

## ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ДВУХ ПЕРЕКРЕСТКОВ НА ОСНОВЕ СЕТЕЙ ПЕТРИ

И. А. Седых, Д. С. Демахин

*Липецкий государственный технический университет*

Поступила в редакцию 13.09.2017 г.

**Аннотация.** В данной работе рассмотрена система из двух перекрестков, для которой была разработана имитационная модель на основе иерархических временных раскрашенных вероятностных сетей Петри. Предложен алгоритм функционирования рассматриваемой сети и приведен пример, отображающий его работу. Также приведено схематическое отображение моделируемого объекта и графическое изображение сети.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, иерархические временные раскрашенные вероятностные сети Петри, имитационное моделирование, система из двух перекрестков.

**Annotation.** The article presents a system of two intersections, for which an imitation model was developed on the basis of hierarchical temporary colored probabilistic Petri's nets. An algorithm for the functioning of the net is proposed and an example showing its operation is given. Also schematic diagram of the modeled object and a graphical representation of the net is shown.

**Keywords:** mathematical modeling, of hierarchical temporary colored probabilistic Petri's nets, simulation modeling, system of two intersections.

### ВВЕДЕНИЕ

Для отображения процесса функционирования какой-либо системы удобно использовать сети Петри и их различные модификации. Сети Петри позволяют графически интерпретировать структуру рассматриваемого объекта, а также моделировать параллельные процессы. Несмотря на ряд неудобств, таких как добавление искусственных элементов, не соответствующих реальным компонентам представляемой системы, сети Петри являются достаточно гибким инструментом моделирования сложных объектов и процессов.

Рассматриваемая в данной работе транспортная система, состоящая из двух перекрестков, имеет сложную структуру. Это обусловлено гибким порядком включения светофорных групп, зависимостью времени работы сигналов от количества машин на соответствующих полосах и другими свойствами, характерными для транспортных перекрестков. Поэтому для отображения процесса

их функционирования будут использоваться иерархические временные раскрашенные вероятностные сети Петри.

### ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ИЗ ДВУХ ТРАНСПОРТНЫХ ПЕРЕКРЕСТКОВ

В [1–2] был разработан алгоритм управления светофорами перекрестка с гибким порядком активируемых светофорных групп и возможностью варьирования времени работы зеленого сигнала светофоров. Целью данной работы является построение имитационной модели двух взаимосвязанных перекрестков.

Ниже на рис. 1 представлена схема из двух перекрестков. На ней цифрами в овалах обозначены транспортные потоки, по которым машины прибывают на перекресток. Цифрами в прямоугольниках обозначены направления, по которым транспортные средства покидают данную систему.

Например, как видно из рис. 1, после прохождения цифры 5 в прямоугольнике, маши-

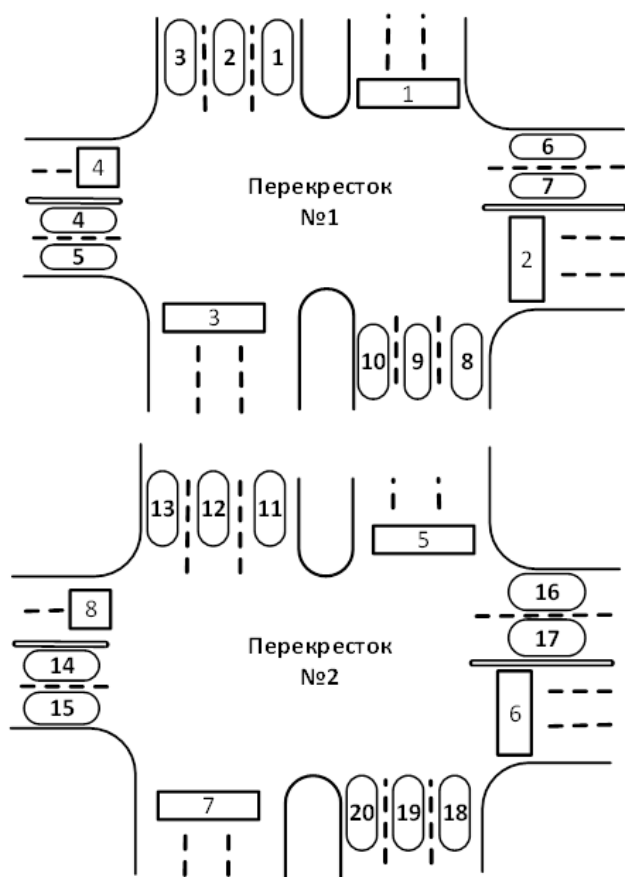


Рис. 1. Схема из двух перекрестков

ны перераспределяются по потокам 8, 9, 10. Подобная схема прохождения перекрестка одинакова для всех направлений.

