Библиографический список

1. Пахомов, Б.И. C# для начинающих. / Б.И. Пахомов. – СПб.: БХВ Петербург, 2014. — 432 с.

2. Дейт, К.Дж. Введение в системы баз данных /К. Дж. Дейт; Пер. с англ. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. — 1328 с.

Информация об авторах

Гриценко Павел Сергеевич, ММиКН-464, ЮУрГУ, г. Челябинск, pavel.gritsenko@mail.ru.

Оленчикова Татьяна Юрьевна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики, olentchtu@mail.ru.

УДК 51-74

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ИЗДЕРЖЕК ХРАНЕНИЯ ПРИ НЕРИТМИЧЕСКИХ ПОСТАВКАХ ПРОДУКЦИИ

Девятловская Я.И., Оленчикова Т.Ю.

Работа посвящена построению и исследованию модели оптимального управления JIT-поставками, учитывающую вероятность задержек поставок. Построен алгоритм коррекции матрицы JIT-поставок, минимизирующий средние издержки хранения товаров и штрафов, возникающие из-за неритмичности поставок. Рассматривается два случая возникновения издержек: издержки при фиксированных задержках поставок и издержки при случайных задержках поставок. Проведенный модельный эксперимент показал, что предложенный алгоритм позволяет в несколько раз снизить риски предприятия, связанные с возможностью задержек поставок.

Ключевые слова: управление поставками, JIT – технология, сети Петри, оптимизация.

Введение

В условиях рыночной экономики большое значение для промышленных предприятий приобретает рациональное управление производственными ресурсами. Наиболее важной, является проблема управления запасами предприятия. Для предприятий с неритмичным циклом производства и небольшими партиями выпускаемой продукции наиболее перспективной является JIT -технология (Just-In-Time — точно вовремя) [2] управления поставками. Однако на практике из-за различных факторов поставки товаров часто задерживаются, что приводит к дополнительным расходам на хранение уже поставленных товаров, задержке в выпуске конечной продукции и связанных с этим штрафами. Целью данного исследования является модификация JIT-модели поставок таким образом, чтобы учесть вероятность задержек поставок и свести к минимуму риски предприятия, связанные с этими задержками.

1. Модель производства и поставок

В качестве модели производства [1] будем использовать сеть Петри, пример которой приведен на рис. 1. Сети Петри – математический аппарат для моделирования дискретных систем. Они обладают наилучшими возможностями для описания взаимосвязей и взаимодействий параллельно работающих процессов [6]. Структура сети представляется ориентированным двудольным графом. Множество V вершин графа разбивается на два подмножества T и P, $V = T \cup P,\ T \cap P = \emptyset$. Дугами могут связываться вершины из множеств P и T. Подмножеству вершин P (позиций) соответствуют этапы производства, на рис. 1 они обозначены цифрами 1,2,3 и 4. Подмножество вершин T (переходов) является своеобразными «точками синхронизации» процессов производства, когда для организации работ i-го этапа требуется продукция, произведенная на предыдущих этапах, на рис. 1 они обозначены буквами А и Б.

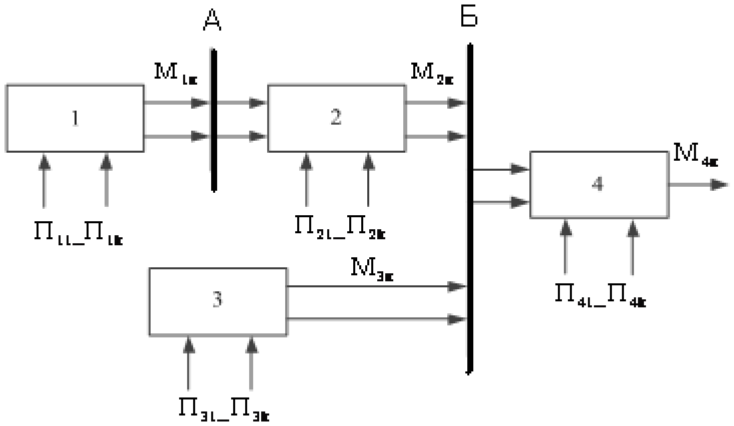


Рис.1. Граф этапов производства продукции

Введем обозначения:

$П_{ij}$ – необходимые на i – й этапе j – е товары от поставщиков;

M_{ij} – количество единиц собственного производства на i – м этапе j - й продукции;

H_{ij} – количество единиц выпускаемой собственной продукции;

z_j, $\tilde{z}_j$ – цена единицы хранения в единицу времени произведенной продукции H_{ij} и поставляемых товаров Π_{ij} соответственно;

$\bar{\bar{z}}_j$ – штраф в единицу времени за задержку производства единицы выпускаемой продукции.

