УДК 004.056.53

К ВОПРОСУ О СОРЕВНОВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Е.В. Ларкин, А.А. Сычугов

Рассматривается задача соревнования n случайных процессов. Получены зависимости, позволяющие определить время окончания работы каждого случайного процесса, а также основные характеристики этого времени, как случайной величины. Предложена методика определения очередности окончания работы всех участников соревнования.

Ключевые слова: сети Петри, соревнование, случайные процессы, экспоненциальное распределение, математическое ожидание.

Одним из эффектов, наблюдаемых при исследовании случайных процессов в различных технических системах (например, отказы/восстановления отдельных элементов в системах, поведение противоборствующих сторон в системах безопасности), является эффект соревнования.

Исследование соревнования в рассматриваемом случае связано с определением времени ожидания уже завершившимися случайными процессами, еще не завершенных процессов.

Случай соревнования двух случайных процессов моделируется сетью Петри, приведенной на рис. 1.

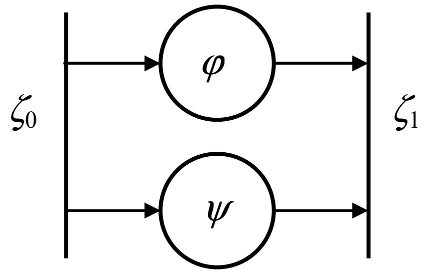

Рис. 1. «Соревнование» двух случайных процессов

Сеть Петри, моделирующая процесс ожидания одним соревнующимся процессом окончания работы другого, имеет структуру:

$$\Pi = \{\{\varphi, \psi\}, \{\zeta_0, \zeta_1\}, \{I_A(\zeta_0) = \varnothing, I_A(\zeta_1) = \{\varphi, \psi\}\}, \{O_A(\zeta_0) = \{\varphi, \psi\}, O_A(\zeta_1) = \varnothing\}\}. \quad (1)$$

Плотности распределения времени пребывания фишек в позициях φ и ψ СПМ определяются плотностями, соответственно, φ(t) и ψ(t).

Если процессы выполнения полушагов $s_\varphi = (\varphi,\zeta_1)$ и $s_\psi = (\psi,\zeta_1)$ начинаются одновременно, плотности распределения времени выполнения указанных полушагов равны $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, соответственно, то плотность распределения времени ожидания процессом φ события завершения выполнения полушага s_ψ определяется зависимостью

$$f_{1 \to 2}(t) = \frac{1(t)\int\limits_{0}^{\infty} \varphi(\tau)\psi(t+\tau)d\tau}{\int\limits_{t=0}^{\infty} \Phi(t)d\Psi(t)}, \tag{2}$$

где τ - вспомогательная переменная; $\Phi(t), \Psi(t)$ - соответствующие функции распределения; 1(t) - единичная функция Хевисайда.

Доказательство соотношения (2) представлено в [2] и здесь не рассматривается.

Наряду с «соревнованием» двух процессов практический интерес представляет общий случай «соревнования» для произвольного количества случайных процессов.

Пусть имеется n случайных процессов, представленных плотностями распределения времени выполнения и соответствующими функциями, и функционирующих независимо:

$$\begin{aligned} \Xi &= \left(f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)\right), \\ \Omega &= \left(F_1(t), F_2(t), ..., F_n(t)\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Задача «соревнования» в данном случае формулируется как определение последовательности, в которой завершат работу все случайные процессы.

Для решения поставленной задачи следует рассмотреть следующие случаи.

Случай 1. Хотя бы один случайный процесс из числа соревнующихся закончил свою работу.

Случай 2. Все случайные процессы закончили свою работу.

Случай 3. Определение времени окончания работы каждого процесса.

Случай 1.

Функция распределения того, что хотя бы один случайный процесс завершился, может быть определена следующим образом:

$$\Psi(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - F_i(t)\right). \tag{4}$$

Случай 2.

Функция распределения того, что все случайные процессы закончили свою работу, может быть определена так:

$$\mathrm{X}(t) = \prod_{i=1}^{n} F_i(t). \tag{5}$$

Случай 3.