Для построения имитационной модели будут использоваться иерархические временные раскрашенные вероятностные сети Петри [3–7]. Предполагается применение двухуровневого отображения процесса функционирования данной системы. На первом уровне (см. рис. 2) перекрестки считаются позициями, а в качестве переходов выступают фиктивные элементы, соединяющие смежные позиции – перекрестки. Второй уровень (см. рис. 3) является вложенным в первый. Здесь отображается работа непосредственно самого перекрестка. Рассматриваемая система состоит из двух схожих вложенных конструкций, между которыми настроен взаимообмен, реализованный при помощи переходов  $t_1^*$  и  $t_2^*$ , являющихся общими для сетей 1-го и 2-го уровня. Оба перекрестка работают параллельно и независимы друг от друга.

В сети, представленной на рис. 3, содержится 14 цветов, первые 10 из которых соот-

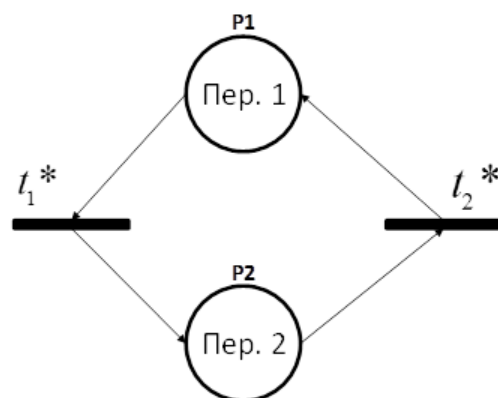


Рис. 2. Первый уровень сети Петри

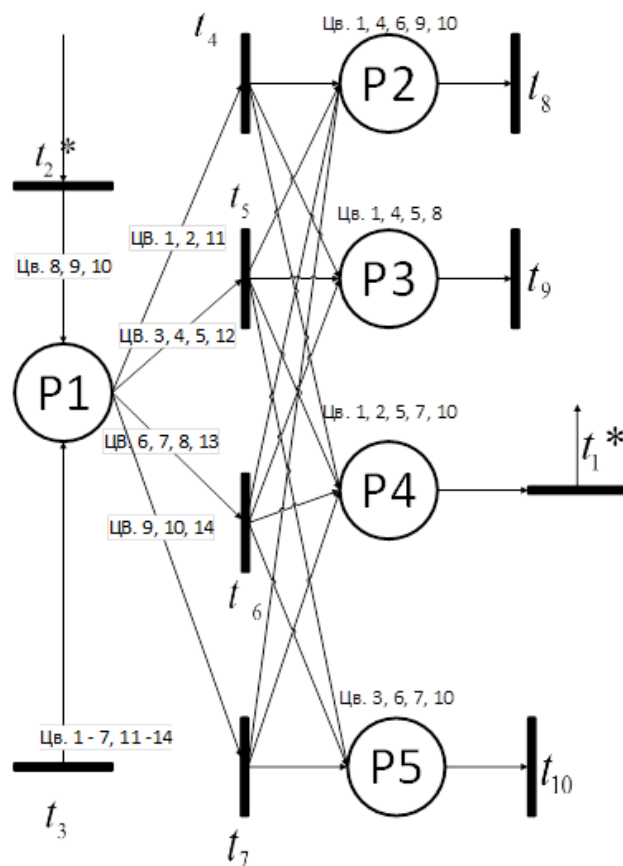


Рис. 3. Второй уровень сети Петри для первого перекрестка

ветствуют потокам машин, а 11–14-ый являются управляющими. В позиции  $P_1$  происходит распределение маркеров, в том числе управляющего, с помощью которого выбирается активируемая светофорная группа [1] 1–4, каждая из которых соответствует переходу  $t_4 - t_7$ . В них выполняется распределение потоков машин по позициям-направлениям  $P_2 - P_5$  с некоторыми вероятностями. Управляющий маркер одного из цветов 11–14, попадая в соответствующий переход  $t_4 - t_7$ , уда-

