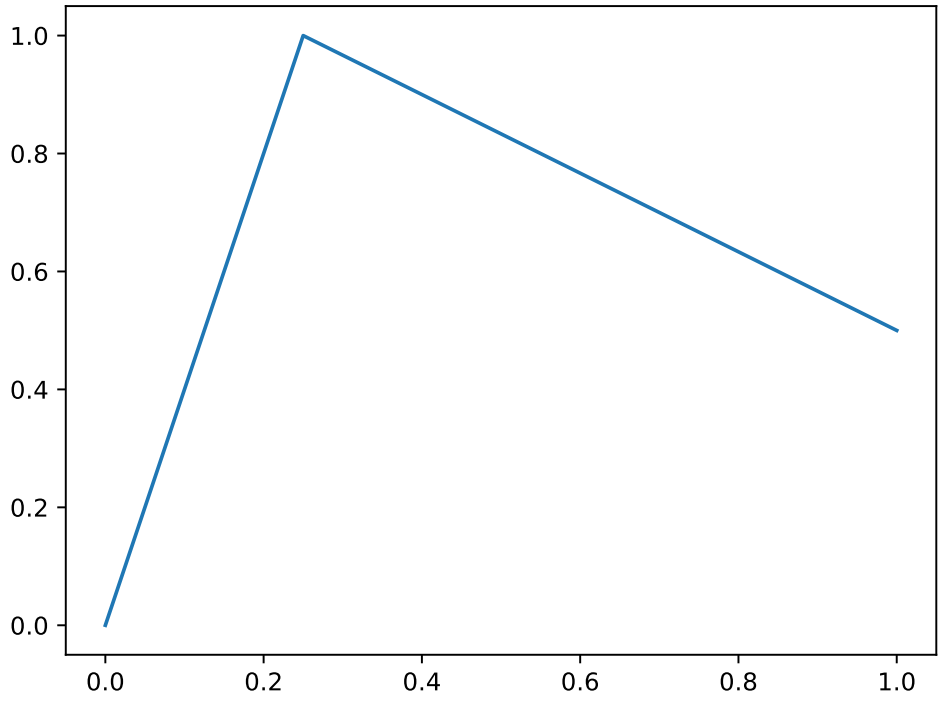
```
Out[2]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fcbd1a559e8>]
```



Списки x и y координат точек. Точки соединяются прямыми, т.е. строится ломаная линия.

```
In [3]: plot([0,0.25,1],[0,1,0.5])
```

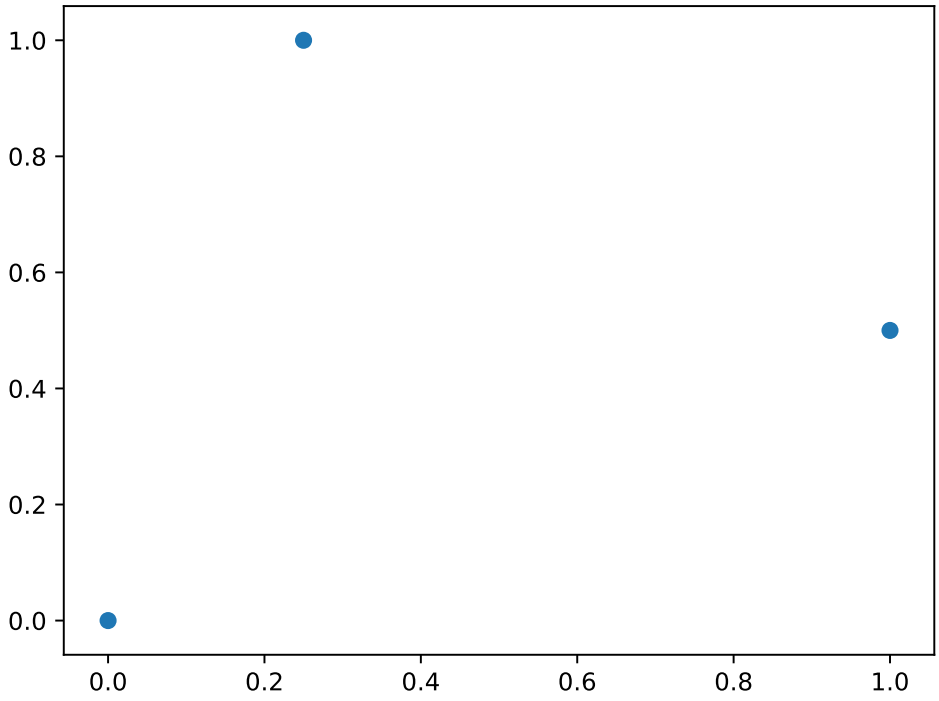
```
Out[3]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fcbd1939f98>]
```



`scatter` просто рисует точки, не соединяя из линиями.

```
In [4]: scatter([0,0.25,1],[0,1,0.5])
```

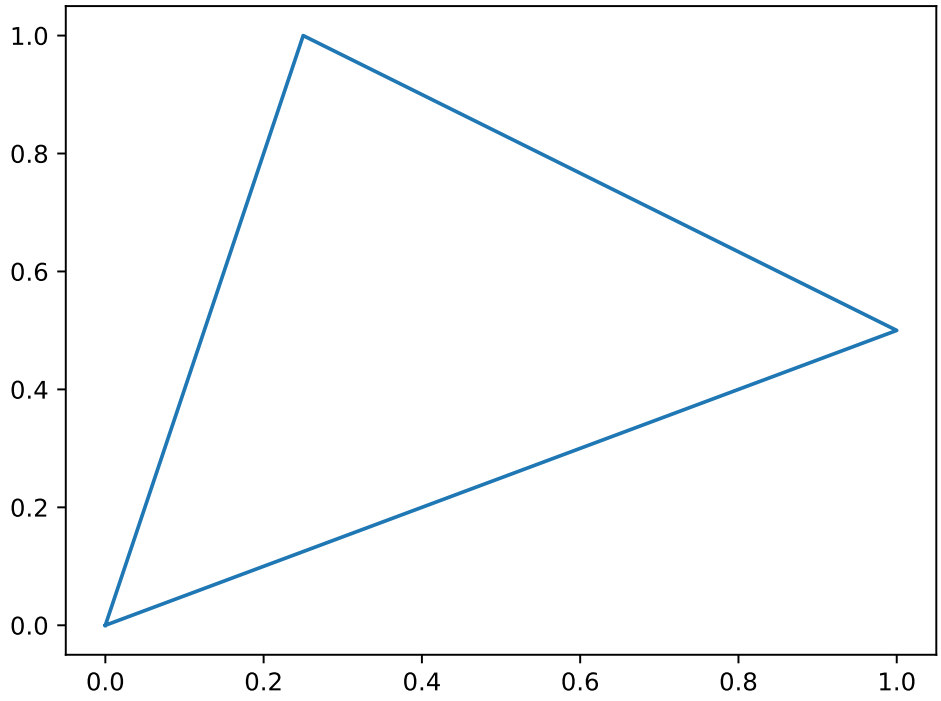
```
Out[4]: <matplotlib.collections.PathCollection at 0x7fcbd18d5358>
```



x координаты не обязаны монотонно возрастать. Тут, например, мы строим замкнутый многоугольник.

```
In [5]: plot([0,0.25,1,0],[0,1,0.5,0])
```

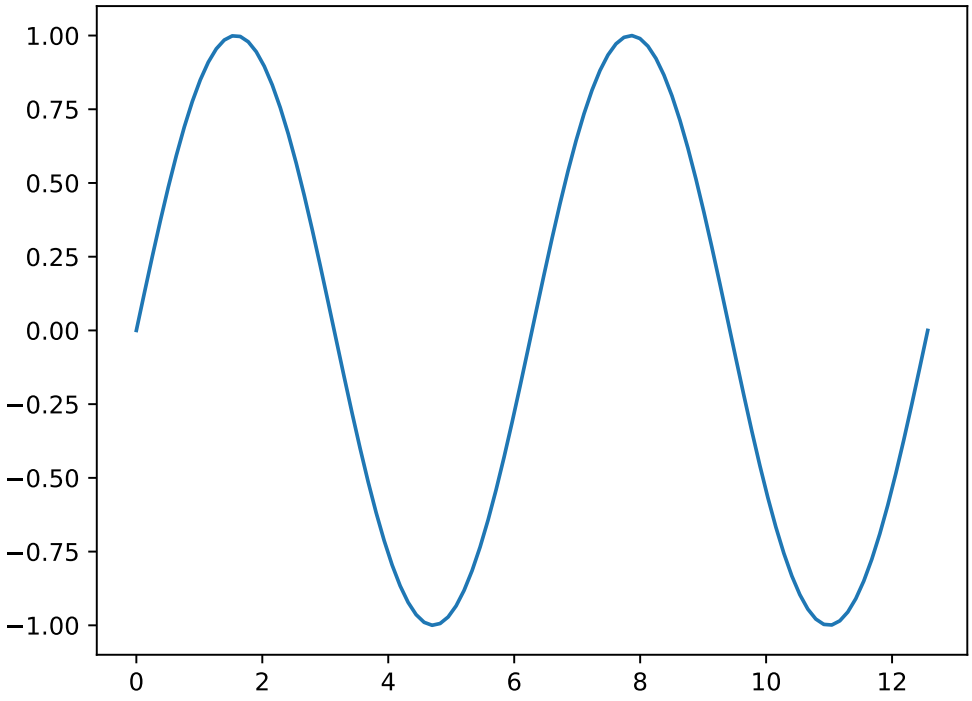
```
Out[5]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fcbd17ebdd8>]
```



Когда точек много, ломаная неотличима от гладкой кривой.

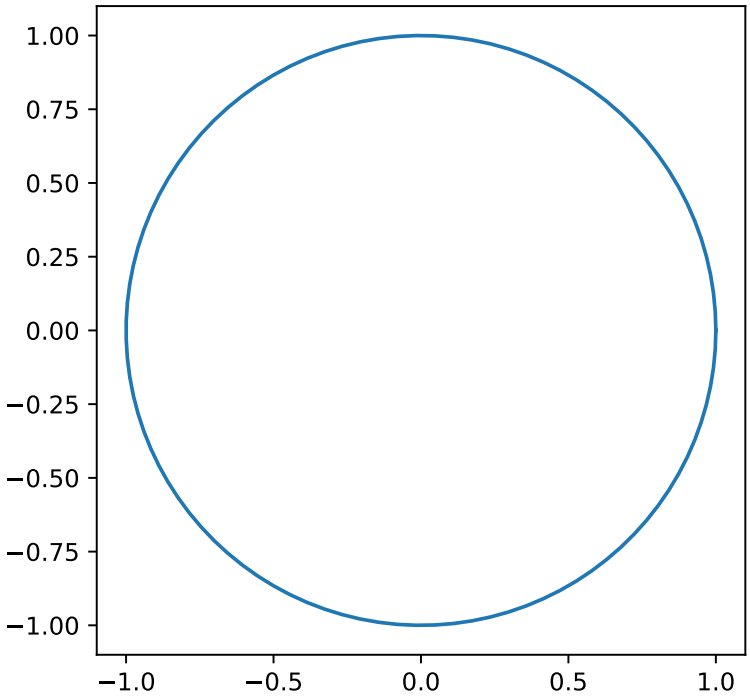
```
In [6]: x=linspace(0,4*pi,100)
        plot(x,sin(x))
```

```
Out[6]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fcbd1780cf8>]
```



Массив x не обязан быть монотонно возрастающим. Можно строить любую параметрическую линию $x = x(t)$, $y = y(t)$.

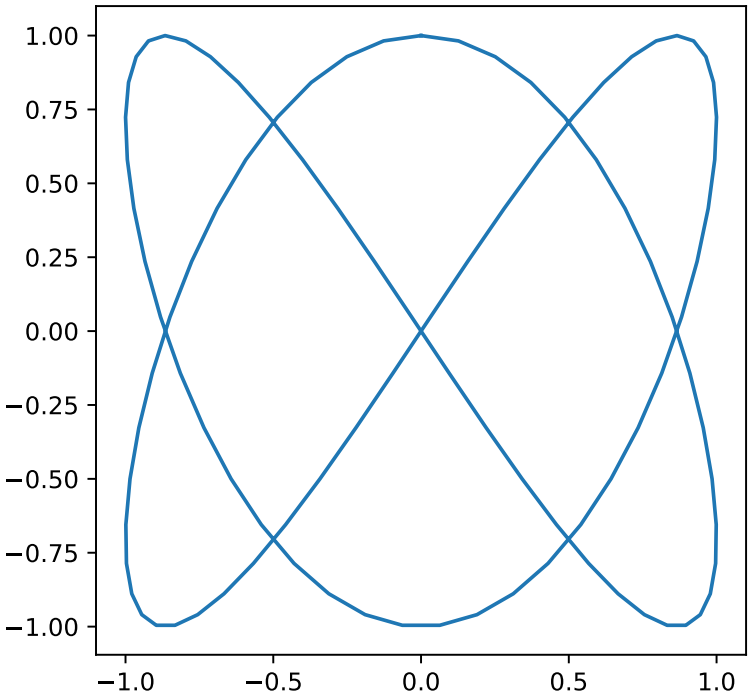
```
In [7]: t=linspace(0,2*pi,100)
        plot(cos(t),sin(t))
        axes().set_aspect(1)
```



Чтобы окружности выглядели как окружности, а не как эллипсы, (а квадраты как квадраты, а не как прямоугольники), нужно установить aspect ratio, равный 1.

А вот одна из фигур Лиссажу, которые все мы любили смотреть на осциллографе.

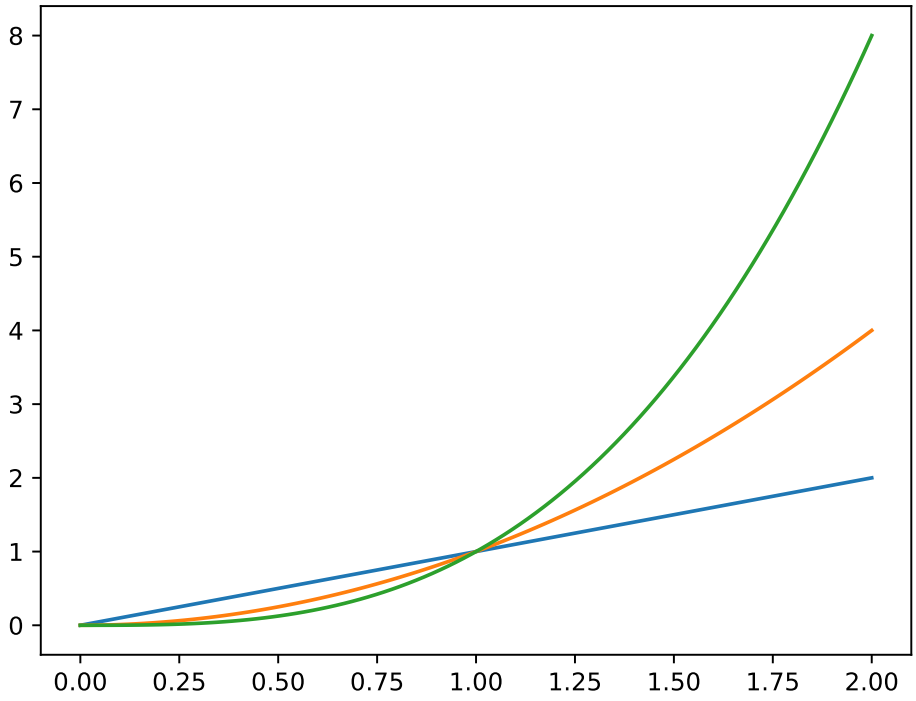
```
In [8]: plot(sin(2*t),cos(3*t))
        axes().set_aspect(1)
```



Несколько кривых на одном графике. Каждая задаётся парой массивов — x и y координаты. По умолчанию, им присваиваются цвета из некоторой последовательности цветов; разумеется, их можно изменить.

```
In [9]: x=linspace(0,2,100)
        plot(x,x,x,x**2,x,x**3)
```

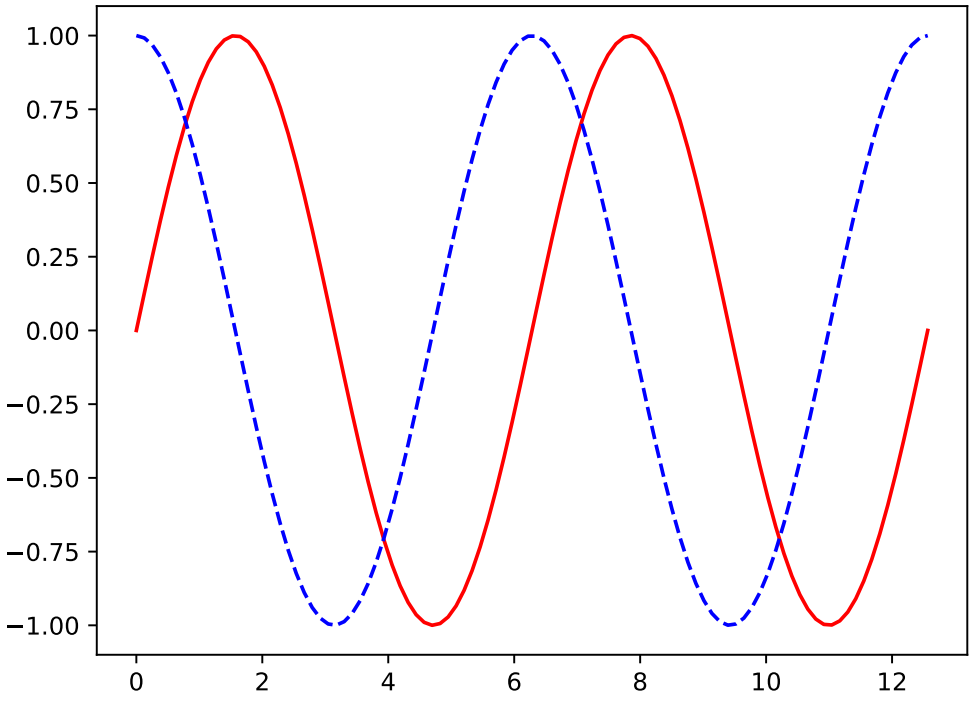
```
Out[9]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fcbd155e2e8>,
         <matplotlib.lines.Line2D at 0x7fcbd155e4a8>,
         <matplotlib.lines.Line2D at 0x7fcbd155ee48>]
```



Для простой регулировки цветов и типов линий после пары x и y координат вставляется форматная строка. Первая буква определяет цвет (`'r'` — красный, `'b'` — синий и т.д.), дальше задаётся тип линии (`'-'` — сплошная, `'--'` — пунктирная, `'-.'` — штрих-пунктирная и т.д.).

```
In [10]: x=linspace(0,4*pi,100)
         plot(x,sin(x),'r-',x,cos(x),'b--')
```

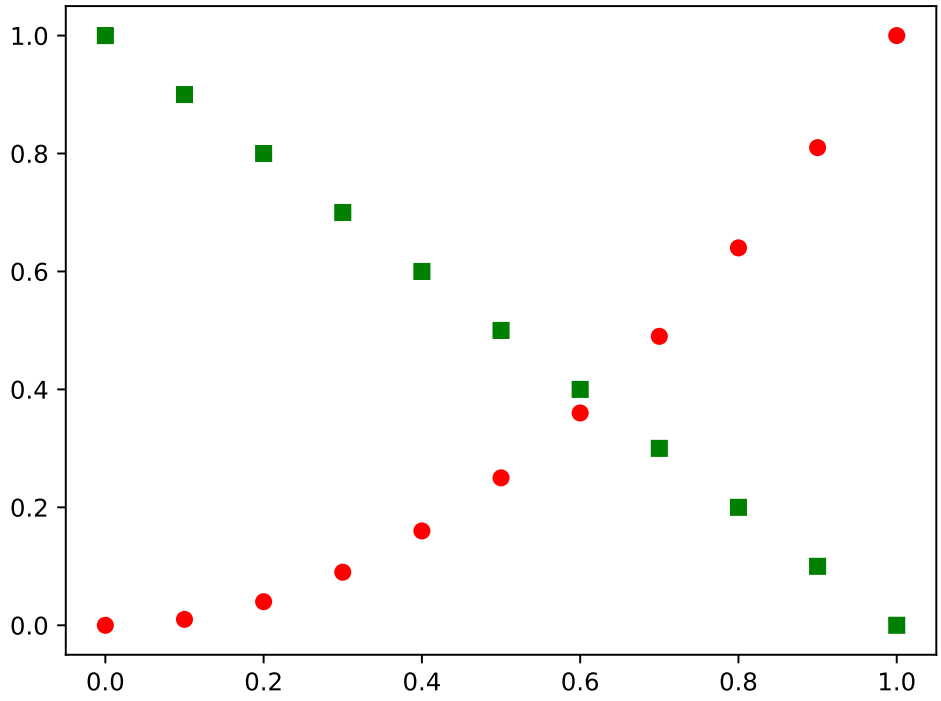
```
Out[10]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fcbd179b898>,
          <matplotlib.lines.Line2D at 0x7fcbd1705c50>]
```



Если в качестве “типа линии” указано `'o'`, то это означает рисовать точки кружочками и не соединять их линиями; аналогично, `'s'` означает квадратики. Конечно, такие графики имеют смысл только тогда, когда точек не очень много.

```
In [11]: x=linspace(0,1,11)
         plot(x,x**2,'ro',x,1-x,'gs')
```

```
Out[11]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fcbd16b9f60>,
          <matplotlib.lines.Line2D at 0x7fcbd16b9cc0>]
```