Для определения времени окончания работы каждого случайного процесса необходимо $\forall f_i(t) \in \Xi$ рассчитать зависимости

$$T_{i \mapsto \Sigma} = \int_0^{\infty} \tau f_{i \mapsto \Sigma}(\tau) d\tau, \tag{6}$$

где $f_{i\mapsto\Sigma}(\tau) = \frac{d}{d\tau} F_{i\mapsto\Sigma}(\tau)$ - соответствующая плотность распределения.

Аналитическая зависимость для определения $f_{i\mapsto\Sigma}(\tau)$ может быть получена, основываясь на следующих рассуждениях.

Дифференциал соотношения (4) позволяет определить плотность распределения того, что хотя бы один процесс завершился к моменту времени τ:

$$\psi(\tau) = \frac{d}{d\tau}\Psi(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left(1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_i(\tau))\right) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\tau) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (1 - F_j(\tau)). \tag{7}$$

Элемент суммы в выражении (7) представляет собой взвешенную плотность распределения того, что i-й процесс закончил работу первым к моменту времени τ, то есть с этого момента находится в ожидании окончания остальных процессов:

$$f_{i \mapsto \Sigma} = f_i(\tau) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (1 - F_j(\tau)). \tag{8}$$

Вес плотности в данном случае определяется как вероятность того, что i-й процесс завершился к этому моменту времени, а остальные процессы продолжают функционировать. Эту вероятность можно получить из следующих соображений. Вероятность того, что i-й процесс завершится точно к моменту времени τ, представляет собой элемент вероятности [3]:

$$p_i(t = \tau) = f_i(\tau) d\tau. \tag{9}$$

Вероятность того, что к этому моменту все остальные процессы будут продолжать функционировать, определяется следующим образом:

$$p_{\Sigma | i}(t > \tau) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (1 - F_j(\tau)). \tag{10}$$

Так как все случайные процессы в рассматриваемом случае функционируют независимо друг от друга, то справедливо следующее выражение:

$$p(t=\tau/i,t>\tau/\Sigma|i)=p_i(t=\tau)\cdot p_{\Sigma|i}(t>\tau)=f_i(\tau)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(1-F_j(\tau)\right)d\tau \cdot \qquad (11)$$

Интегрирование выражения (11) в интервале $(0\div\infty)$ позволяет определить вероятность того, что i-й процесс завершился к моменту времени τ, а остальные процессы продолжают функционировать, то есть (8):

$$p_i=\int_0^{\infty} f_i(\tau)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(1-F_j(\tau)\right)d\tau . \qquad (12)$$

Таким образом, плотность распределения того, что i-й процесс закончил работу первым к моменту времени τ примет вид

$$f_{i\mapsto\Sigma}=\frac{f_i(\tau)\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(1-F_j(\tau)\right)}{\int\limits_0^{\infty} f_i(\tau)\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(1-F_j(\tau)\right)d\tau} . \qquad (13)$$

Полученное выражение представляет собой плотность распределения. Для выражения (13), как и для любой другой случайной величины, представленной плотностью распределения, могут быть найдены начальные и центральные моменты.

Математическое ожидание закона распределения (13) вычисляется следующим образом:

$$T_{i\mapsto\Sigma}=\int_0^{\infty}\tau f_{i\mapsto\Sigma}d\tau=\int_0^{\infty}\tau\frac{f_i(\tau)\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(1-F_j(\tau)\right)}{\int\limits_0^{\infty} f_i(\tau)\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(1-F_j(\tau)\right)d\tau}d\tau \cdot \qquad (14)$$

Полученное значение будет представлять собой среднее время окончания работы i-го случайного процесса.