Производство в -й позиции запускается, после того, как поступят все необходимые товары $П_{ij}$ и M_{il}, но не раньше, чем предусмотрено расписанием. Переходы срабатывают, когда будут произведены все необходимые H_{ik}.

В дальнейшем для обозначения элементов матрицы или вектора будем использовать имя матрицы (вектора) с указанием в квадратных скобках индексов. Например, $H[i,j]$ обозначает элемент матрицы H в -й строке j-го столбца.

Формально сеть Петри определяется пятеркой $N = \{P,\ T,\ I,\ O,\ M_0\}$, где $P = \{P[i]\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ – множество позиций; $T = \{T[j]\}, j = 1, 2, \dots, m$ – множество переходов; $I\colon P \times T \to \{0,1\}$ – функция предшествования; $O\colon T \times P \to \{0, 1\}$ – функция следования.

Введем дополнительно векторы: $\tilde{Z} = \{\tilde{Z}[i]\}$ i=1,2,…,k – цена хранения поставляемых товаров; Z={Z[i]}, i=1,2,…,n – цена хранения собственной произведенной продукции; $\bar{\bar{Z}}$=$\{\bar{\bar{Z}}[i]\}$, i=1,2,…,m – штрафы за задержку выпуска окончательной продукции.

Потребность i-х этапов в j-х товарах определяется матрицами: П={П [i,j]} – поставляемые товары; M={M[i,j]} – используемые товары собственного производства. Выпускаемая на i-м этапе результирующая продукция характеризуется матрицей W={W[i,j]}, j=1,2,…,m.

Матрица A={τ[i,j]}, i=1,2,…,n; j=1,2,…,k – задержки/опережение поставок j-го товара на i-м этапе от планируемых.

2. Издержки хранения при фиксированных задержках поставок

Функции определения результирующих задержек τ_{ij} в производстве и связанных с ними издержек хранения F_Z определяем, используя следующий алгоритм. Обозначим через Q – вектор задержек в позициях; V – вектор задержек на переходах.

1. Начальное значение Q_0={Q_0[i]} вектора задержек на позициях равно

$$Q_0[\mathrm{i}]=max_j\ \tau[i,j]. \tag{1}$$

2. Q_t=Q_0;
3. Определение вектора задержек V={V[i]} на переходах:

$$V[\mathrm{i}]=\begin{cases}\max_j(I[i,j]Q_t[j]\text{, если } (\forall j)(Q_t[j]\geq 0),\\ 0\text{, иначе}\end{cases} \tag{2}$$

4. Определение вектора задержек Q_R={Q_R[i]} в позициях:

$$U=OV; \tag{3}$$

$$Q_R[\mathrm{i}]=max(\,U[\mathrm{i}]\,, Q_t[i]). \tag{4}$$

5. Если Q_R=Q_t, то переход к п. 6, иначе Q_t= Q_R и переход к п.3.
6. Вычисляем F_Z – суммарные издержки хранения и штрафы:

$$F_Z = \mathrm{sum}(Z^T(Q_R^* - A).*\,\Pi) + M(IV\dot{-}Q_R)\tilde{Z}^T + H(Q_R\dot{-}OV)\tilde{Z}^T + \bar{\bar{Z}}WQ_0, \tag{5}$$

где операция $\dot{-}$ это операция вычитания, обнуляющая отрицательные значения, .* – операция поэлементного умножения матриц, Q_R^* – матрица, все строки которой вектора Q_R^{T}, sum – сумма элементов матрицы.

Первое слагаемое в формуле (5) – сумма издержек хранения товаров в позициях, второе – издержки хранения собственной продукции до переходов, третье – издержки хранения собственной продукции после переходов, четвертое – суммы штрафов за задержку изготовления продукции.

Пример работы алгоритма.

Для графа, приведенного на рис.1, матрицы I и O равны:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

I, O – матрицы инцидентности входов и выходов в переходах.

Пусть матрицы П, M, W и A имеют вид:

$$П=\begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, Z=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0.5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{Z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0.5 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \bar{\bar{Z}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}, \ A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.3 \end{pmatrix}, \ W=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

где П, M – матрицы планируемых поставок привозных товаров и товаров собственного производства соответственно; H – матрица производимой на этапах продукции; A-матрица задержек поставки привозных товаров; Z, $\bar{Z}$ – цена единицы хранения поставляемых товаров и товаров собственного производства соответственно; $\bar{\bar{Z}}$ – матрица штрафов за задержку поставки продукции заказчику.

1. $Q_0^T=(1, 2, 1.5, 0.3)$;
2. $Q_t^T=Q_0^T=(1, 2, 1.5, 0.3)$;
3. $V=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{*} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1.5 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(1,0,0,0) \\ \max(0,2,1.5,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$

где $\dot{*}$ – операция поиска максимума при поэлементном умножении в формуле (2).