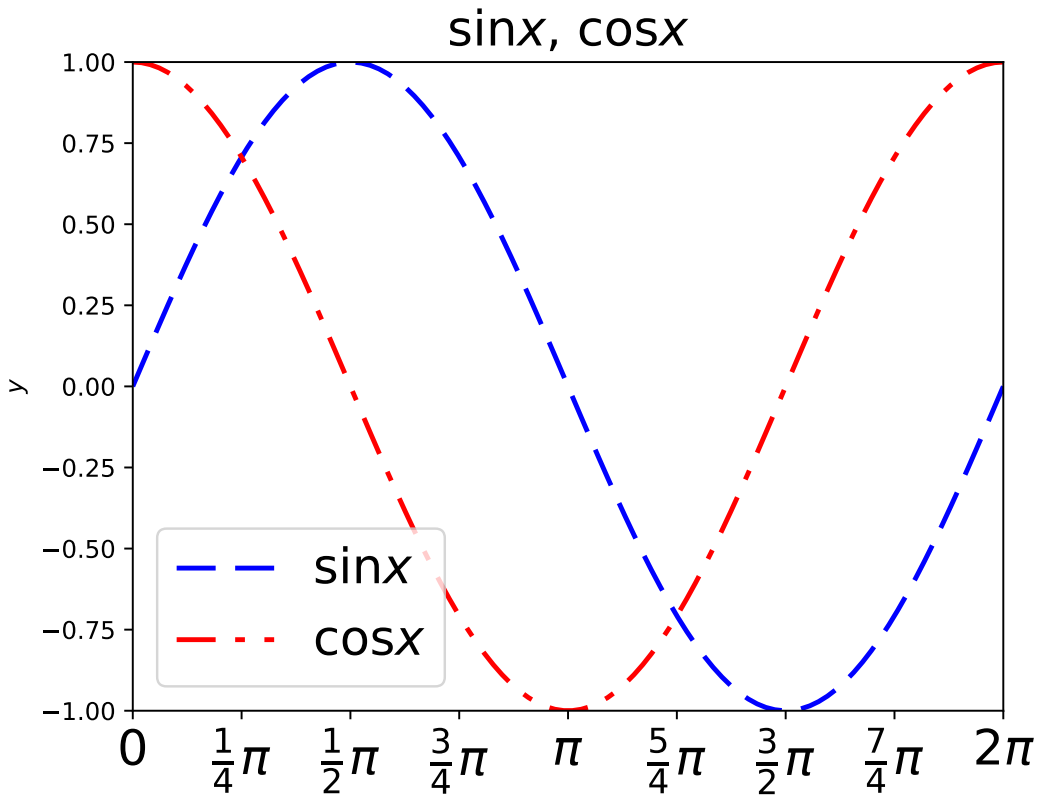


Вот пример настройки почти всего, что можно настроить. Можно задать последовательность засечек на оси x (и y) и подписи к ним (в них, как и в других текстах, можно использовать LaTeX-овские обозначения). Задать подписи осей x и y и заголовок графика. Во всех текстовых элементах можно задать размер шрифта. Можно задать толщину линий и штрихи (так, на графике косинуса рисуется штрих длины 8, потом участок длины 4 не рисуется, потом участок длины 2 рисуется, потом участок длины 4 опять не рисуется, и так по циклу; поскольку толщина линии равна 2, эти короткие штрихи длины 2 фактически выглядят как точки). Можно задать подписи к кривым (legend); где разместить эти подписи тоже можно регулировать.

```
In [12]: axis([0,2*pi,-1,1])
         xticks(linspace(0,2*pi,9),
                ('0',r'$\frac{1}{4}\pi$',r'$\frac{1}{2}\pi$',
                 r'$\frac{3}{4}\pi$',r'$\pi$',r'$\frac{5}{4}\pi$',
                 r'$\frac{3}{2}\pi$',r'$\frac{7}{4}\pi$',r'$2\pi$'),
               fontsize=20)
         xlabel(r'$x$')
         ylabel(r'$y$')
         title(r'$\sin x$, $\cos x$',fontsize=20)
         x=linspace(0,2*pi,100)
         plot(x,sin(x),linewidth=2,color='b',dashes=[8,4],
              label=r'$\sin x$')
```

```
plot(x,cos(x),linewidth=2,color='r',dashes=[8,4,2,4],
     label=r'$\cos x$')
legend(fontsize=20)
```

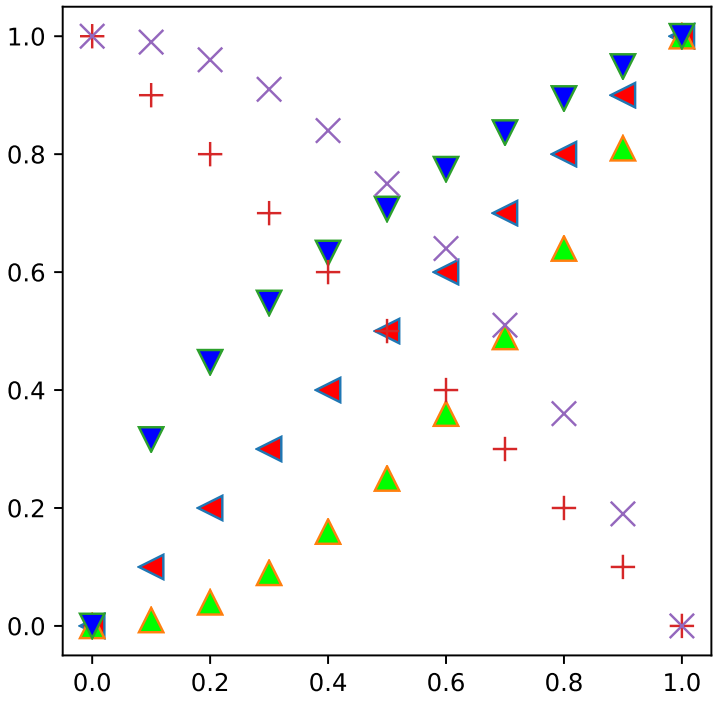
```
Out[12]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7fcbd14af978>
```



Если `linestyle=''`, то точки не соединяются линиями. Сами точки рисуются маркерами разных типов. Тип определяется строкой из одного символа, который чем-то похож на нужный маркер. В добавок к стандартным маркерам, можно определить самодельные.

```
In [13]: x=linspace(0,1,11)
         axis([-0.05,1.05,-0.05,1.05])
         axes().set_aspect(1)
         plot(x,x,linestyle='',marker='<',markersize=10,
              markerfacecolor='#FF0000')
         plot(x,x**2,linestyle='',marker='^',markersize=10,
              markerfacecolor='#00FF00')
         plot(x,x**(1/2),linestyle='',marker='v',markersize=10,
              markerfacecolor='#0000FF')
         plot(x,1-x,linestyle='',marker='+',markersize=10,
              markerfacecolor='#0F0F00')
         plot(x,1-x**2,linestyle='',marker='x',markersize=10,
              markerfacecolor='#0F000F')
```

```
Out[13]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fcbd12d6ef0>]
```

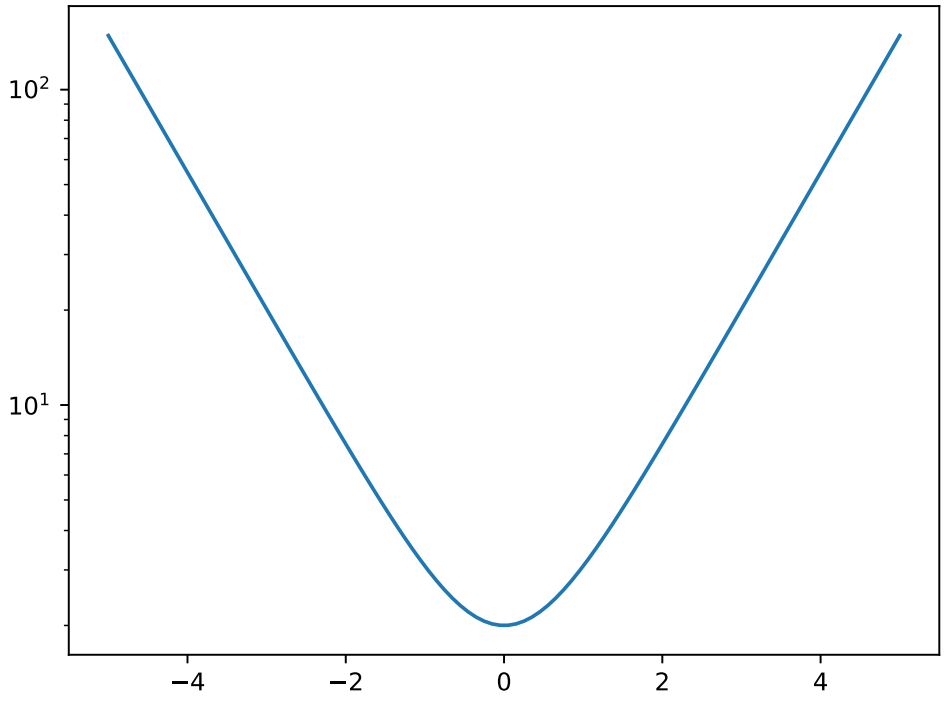


2.2.1 Логарифмический масштаб

Если y меняется на много порядков, то удобно использовать логарифмический масштаб по y.

```
In [14]: x=linspace(-5,5,100)
         yscale('log')
         plot(x,exp(x)+exp(-x))
```

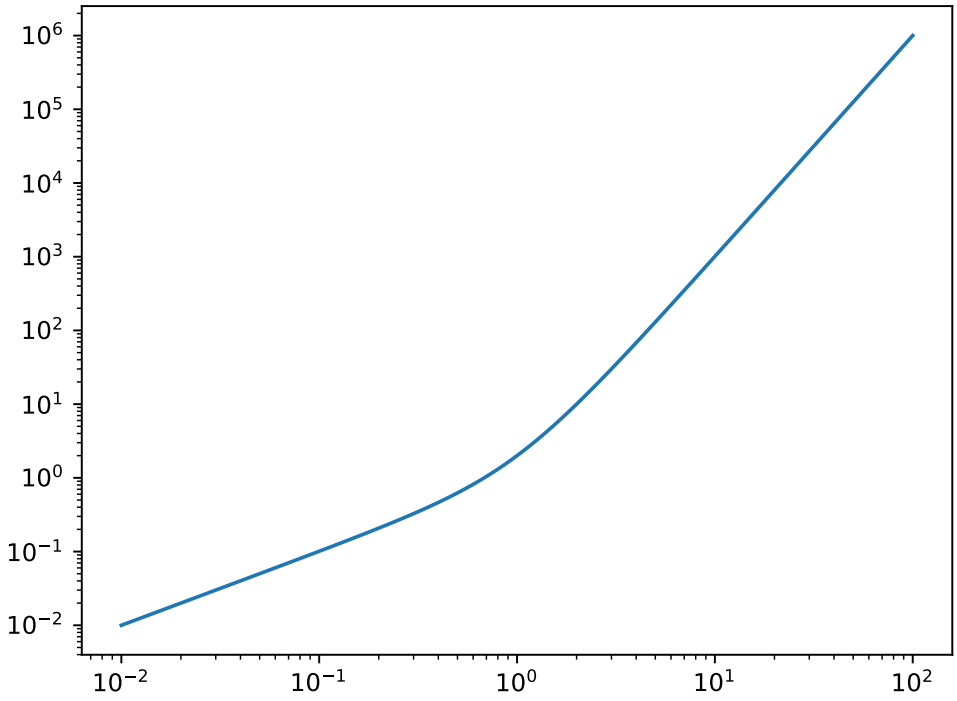
```
Out[14]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fcbd12ff908>]
```



Можно задать логарифмический масштаб по обоим осям.

```
In [15]: x=logspace(-2,2,100)
         xscale('log')
         yscale('log')
         plot(x,x+x**3)
```

```
Out[15]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fcbd12a55f8>]
```

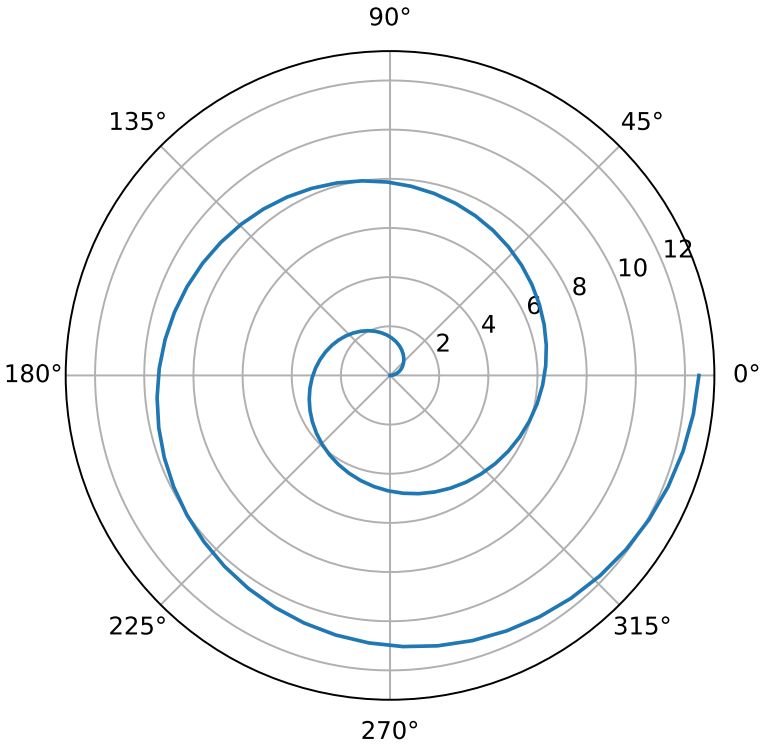


2.2.2 Полярные координаты

Первый массив — φ, второй — r. Вот спираль.

```
In [16]: t=linspace(0,4*pi,100)
         polar(t,t)
```

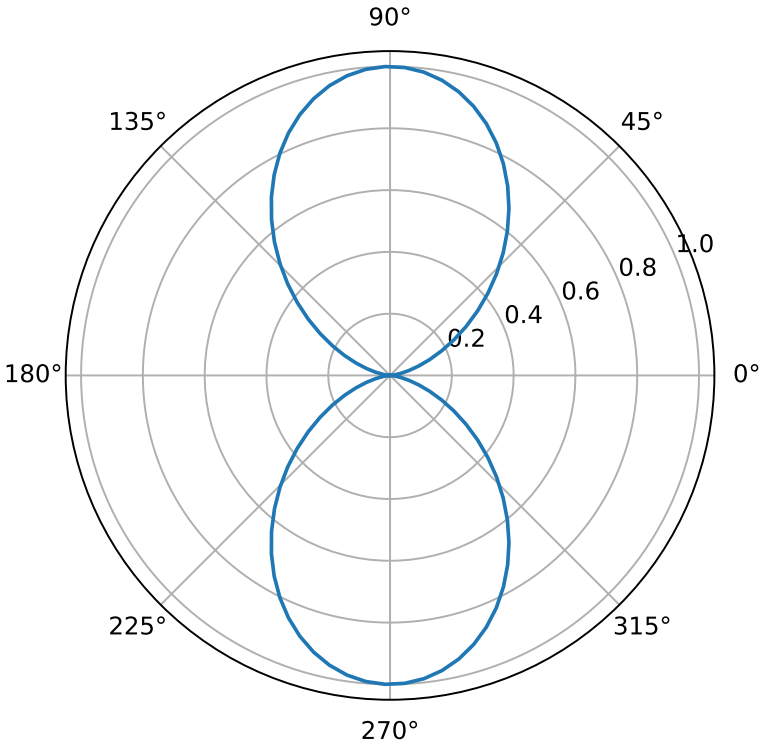
```
Out[16]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fcbd0e8f390>]
```



А это угловое распределение пионов в e^+e^- аннигиляции.

```
In [17]: phi=linspace(0,2*pi,100)
         polar(phi,sin(phi)**2)
```

```
Out[17]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fcbd0fe2c50>]
```



2.2.3 Экспериментальные данные

Допустим, имеется теоретическая кривая (резонанс без фона).

```
In [18]: xt=linspace(-4,4,101)
         yt=1/(xt**2+1)
```

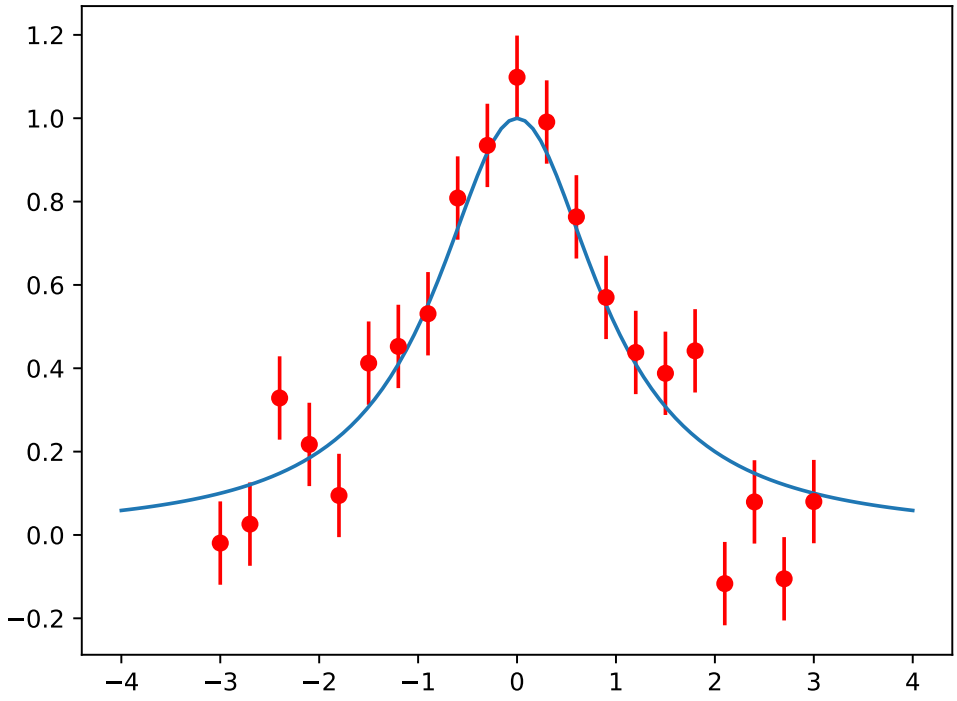
Поскольку реальных экспериментальных данных под рукой нет, мы их сгенерируем. Пусть они согласуются с теорией, и все статистические ошибки равны 0.1.

```
In [19]: xe=linspace(-3,3,21)
         yerr=0.1*ones(21)
         ye=1/(xe**2+1)+yerr*normal(size=21)
```

Экспериментальные точки с усами и теоретическая кривая на одном графике.

```
In [20]: plot(xt,yt)
         errorbar(xe,ye,fmt='ro',yerr=yerr)
```

```
Out[20]: <Container object of 3 artists>
```

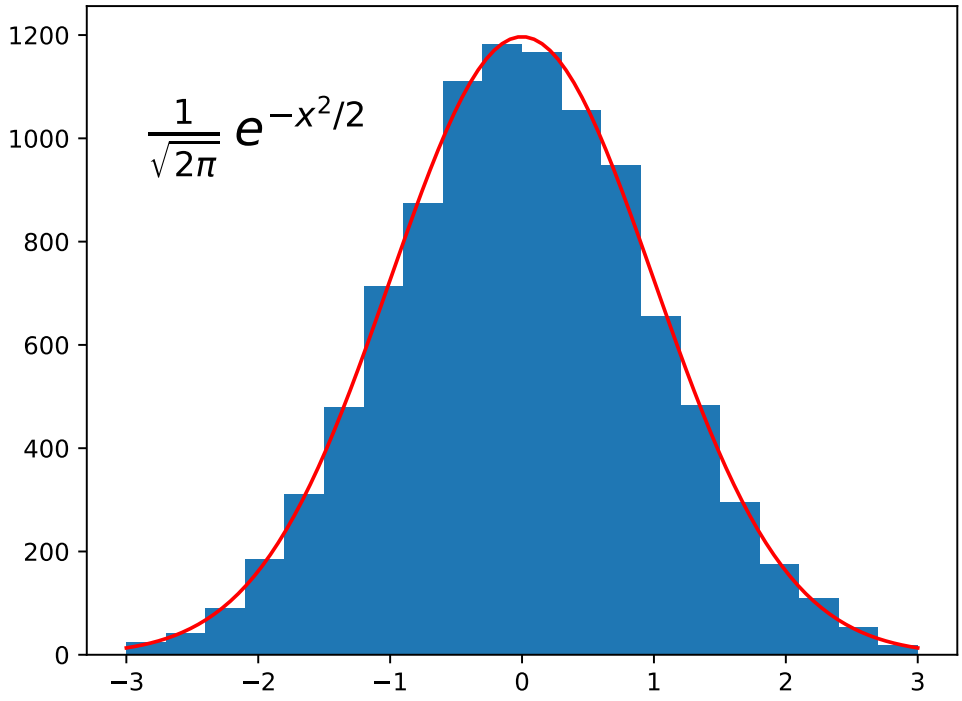


2.2.4 Гистограмма

Сгенерируем N случайных чисел с нормальным (гауссовым) распределением (среднее 0, среднеквадратичное отклонение 1), и раскидаем их по 20 бинам от -3 до 3 (точки за пределами этого интервала отбрасываются). Для сравнения, вместе с гистограммой нарисуем Гауссову кривую в том же масштабе. И даже напишем формулу Гаусса.

```
In [21]: N=10000
         r=normal(size=N)
         n,bins,patches=hist(r,range=(-3,3),bins=20)
         x=linspace(-3,3,100)
         plot(x,N/sqrt(2*pi)*0.3*exp(-0.5*x**2),'r')
         text(-2,1000,r'$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}$',
              fontsize=20,horizontalalignment='center',
              verticalalignment='center')
```