Характеристику разброса времени окончания можно определить через дисперсию:

$$D_{i \mapsto \Sigma} = \int_0^\infty \left(\tau - T_{i \to \Sigma}\right)^2 f_{i \mapsto \Sigma} d\tau = \int_0^\infty \left(\tau - T_{i \to \Sigma}\right)^2 \frac{f_i(\tau) \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(1 - F_j(\tau)\right)}{\int\limits_0^\infty f_i(\tau) \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(1 - F_j(\tau)\right) d\tau} d\tau \cdot$$

После вычисления для каждого случайного процесса, участвующего в соревновании, выражения (14) будет сформировано множество, каждый элемент которого есть среднее время окончания работы случайного процесса:

$$T = \left\{t_{1 \mapsto \Sigma}, t_{2 \mapsto \Sigma}, ..., t_{n \mapsto \Sigma}\right\}. \qquad (15)$$

При расчете множества (15) будет сформировано множество функций распределения времени окончания выполнения каждого случайного процесса:

$$f = \left\{f_{1 \mapsto \Sigma}(t), f_{2 \mapsto \Sigma}(t), ..., f_{n \mapsto \Sigma}(t)\right\}. \qquad (16)$$

Дальнейшее решение задачи «соревнования» n случайных процессов будет заключаться в определении порядка завершения выполнения процессов. Для этого в общем случае необходимо расставить элементы множества (15) на временной оси относительно времени начала «соревнования» (рис. 1). Результат расстановки будет представлять собой порядок завершения работы всех случайных процессов.

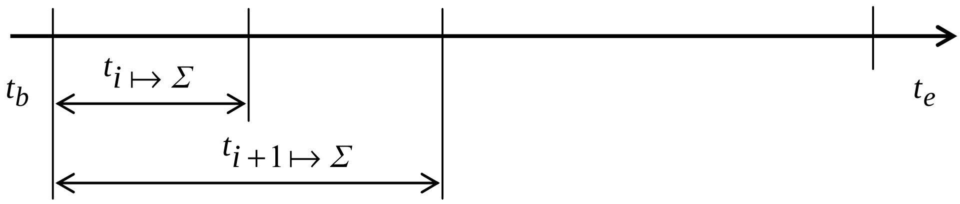

Рис. 1. Элементы множества на временной оси

На рис. 1 t_b - время начала выполнения случайных процессов (старт «соревнования»), t_e - время окончания выполнения всех случайных процессов, функция распределения которого может быть определена по зависимости (5).

Однако при исследовании случайных процессов, распределенных по одинаковым законам, возможна ситуация, когда выражение (13) будет иметь одинаковый вид для случая ожидания любым случайным процессом из числа соревнующихся окончания работы остальных. В этом случае определять порядок окончания работы случайных процессов следует по вероятности (12).

Во многих прикладных задачах для математического моделирования потока без последействия часто используется экспоненциальный закон распределения с интенсивностью λ и плотностью: $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$. В связи с этим имеет смысл в качестве примера рассмотреть следующий случай.

Пусть имеются n случайных процессов, распределенных по экспоненциальным законам с интенсивностями λ_1. λ_2, …, λ_n соответственно и представленных своими плотностями и функциями распределения, то есть множества (3) в данном случае примут вид

$$\Xi=\left(\lambda_1 e^{-\lambda_1 t},\lambda_2 e^{-\lambda_2 t},...,\lambda_n e^{-\lambda_n t}\right),$$

$$\Omega=\left(1-e^{-\lambda_1 t},1-e^{-\lambda_2 t},...,1-e^{-\lambda_n t}\right).$$

Для случая ожидания первым процессом окончания работы всех остальных плотность распределения (13) запишем в виде

$$f_{1\mapsto\Sigma}=\frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1\tau}\prod\limits_{j=2}^{n}e^{-\lambda_j\tau}}{\int\limits_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1\tau}\prod\limits_{j=2}^{n}e^{-\lambda_j\tau}d\tau}=\frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1\tau}e^{-\sum\limits_{j=2}^{n}\lambda_j\tau}}{\int\limits_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1\tau}e^{-\sum\limits_{j=2}^{n}\lambda_j\tau}d\tau}.$$

После выполнения необходимых преобразований выражение для плотности распределения примет вид

$$f_{1\mapsto\Sigma}=\lambda_\Sigma e^{-\lambda_\Sigma\tau},$$

где $\lambda_\Sigma=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$.

