Представление маркировок сетей Петри как решения дифференциальных уравнений

В.П. Желтов, П.В. Желтов, А.П. Димитриев
Чувашский госуниверситет им. И.Н.Ульянова
г. Чебоксары

В работе рассмотрены дифференциальные уравнения, моделирующие функционирование некоторых сетей Петри.

Рассмотрим различные виды дифференциальных уравнений первого порядка, которые можно написать для моделирования работы сети и получения маркировки как функции от времени.

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{d\mu}{dt} = f(\mu), \tag{0.1}$$

где $f(\mu)$ - функция, зависящая от интересующей нас маркировки позиции. И пусть эта функция определена на каком-то интервале $a < \mu < b$ и предположим, что она не равна нулю на этом интервале, то есть $f(\mu) \neq 0$, если $\mu \in (a, b)$, и пусть для определенности $f(\mu) > 0$.

Введем в уравнение (0.1) новую переменную M, связанную с μ формулой $M = F(\mu)$, где $F(\mu)$ - некоторая первообразная функции $\frac{1}{f(\mu)}$.

Пусть $M(t) = F(\mu(t))$, где функция $\mu(t)$ - решение дифференциального уравнения (0.1). Так как $f(\mu) \neq 0$, то $F(\mu)$ - непрерывная функция и $M'(t) = \frac{1}{f(\mu(t))} \times f(\mu(t)) = 1$. Следовательно, в переменных t и M уравнение $\frac{M}{t} = 1$.

Это уравнение определено в некоторой области:

$D = \{(t, M) : c < t < d, G(a) < M < G(b)\}$,

и решения этого уравнения имеют следующий вид:

$M = t + C$, где C - произвольная постоянная, или

$$\mu = F^{-1}(t + C), \tag{0.2}$$

где F^{-1} - обратная по отношению к F функция. Функции (0.2) определены только для тех значений t, при которых $t + C \in (F(a), F(b))$. И функциями (0.2) определено множество всех решений уравнения (0.1).

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d\mu}{dt} = f(t)g(\mu), \tag{0.3}$$

где $f(t)$ - функция времени, определенная на интервале (c, d), а $g(\mu)$ - функция разметки, определенная при $\mu \in (a, b)$. Уравнение (0.3) - уравнение с разделяющимися переменными. Для его решения выполним замену $M = G(\mu)$, где $G(\mu)$ - некоторая первообразная функции $\frac{1}{g(\mu)}$. Тогда уравнение (0.3) примет следующий вид: $\frac{dM}{dt} = f(t)$, что в области $D = \{(t, M) : c < t < d, G(a) < M < G(b)\}$, и его решения имеют вид $M = F(t) + C$, где $F(t)$ - первообразная $f(t)$, C - произвольная постоянная. Решение уравнения (0.3) запишется в виде $\mu = G^{-1}(F(t) + C)$. Задача Коши с начальным условием $\mu(t_0) = \mu_0$ имеет решение $\mu = G^{-1}(F(t) + C_0)$, где $C_0 = C(\mu_0) - F(t_0)$.

Рассмотрим следующее уравнение $\frac{d\mu}{dt} = f(t)\mu$, где функция $f(t)$ определена при $\sigma < t < d$. Это линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\mu = exp(F(t) + C), \tag{0.4}$$

где $F(t)$ - некоторая первообразная функции $f(t)$, C - произвольная постоянная.

Формула (0.4) может быть использована для построения общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\frac{d\mu}{dt} = f(t)\mu + g(t), \tag{0.5}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде:

$$\mu = C(t)exp\{F(t)\}, \tag{0.6}$$

где $C(t)$ - непрерывно дифференцируемая в (c, d) функция, подлежащая определению. Подставляя (0.6) в (0.5), получаем следующее выражение для $C'(t)$:

$$C'(t) = g(t)exp\{-F(t)\}, C(t) = \int\limits_{t_0}^{t} exp\{-F(y)\}g(y)dy + C,$$

где C - произвольная постоянная. Отсюда вытекает формула для общего решения уравнения (0.5):

$$\mu = exp\{F(t)\}(\int\limits_{t_0}^{t} exp\{-F(y)\}g(y)dy + C).$$

Проиллюстрируем вышесказанное некоторыми примерами.

Пусть сеть $p_1(\omega)t_jp_2(\mu)$, начиная со времени $t = 0$, функционирует следующим образом: функция скорости срабатывания перехода прямо пропорциональна времени и обратно пропорциональна маркировке выходной позиции, то есть $\Phi(t) = kt/\mu$. Известно также, что при $t = 10$ маркировка выходной позиции равна $\mu(t) = 50$, а $\Phi(t) = 4$. Найдем, чему равна маркировка выходной позиции перехода t_j при времени $t_1 = 60$ от начала функционирования сети.

Найдем сперва коэффициент пропорциональности k, используя начальные условия $t = 10$, $\mu = 50$, $\Phi = 4$, получаем $k = 20$. Тогда функция Φ примет вид $\Phi(t) = 20t/\mu$. Дифференциальное уравнение смены маркировки для выходной позиции запишется в виде: $\frac{d\mu}{dt} = 20t/\mu$. Разделяя переменные и интегрируя, получим $\mu d\mu = 20tdt$, $\mu^2 = 10t^2 + c$, где c - произвольная постоянная, которую найдем из условия задачи: при $t = 10$ $\mu = 50$ $C = 1500$, а следовательно, окончательно имеем $\mu^2 = 10t^2 + 1500$. Найдем теперь чему равна маркировка этой позиции при $t = 60$ $\mu^2 = 37500$.

Исследование функции $\mu^2 = 10t^2 + 1500$ показывает, что функция μ возрастающая, непрерывная, причем при $t = c$ маркировка позиции была равна $\mu^2 = 1500$.

Рассмотрим следующий пример. Пусть имеется сеть $p_0(\mu_0)t_jp(\mu)$ с начальной разметкой входной позиции $\mu_0 = 200$.

Через некоторое время разметка позиции становится равной $\mu_1 = 80$. Причем функция перехода $\Phi = k\mu^2$ пропорциональна квадрату маркировки этой входной позиции. Определим, за какое время работы перехода маркировка станет равной 80.

Составим простейшее дифференциальное уравнение функционирования этой сети: $\frac{d\mu}{dt} = k\mu^2$ - первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$\int\limits_{\mu_0}^{\mu_1} \frac{d\mu}{\mu^2} = -k\int\limits_0^x dt$, а следовательно, $\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_0} = kT$.

Тогда $\tilde{T} = (\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_0}) \times \frac{1}{k} = \frac{3}{(k \times 400)}$.

Взяв, например, k, равное 3, получим: $T = 0,0025$.