ляется. Все направления-позиции, кроме  $P_4$ , являются выходными, т. е. машины-маркеры покидают перекресток через переходы  $t_8 - t_{10}$ . Из  $P_4$  машины попадают в фиктивный переход  $t_1^*$ , где в соответствии с новым перекрестком и некоторыми вероятностями маркерам переприсваиваются цвета. Через переход  $t_2^*$  машины-маркеры прибывают со 2-го перекрестка и распределяются по потокам 8–10. Автомобили, прибывающие по другим полосам, а также управляющие маркеры генерируются в  $t_3$ . На каждой итерации может существовать управляющий маркер только одного цвета.

Структура сети Петри второго перекрестка формируется аналогично.

### МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ СЕТИ ПЕТРИ ПЕРЕКРЕСТКА

Наряду с графическим способом задания сетей Петри используется матричный. Покажем алгоритм формирования матриц инцидентности  $R_k^+$ ,  $R_k^-$ ,  $R_k$ , где  $k$  – номер цвета сети Петри второго уровня (рис. 3),  $k = 1, \dots, d$ ,  $d$  – количество цветов. Все матрицы имеют размерность  $m \times n$ , где  $m$  – количество переходов,  $n$  – количество позиций.

Элементы  $r_{ji}$  матрицы  $R_k^-$  заполняются весами входных дуг  $W_{ij}^k$   $k$ -го цвета перехода  $t_j$  в соответствии с формулой (1). Элементы матрицы  $R_k^+$ , заполняются весами выходных дуг по формуле (2).

$$(r^k)_{ji}^- = \begin{cases} W_{ij}^k = (t_j, p_i), p_i \in I_k(t_j), t_j \in T, p_i \in P; & (1) \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$(r^k)_{ji}^+ = \begin{cases} W_{ij}^k = (t_j, p_i), p_i \in O_k(t_j), t_j \in T, p_i \in P; & (2) \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $k = 1, \dots, d$ ;  $I_k : T \rightarrow P^\infty$  является входной функцией – отображением из переходов в комплекты позиций  $k$ -го цвета;  $O_k : T \rightarrow P^\infty$  есть выходная функция – отображение из переходов в комплекты позиций  $k$ -ого цвета;  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  – конечное

множество позиций,  $n \geq 0$ ;  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  – конечное множество переходов,  $m \geq 0$ ; множество позиций и множество переходов не пересекаются:  $P \cap T = \emptyset$ . Обозначим множество цветов  $C$ , где  $C = \{1, 2, \dots, d\}$ .

Матрицы инцидентности  $R_k$  вычисляются по формуле (3).

$$R_k = R_k^+ - R_k^-. \quad (3)$$

В качестве примера приведем матрицы инцидентности для цвета под номером 2 сети Петри 2-го уровня.

$$R_2^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; R_2^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы для других цветов формируются аналогичным способом. Также следует от-

метить, что для рассматриваемой сети Петри матрицы инцидентности состоят из блоков, каждый из которых соответствует своему цвету:

$$R^- = \begin{bmatrix} R_1^- \\ R_2^- \\ \vdots \\ R_d^- \end{bmatrix}; \quad R^+ = \begin{bmatrix} R_1^+ \\ R_2^+ \\ \vdots \\ R_d^+ \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_d \end{bmatrix}.$$

При функционировании временной раскрашенной сети Петри используются динамические матрицы задержек в позициях и переходах, которые обозначаются  $Z(\tau) \in R^{n \times d}$  и  $S(\tau) \in R^{m \times d}$  соответственно, где  $\tau$  – текущее время работы имитационной модели. Значение  $Z_{ij}(\tau)$  – величина задержки маркера  $j$ -го цвета в  $i$ -ой позиции;  $S_{kj}(\tau)$  – время блокировки  $k$ -го перехода для  $j$ -го цвета.