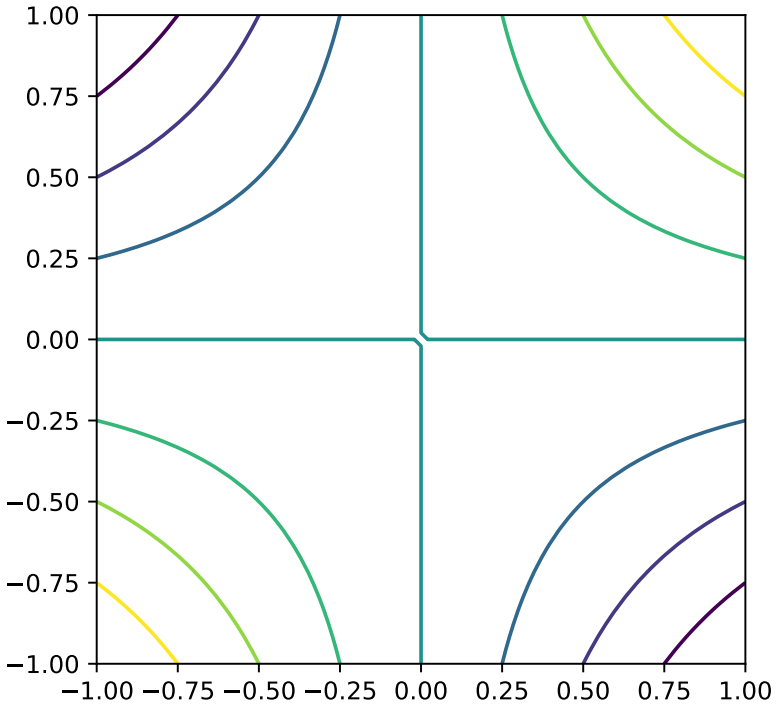
```
Out[21]: <matplotlib.text.Text at 0x7fcbd1011390>
```



2.2.5 Контурные графики

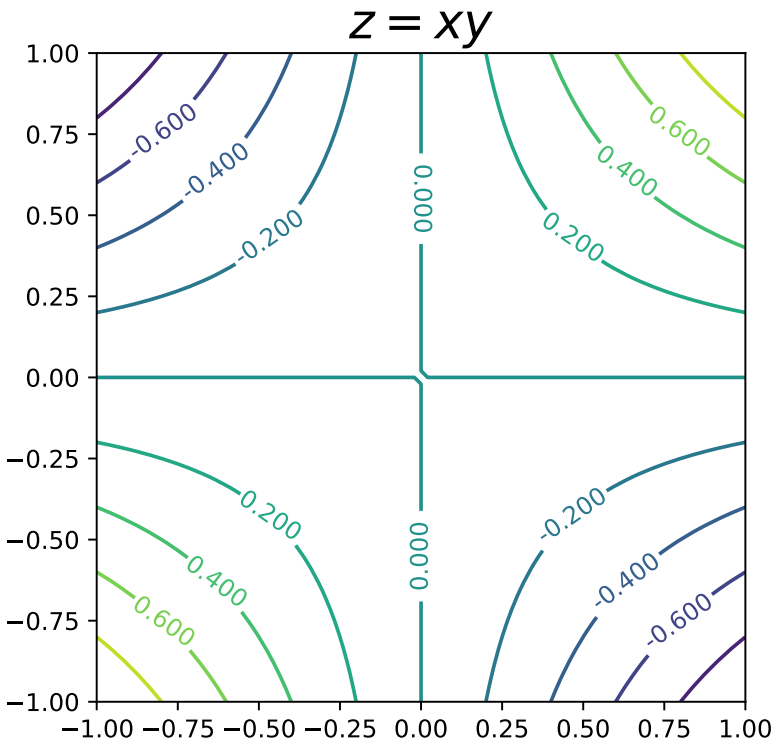
Пусть мы хотим изучить поверхность $z = xy$. Вот её горизонтали.

```
In [22]: x=linspace(-1,1,50)
         y=x
         z=outer(x,y)
         contour(x,y,z)
         axes().set_aspect(1)
```



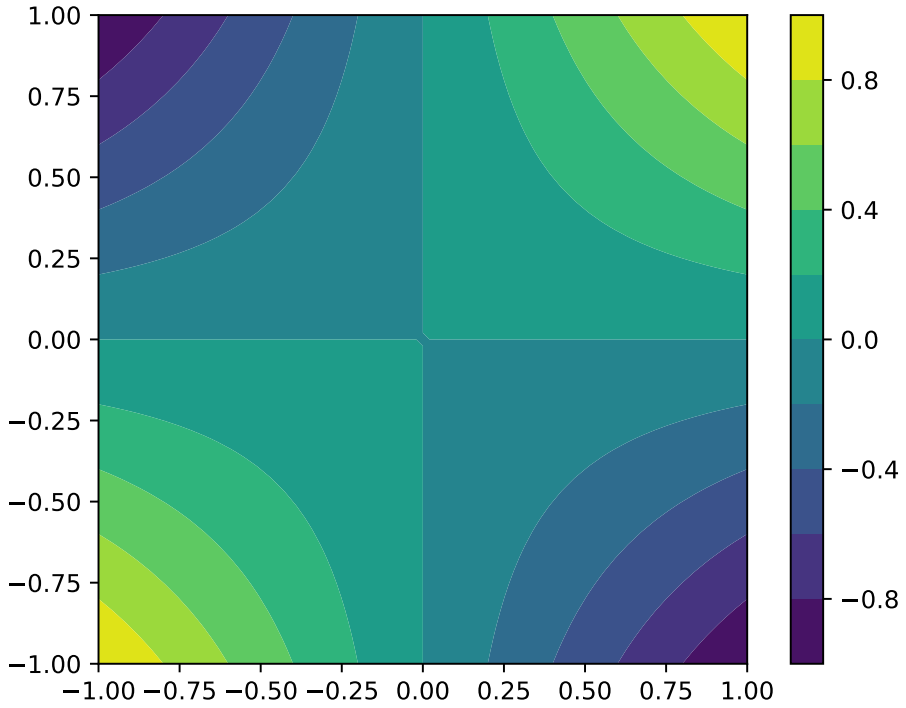
Что-то их маловато. Сделаем побольше и подпишем.

```
In [23]: title(r'$z=xy$',fontsize=20)
         curves=contour(x,y,z,linspace(-1,1,11))
         clabel(curves)
         axes().set_aspect(1)
```



А здесь высота даётся цветом, как на физических географических картах. `colorbar` показывает соответствие цветов и значений z.

```
In [24]: contourf(x,y,z,linspace(-1,1,11))
         colorbar()
         axes().set_aspect(1)
```

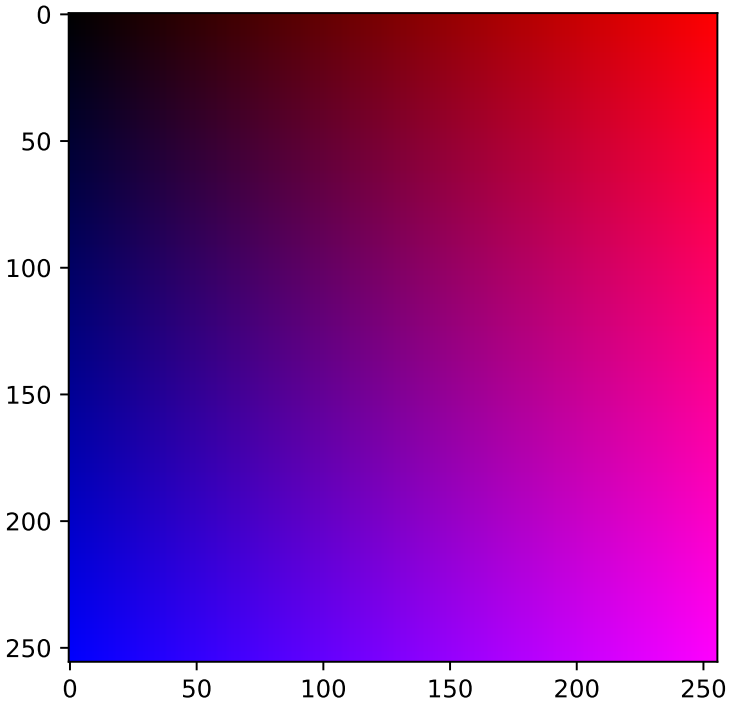


2.2.6 Images (пиксельные картинки)

Картинка задаётся массивом `z`: `z[i,j]` — это цвет пикселя `i,j`, массив из 3 элементов (`rgb`, числа от 0 до 1).

```
In [25]: n=256
         u=linspace(0,1,n)
         x,y=meshgrid(u,u)
         z=zeros((n,n,3))
         z[:,:,0]=x
         z[:,:,2]=y
         imshow(z)
```

```
Out[25]: <matplotlib.image.AxesImage at 0x7fcbd0c9c390>
```



2.2.7 Трёхмерная линия

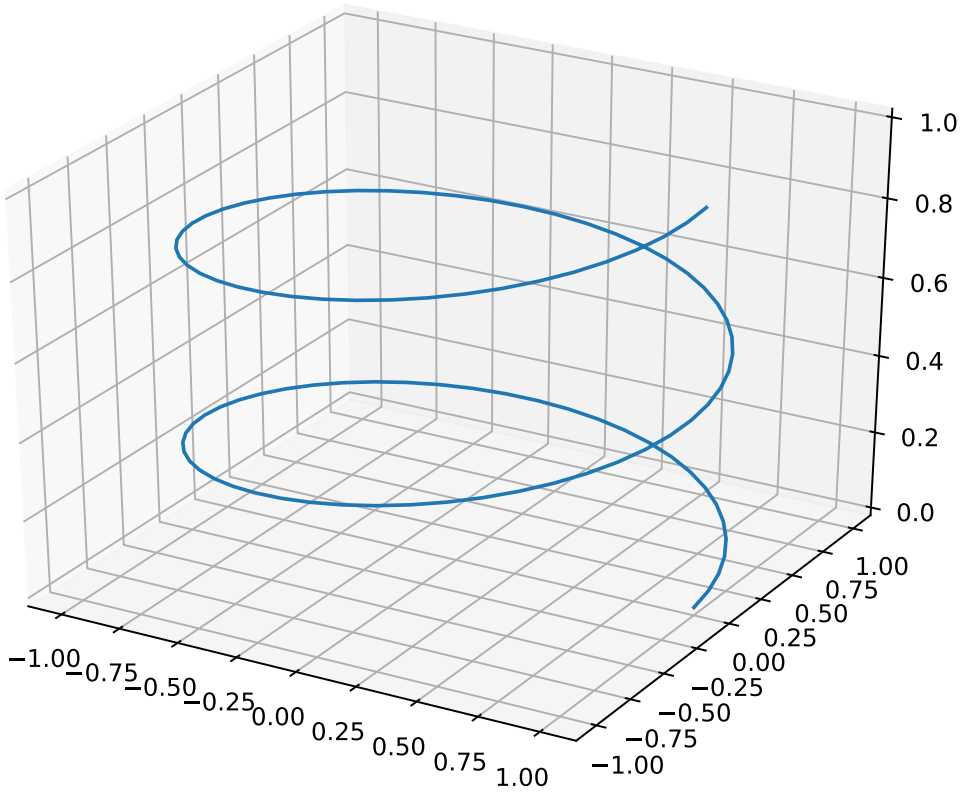
Задаётся параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

```
In [26]: t=linspace(0,4*pi,100)
         x=cos(t)
         y=sin(t)
         z=t/(4*pi)
```

Тут нужен объект класса `Axes3D` из пакета `mpl_toolkits.mplot3d`. `figure()` — это текущий рисунок, создаём в нём объект `ax`, потом используем его методы.

```
In [27]: fig=figure()
         ax=Axes3D(fig)
         ax.plot(x,y,z)
```

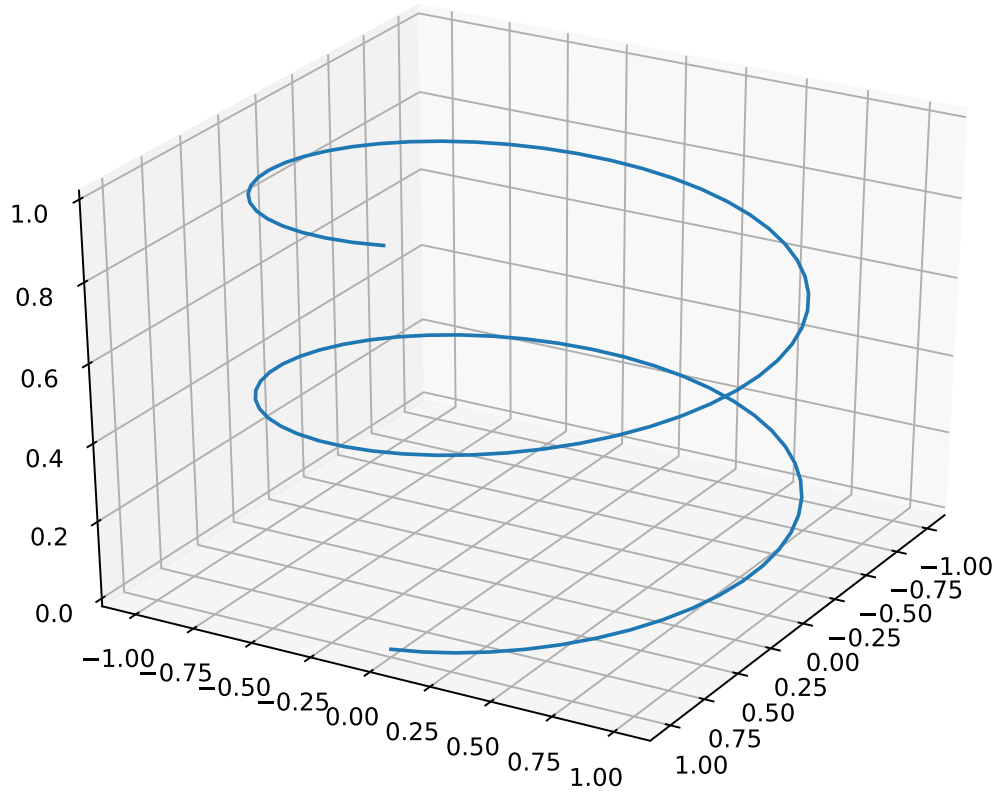
```
Out[27]: [<mpl_toolkits.mplot3d.art3d.Line3D at 0x7fcbd0c7f780>]
```



К сожалению, inline трёхмерную картинку нельзя вертеть мышкой (это можно делать с трёхмерными картинками в отдельных окнах). Но можно задать, с какой стороны мы смотрим.

```
In [28]: fig=figure()
         ax=Axes3D(fig)
         ax.elev,ax.azim=30,30
         ax.plot(x,y,z)
```

```
Out[28]: [<mpl_toolkits.mplot3d.art3d.Line3D at 0x7fcbd09ff390>]
```

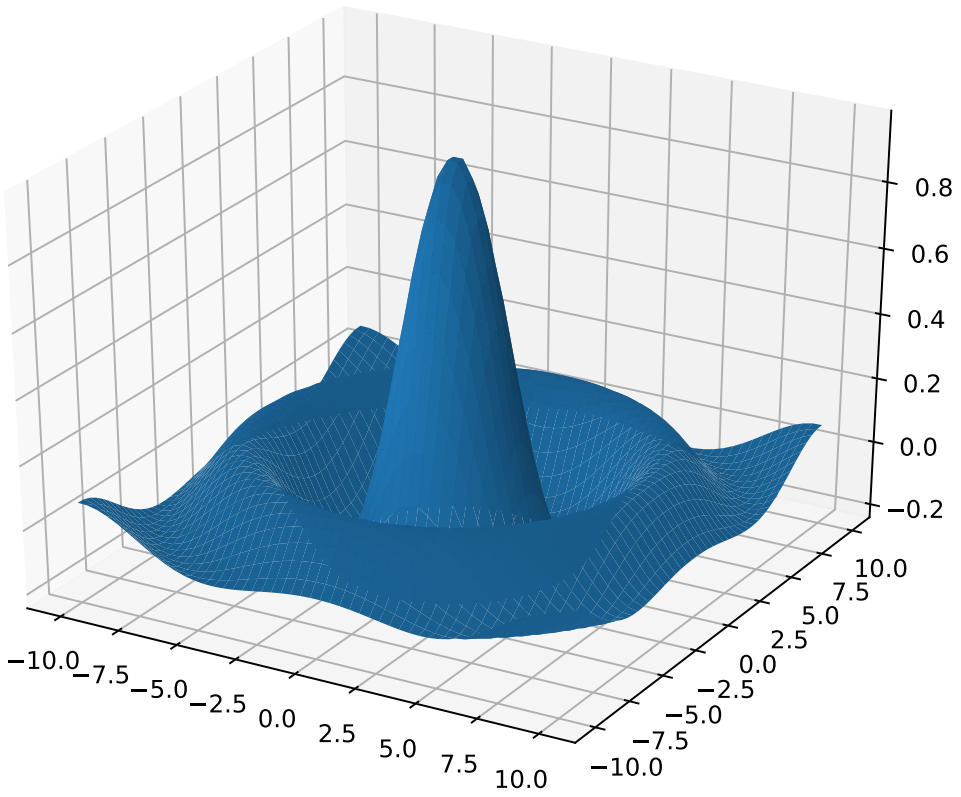


2.2.8 Поверхности

Все поверхности параметрические: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$. Если мы хотим построить явную поверхность $z = z(x, y)$, то удобно создать массивы $x = u$ и $y = v$ функцией `meshgrid`.

```
In [29]: X=10
         N=50
         u=linspace(-X,X,N)
         x,y=meshgrid(u,u)
         r=sqrt(x**2+y**2)
         z=sin(r)/r
         fig=figure()
         ax=Axes3D(fig)
         ax.plot_surface(x,y,z,rstride=1,cstride=1)
```

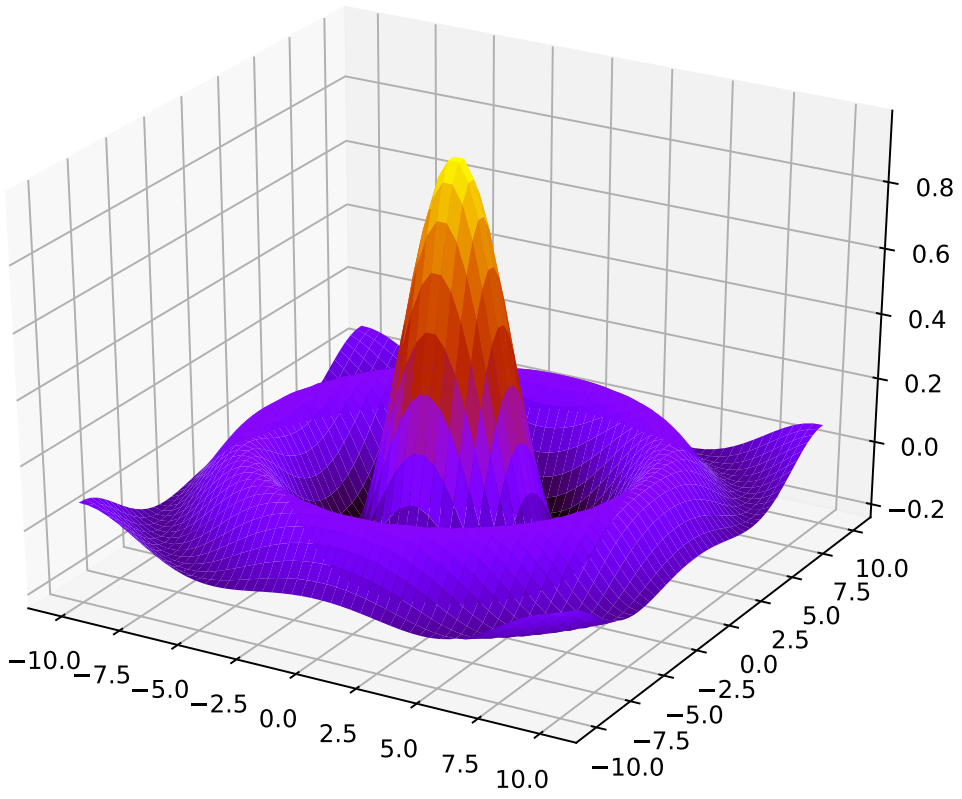
```
Out[29]: <mpl_toolkits.mplot3d.art3d.Poly3DCollection at 0x7fcbd0c95320>
```



Есть много встроенных способов раскраски поверхностей. Так, в методе `gnuplot` цвет зависит от высоты z.

```
In [30]: fig=figure()
         ax=Axes3D(fig)
         ax.plot_surface(x,y,z,rstride=1,cstride=1,cmap='gnuplot')
```

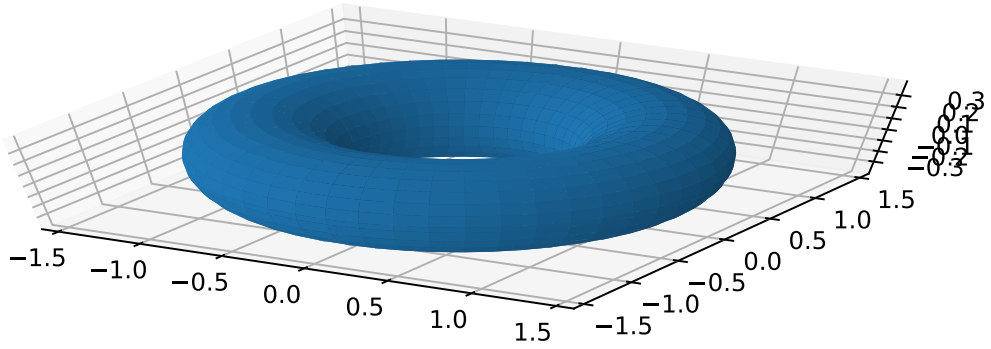
```
Out[30]: <mpl_toolkits.mplot3d.art3d.Poly3DCollection at 0x7fcbd09d1048>
```