4. $U = OV = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q_R = \begin{pmatrix} \max(0, 1) \\ \max(1, 2) \\ \max(0, 1.5) \\ \max(2, 0.3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1.5 \\ 2 \end{pmatrix},$

вектор задержек в позициях Q_R вычисляется по формуле (4), как вектор, состоящий из максимальных элементов векторов U и Q_t.

5. $Q_R \neq Q_t$, поэтому $Q_t = Q_R$ и шаги 3 и 4 алгоритма повторяются.

3. $V=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{*} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1.5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(1,0,0,0) \\ \max(0,2,1.5,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

4. $U = OV = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q_R = \begin{pmatrix} \max(1, 1) \\ \max(2, 2) \\ \max(1.5, 1.5) \\ \max(2, 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1.5 \\ 2 \end{pmatrix}.$

5. Q_R=Q_t, поэтому имеем: V – вектор задержек в переходах, Q_R – вектор задержек в позициях, переходим к п.6.

6. Вычислим Fz=F_1+F_2+$F3$+F_4.

Шаг 1. $\mathrm{F}_1 = \mathrm{sum}(Z^T(Q_R^* - A).*\Pi) = \mathrm{sum}(Z^T(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1.5 & 2 \\ 1 & 2 & 1.5 & 2 \\ 1 & 2 & 1.5 & 2 \\ 1 & 2 & 1.5 & 2 \\ 1 & 2 & 1.5 & 2 \end{pmatrix} -$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.3 \end{pmatrix}).*\Pi) =$

$$= \mathrm{sum}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0.5 \\ 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1.5 & 1.7 \\ 1 & 0 & 1.5 & 2 \\ 0.6 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1.5 & 1.9 \\ 1 & 2 & 0.5 & 1.7 \end{pmatrix} .*\Pi \right) = \mathrm{sum}(\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \\ 44.6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}) = 51.6$$

Шаг 2. F_2=$M(I^T V \dot{-} Q_R)\tilde{Z}^T$ –издержки хранения собственной продукции до переходов.

$$I^T V \dot{-} Q_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \dot{-} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1.5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{-} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1.5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0.5 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}^T = 0;$$

Шаг 3. $F_{2,}F_3$ – обычные матричные произведения матриц

3. Формулировка задачи оптимизации

Будем считать, что поставки товаров могут осуществляться с некоторыми случайными задержками [4], в качестве функции плотности распределения отклонения поставок возьмем треугольное распределение [3] (рис. 2).

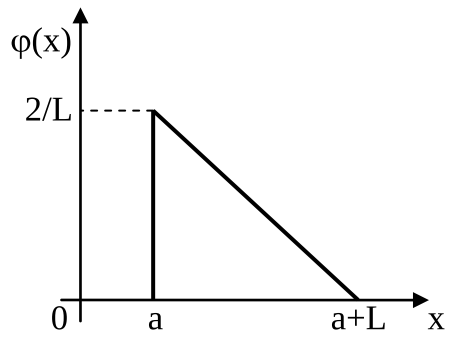


Рис. 2. Функция плотности распределения задержек поставок

Функция $\varphi(x)$ имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2}{L^2}(L - a - x), a \leq x \leq L \\ 0 - \text{в противном случае} \end{cases}$$

где a и L – параметры, определяющие пределы изменения случайной величины x. Как было показано выше, отклонения в поставках ведут к издержкам Fz. Обозначим их Fz(A,L), где A={a}, L={L} – матрицы, задающие параметры распределения задержек поставок по всем товарам и этапам.

Ставится задача: найти матрицу А, такую что

$$\text{Fz(A, L)} \rightarrow min \quad (6)$$

4. Алгоритм оптимизации

Решение задачи оптимизации проведено методом имитационного моделирования [5] по следующему алгоритму.

Шаг 1. Начальное значение A=0.

Шаг 2. A_R=A.