Несложно заметить, что полученное выражение представляет собой не что иное, как экспоненциальное распределение с интенсивностью λ_Σ и будет иметь одинаковый вид для плотности распределения времени окончания любого случайного процесса из соревнующихся. В этом случае среднее время окончания работы 1-го случайного процесса (соответственно и остальных) может быть определено по известной зависимости как математическое ожидание экспоненциального закона:

$$T_{1\mapsto\Sigma}=\frac{1}{\lambda_\Sigma}.$$

Дисперсия

$$D_{1 \mapsto \Sigma} = \frac{1}{\lambda_\Sigma}.$$

Вероятность того, что i-й процесс закончит работу первым определяется по (12):

$$p_1 = \int_0^\infty f_1(\tau) \prod_{j=2}^{n} e^{-\lambda_j \tau} d\tau = \frac{\lambda_1}{\lambda_\Sigma}.$$

То есть

$$p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_\Sigma}. \tag{17}$$

В этом случае определение последовательности завершения случайных процессов следует выполнить по вероятности (17).

Для наглядности можно составить следующую таблицу

Таблица интенсивности процессов

Участник «Соревнования»	Среднее время окончания	Дисперсия времени окончания	Вероятность того, что соответствующий участник закончит первым
λ_1	$\frac{1}{\lambda_\Sigma}$	$\frac{1}{\lambda_\Sigma}$	$\frac{\lambda_1}{\lambda_\Sigma}$
λ_2	$\frac{1}{\lambda_\Sigma}$	$\frac{1}{\lambda_\Sigma}$	$\frac{\lambda_2}{\lambda_\Sigma}$
…	…	…	…
λ_n	$\frac{1}{\lambda_\Sigma}$	$\frac{1}{\lambda_\Sigma}$	$\frac{\lambda_n}{\lambda_\Sigma}$

Из представленной таблицы видно, что для случая «соревнования» случайных процессов, распределенных по экспоненциальным законам, итог «соревнования», то есть последовательность окончания работы случайных процессов определяется, в конечном итоге, интенсивностью случайных процессов. То есть процесс с большей интенсивностью закончит работу раньше, чем все остальные.

Проведенные исследования могут быть полезны при исследовании надежности технических систем (отказы/восстановления отдельных блоков), кроме того, при моделировании систем обеспечения безопасности.

Список литературы

1. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем / пер. с англ. М.: Мир, 1984. 264 с.

2. Методология обеспечения отказоустойчивости цифровых систем

управления. Отчет о НИР 06-08-00387 А, выполняемой при поддержке РФФИ. Этап 1 // Е.В. Ларкин [и др.]. Тула, 2006, 53 с.
3. Е.С. Вентцель. Теория вероятностей: М.: Наука, 1969. 576 с.

Ларкин Евгений Васильевич, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой, Россия, Тула, Тульский государственный университет,

Сычугов Алексей Алексеевич, канд. техн. наук, доц., Россия, Тула, Тульский государственный университет

TO THE QUESTION OF COMPETITION OF CASUAL PROCESSES

E.V. Larkin, A.A. Sychugov

The problem of competition n of casual processes is considered. The dependences, allowing to define time of completion of work of each casual process, and also the main characteristics of this time as a random variable are received. The technique of definition of sequence of completion of work of all participants of competition is offered.
Key words: Petri's networks, competition, casual processes, exponential distribution, population mean.

Larkin Evgeny Vasilyevich, doctor of technical scenses, professor, the head of a chair, Russia, Tula, Tula State University,

Maws Alexey Alekseevich, candidate of technical sciences, docent, Russia, Tula, Tula State University

УДК 654.172

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ СОСТАВ КАМЕР, ПРИМЕНЯЕМЫХ В СИСТЕМАХ ОХРАННОГО ВИДЕОНАБЛЮДЕНИЯ

В.А. Селищев, С.Ю. Борзенкова

Рассматриваются основные функции современных процессоров обработки видеоизображения, применяемых в составе камер охранного видеонаблюдения на защищаемых объектах.
Ключевые слова: видеокамера, сигнальный процессор, встречная засветка, обработка видеоизображения, динамический диапазон.

Функционал современных процессоров обработки видеосигнала постоянно расширяется, что вызывает затруднения при их выборе не только у заказчиков, но и у инсталляторов систем видеоохраны. Поэтому важнейшей задачей является определить основные функциональные возможности видеопроцессоров в составе камер видеонаблюдения.