Построим бублик — параметрическую поверхность с параметрами ϑ, φ.

```
In [31]: t=linspace(0,2*pi,50)
         th,ph=meshgrid(t,t)
         r=0.4
         x,y,z=(1+r*cos(ph))*cos(th),(1+r*cos(ph))*sin(th),r*sin(ph)
         fig=figure()
         ax=Axes3D(fig)
         ax.elev=60
         ax.set_aspect(r/(1+r))
         ax.plot_surface(x,y,z,rstride=2,cstride=1)
```

```
Out[31]: <mpl_toolkits.mplot3d.art3d.Poly3DCollection at 0x7fcbd06e6f28>
```


−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
0.3
−0.3

2.3 mpmath

Multiple Precision math

Пакет для работы с числами с плавающей точкой со сколь угодно высокой точностью. В нём реализованы алгоритмы вычисления элементарных функций, а также большого количества специальных функций.

```
In [1]: from mpmath import *
        %matplotlib inline
```

Точность контролируется глобальным объектом `mp`.

```
In [2]: print(mp)
```

```
Mpmath settings:
  mp.prec = 53                [default: 53]
  mp.dps = 15                 [default: 15]
  mp.trap_complex = False     [default: False]
```

`prec` — число бит в мантиссе, `dps` — число значащих десятичных цифр. Если изменить один из этих атрибутов, другой изменится соответственно.

```
In [3]: mp.dps=50
        print(mp)
```

```
Mpmath settings:
  mp.prec = 169               [default: 53]
  mp.dps = 50                 [default: 15]
  mp.trap_complex = False     [default: False]
```

`mpf` создаёт число с плавающей (multiple precision float) точкой из строки или числа.

```
In [4]: x=mpf('0.1')
        print(x)
```

```
0.1
```

```
In [5]: x
```

```
Out[5]: mpf('0.1000000000000000000000000000000000000000000000000000007')
```

А вот так делать не надо. `0.1` сначала преобразуется в число с плавающей точкой со стандартной (т.е. двойной) точностью, а потом уже оно преобразуется в `mpf`.

```
In [6]: y=mpf(0.1)
        print(y)
```

```
0.10000000000000000555111512312578270211815834045 41
```

Чтобы не потерять точность, нужно делать `mpf` из строки или из отношения целых чисел (вероятно, со знаменателем вида 10^n).

```
In [7]: y=mpf(1)/10
        print(y)
```

```
0.1
```

Математические константы типа π или e реализованы в виде *ленивых* объектов. Они содержат сколько-то вычисленных бит плюс алгоритм, позволяющий получить больше бит, если потребуется.

```
In [8]: pi
```

```
Out[8]: <pi: 3.14159~>
```

```
In [9]: mp.prec=53
        print(pi)
```

```
3.14159265358979
```

```
In [10]: mp.prec=169
         print(pi)
```

```
3.14159265358979323846264338327950288419716939937 51
```

Когда объект `pi` встречается в выражении, из него делается число с текущей точностью.

```
In [11]: +pi
```

```
Out[11]: mpf('3.14159265358979323846264338327950288419716939937510 68')
```

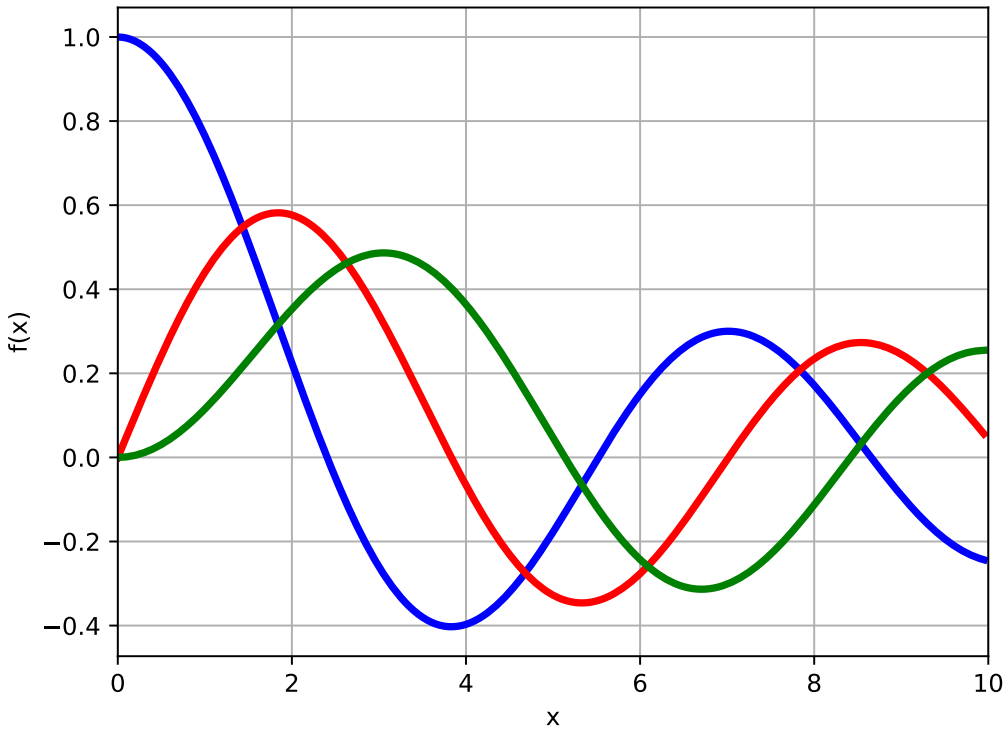
Реализованы арифметические операции и элементарные функции.

```
In [12]: sin(pi/4)**2
```

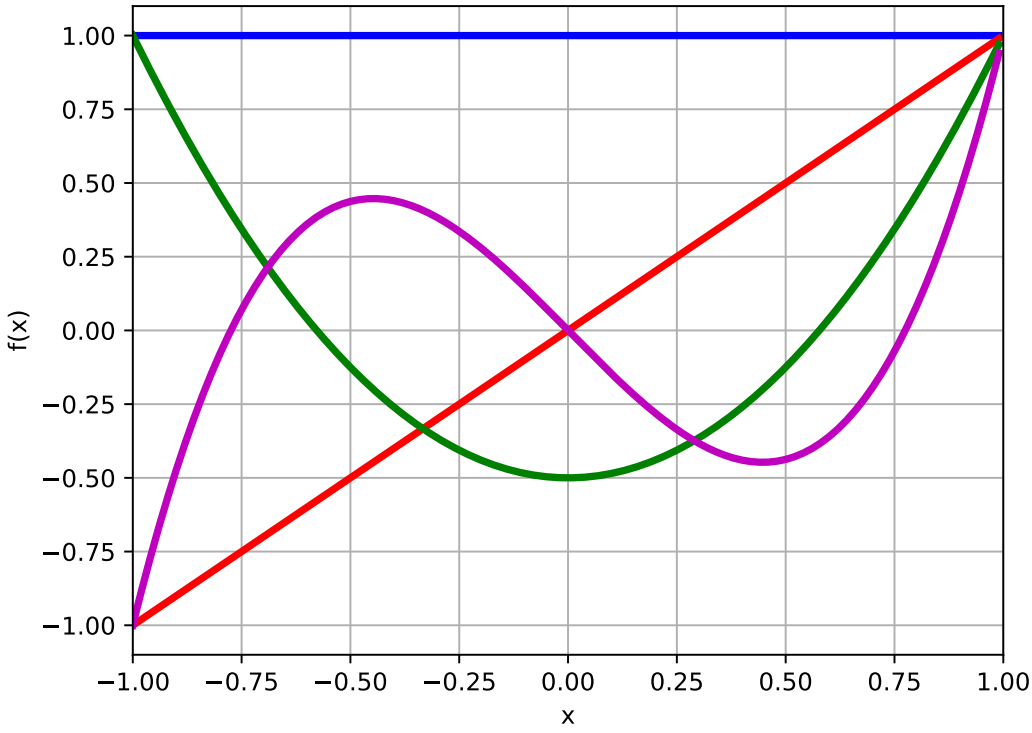
```
Out[12]: mpf('0.50000000000000000000000000000000000000000000000000 00134')
```

2.3.1 Специальные функции

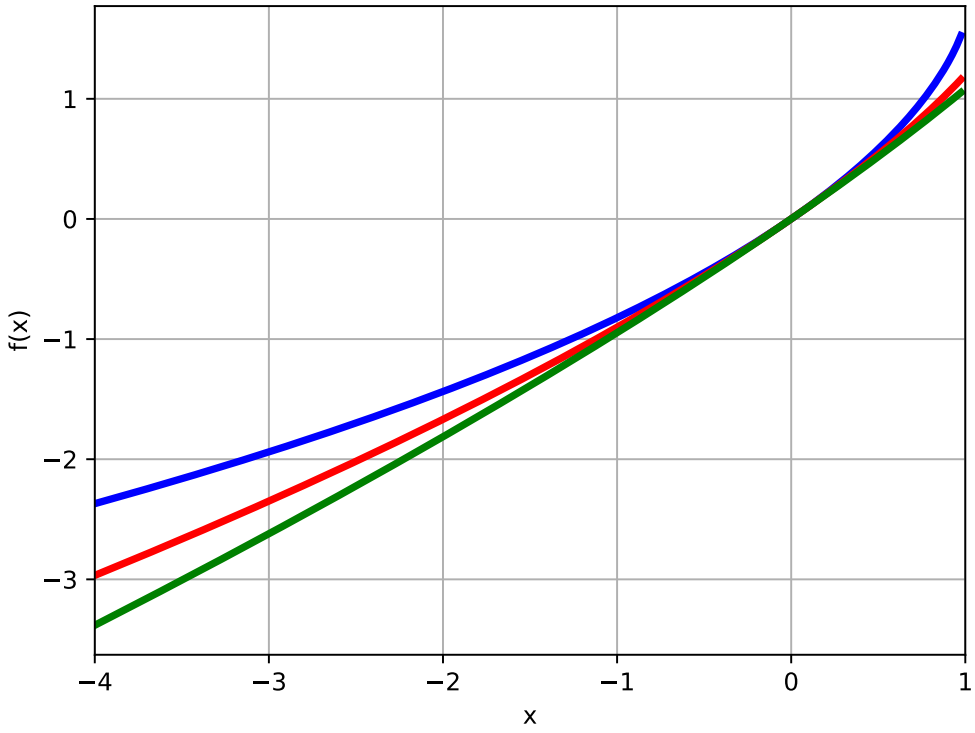
```
In [13]: plot([lambda x:besselj(0,x),
               lambda x:besselj(1,x),
               lambda x:besselj(2,x)],[0,10])
```




```
In [14]: plot([lambda x:legendre(0,x),
               lambda x:legendre(1,x),
               lambda x:legendre(2,x),
               lambda x:legendre(3,x)],[-1,1])
```



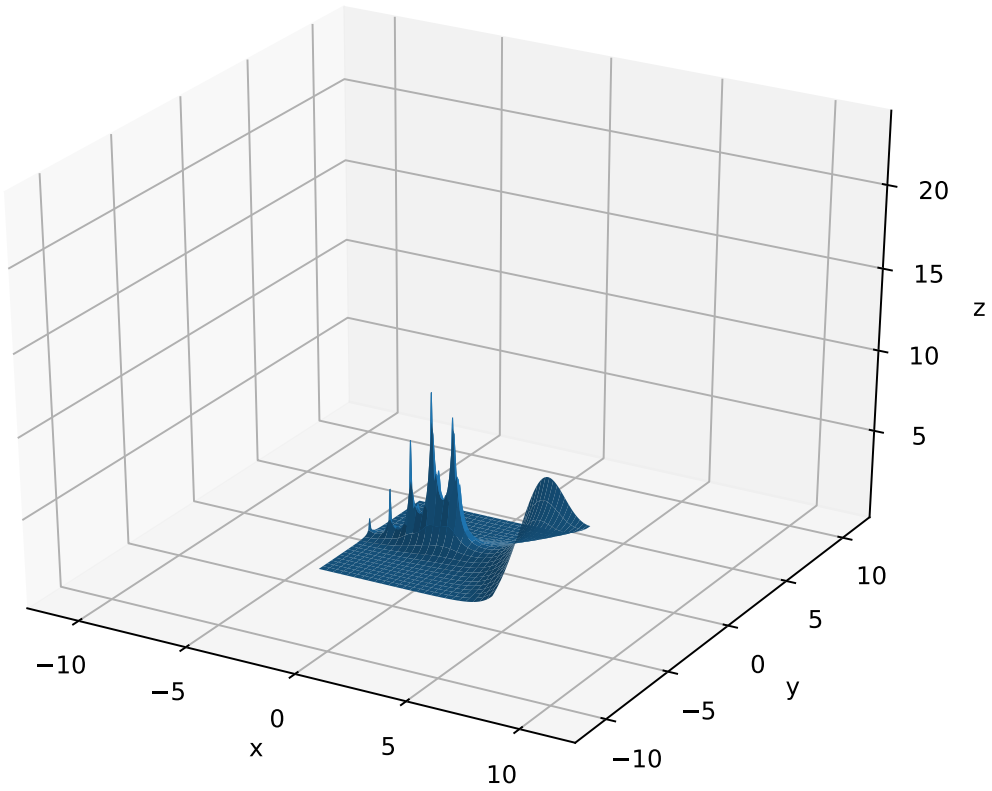

```
In [15]: plot([lambda x:polylog(2,x),
                lambda x:polylog(3,x),
                lambda x:polylog(4,x)],[-4,1])
```




```
In [16]: print(pi**2/zeta(2),pi**4/zeta(4))
```

```
6.0 90.0
```

```
In [17]: splot(lambda x,y:abs(gamma(x+j*y)),[-4,4],[-4,4])
```




```
In [18]: gamma(1.5)/sqrt(pi)
```

```
Out[18]: mpf('0.5')
```

2.3.2 Решение уравнений

Корни многочлена

```
In [19]: l=[1,0,0,0,1,1]
         r=polyroots(l)
         for x in r:
             print(x)
```

```
-0.754877666246692760049508896358528691894606617772 79
(0.877438833123346380024754448179264345947303308886 4 - 0.744861766619744236593170428604392367240
(0.877438833123346380024754448179264345947303308886 4 + 0.744861766619744236593170428604392367240
(-0.5 + 0.866025403784438646763723170752936183471402626905 19j)
(-0.5 - 0.866025403784438646763723170752936183471402626905 19j)
```

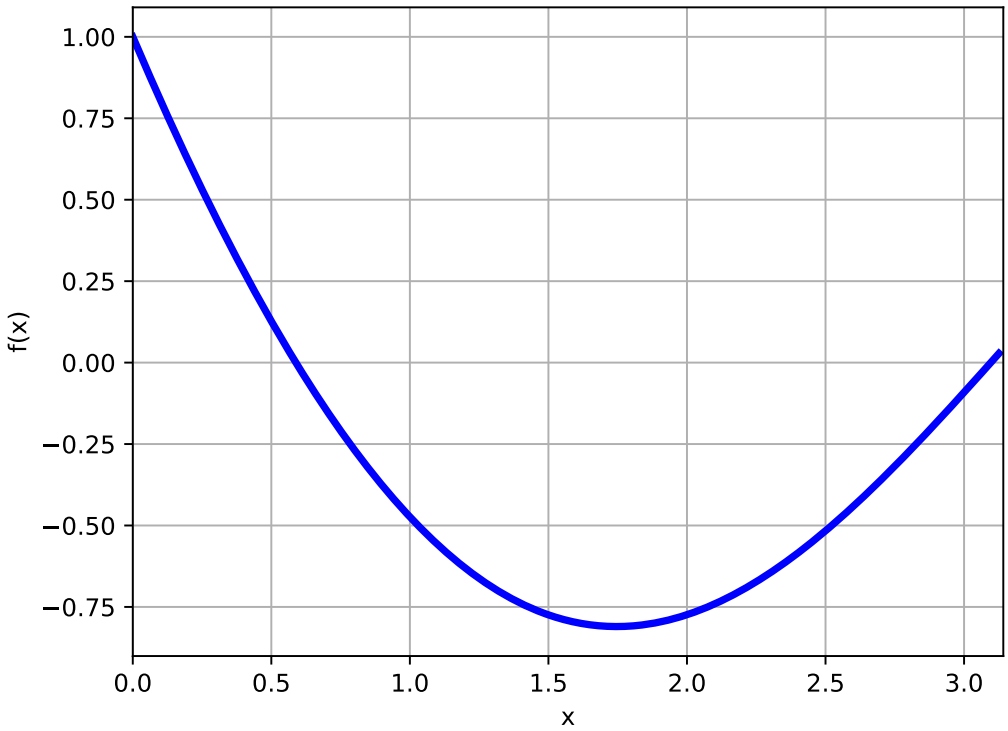
```
In [20]: for x in r:
             print(polyval(l,x))
```

```
0.0
(2.67276471009219564614053646715148187881519688010 5e-51 - 4.65122090269000710361355434503172171 5
(2.67276471009219564614053646715148187881519688010 5e-51 + 4.65122090269000710361355434503172171 5
(0.0 + 0.0j)
(0.0 + 0.0j)
```

Решение уравнения

```
In [21]: def f(x):
             return exp(-x)-sin(x)
```

```
In [22]: plot(f,[0,pi])
```




```
In [23]: findroot(f,(0.5,0.7))
```

```
Out[23]: mpf('0.588532743981861077432452045702903688531271516109030 53')
```

Решение системы уравнений

```
In [24]: findroot([lambda x,y:x**2+y**2-1,lambda x,y:x*y-1/4],(1,0.25))
```

```
Out[24]: matrix(
         [['0.965925826289068286749743199728897367633904839008 4'],
          ['0.258819045102520762348898837624048328349068901319 93']])
```

2.3.3 Производные

```
In [25]: diff(f,0.5)

Out[25]: mpf('-1.4841132216030061397200811175950101054335633325969314')

In [26]: diff(f,0.5,2)

Out[26]: mpf('1.0859561983168364238770874702067518415237215034277 88')

In [27]: diff(lambda x,y:sin(x)*cos(y),(pi,pi),(1,2))

Out[27]: mpf('-1.0')
```

2.3.4 Интегралы

При вычислении этого интеграла все вычисления будут производиться с точностью, на 5 значащих цифр большей; затем она вернётся к прежней.

```
In [28]: with extradps(5):
             I=quad(lambda x:log(x)**2/(1+x),(0,1))
             print(I)

1.8030853547393914280996072422671749861474794385107483 22
```

Допустим, у нас есть причины подозревать, что этот интеграл равен $\zeta(3)$, умноженному на рациональное число (с не очень большими числителем и знаменателем). `pslq([x1,x2,...])` находит целые числа n_1, n_2, ... такие, что $n_1\,x_1 + n_2\,x_2 + \cdots = 0$. Это — метод нахождения тождеств, называемый *экспериментальной математикой*. Для этого часто требуются вычисления с очень высокой точностью.

```
In [29]: pslq([I,zeta(3)])

Out[29]: [-2, 3]
```

То есть наш интеграл равен $\frac{3}{2}\zeta(3)$. Это, конечно, не доказательство. Но если мы ещё увеличим точность вычисления интеграла, а результат `pslq` не изменится, то мы можем быть практически уверены, что этот результат верен.

Двойной интеграл:

```
In [30]: quad(lambda x,y:1/(1+x*y),[0,1],[0,1])

Out[30]: mpf('0.8224670334241132182362075833230125946094749506033 9899')
```

2.3.5 Сумма ряда

```
In [31]: with extradps(5):
             s=nsum(lambda n:(-1)**(n-1)/n**4,(1,inf))
             print(s)
```

```
0.94703282949724591757650323447352191492790708292888604 42
```

```
In [32]: pslq([s,pi**4])
```

```
Out[32]: [-720, 7]
```

То есть эта сумма, вероятно, равна $\frac{7}{720}\pi^4$.