Шаг 3. Для всех элементов a_{ij} матрицы A_R проводится оптимизация:

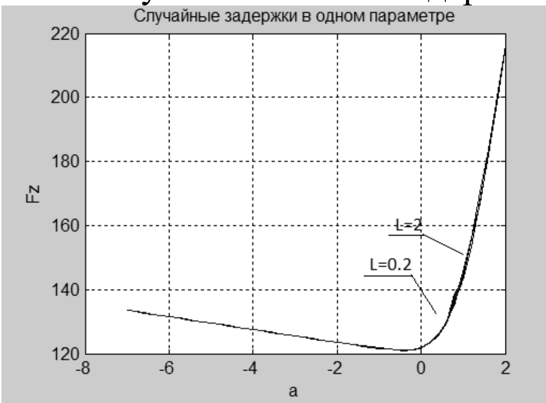
- изменяем только значения одного параметра a_{ij};
- используем генератор случайных чисел для моделирования распределений отклонений в поставках по всем параметрам;
- методом наименьших квадратов строим функцию, аппроксимирующую зависимость издержек $F_Z(a_{ij})$= Fz(A, L)при $A[i, j] = a_{ij}$, и находим a_{ij}, соответствующее минимуму $F_Z(a_{ij})$. В качестве аппроксимирующей функции использовалась парабола.
- записываем a_{ij} в матрицу A_R.

Шаг 4. Если $\|A - A_R\| < \varepsilon$, оптимизация закончена, результат – в A_R; иначе цикл оптимизации (шаг 3) повторяется.

5. Результаты исследования

Предложенная математическая модель и программа оптимизации позволяют исследовать влияние основных параметров системы управления запасами.

На рис. 3 приведены графики зависимости функции средних потерь от параметров модели, видно, что при фиксированных задержках функция потерь имеет один глобальный минимум. При случайных задержках функция потерь сильно «зашумлена», однако это скорее следствие метода исследования, а не поведения самой функции. При увеличении диапазона случайной величины отклонений увеличиваются издержки.



a

b

Рис. 3. Результаты моделирования зависимости функции F_Z в зависимости от параметров модели (a – при фиксированных задержках, b – при случайных задержках)

Воспользуемся исходными данными примера, приведенного ранее. Выполним шаги оптимизации матрицы поставок.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; Fz = \; 177.9000$$

A – начальная матрица $\{a_{ij}\}$ – времен опережения графика поставок товара $\{п_{ij}\}$; FZ-средние потери на хранение и штрафы.

Алгоритм сходится к решению за несколько шагов:

Цикл 1:

$$A_R = \begin{pmatrix} -0.0161 & 0 & 0 & -0.0838 \\ 0 & -1.4232 & 0 & 0 \\ -0.0085 & 0 & -1.6031 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0147 \\ 0 & 0 & -0.9897 & -0.0912 \end{pmatrix}, \; Fz = \; 82.0499,$$

A_R – скорректированная матрица поставок

Цикл 2:

$$A_R = \begin{pmatrix} -0.0707 & 0 & 0 & -0.5636 \\ 0 & -2.1138 & 0 & 0 \\ -0.0507 & 0 & -2.0954 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3368 \\ 0 & 0 & -1.9688 & -0.1499 \end{pmatrix}, \; Fz = \; 23.4197$$

Время работы около 10 сек на один шаг алгоритма.

Обычно алгоритм сходится за 4-5 шагов.

Видно, что потери от издержек хранения и штрафов сократились более чем в 7 раз. При этом матрица A_R содержит рекомендуемые времена опережения графика поставок.

Заключение

Предложенная математическая модель учета вероятностей задержек поставок товаров и разработанный алгоритм оптимизации графика поставок позволяют сократить издержки предприятий, использующих JIT-технологию в условиях неритмичных поставок. Алгоритм показал хорошие практические результаты. Недостатком алгоритма является то, что для оптимизации он использует метод имитационного моделирования, и поэтому обладает недостаточной для объемных задач производительностью. Для устранения данного недостатка необходимо получить аналитическое выражение среднего числа потерь от параметров модели.

Библиографический список

1. Пелих, А.С. Экономико-математические методы и модели в управлении производством / А.С. Пелих, Л.Л. Терехов, Л.А. Терехова. – Ростов н/Д: «Феникс», 2005. – 248 с.
2. Турлакова, С.У. Модели управления запасами: учебное пособие / С.У. Турлакова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2013. – 45 с.
3. Быков, В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике / В.В.Быков. – М: «Советское радио», 1971. – 328 с.
4. Шапиро, Дж. Моделирование цепи поставок / Пер. с англ. под ред. В.С. Лукинского. – СПб: Питер, 2006. – 720 с.
5. Лю, Б. Теория и практика неопределенного программирования / Б. Лю; пер. с англ. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2005. – 416 с.
6. Мараховский, В.Б. Моделирование параллельных процессов сети Петри / В.Б. Мараховский, Л.Я. Розенблом, А.В. Яковлев. – СПб: «Профессиональная литература», 2014. – 500 с.

Информация об авторах
Девятловская Яна Игоревна, ММиКН 553, ЮУрГУ, Челябинск, *deviatlovskaja.yana@yandex.ru*
Оленчикова Татьяна Юрьевна, доц. кафедры Прикладной Математики, ЮУрГУ, г. Челябинск, *olenchtu@mail.ru*