2.3.6 Дифференциальные уравнения

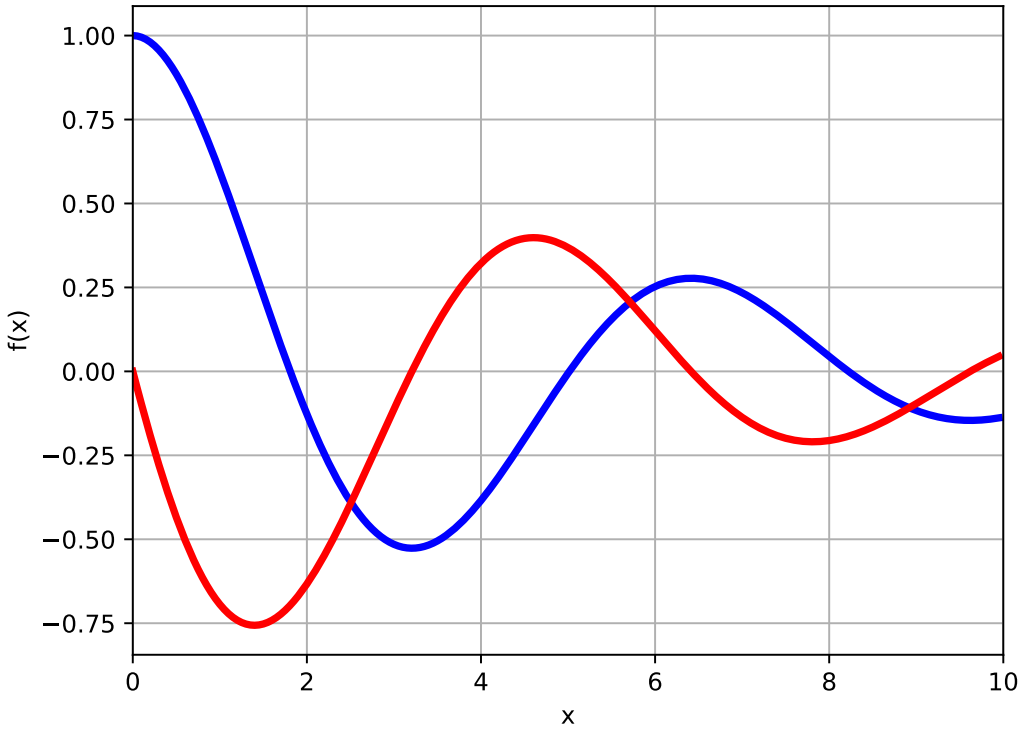
```
In [33]: a=mpf('0.2')
         def f(t,x):
             global a
             return [x[1],-x[0]-2*a*x[1]]
```

```
In [34]: x=odefun(f,0,[1,0])
```

```
In [35]: x(1)
```

```
Out[35]: [mpf('0.594966232637887775007347628402373788809871585742611 47'),
          mpf('-0.693879862109720806831872141877984974950353212999360 26')]
```

```
In [36]: plot([lambda t:x(t)[0],lambda t:x(t)[1]],[0,10])
```



2.3.7 Матрицы

Матрицы разреженные, реализованы как словари. Квадратная матрица

```
In [37]: matrix(2)

Out[37]: matrix(
         [['0.0', '0.0'],
          ['0.0', '0.0']])
```

Прямоугольная матрица

```
In [38]: M=matrix(2,3)
         M

Out[38]: matrix(
         [['0.0', '0.0', '0.0'],
          ['0.0', '0.0', '0.0']])

In [39]: M.rows,M.cols

Out[39]: (2, 3)
```

```
In [40]: M[0,1]=1
         M

Out[40]: matrix(
         [['0.0', '1.0', '0.0'],
          ['0.0', '0.0', '0.0']])
```

Операции с матрицами

```
In [41]: M1=matrix([[0,1],[1,0]])
         M2=matrix([[1,0],[0,-1]])

In [42]: M1+M2

Out[42]: matrix(
         [['1.0', '1.0'],
          ['1.0', '-1.0']])

In [43]: M1*M2

Out[43]: matrix(
         [['0.0', '-1.0'],
          ['1.0', '0.0']])

In [44]: M2*M1

Out[44]: matrix(
         [['0.0', '1.0'],
          ['-1.0', '0.0']])

In [45]: M1**(-1)

Out[45]: matrix(
         [['0.0', '1.0'],
          ['1.0', '0.0']])
```

Решение системы линейных уравнений

```
In [46]: A=matrix([[1,2],[3,4]])
         b=matrix([1,-1])
         b

Out[46]: matrix(
         [['1.0'],
          ['-1.0']])

In [47]: x=lu_solve(A,b)
         x

Out[47]: matrix(
         [['-3.0'],
          ['2.0']])
```

```
In [48]: A*x-b

Out[48]: matrix(
         [['0.0'],
          ['0.0']])
```

Собственные значения и собственные векторы

```
In [49]: l,u=eig(A)
         l

Out[49]: [mpf('-0.372281323269014329925305734109464659110132222899139797'),
          mpf('5.372281323269014329925305734109464659110132222899140 67')]

In [50]: u

Out[50]: matrix(
         [['-0.824564840132393765369050717078772678960953350743 04', '-0.422229150415260453359290
          ['0.565767464968992284722887627980526731251916309347 26', '-0.923052314250193333188615 6
```

Диагональная матрица

```
In [51]: L=diag(l)
         L

Out[51]: matrix(
         [['-0.372281323269014329925305734109464659110132222899 14', '0.0'],
          ['0.0', '5.372281323269014329925305734109464659110132222899 14']])

In [52]: A*u-u*L

Out[52]: matrix(
         [['-2.004573532569146734605402350363611409111397660078 8e-51', '5.345529420184391292281 0
          ['0.0', '1.069105884036878258456214586860592751526078752042e-50']])
```

2.4 pandas

Пакет для статистической обработки данных, по функциональности близкий к R.

```
In [1]: import numpy as np
        import pandas as pd
```

2.4.1 Series

Одномерный набор данных. Отсутствующий данные записываются как `np.nan` (в этот день термометр сломался или метеоролог был пьян); они не участвуют в вычислении средних, среднеквадратичных отклонений и т.д.

```
In [2]: l=[1,3,5,np.nan,6,8]
        s=pd.Series(l)
        s

Out[2]: 0    1.0
        1    3.0
        2    5.0
        3    NaN
        4    6.0
        5    8.0
        dtype: float64
```

Основная информация о наборе данных: среднее, среднеквадратичное отклонение, минимум, максимум, медиана (которая отличается от среднего для несимметричных распределений).

```
In [3]: s.describe()

Out[3]: count    5.000000
        mean     4.600000
        std      2.701851
        min      1.000000
        25%      3.000000
        50%      5.000000
        75%      6.000000
        max      8.000000
        dtype: float64
```

Обычная индексация.

```
In [4]: s[2]

Out[4]: 5.0

In [5]: s[2]=7
        s
```

```
Out[5]: 0    1.0
        1    3.0
        2    7.0
        3    NaN
        4    6.0
        5    8.0
        dtype: float64

In [6]: s[2:5]

Out[6]: 2    7.0
        3    NaN
        4    6.0
        dtype: float64

In [7]: s1=s[1:]
        s1

Out[7]: 1    3.0
        2    7.0
        3    NaN
        4    6.0
        5    8.0
        dtype: float64

In [8]: s2=s[:-1]
        s2

Out[8]: 0    1.0
        1    3.0
        2    7.0
        3    NaN
        4    6.0
        dtype: float64
```

В сумме `s1+s2` складываются данные с одинаковыми индексами. Поскольку в `s1` нет данного и индексом 0, а в `s2` — с индексом 5, в `s1+s2` в соответствующих позициях будет `NaN`.

```
In [9]: s1+s2

Out[9]: 0     NaN
        1     6.0
        2    14.0
        3     NaN
        4    12.0
        5     NaN
        dtype: float64
```

К наборам данных можно применять функции из `numpy`.

```
In [10]: np.exp(s)

Out[10]: 0       2.718282
         1      20.085537
         2    1096.633158
         3            NaN
         4     403.428793
         5    2980.957987
         dtype: float64
```

При создании набора данных `s` мы не указали, что будет играть роль индекса. По умолчанию это последовательность целых чисел 0, 1, 2, ...

```
In [11]: s.index

Out[11]: RangeIndex(start=0, stop=6, step=1)
```

Но можно создавать наборы данных с индексом, заданным списком.

```
In [12]: i=list('abcdef')
         i

Out[12]: ['a', 'b', 'c', 'd', 'e', 'f']

In [13]: s=pd.Series(l,index=i)
         s

Out[13]: a    1.0
         b    3.0
         c    5.0
         d    NaN
         e    6.0
         f    8.0
         dtype: float64

In [14]: s['c']

Out[14]: 5.0
```

Если индекс — строка, то вместо `s['c']` можно писать `s.c`.

```
In [15]: s.c

Out[15]: 5.0
```

Набор данных можно создать из словаря.

```
In [16]: s=pd.Series({'a':1,'b':2,'c':0})
         s
```

```
Out[16]: a    1
         b    2
         c    0
         dtype: int64
```

Можно отсортировать набор данных.

```
In [17]: s.sort_values()

Out[17]: c    0
         a    1
         b    2
         dtype: int64
```

Роль индекса может играть, скажем, последовательность дат (или времён измерения и т.д.).

```
In [2]: d=pd.date_range('20170101',periods=10)
        d

Out[2]: DatetimeIndex(['2017-01-01', '2017-01-02', '2017-01-03', '2017-01-04',
                       '2017-01-05', '2017-01-06', '2017-01-07', '2017-01-08',
                       '2017-01-09', '2017-01-10'],
                      dtype='datetime64[ns]', freq='D')

In [3]: s=pd.Series(np.random.normal(size=10),index=d)
        s

Out[3]: 2017-01-01    0.356263
        2017-01-02   -0.149695
        2017-01-03    0.823284
        2017-01-04    1.936065
        2017-01-05    0.309854
        2017-01-06    0.642161
        2017-01-07    0.499560
        2017-01-08    0.004974
        2017-01-09    0.245381
        2017-01-10    0.951140
        Freq: D, dtype: float64
```

Операции сравнения возвращают наборы булевых данных.

```
In [4]: s>0

Out[4]: 2017-01-01     True
        2017-01-02    False
        2017-01-03     True
        2017-01-04     True
        2017-01-05     True
        2017-01-06     True
```

```
2017-01-07     True
2017-01-08     True
2017-01-09     True
2017-01-10     True
Freq: D, dtype: bool
```

Если такой булев набор использовать для индексации, получится поднабор только из тех данных, для которых условие есть `True`.

```
In [5]: s[s>0]

Out[5]: 2017-01-01    0.356263
        2017-01-03    0.823284
        2017-01-04    1.936065
        2017-01-05    0.309854
        2017-01-06    0.642161
        2017-01-07    0.499560
        2017-01-08    0.004974
        2017-01-09    0.245381
        2017-01-10    0.951140
        dtype: float64
```

Кумулятивные максимумы — от первого элемента до текущего.

```
In [6]: s.cummax()

Out[6]: 2017-01-01    0.356263
        2017-01-02    0.356263
        2017-01-03    0.823284
        2017-01-04    1.936065
        2017-01-05    1.936065
        2017-01-06    1.936065
        2017-01-07    1.936065
        2017-01-08    1.936065
        2017-01-09    1.936065
        2017-01-10    1.936065
        Freq: D, dtype: float64
```

Кумулятивные суммы.

```
In [7]: s=s.cumsum()
        s

Out[7]: 2017-01-01    0.356263
        2017-01-02    0.206568
        2017-01-03    1.029852
        2017-01-04    2.965918
        2017-01-05    3.275771
        2017-01-06    3.917933
```

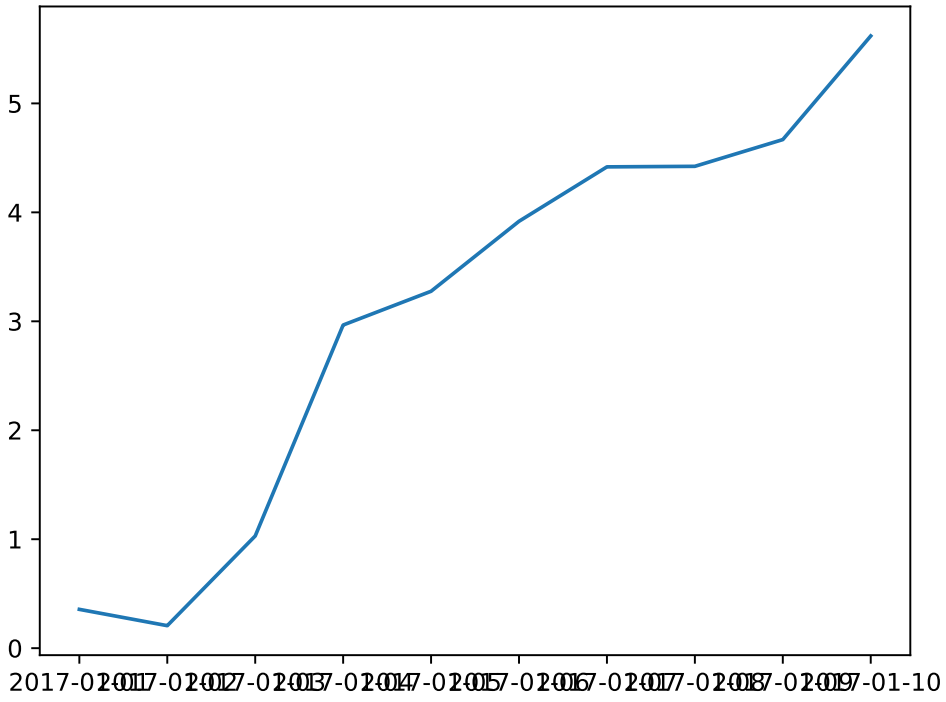
```
2017-01-07    4.417493
2017-01-08    4.422467
2017-01-09    4.667848
2017-01-10    5.618988
Freq: D, dtype: float64
```

Построим график.

```
In [24]: import matplotlib.pyplot as plt
         %matplotlib inline

In [25]: plt.plot(s)

Out[25]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f13629c9080>]
```



2.4.2 DataFrame

Двумерная таблица данных. Имеет индекс и набор столбцов (возможно, имеющих разные типы). Таблицу можно построить, например, из словаря, значениями в котором являются одномерные наборы данных.

```
In [26]: d={'one':pd.Series([1,2,3],index=['a','b','c']),
            'two':pd.Series([1,2,3,4],index=['a','b','c','d'])}
         df=pd.DataFrame(d)
         df

Out[26]:    one  two
         a  1.0    1
         b  2.0    2
         c  3.0    3
         d  NaN    4

In [27]: df.index

Out[27]: Index(['a', 'b', 'c', 'd'], dtype='object')

In [28]: df.columns

Out[28]: Index(['one', 'two'], dtype='object')
```

Если в качестве индекса указать имя столбца, получится одномерный набор данных.

```
In [29]: df['one']

Out[29]: a    1.0
         b    2.0
         c    3.0
         d    NaN
         Name: one, dtype: float64

In [30]: df.one

Out[30]: a    1.0
         b    2.0
         c    3.0
         d    NaN
         Name: one, dtype: float64

In [31]: df['one']['c']

Out[31]: 3.0
```

Однако если указать диапазон индексов, то это означает диапазон строк. Причём последняя строка включается в таблицу.

```
In [32]: df['b':'d']

Out[32]:    one  two
         b  2.0    2
         c  3.0    3
         d  NaN    4
```

Диапазон целых чисел даёт диапазон строк с такими номерами, не включая последнюю строку (как обычно при индексировании списков). Всё это кажется довольно нелогичным.

```
In [33]: df[1:3]

Out[33]:    one  two
         b  2.0    2
         c  3.0    3
```

Логичнее работает атрибут `loc`: первая позиция — всегда индекс строки, а вторая — столбца.

```
In [34]: df.loc['b']

Out[34]: one    2.0
         two    2.0
         Name: b, dtype: float64

In [35]: df.loc['b','one']

Out[35]: 2.0

In [36]: df.loc['a':'b','one']

Out[36]: a    1.0
         b    2.0
         Name: one, dtype: float64

In [37]: df.loc['a':'b',:]

Out[37]:    one  two
         a  1.0    1
         b  2.0    2

In [38]: df.loc[:,'one']

Out[38]: a    1.0
         b    2.0
         c    3.0
         d    NaN
         Name: one, dtype: float64
```

К таблице можно добавлять новые столбцы.

```
In [39]: df['three']=df['one']*df['two']
         df['flag']=df['two']>2
         df

Out[39]:    one  two  three   flag
         a  1.0    1    1.0  False
         b  2.0    2    4.0  False
         c  3.0    3    9.0   True
         d  NaN    4    NaN   True
```

И удалять имеющиеся.

```
In [40]: del df['two']
         df['foo']=0.
         df
```

```
Out[40]:    one  three   flag  foo
         a  1.0    1.0  False  0.0
         b  2.0    4.0  False  0.0
         c  3.0    9.0   True  0.0
         d  NaN    NaN   True  0.0
```

Добавим копию столбца `one`, в которую входят только строки до второй.

```
In [41]: df['one_tr']=df['one'][:2]
         df
```

```
Out[41]:    one  three   flag  foo  one_tr
         a  1.0    1.0  False  0.0     1.0
         b  2.0    4.0  False  0.0     2.0
         c  3.0    9.0   True  0.0     NaN
         d  NaN    NaN   True  0.0     NaN
```

```
In [42]: df=df.loc[:,['one','one_tr']]
         df
```

```
Out[42]:    one  one_tr
         a  1.0     1.0
         b  2.0     2.0
         c  3.0     NaN
         d  NaN     NaN
```

Можно объединять таблицы по вертикали и по горизонтали.

```
In [43]: df2=pd.DataFrame({'one':{'e':0,'f':1},'one_tr':{'e':2}})
         df2
```

```
Out[43]:    one  one_tr
         e    0     2.0
         f    1     NaN
```

```
In [44]: pd.concat([df,df2])
```

```
Out[44]:    one  one_tr
         a  1.0     1.0
         b  2.0     2.0
         c  3.0     NaN
         d  NaN     NaN
         e  0.0     2.0
         f  1.0     NaN
```

```
In [45]: df2=pd.DataFrame({'two':{'a':0,'b':1},'three':{'c':2,'d':3}})
         df2

Out[45]:    three  two
         a    NaN  0.0
         b    NaN  1.0
         c    2.0  NaN
         d    3.0  NaN

In [46]: pd.concat([df,df2],axis=1)

Out[46]:    one  one_tr  three  two
         a  1.0     1.0    NaN  0.0
         b  2.0     2.0    NaN  1.0
         c  3.0     NaN    2.0  NaN
         d  NaN     NaN    3.0  NaN
```

Создадим таблицу из массива случайных чисел.

```
In [10]: df=pd.DataFrame(np.random.randn(10,4),
                         columns=['A','B','C','D'])
         df

Out[10]:           A         B         C         D
         0  0.706305 -0.789569 -0.692519  0.340655
         1  0.277662  1.168946 -0.456736 -0.824495
         2 -1.742185 -1.623243 -0.188642 -0.164130
         3 -0.486917 -0.404665  0.828688  1.960935
         4 -0.009105  1.221108  0.399887  3.075690
         5  0.440579  1.513206  0.251294  0.838322
         6  1.800180  1.877250 -0.721819 -1.637900
         7  0.518764  1.372829 -0.513600 -0.544454
         8 -0.823112 -1.188590  1.861447  1.272845
         9  1.103270 -1.380487  0.227549  0.769414

In [11]: df2=pd.DataFrame(np.random.randn(7,3),columns=['A','B','C'])
         df+df2

Out[11]:           A         B         C   D
         0 -0.396002 -0.388489 -0.938762 NaN
         1  0.025981 -0.822861 -1.221219 NaN
         2 -1.859502 -0.265075 -1.399910 NaN
         3 -0.937928 -0.118183 -0.413946 NaN
         4 -0.038995  1.159641  2.223911 NaN
         5  0.478176 -0.599153 -1.214517 NaN
         6  1.387845  0.992897 -0.214836 NaN
         7       NaN       NaN       NaN NaN
         8       NaN       NaN       NaN NaN
         9       NaN       NaN       NaN NaN
```

```
In [12]: 2*df+3
```

Out[12]:

	A	B	C	D
0	4.412610	1.420863	1.614962	3.681311
1	3.555324	5.337893	2.086527	1.351011
2	-0.484370	-0.246485	2.622715	2.671739
3	2.026166	2.190670	4.657376	6.921870
4	2.981789	5.442216	3.799774	9.151381
5	3.881158	6.026413	3.502587	4.676644
6	6.600359	6.754500	1.556363	-0.275800
7	4.037527	5.745658	1.972800	1.911092
8	1.353775	0.622821	6.722893	5.545690
9	5.206539	0.239026	3.455098	4.538828

```
In [13]: np.sin(df)
```

Out[13]:

	A	B	C	D
0	0.649027	-0.710050	-0.638478	0.334105
1	0.274108	0.920339	-0.441021	-0.734205
2	-0.985349	-0.998625	-0.187526	-0.163394
3	-0.467903	-0.393711	0.737045	0.924856
4	-0.009105	0.939480	0.389314	0.065855
5	0.426463	0.998342	0.248657	0.743522
6	0.973807	0.953409	-0.660751	-0.997749
7	0.495807	0.980468	-0.491316	-0.517951
8	-0.733266	-0.927844	0.958058	0.955940
9	0.892686	-0.981946	0.225590	0.695714

```
In [14]: df.describe()
```

Out[14]:

	A	B	C	D
count	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
mean	0.178544	0.176679	0.099555	0.508688
std	1.007094	1.373741	0.805262	1.391815
min	-1.742185	-1.623243	-0.721819	-1.637900
25%	-0.367464	-1.088834	-0.499384	-0.449373
50%	0.359121	0.382141	0.019453	0.555035
75%	0.659420	1.334899	0.362739	1.164214
max	1.800180	1.877250	1.861447	3.075690

```
In [15]: df.sort_values(by='B')
```

Out[15]:

	A	B	C	D
2	-1.742185	-1.623243	-0.188642	-0.164130
9	1.103270	-1.380487	0.227549	0.769414
8	-0.823112	-1.188590	1.861447	1.272845
0	0.706305	-0.789569	-0.692519	0.340655
3	-0.486917	-0.404665	0.828688	1.960935
1	0.277662	1.168946	-0.456736	-0.824495

```
4 -0.009105  1.221108  0.399887  3.075690
7  0.518764  1.372829 -0.513600 -0.544454
5  0.440579  1.513206  0.251294  0.838322
6  1.800180  1.877250 -0.721819 -1.637900
```

Атрибут `iloc` подобен `loc`: первый индекс — номер строки, второй — номер столбца. Это целые числа, конец диапазона на включается (как обычно в питоне).

```
In [16]: df.iloc[2]

Out[16]: A   -1.742185
         B   -1.623243
         C   -0.188642
         D   -0.164130
         Name: 2, dtype: float64

In [17]: df.iloc[1:3]

Out[17]:           A         B         C         D
         1  0.277662  1.168946 -0.456736 -0.824495
         2 -1.742185 -1.623243 -0.188642 -0.164130

In [18]: df.iloc[1:3,0:2]

Out[18]:           A         B
         1  0.277662  1.168946
         2 -1.742185 -1.623243
```

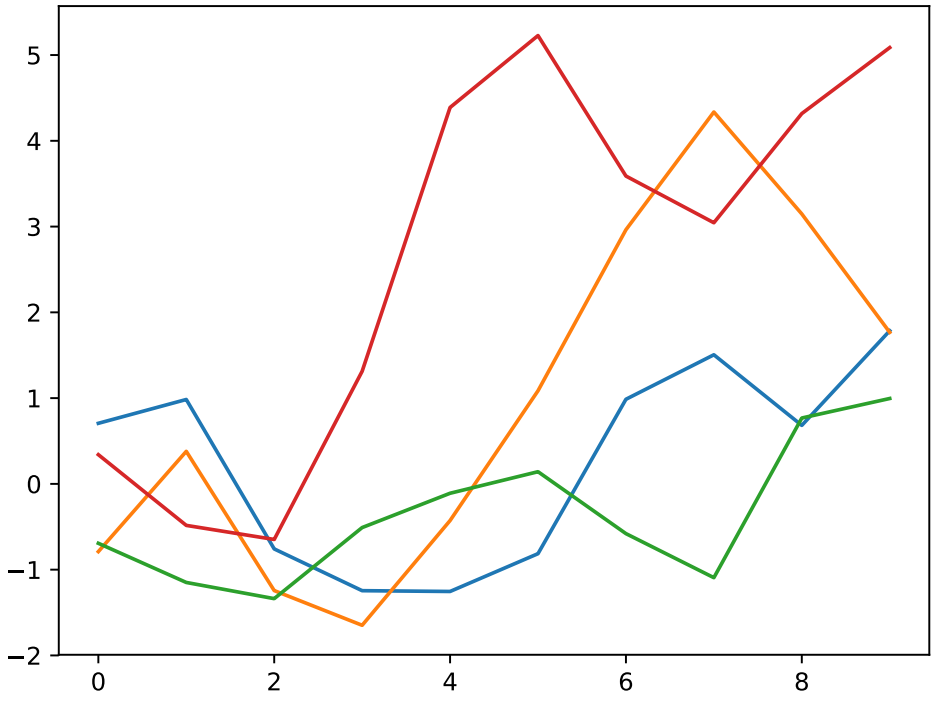
Построим графики кумулятивных сумм — мировые линии четырёх пьяных, у которых величина каждого шага — гауссова случайная величина.

```
In [19]: cs=df.cumsum()
         cs

Out[19]:           A         B         C         D
         0  0.706305 -0.789569 -0.692519  0.340655
         1  0.983967  0.379378 -1.149255 -0.483839
         2 -0.758218 -1.243865 -1.337898 -0.647969
         3 -1.245135 -1.648530 -0.509210  1.312965
         4 -1.254240 -0.427422 -0.109322  4.388656
         5 -0.813661  1.085784  0.141971  5.226978
         6  0.986519  2.963035 -0.579848  3.589078
         7  1.505282  4.335864 -1.093447  3.044624
         8  0.682170  3.147274  0.767999  4.317469
         9  1.785440  1.766788  0.995548  5.086883

In [57]: plt.plot(cs)

Out[57]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f13628a3390>,
          <matplotlib.lines.Line2D at 0x7f13628a3550>,
          <matplotlib.lines.Line2D at 0x7f13628a3748>,
          <matplotlib.lines.Line2D at 0x7f13628a3940>]
```


5
4
3
2
1
0
−1
−2
0
2
4
6
8

2.5 SymPy

SymPy — это пакет для символьных вычислений на питоне, подобный системе *Mathematica*. Он работает с выражениями, содержащими символы.

```
In [1]: from sympy import *
        init_printing()
```

Основными кирпичиками, из которых строятся выражения, являются символы. Символ имеет имя, которое используется при печати выражений. Объекты класса `Symbol` нужно создавать и присваивать переменным питона, чтобы их можно было использовать. В принципе, имя символа и имя переменной, которой мы присваиваем этот символ — две независимые вещи, и можно написать `abc=Symbol('xyz')`. Но тогда при вводе программы Вы будете использовать `abc`, а при печати результатов SymPy будет использовать `xyz`, что приведёт к ненужной путанице. Поэтому лучше, чтобы имя символа совпадало с именем переменной питона, которой он присваивается.

В языках, специально предназначенных для символьных вычислений, таких, как *Mathematica*, если Вы используете переменную, которой ничего не было присвоено, то она автоматически воспринимается как символ с тем же именем. Питон не был изначально предназначен для символьных вычислений. Если Вы используете переменную, которой ничего не было присвоено, Вы получите сообщение об ошибке. Объекты типа `Symbol` нужно создавать явно.

```
In [2]: x=Symbol('x')
```

```
In [3]: a=x**2-1
        a
```

```
Out[3]:
```

$$x^2 - 1$$

```
In [4]: type(a)
```

```
Out[4]: sympy.core.add.Add
```

Можно определить несколько символов одновременно. Строка разбивается на имена по пробелам.

```
In [5]: y,z=symbols('y z')
```

Подставим вместо x выражение $y + 1$.

```
In [6]: a.subs(x,y+1)
```

```
Out[6]:
```

$$(y + 1)^2 - 1$$

2.5.1 Многочлены и рациональные функции

SymPy не раскрывает скобки автоматически. Для этого используется функция expand.

```
In [7]: a=(x+y-z)**6
        a
```

Out[7]:

$$(x + y - z)^6$$

```
In [8]: a=expand(a)
        a
```

Out[8]:

$$x^6+6x^5y-6x^5z+15x^4y^2-30x^4yz+15x^4z^2+20x^3y^3-60x^3y^2z+60x^3yz^2-20x^3z^3+15x^2y^4-60x^2y^3z+90x^2y^2z^2-60x^2$$

Степень многочлена a по x.

```
In [9]: degree(a,x)
```

Out[9]:

$$6$$

Соберём вместе члены с определёнными степенями x.

```
In [10]: collect(a,x)
```

Out[10]:

$$x^6+x^5\left(6y-6z\right)+x^4\left(15y^2-30yz+15z^2\right)+x^3\left(20y^3-60y^2z+60yz^2-20z^3\right)+x^2\left(15y^4-60y^3z+90y^2z^2-60yz^3\right.$$

Многочлен с целыми коэффициентами можно записать в виде произведения таких многочленов (причём каждый сомножитель уже невозможно расфакторизовать дальше, оставаясь в рамках многочленов с целыми коэффициентами). Существуют эффективные алгоритмы для решения этой задачи.

```
In [11]: a=factor(a)
         a
```

Out[11]:

$$(x + y - z)^6$$

SymPy не сокращает отношения многочленов на их наибольший общий делитель автоматически. Для этого используется функция cancel.

```
In [12]: a=(x**3-y**3)/(x**2-y**2)
         a
```

Out[12]:

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}$$

In [13]: `cancel(a)`

Out[13]:

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}$$

SymPy не приводит суммы рациональных выражений к общему знаменателю автоматически. Для этого используется функция `together`.

In [14]:
```
a=y/(x-y)+x/(x+y)
a
```

Out[14]:

$$\frac{x}{x + y} + \frac{y}{x - y}$$

In [15]: `together(a)`

Out[15]:

$$\frac{x\,(x - y) + y\,(x + y)}{(x - y)\,(x + y)}$$

Функция `simplify` пытается переписать выражение *в наиболее простом виде*. Это понятие не имеет чёткого определения (в разных ситуациях *наиболее простыми* могут считаться разные формы выражения), и не существует алгоритма такого упрощения. Функция `symplify` работает эвристически, и невозможно заранее предугадать, какие упрощения она попытается сделать. Поэтому её удобно использовать в интерактивных сессиях, чтобы посмотреть, удастся ли ей записать выражение в каком-нибудь разумном виде, но нежелательно использовать в программах. В них лучше применять более специализированные функции, которые выполняют одно определённое преобразование выражения.

In [16]: `simplify(a)`

Out[16]:

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

Разложение на элементарные дроби по отношению к x и y.

In [17]: `apart(a,x)`

Out[17]:

$$-\frac{y}{x + y} + \frac{y}{x - y} + 1$$

```
In [18]: apart(a,y)
```

Out[18]:

$$\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x-y}-1$$

Подставим конкретные численные значения вместо переменных x и y.

```
In [19]: a=a.subs({x:1,y:2})
         a
```

Out[19]:

$$-\frac{5}{3}$$

А сколько это будет численно?

```
In [20]: a.n()
```

Out[20]:

$$-1.66666666666667$$

2.5.2 Элементарные функции

SymPy автоматически применяет упрощения элементарных функция (которые справедливы во всех случаях).

```
In [21]: sin(-x)
```

Out[21]:

$$-\sin(x)$$

```
In [22]: cos(pi/4),tan(5*pi/6)
```

Out[22]:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\quad -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

SymPy может работать с числами с плавающей точкой, имеющими сколь угодно большую точность. Вот π с 100 значащими цифрами.

```
In [23]: pi.n(100)
```

Out[23]:

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706

E — это основание натуральных логарифмов.

```
In [24]: log(1),log(E)
```

Out[24]:

$$(0, \quad 1)$$

```
In [25]: exp(log(x)),log(exp(x))
```

Out[25]:

$$(x, \quad \log\left(e^{x}\right))$$

А почему не x? Попробуйте подставить $x = 2\pi i$.

```
In [26]: sqrt(0)
```

Out[26]:

$$0$$

```
In [27]: sqrt(x)**4,sqrt(x**4)
```

Out[27]:

$$\left(x^{2}, \quad \sqrt{x^{4}}\right)$$

А почему не x^2? Попробуйте подставить $x = i$.

Символы могут иметь некоторые свойства. Например, они могут быть положительными. Тогда `SymPy` может сильнее упростить квадратные корни.

```
In [28]: p,q=symbols('p q',positive=True)
         sqrt(p**2)
```

Out[28]:

$$p$$

```
In [29]: sqrt(12*x**2*y),sqrt(12*p**2*y)
```

Out[29]:

$$\left(2\sqrt{3}\sqrt{x^{2}y}, \quad 2\sqrt{3}p\sqrt{y}\right)$$

Пусть символ n будет целым (`I` — это мнимая единица).

```
In [30]: n=Symbol('n',integer=True)
         simplify(exp(2*pi*I*n))
```

Out[30]:

$$1$$

```
In [31]: sin(pi*n)
```

Out[31]:

$$0$$

Метод `rewrite` пытается переписать выражение в терминах заданной функции.

```
In [32]: cos(x).rewrite(exp),exp(I*x).rewrite(cos)
```

Out[32]:

$$\left(\frac{e^{ix}}{2} + \frac{1}{2}e^{-ix}, \quad i\sin(x) + \cos(x)\right)$$

```
In [33]: asin(x).rewrite(log)
```

Out[33]:

$$-i\log\left(ix + \sqrt{-x^2+1}\right)$$

Функция `trigsimp` пытается переписать тригонометрическое выражение в *наиболее простом виде*. В программах лучше использовать более специализированные функции.

```
In [34]: trigsimp(2*sin(x)**2+3*cos(x)**2)
```

Out[34]:

$$\cos^2(x) + 2$$

Функция `expand_trig` разлагает синусы и косинусы сумм и кратных углов.

```
In [35]: expand_trig(sin(x-y)),expand_trig(sin(2*x))
```

Out[35]:

$$(\sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x), \quad 2\sin(x)\cos(x))$$

Чаще нужно обратное преобразование — произведений и степеней синусов и косинусов в выражения, линейные по этим функциям. Например, пусть мы работаем с отрезком ряда Фурье.

```
In [36]: a1,a2,b1,b2=symbols('a1 a2 b1 b2')
         a=a1*cos(x)+a2*cos(2*x)+b1*sin(x)+b2*sin(2*x)
         a
```

Out[36]:

$$a_1\cos(x) + a_2\cos(2x) + b_1\sin(x) + b_2\sin(2x)$$

Мы хотим возвести его в квадрат и опять получить отрезок ряда Фурье.

```
In [37]: a=(a**2).rewrite(exp).expand().rewrite(cos).expand()
         a
```

Out[37]:

$$\frac{a_1^2}{2}\cos(2x)+\frac{a_1^2}{2}+a_1a_2\cos(x)+a_1a_2\cos(3x)+a_1b_1\sin(2x)+a_1b_2\sin(x)+a_1b_2\sin(3x)+\frac{a_2^2}{2}\cos(4x)+\frac{a_2^2}{2}-a_2b_1\sin(x)+$$

```
In [38]: a.collect([cos(x),cos(2*x),cos(3*x),sin(x),sin(2*x),sin(3*x)])
```

Out[38]:

$$\frac{a_1^2}{2}+a_1b_1\sin(2x)+\frac{a_2^2}{2}\cos(4x)+\frac{a_2^2}{2}+a_2b_2\sin(4x)+\frac{b_1^2}{2}-\frac{b_2^2}{2}\cos(4x)+\frac{b_2^2}{2}+\left(\frac{a_1^2}{2}-\frac{b_1^2}{2}\right)\cos(2x)+(a_1a_2-b_1b_2)\cos(3x)+$$

Функция `expand_log` преобразует логарифмы произведений и степеней в суммы логарифмов (только для положительных величин); `logcombine` производит обратное преобразование.

```
In [39]: a=expand_log(log(p*q**2))
         a
```

Out[39]:

$$\log(p)+2\log(q)$$

```
In [40]: logcombine(a)
```

Out[40]:

$$\log\left(pq^2\right)$$

Функция `expand_power_exp` переписывает степени, показатели которых — суммы, через произведения степеней.

```
In [41]: expand_power_exp(x**(p+q))
```

Out[41]:

$$x^px^q$$

Функция `expand_power_base` переписывает степени, основания которых — произведения, через произведения степеней.

```
In [42]: expand_power_base((x*y)**n)
```

Out[42]:

$$x^ny^n$$

Функция `powsimp` выполняет обратные преобразования.

```
In [43]: powsimp(exp(x)*exp(2*y)),powsimp(x**n*y**n)
```

```
Out[43]:
```

$$\left(e^{x+2y}, \quad (xy)^n\right)$$

Можно вводить функции пользователя. Они могут иметь произвольное число аргументов.

```
In [44]: f=Function('f')
         f(x)+f(x,y)
```

```
Out[44]:
```

$$f(x) + f(x, y)$$

2.5.3 Структура выражений

Внутреннее представление выражения — это дерево. Функция `srepr` возвращает строку, представляющую его.

```
In [45]: srepr(x+1)
```

```
Out[45]: "Add(Symbol('x'), Integer(1))"
```

```
In [46]: srepr(x-1)
```

```
Out[46]: "Add(Symbol('x'), Integer(-1))"
```

```
In [47]: srepr(x-y)
```

```
Out[47]: "Add(Symbol('x'), Mul(Integer(-1), Symbol('y')))"
```

```
In [48]: srepr(2*x*y/3)
```

```
Out[48]: "Mul(Rational(2, 3), Symbol('x'), Symbol('y'))"
```

```
In [49]: srepr(x/y)
```

```
Out[49]: "Mul(Symbol('x'), Pow(Symbol('y'), Integer(-1)))"
```

Вместо бинарных операций `+`, `*`, `**` и т.д. можно использовать функции `Add`, `Mul`, `Pow` и т.д.

```
In [50]: Mul(x,Pow(y,-1))==x/y
```

```
Out[50]: True
```

```
In [51]: srepr(f(x,y))
```

```
Out[51]: "Function('f')(Symbol('x'), Symbol('y'))"
```

Атрибут `func` — это функция верхнего уровня в выражении, а `args` — список её аргументов.

```
In [52]: a=2*x*y**2
         a.func
```

```
Out[52]: sympy.core.mul.Mul
```

```
In [53]: a.args
```

```
Out[53]:
```

$$\left(2, \quad x, \quad y^2\right)$$

```
In [54]: a.args[0]
```

```
Out[54]:
```

$$2$$

```
In [55]: for i in a.args:
             print(i)
```

```
2
x
y**2
```

Функция subs заменяет переменную на выражение.

```
In [56]: a.subs(y,2)
```

```
Out[56]:
```

$$8x$$

Она можнет заменить несколько переменных. Для этого ей передаётся список кортежей или словарь.

```
In [57]: a.subs([(x,pi),(y,2)])
```

```
Out[57]:
```

$$8\pi$$

```
In [58]: a.subs({x:pi,y:2})
```

```
Out[58]:
```

$$8\pi$$

Она может заменить не переменную, а подвыражение — функцию с аргументами.

```
In [59]: a=f(x)+f(y)
         a.subs(f(y),1)
```

Out[59]:

$$f(x)+1$$

In [60]:
```
(2*x*y*z).subs(x*y,z)
```

Out[60]:

$$2z^2$$

In [61]:
```
(x+x**2+x**3+x**4).subs(x**2,y)
```

Out[61]:

$$x^3+x+y^2+y$$

Подстановки производятся последовательно. В данном случае сначала x заменился на y, получилось y^3+y^2; потом в этом результате y заменилось на x.

In [62]:
```
a=x**2+y**3
a.subs([(x,y),(y,x)])
```

Out[62]:

$$x^3+x^2$$

Если написать эти подстановки в другом порядке, результат будет другим.

In [63]:
```
a.subs([(y,x),(x,y)])
```

Out[63]:

$$y^3+y^2$$

Но можно передать функции `subs` ключевой параметр `simultaneous=True`, тогда подстановки будут производиться одновременно. Таким образом можно, например, поменять местами x и y.

In [64]:
```
a.subs([(x,y),(y,x)],simultaneous=True)
```

Out[64]:

$$x^3+y^2$$

Можно заменить функцию на другую функцию.

In [65]:
```
g=Function('g')
a=f(x)+f(y)
a.subs(f,g)
```

Out[65]:

$$g(x) + g(y)$$

Метод `replace` ищет подвыражения, соответствующие образцу (содержащему произвольные переменные), и заменяет их на заданное выражение (оно может содержать те же произвольные переменные).

```
In [66]: a=Wild('a')
         (f(x)+f(x+y)).replace(f(a),a**2)
```

Out[66]:

$$x^2 + (x+y)^2$$

```
In [67]: (f(x,x)+f(x,y)).replace(f(a,a),a**2)
```

Out[67]:

$$x^2 + f(x,y)$$

```
In [68]: a=x**2+y**2
         a.replace(x,x+1)
```

Out[68]:

$$y^2 + (x+1)^2$$

Соответствовать образцу должно целое подвыражение, это не может быть часть сомножителей в произведении или меньшая степеть в большей.

```
In [69]: a=2*x*y*z
         a.replace(x*y,z)
```

Out[69]:

$$2xyz$$

```
In [70]: (x+x**2+x**3+x**4).replace(x**2,y)
```

Out[70]:

$$x^4 + x^3 + x + y$$

2.5.4 Решение уравнений

```
In [71]: a,b,c,d,e,f=symbols('a b c d e f')
```

Уравнение записывается как функция `Eq` с двумя параметрами. Функция `solve` возвращает список решений.

```
In [72]: solve(Eq(a*x,b),x)
```

```
Out[72]:
```

$$\left[\frac{b}{a}\right]$$

Впрочем, можно передать функции `solve` просто выражение. Подразумевается уравнение, что это выражение равно 0.

```
In [73]: solve(a*x+b,x)
```

```
Out[73]:
```

$$\left[-\frac{b}{a}\right]$$

Квадратное уравнение имеет 2 решения.

```
In [74]: solve(a*x**2+b*x+c,x)
```

```
Out[74]:
```

$$\left[\frac{1}{2a}\left(-b+\sqrt{-4ac+b^2}\right),\quad -\frac{1}{2a}\left(b+\sqrt{-4ac+b^2}\right)\right]$$

Система линейных уравнений.

```
In [75]: solve([a*x+b*y-e,c*x+d*y-f],[x,y])
```

```
Out[75]:
```

$$\left\{x:\frac{-bf+de}{ad-bc},\quad y:\frac{af-ce}{ad-bc}\right\}$$

Функция `roots` возвращает корни многочлена с их множественностями.

```
In [76]: roots(x**3-3*x+2,x)
```

```
Out[76]:
```

$$\{-2:1,\quad 1:2\}$$

Функция `solve_poly_system` решает систему полиномиальных уравнений, строя их базис Грёбнера.

In [77]:
```
p1=x**2+y**2-1
p2=4*x*y-1
solve_poly_system([p1,p2],x,y)
```

Out[77]:

$$\left[\left(4\left(-1-\sqrt{-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}}\right)\sqrt{-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}}\left(-\sqrt{-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}}+1\right),\quad -\sqrt{-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}}\right),\quad \left(-4\left(-1+\sqrt{-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}}\right)\right.$$

2.5.5 Ряды

In [78]:
```
exp(x).series(x,0,5)
```

Out[78]:

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\mathcal{O}\left(x^5\right)$$

Ряд может начинаться с отрицательной степени.

In [79]:
```
cot(x).series(x,n=5)
```

Out[79]:

$$\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}+\mathcal{O}\left(x^5\right)$$

И даже идти по полуцелым степеням.

In [80]:
```
sqrt(x*(1-x)).series(x,n=5)
```

Out[80]:

$$\sqrt{x}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}-\frac{x^{\frac{5}{2}}}{8}-\frac{x^{\frac{7}{2}}}{16}-\frac{5x^{\frac{9}{2}}}{128}+\mathcal{O}\left(x^5\right)$$

In [81]:
```
log(gamma(1+x)).series(x,n=6).rewrite(zeta)
```

Out[81]:

$$-\gamma x+\frac{\pi^2x^2}{12}-\frac{x^3\zeta\left(3\right)}{3}+\frac{\pi^4x^4}{360}-\frac{x^5\zeta\left(5\right)}{5}+\mathcal{O}\left(x^6\right)$$

Подготовим 3 ряда.

In [82]:
```
sinx=series(sin(x),x,0,8)
sinx
```

Out[82]:

$$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\mathcal{O}\left(x^8\right)$$

```
In [83]: cosx=series(cos(x),x,n=8)
         cosx
```

Out[83]:

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \mathcal{O}\left(x^8\right)$$

```
In [84]: tanx=series(tan(x),x,n=8)
         tanx
```

Out[84]:

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \mathcal{O}\left(x^8\right)$$

Произведения и частные рядов не вычисляются автоматически, к ним надо применить функцию `series`.

```
In [85]: series(tanx*cosx,n=8)
```

Out[85]:

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \mathcal{O}\left(x^8\right)$$

```
In [86]: series(sinx/cosx,n=8)
```

Out[86]:

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \mathcal{O}\left(x^8\right)$$

А этот ряд должен быть равен 1. Но поскольку `sinx` и `cosx` известны лишь с ограниченной точностью, мы получаем 1 с той же точностью.

```
In [87]: series(sinx**2+cosx**2,n=8)
```

Out[87]:

$$1 + \mathcal{O}\left(x^8\right)$$

Здесь первые члены сократились, и ответ можно получить лишь с меньшей точностью.

```
In [88]: series((1-cosx)/x**2,n=6)
```

Out[88]:

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + \frac{x^4}{720} + \mathcal{O}\left(x^6\right)$$

Ряды можно дифференцировать и интегрировать.

```
In [89]: diff(sinx,x)
```

Out[89]:

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \mathcal{O}\left(x^7\right)$$

In [90]:
```
integrate(cosx,x)
```

Out[90]:

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \mathcal{O}\left(x^9\right)$$

Можно подставить ряд (если он начинается с малого члена) вместо переменной разложения в другой ряд. Вот ряды для $\sin(\tan(x))$ и $\tan(\sin(x))$.

In [91]:
```
st=series(sinx.subs(x,tanx),n=8)
st
```

Out[91]:

$$x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{55x^7}{1008} + \mathcal{O}\left(x^8\right)$$

In [92]:
```
ts=series(tanx.subs(x,sinx),n=8)
ts
```

Out[92]:

$$x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{107x^7}{5040} + \mathcal{O}\left(x^8\right)$$

In [93]:
```
series(ts-st,n=8)
```

Out[93]:

$$\frac{x^7}{30} + \mathcal{O}\left(x^8\right)$$

В ряд нельзя подставлять численное значение переменной разложения (а значит, нельзя и строить график). Для этого нужно сначала убрать $\mathcal{O}$ член, превратив отрезок ряда в многочлен.

In [94]:
```
a=sinx.removeO()
```

In [95]:
```
a.subs(x,0.1)
```

Out[95]:

0.0998334166468254

2.5.6 Производные

```
In [96]: a=x*sin(x+y)
         diff(a,x)
```

Out[96]:

$$x\cos(x+y)+\sin(x+y)$$

```
In [97]: diff(a,y)
```

Out[97]:

$$x\cos(x+y)$$

Вторая производная по x и первая по y.

```
In [98]: diff(a,x,2,y)
```

Out[98]:

$$-x\cos(x+y)+2\sin(x+y)$$

Можно дифференцировать выражения, содержащие неопределённые функции.

```
In [99]: a=x*f(x**2)
         b=diff(a,x)
         b
```

Out[99]:

$$2x^2\left.\frac{d}{d\xi_1}f(\xi_1)\right|_{\xi_1=x^2}+f\left(x^2\right)$$

Что это за зверь такой получился?

```
In [100]: print(b)
```

```
2*x**2*Subs(Derivative(f(_xi_1), _xi_1), (_xi_1,), (x**2,)) + f(x**2)
```

Функция `Derivative` представляет невычисленную производную. Её можно вычислить методом `doit`.

```
In [101]: a=Derivative(sin(x),x)
          Eq(a,a.doit())
```

Out[101]:

$$\frac{d}{dx}\sin(x)=\cos(x)$$

2.5.7 Интегралы

```
In [102]: integrate(1/(x*(x**2-2)**2),x)
```

Out[102]:

$$\frac{1}{4}\log(x) - \frac{1}{8}\log\left(x^2-2\right) - \frac{1}{4x^2-8}$$

```
In [103]: integrate(1/(exp(x)+1),x)
```

Out[103]:

$$x - \log\left(e^x+1\right)$$

```
In [104]: integrate(log(x),x)
```

Out[104]:

$$x\log(x) - x$$

```
In [105]: integrate(x*sin(x),x)
```

Out[105]:

$$-x\cos(x) + \sin(x)$$

```
In [106]: integrate(x*exp(-x**2),x)
```

Out[106]:

$$-\frac{e^{-x^2}}{2}$$

```
In [107]: a=integrate(x**x,x)
          a
```

Out[107]:

$$\int x^x\,dx$$

Получился невычисленный интеграл.

```
In [108]: print(a)
```

```
Integral(x**x, x)
```

```
In [109]: a=Integral(sin(x),x)
          Eq(a,a.doit())
```

Out[109]:

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$$

Определённые интегралы.

```
In [110]: integrate(sin(x),(x,0,pi))
```

Out[110]:

$$2$$

oo — это ∞.

```
In [111]: integrate(exp(-x**2),(x,0,oo))
```

Out[111]:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

```
In [112]: integrate(log(x)/(1-x),(x,0,1))
```

Out[112]:

$$-\frac{\pi^2}{6}$$

2.5.8 Суммирование рядов

```
In [113]: summation(1/n**2,(n,1,oo))
```

Out[113]:

$$\frac{\pi^2}{6}$$

```
In [114]: summation((-1)**n/n**2,(n,1,oo))
```

Out[114]:

$$-\frac{\pi^2}{12}$$

```
In [115]: summation(1/n**4,(n,1,oo))
```

Out[115]:

$$\frac{\pi^4}{90}$$

Невычисленная сумма обозначается Sum.

```
In [116]: a=Sum(x**n/factorial(n),(n,0,oo))
          Eq(a,a.doit())
```

Out[116]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

2.5.9 Пределы

```
In [117]: limit((tan(sin(x))-sin(tan(x)))/x**7,x,0)
```

Out[117]:

$$\frac{1}{30}$$

Ну это простой предел, считается разложением числителя и знаменателя в ряды. А вот если в $x = 0$ существенно особая точка, дело сложнее. Посчитаем односторонние пределы.

```
In [118]: limit((tan(sin(x))-sin(tan(x)))/(x**7+exp(-1/x)),x,0,'+')
```

Out[118]:

$$\frac{1}{30}$$

```
In [119]: limit((tan(sin(x))-sin(tan(x)))/(x**7+exp(-1/x)),x,0,'-')
```

Out[119]:

$$0$$

2.5.10 Дифференциальные уравнения

```
In [120]: t=Symbol('t')
          x=Function('x')
          p=Function('p')
```

Первого порядка.

```
In [121]: dsolve(diff(x(t),t)+x(t),x(t))
```

Out[121]:

$$x(t) = C_1 e^{-t}$$

Второго порядка.

```
In [122]: dsolve(diff(x(t),t,2)+x(t),x(t))
```

Out[122]:

$$x(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)$$

Система уравнений первого порядка.

```
In [123]: dsolve((diff(x(t),t)-p(t),diff(p(t),t)+x(t)))
```

Out[123]:

$$[x(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t), \quad p(t) = C_1 \cos(t) - C_2 \sin(t)]$$

2.5.11 Линейная алгебра

```
In [124]: a,b,c,d,e,f=symbols('a b c d e f')
```

Матрицу можно построить из списка списков.

```
In [125]: M=Matrix([[a,b,c],[d,e,f]])
          M
```

Out[125]:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

```
In [126]: M.shape
```

Out[126]:

$$(2, \quad 3)$$

Матрица-строка.

```
In [127]: Matrix([[1,2,3]])
```

Out[127]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Матрица-столбец.

```
In [128]: Matrix([1,2,3])
```

Out[128]:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Можно построить матрицу из функции.

```
In [129]: def g(i,j):
              return Rational(1,i+j+1)
          Matrix(3,3,g)
```

Out[129]:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Или из неопределённой функции.

```
In [130]: g=Function('g')
          M=Matrix(3,3,g)
          M
```

Out[130]:

$$\begin{bmatrix} g(0,0) & g(0,1) & g(0,2) \\ g(1,0) & g(1,1) & g(1,2) \\ g(2,0) & g(2,1) & g(2,2) \end{bmatrix}$$

```
In [131]: M[1,2]
```

Out[131]:

$$g(1,2)$$

```
In [132]: M[1,2]=0
          M
```

Out[132]:

$$\begin{bmatrix} g(0,0) & g(0,1) & g(0,2) \\ g(1,0) & g(1,1) & 0 \\ g(2,0) & g(2,1) & g(2,2) \end{bmatrix}$$

```
In [133]: M[2,:]
```

Out[133]:

$$\begin{bmatrix} g(2,0) & g(2,1) & g(2,2) \end{bmatrix}$$

```
In [134]: M[:,1]
```

Out[134]:

$$\begin{bmatrix} g(0,1) \\ g(1,1) \\ g(2,1) \end{bmatrix}$$

```
In [135]: M[0:2,1:3]
```

Out[135]:

$$\begin{bmatrix} g(0,1) & g(0,2) \\ g(1,1) & 0 \end{bmatrix}$$

Единичная матрица.

```
In [136]: eye(3)
```

Out[136]:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Матрица из нулей.

In [137]:
```
zeros(3)
```

Out[137]:

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

In [138]:
```
zeros(2,3)
```

Out[138]:

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Диагональная матрица.

In [139]:
```
diag(1,2,3)
```

Out[139]:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

In [140]:
```
M=Matrix([[a,1],[0,a]])
diag(1,M,2)
```

Out[140]:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & a & 1 & 0\\0 & 0 & a & 0\\0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

Операции с матрицами.

In [141]:
```
A=Matrix([[a,b],[c,d]])
B=Matrix([[1,2],[3,4]])
A+B
```

Out[141]:

$$\begin{bmatrix}a+1 & b+2\\c+3 & d+4\end{bmatrix}$$

```
In [142]: A*B,B*A
```

Out[142]:

$$\left(\begin{bmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{bmatrix}\right)$$

```
In [143]: A*B-B*A
```

Out[143]:

$$\begin{bmatrix} 3b-2c & 2a+3b-2d \\ -3a-3c+3d & -3b+2c \end{bmatrix}$$

```
In [144]: simplify(A**(-1))
```

Out[144]:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

```
In [145]: det(A)
```

Out[145]:

$$ad - bc$$

Собственные значения и векторы

```
In [146]: x=Symbol('x',real=True)

In [147]: M=Matrix([[(1-x)**3*(3+x),4*x*(1-x**2),-2*(1-x**2)*(3-x)],
                    [4*x*(1-x**2),-(1+x)**3*(3-x),2*(1-x**2)*(3+x)],
                    [-2*(1-x**2)*(3-x),2*(1-x**2)*(3+x),16*x]])
          M
```

Out[147]:

$$\begin{bmatrix} (-x+1)^3(x+3) & 4x\left(-x^2+1\right) & (-x+3)\left(2x^2-2\right) \\ 4x\left(-x^2+1\right) & -(-x+3)(x+1)^3 & (x+3)\left(-2x^2+2\right) \\ (-x+3)\left(2x^2-2\right) & (x+3)\left(-2x^2+2\right) & 16x \end{bmatrix}$$

```
In [148]: det(M)
```

Out[148]:

$$0$$

Значит, у этой матрицы есть нулевое подпространство (она обращает векторы из этого подпространства в 0). Базис этого подпространства.

```
In [149]: v=M.nullspace()
          len(v)
```

Out[149]:

$$1$$

Оно одномерно.

```
In [150]: v=simplify(v[0])
          v
```

Out[150]:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{x-1} \\ \frac{2}{x+1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Проверим.

```
In [151]: simplify(M*v)
```

Out[151]:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Собственные значения и их кратности.

```
In [152]: M.eigenvals()
```

Out[152]:

$$\left\{0 : 1, \quad -\left(x^2+3\right)^2 : 1, \quad \left(x^2+3\right)^2 : 1\right\}$$

Если нужны не только собственные значения, но и собственные векторы, то нужно использовать метод `eigenvects`. Он возвращает список кортежей. В каждом из них нулевой элемент — собственное значение, первый — его кратность, и последний — список собственных векторов, образующих базис (их столько, какова кратность).

```
In [153]: v=M.eigenvects()
          len(v)
```

Out[153]:

$$3$$

```
In [154]: for i in range(len(v)):
              v[i][2][0]=simplify(v[i][2][0])
          v
```

Out[154]:

$$\left[\left(0,\quad 1,\quad \left[\left[-\frac{2}{x-1}\right]\right]\right),\quad \left(-\left(x^2+3\right)^2,\quad 1,\quad \left[\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right]\right]\right),\quad \left(\left(x^2+3\right)^2,\quad 1,\quad \left[\left[\frac{\frac{x-1}{x+1}}{-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}\right]\right]\right)\right]$$

Проверим.

```
In [155]: for i in range(len(v)):
              z=M*v[i][2][0]-v[i][0]*v[i][2][0]
              pprint(simplify(z))
```

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Жорданова нормальная форма

```
In [156]: M=Matrix([[Rational(13,9),-Rational(2,9),Rational(1,3),Rational(4,9),Rational(2,3)],
                    [-Rational(2,9),Rational(10,9),Rational(2,15),-Rational(2,9),-Rational(11,15
                    [Rational(1,5),-Rational(2,5),Rational(41,25),-Rational(2,5),Rational(12,25)
                    [Rational(4,9),-Rational(2,9),Rational(14,15),Rational(13,9),-Rational(2,15)
                    [-Rational(4,15),Rational(8,15),Rational(12,25),Rational(8,15),Rational(34,2
          M
```

Out[156]:

$$\begin{bmatrix}\frac{13}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{9} & \frac{10}{9} & \frac{2}{15} & -\frac{2}{9} & -\frac{11}{15}\\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{41}{25} & -\frac{2}{5} & \frac{12}{25}\\ \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{14}{15} & \frac{13}{9} & -\frac{2}{15}\\ -\frac{4}{15} & \frac{8}{15} & \frac{12}{25} & \frac{8}{15} & \frac{34}{25}\end{bmatrix}$$

Метод `M.jordan_form()` возвращает пару матриц, матрицу преобразования P и собственно жорданову форму J: $M = PJP^{-1}$.

```
In [157]: P,J=M.jordan_form()
          J
```

Out[157]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+i \end{bmatrix}$$

In [158]:
```
P=simplify(P)
P
```

Out[158]:

$$\begin{bmatrix} -2 & \frac{10}{9} & 0 & \frac{5i}{12} & -\frac{5i}{12} \\ -2 & -\frac{5}{9} & 0 & -\frac{5i}{6} & \frac{5i}{6} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ 1 & \frac{10}{9} & 0 & -\frac{5i}{6} & \frac{5i}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверим.

In [159]:
```
Z=P*J*P**(-1)-M
simplify(Z)
```

Out[159]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

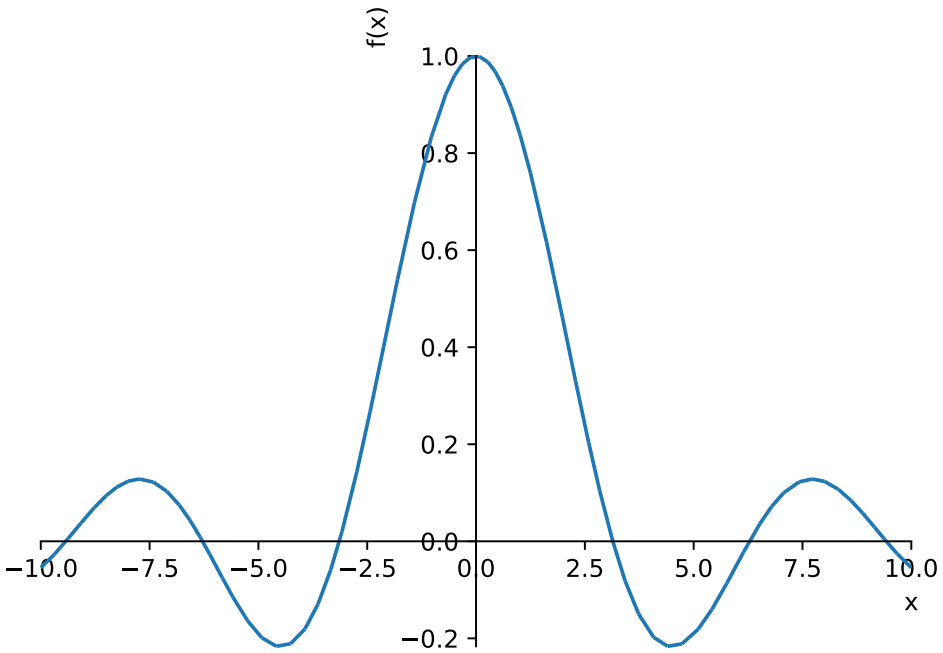
2.5.12 Графики

SymPy использует matplotlib. Однако он распределяет точки по x адаптивно, а не равномерно.

In [160]:
```
%matplotlib inline
```

Одна функция.

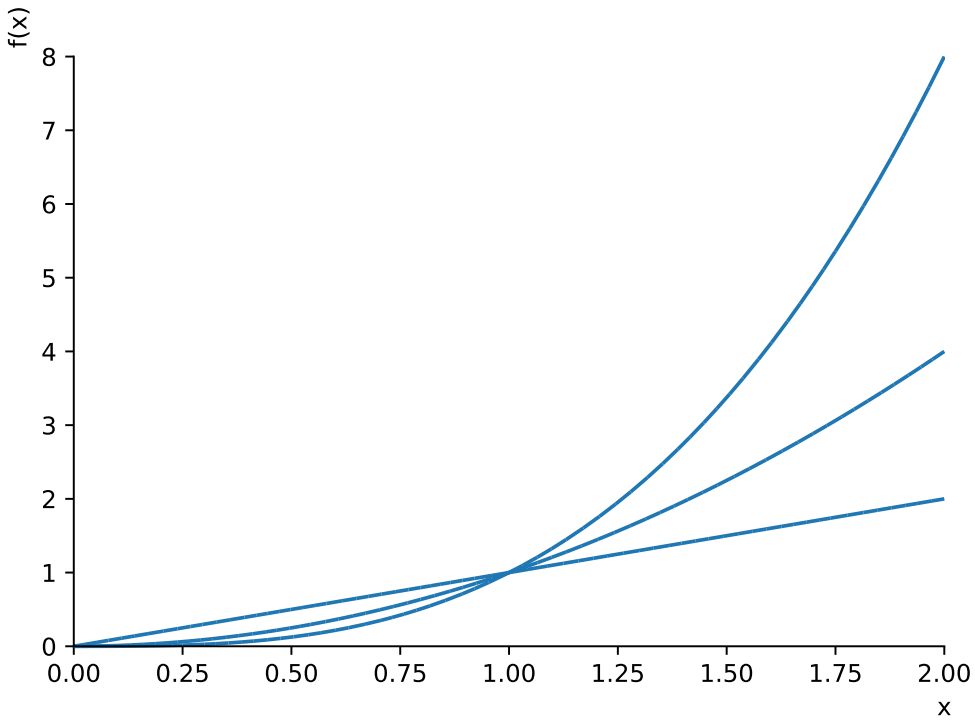
In [161]:
```
plot(sin(x)/x,(x,-10,10))
```




```
Out[161]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7fac5f8ff6d8>
```

Несколько функций.

```
In [162]: plot(x,x**2,x**3,(x,0,2))
```



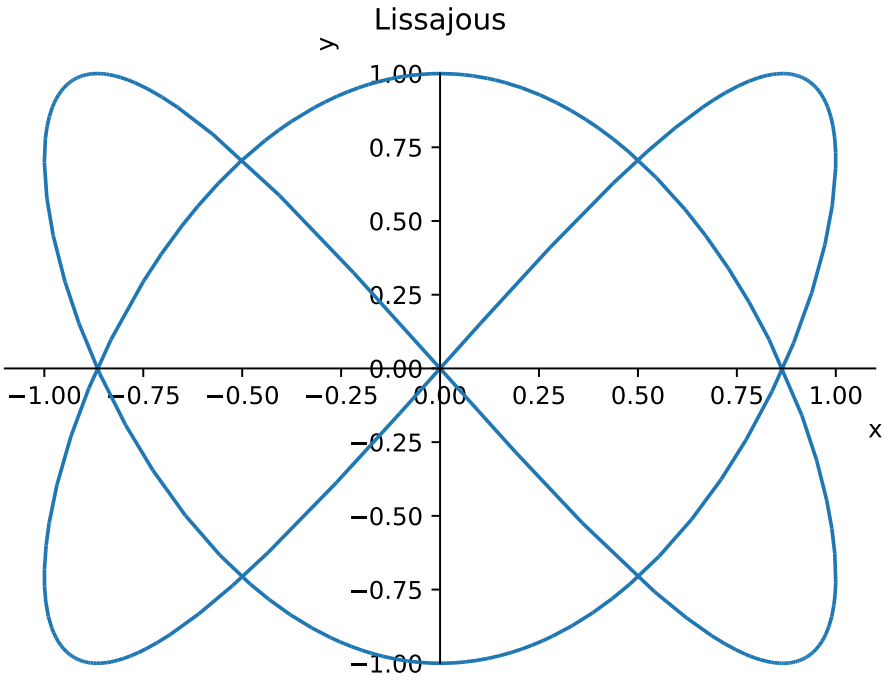

```
Out[162]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7fac5f567390>
```

Другие функции надо импортировать из пакета `sympy.plotting`.

```
In [163]: from sympy.plotting import (plot_parametric,plot_implicit,
                                       plot3d,plot3d_parametric_line,
                                       plot3d_parametric_surface)
```

Параметрический график — фигура Лиссажу.

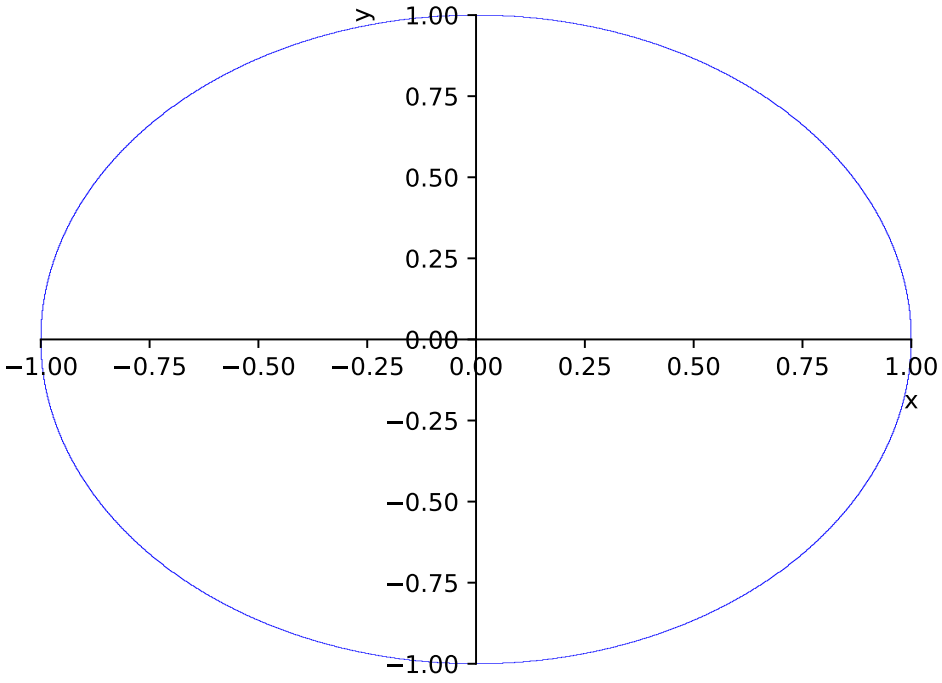
```
In [164]: t=Symbol('t')
          plot_parametric(sin(2*t),cos(3*t),(t,0,2*pi),
                          title='Lissajous',xlabel='x',ylabel='y')
```




```
Out[164]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7fac5f514978>
```

Неявный график — окружность.

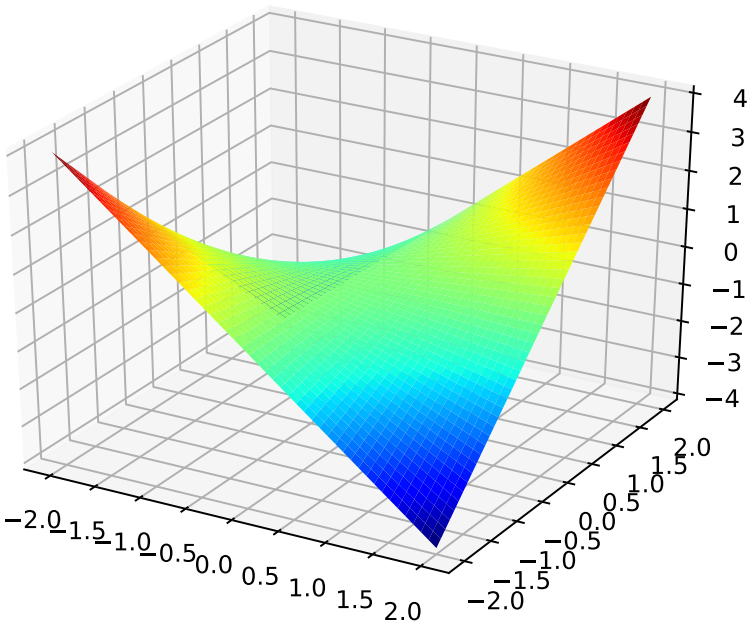
```
In [165]: plot_implicit(x**2+y**2-1,(x,-1,1),(y,-1,1))
```




```
Out[165]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7fac5f625940>
```

Поверхность. Если она строится не `inline`, а в отдельном окне, то её можно вертеть мышкой.

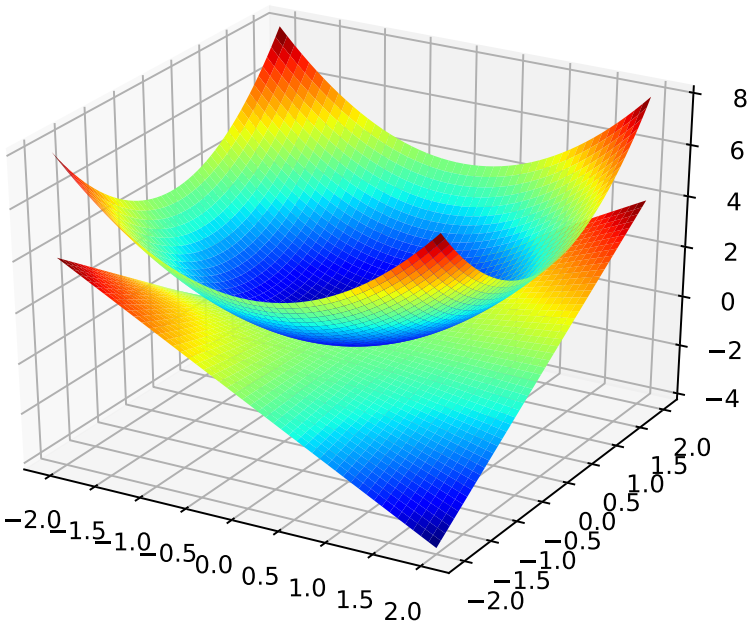
```
In [166]: plot3d(x*y,(x,-2,2),(y,-2,2))
```




```
Out[166]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7fac71242ac8>
```

Несколько поверхностей.

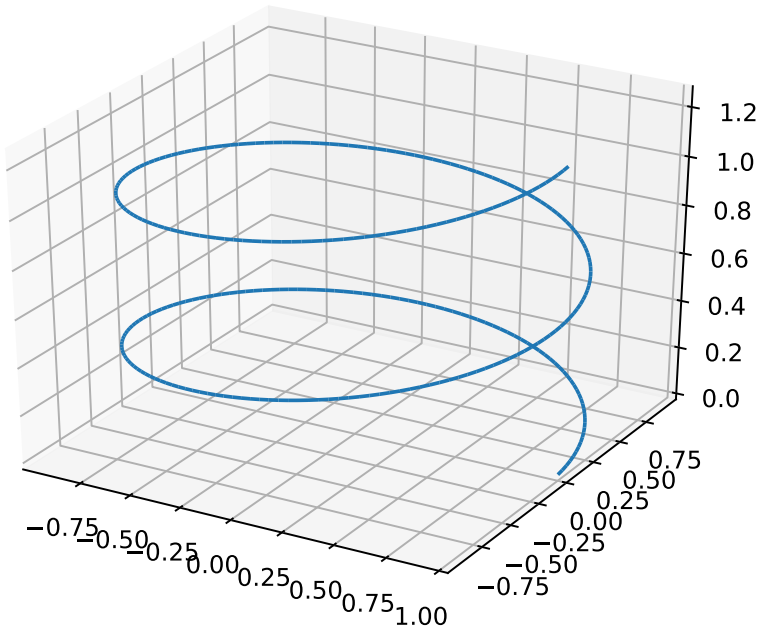
```
In [167]: plot3d(x**2+y**2,x*y,(x,-2,2),(y,-2,2))
```




```
Out[167]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7fac5f3ac9b0>
```

Параметрическая пространственная линия — спираль.

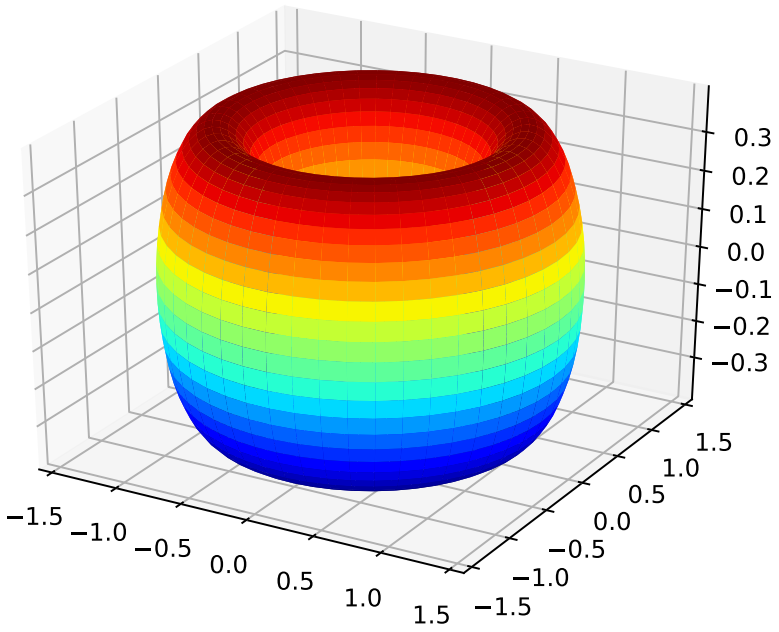
```
In [168]: a=0.1
          plot3d_parametric_line(cos(t),sin(t),a*t,(t,0,4*pi))
```




```
Out[168]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7fac5d25be10>
```

Параметрическая поверхность — тор.

```
In [169]: u,v=symbols('u v')
          a=0.4
          plot3d_parametric_surface((1+a*cos(u))*cos(v),
                                    (1+a*cos(u))*sin(v),a*sin(u),
                                    (u,0,2*pi),(v,0,2*pi))
```



Out[169]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7fac5d151f60>

2.6 cython

`cython` позволяет писать программы, выглядящие почти как питонские, но с добавлением статических деклараций типов. Эти программы (`foo.pyx`) транслируются в исходные тексты на C (`foo.c`) и затем компилируются. Определённые в них функции могут использоваться из программ на чистом питоне. Программа на `cython`-е может также вызывать функции из библиотек, написанных на C. `cython` не пытается автоматически сгенерировать интерфейсы к таким библиотекам, читая их `.h` файлы; для этого можно использовать `swig` или другие подобные системы.

В `ipython` можно писать `cython` фрагменты inline, если загрузить расширение `cython`.

```
In [1]: %load_ext cython
```

2.6.1 Функции

Это интерпретируемая функция на питоне.

```
In [2]: def fib(n):
            if n<=2:
                return 1
            a,b=1,1
            for i in range(n-2):
                a,b=b,a+b
            return b
```

```
In [3]: fib(90)
```

```
Out[3]: 2880067194370816120
```

```
In [4]: %timeit fib(90)
```

```
100000 loops, best of 3: 7.05 µs per loop
```

Это такая же функция на `cython`, типы переменных не объявлены — то есть все они обычные питонские объекты.

```
In [5]: %%cython
        def dyn_fib(n):
            if n<=2:
                return 1
            a,b=1,1
            for i in range(n-2):
                a,b=b,a+b
            return b
```

```
In [6]: dyn_fib(90)
```

```
Out[6]: 2880067194370816120
```

```
In [7]: %timeit dyn_fib(90)
```

```
100000 loops, best of 3: 5.52 µs per loop
```

Получилось чуть быстрее. Скомпилированная программа выполняет всю ту же возню с типами и их преобразованиями, что и интерпретируемая.

Теперь типы декларированы статически.

```
In [8]: %%cython
        def stat_fib(long n):
            cdef long i,a,b
            if n<=2:
                return 1
            a,b=1,1
            for i in range(n-2):
                a,b=b,a+b
            return b

In [9]: stat_fib(90)

Out[9]: 2880067194370816120

In [10]: %timeit stat_fib(90)

The slowest run took 6.68 times longer than the fastest. This could mean that an intermediate re
1000000 loops, best of 3: 630 ns per loop
```

Получилось на порядок быстрее.

`c_fib` — это фактически функция на C, только написанная в `cython`-ском синтаксисе. Её можно вызывать откуда угодно в той же программе на `cython`, но не из питонской программы. Поэтому напишем обёртку, которую можно вызывать из питона.

```
In [11]: %%cython
         cdef long c_fib(long n):
             cdef long i,a,b
             if n<=2:
                 return 1
             a,b=1,1
             for i in range(n-2):
                 a,b=b,a+b
             return b
         def wrap_fib(long n):
             return c_fib(n)

In [12]: wrap_fib(90)

Out[12]: 2880067194370816120

In [13]: %timeit wrap_fib(90)
```

```
The slowest run took 5.85 times longer than the fastest. This could mean that an intermediate re
1000000 loops, best of 3: 632 ns per loop
```

Время то же самое.

`cpdef` создаёт как C функцию, так и питонскую. Первая вызывается из `cython`, вторая из питона.

```
In [14]: %%cython
         cpdef long cp_fib(long n):
             cdef long i,a,b
             if n<=2:
                 return 1
             a,b=1,1
             for i in range(n-2):
                 a,b=b,a+b
             return b
```

```
In [15]: cp_fib(90)
```

```
Out[15]: 2880067194370816120
```

```
In [16]: %timeit cp_fib(90)
```

```
The slowest run took 5.04 times longer than the fastest. This could mean that an intermediate re
1000000 loops, best of 3: 637 ns per loop
```

Время то же самое.

2.6.2 Интерфейс к библиотеке на C

Пусть у нас есть файл на C.

```
In [17]: !cat cfib.c
```

```
long cfib(long n)
{   long i,a,b,c;
    if(n<=2) return 1;
    {   a=1; b=1;
        for(i=2;i<n;++i)
        { c=a+b; a=b; b=c; }
        return b;
    }
}
```

```
In [18]: !cat cfib.h
```

```
long cfib(long n);
```

Скомпилируем его.

```
In [19]: !gcc -fPIC -c cfib.c
```

Напишем обёртку на `cython`.

```
In [20]: !cat wrap.pyx
```

```
cdef extern from "cfib.h":
    long cfib(long n)

def fib(long n):
    return cfib(n)
```

Скомпилируем её и соберём в библиотеку.

```
In [21]: %%!
         cython -3 wrap.pyx
         CFLAGS=$(python-config --cflags)
         LDFLAGS=$(python-config --ldflags)
         gcc $CFLAGS -fPIC -c wrap.c
         gcc $LDFLAGS -shared wrap.o cfib.o -o wrap.so

Out[21]: []
```

Эту библиотеку можно импортировать в программу на питоне.

```
In [22]: from wrap import fib

In [23]: fib(90)

Out[23]: 2880067194370816120

In [24]: %timeit fib(90)

The slowest run took 4.65 times longer than the fastest. This could mean that an intermediate re
1000000 loops, best of 3: 574 ns per loop
```

Пулучилось чуть быстрее, чем функция на `cython`.

2.6.3 Структуры

Структуры можно описывать в `cython` с помощью `ctypedef struct`. Поля в них описываются фактически в синтаксисе C. Переменную, описываемую в `cdef`, можно, если хочется, сразу инициализировать. Имя типа-структуры можно использовать как функцию, аргументы которой — её поля (в порядке описания). `print` печатает структуру как словарь; на самом деле это не словарь, а структура языка C, не содержащая накладных расходов по памяти и времени, имеющихся у словаря, но и не дающая гибкости словаря. Поля структуры обозначаются `z.re`; их можно менять.

В cython можно работать с указателями. Импортируем malloc и free из стандартной библиотеки. Результат malloc — адрес, его нужно привести к правильному типу, используя <type>. В C поля структуры, на которую ссылается w, обозначаются w->re; в cython — просто w.re. В C структура, на которую ссылается w, обозначается *w; в cython такой синтаксис не разрешён, вместо этого надо писать w[0] (в C это тоже законная форма записи, но чаще используется *w). При работе с указателями управление памятью производится вручную, а не автоматически, как в питоне, так что не забывайте free.

```
In [25]: %%cython
         ctypedef struct mycomplex:
             double re
             double im
         cdef mycomplex z=mycomplex(1.,2.)
         print(z)
         print(z.re)
         z.re=-1
         print(z)
         # pointers
         from libc.stdlib cimport malloc,free
         cdef mycomplex *w=<mycomplex*>malloc(sizeof(mycomplex))
         w.re,w.im=2.,1.
         print(w[0])
         free(w)
```

```
{'re': 1.0, 'im': 2.0}
1.0
{'re': -1.0, 'im': 2.0}
{'re': 2.0, 'im': 1.0}
```

2.6.4 cdef классы

cython позволяет определять классы, объекты которых являются фактически структурами языка C. Их атрибуты нужно статически описывать с помощью cdef; во время выполнения нельзя добавлять новые атрибуты (или уничножать имеющиеся). Вот пример такого класса. Его основной метод atol вызывает функцию atol из стандартной библиотеки C, преобразующую строку в long.

```
In [26]: !cat C1.pyx
```

```
from libc.stdlib cimport atol

cdef class C1:

    cdef:
        char *s
        long n

    def __init__(self):
```

```
        self.s=NULL
        self.n=0

    def set_s(self,bytes s):
        self.s=s

    def get_n(self):
        return self.n

    def atol(self):
        self.n=atol(self.s)
```

Есть удобный способ импортировать `pyx` модуль в питон: `pyximport`, он автоматически произведёт преобразование в C, компиляцию и сборку.

```
In [27]: import pyximport
         pyximport.install()

Out[27]: (None, <pyximport.pyximport.PyxImporter at 0x7f2185779780>)

In [28]: from C1 import C1

In [29]: o=C1()
         s=b"12345"
         o.set_s(s)
         o.atol()
         print(o.get_n())

12345
```

Тип `char*` в C соответствует типу `bytes` в питоне. При совместном использовании питона с его автоматическим управлением памятью и C с указателями нужно соблюдать осторожность. Строка `b"12345"` доступна в питоне как значение переменной `s`, поэтому занимаемая ей память не будет освобождена, пока `s` не будет присвоено другое значение. Мы скопировали её адрес в атрибут `o.s` типа `char*`. Если бы мы не присвоили эту строку переменной `s`, а прямо подставили бы её в качестве аргумента метода `o.set_s`, то питон не знал бы, что её надо сохранять, и освободил бы занимаемую её память. Указатель `o.s` указывал бы после этого неведомо куда, с катастрофическими последствиями.

Усовершенствуем немного эту `cython` программу. По умолчанию `cdef` атрибуты недоступны ни из питона, ни из `cython` программы. Но можно описать их как `public` или `readonly`, тогда не нужны будут методы `get_foo` и `set_foo`. Метод `__init__` может быть и не будет вызван (например, другой класс унаследовал текущий, и его `__init__` не вызвал `__init__` родителя); если в структуре есть указатели, то они могут остаться неинициализированными. Поэтому лучше использовать `__cinit__`, который обязательно вызывается сразу после выделения память для объекта.

```
In [30]: !cat C2.pyx
```

```
from libc.stdlib cimport atol

cdef class C2:

    cdef public char *s
    cdef readonly long n

    def __cinit__(self):
        self.s=NULL
        self.n=0

    def atol(self):
        self.n=atol(self.s)
```

```
In [31]: from C2 import C2

In [32]: o=C2()
         o.s=s
         o.atol()
         print(o.n)
```

```
12345
```

`cdef` классы поддерживают наследование (только от одного класса, не множественное). Можно написать класс-потомок как `cdef` класс на `cython`. Можно и написать класс-потомок на питоне. Пусть мы хотим добавить к нашему классу метод преобразования строки в число с плавающей точкой, но нам лень использовать `atof` из стандортной библиотеки C. Сделаем это обычными средствами питона. Атрибут `x` добавляется к объектам класса `C3` динамически, описывать его не надо.

```
In [33]: class C3(C2):

             def atof(self):
                 self.x=float(self.s)

In [34]: o=C3()
         s=b"12345.6789"
         o.s=s
         o.atof()
         print(o.x)
```

```
12345.6789
```

2.6.5 Интерфейс к библиотеке на C

Рассмотрим очень упощённый пример того, как можно написать удобный питонский интерфейс к библиотеке на C, используя `cython`. Если бы мы хотели использовать эту библиотеку из программы на C, достаточно было бы включить `#include "foo.h"` в эту программу.

```
In [35]: !cat cfoo.h
```

```
typedef struct { long n; double x; } CFoo;
CFoo *Foo_new(long n,double x);
void Foo_del(CFoo *z);
double Foo_f(CFoo *z,double y);
```

Здесь описан тип-структура `CFoo`. Функция `Foo_new` создаёт и инициализирует такую структуру и возвращает указатель на неё. Функция `Foo_del` уничтожает эту структуру. Наконец, функция `Foo_f` делает какое-то вычисление со своим параметром `y` и данными из структуры. Подобным образом часто выглядят интерфейсы к генераторам случайных чисел: мы можем создать несколько структур с начальными данными и получить несколько независимых потоков случайных чисел.

А вот реализация на C.

```
In [36]: !cat cfoo.c
```

```
#include <stdlib.h>
#include "cfoo.h"

CFoo *Foo_new(long n,double x)
{   CFoo *r=(CFoo*)malloc(sizeof(CFoo));
    r->n=n;
    r->x=x;
    return r;
}

void Foo_del(CFoo *z)
{ free(z); }

double Foo_f(CFoo *z,double y)
{ return z->n*y+z->x; }
```

В первую очередь мы напишем файл определений `cython`. Он почти копирует `foo.h` с минимальными синтаксическими изменениями.

```
In [37]: !cat foo.pxd
```

```
cdef extern from "cfoo.h":

    ctypedef struct CFoo:
        pass

    CFoo *Foo_new(long n,double x)
    void Foo_del(CFoo *z)
    double Foo_f(CFoo *z,double y)
```

Теперь напишем удобную объектно-ориентированную обёртку. Файл определений импортируется при помощи `cimport` (мы уже использовали эту команду, когда импортировали `libc.stdlib`; `cython` содержит ряд стандартных `pxd` файлов, включая `stdlib.pxd`, `stdio.pxd` и т.д.). Теперь определим `cdef` класс `Foo`. Метод `__dealloc__` вызывается в последний момент перед уничтожением объекта (условие `if self.foo!=NULL:` написано из перестраховки, в законном объекте класса `Foo` этот атрибут всегда не `NULL`, т.к. он инициализируется в `__cinit__`).

```
In [38]: !cat foo.pyx
```

```
cimport foo

cdef class Foo:

    cdef foo.CFoo *foo

    def __cinit__(self,long n,double x):
        self.foo=foo.Foo_new(n,x)

    def __dealloc__(self):
        if self.foo!=NULL:
            foo.Foo_del(self.foo)

    def f(self,double y):
        return foo.Foo_f(self.foo,y)
```

Скомпилируем и соберём.

```
In [39]: %%!
         gcc -fPIC -c cfoo.c
         cython -3 foo.pyx
         CFLAGS=$(python-config --cflags)
         LDFLAGS=$(python-config --ldflags)
         gcc $CFLAGS -fPIC -c foo.c
         gcc $LDFLAGS -shared foo.o cfoo.o -o foo.so
```

```
Out[39]: []
```

```
In [40]: from foo import Foo
```

Теперь мы можем в питоне создавать объекты класса `Foo` и вызывать их метод `f`.

```
In [41]: o=Foo(2,0.)
         o.f(3.)
```

```
Out[41]: 6.0
```