В рассматриваемом случае будем пользоваться упрощенной векторной формой:  $Z(\tau) \in R^d$  только для первой позиции, так как в других задержек не будет;  $S(\tau) \in R^m$  – для переходов без разделения по цветам, так как цвета, принадлежащие одной светофорной группе, блокируются на одно и то же время, кроме управляющего сигнала, время жизни которого на 1 секунду меньше времени задержки. Задержка в позициях определяется по времени ожидания светофорных групп [1], а задержка в переходах – по времени работы активированной группы.

Далее остановимся на маркировке, которая определяет принадлежность фишек позициям. Маркировка  $\mu(\tau)$  временной раскрашенной сети Петри есть функция, отображающая множество позиций  $P$  и цветов  $C$  во множество неотрицательных целых чисел  $N_0$  в момент времени  $\tau$ :

$$\mu: P \times C \rightarrow N_0.$$

В матричной форме маркировка для раскрашенной сети Петри задается как матрица размерности  $n \times d$ ,  $\mu_{ik}(\tau)$  определяет для каждой позиции  $p_i$  сети Петри количество фишек  $k$ -го цвета в этой позиции в момент времени  $\tau$ . Если  $\mu(\tau)$  – некоторая разметка сети Петри, то неравенство:

$$\mu(\tau) \geq e_j \otimes R^- \quad (4)$$

выражает условие возбуждения перехода  $t_j \in T$ . Здесь  $e_j$  – вектор-строка длины  $m$  с единицей на  $j$ -ом месте. Операция  $\otimes$  означает произведение строки  $e_j$  на каждую из матриц  $R_k^-$ , образующих блочную матрицу  $R^-$ .

Так как в работе рассматривается временная раскрашенная сеть, то при расчете новой маркировки  $\mu'(\tau)$  будет действовать условие блокировки перехода, которое заключается в том, что если при некоторой текущей маркировке  $\mu(\tau)$  переход  $t_j$  активен, то начало его работы приведет к новой маркировке  $\mu'(\tau)$ :

$$\mu'(\tau) = \mu(\tau) - e_j \otimes R^-, \quad (5)$$

после чего переход блокируется на время  $S_{kj}(\tau)$  для  $k$ -го цвета. Когда время блокировки перехода подходит к концу при текущей маркировке  $\mu(\tau)$ , то его срабатывание приведет к изменению текущей маркировки:

$$\mu''(\tau) = \mu(\tau) + e_j \otimes R^+. \quad (6)$$

Таким образом, формулы (5) и (6) формально задают правило нахождения новой маркировки сети. Матрица начальной маркировки  $\mu(0)$  задает ее начальное состояние в момент времени  $\tau = 0$ .

### АЛГОРИТМ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ ПЕРЕКРЕСТКОВ

Алгоритм управления каждым перекрестком модифицирован таким образом, что последовательность активации светофорных групп не фиксирована как и время работы зеленого сигнала. В сети Петри этот функционал обеспечивается управляющими маркерами.

Рассмотрим алгоритм функционирования имитационной модели.

1) Формируем начальную маркировку для двух перекрестков.

2) Рассчитываем матрицы инцидентности  $R_k^+$ ,  $R_k^-$ ,  $R_k$  для двух перекрестков.

3) По алгоритму гибкого управления светофорной системой определяются активируемые светофорные группы и время их работы на обоих перекрестках. В первый раз синхронно, далее без прямой зависимости между собой. По номеру активируемой группы фор-

Таблица 1 часть 1

## Пример статистических данных с первого перекрестка

Текущее время	№ актив. светоф. группы	1						2								
		1			2			3			4			5		
		было	+	–	было	+	–	было	+	–	было	+	–	было	+	–
–	–	10	2	10	9	1	9	3	1	0	2	1	0	5	1	0
0	3	2	3	0	1	2	0	4	1	0	3	0	0	6	0	0
24	4	5	2	0	3	3	0	5	0	0	3	1	0	6	1	0
42	1	7	2	8	6	3	8	5	0	0	4	0	0	7	1	0
60	2	1	1	0	1	2	0	5	1	5	4	1	4	8	0	8

Таблица 1 часть 2

3									4					
6			7			8			9			10		
было	+	–	было	+	–	было	+	–	было	+	–	было	+	–
10	1	0	8	2	0	4	2	0	1	3	0	1	2	0
11	2	10	10	2	10	6	1	6	4	2	0	3	3	0
3	1	0	2	1	0	1	1	0	6	2	7	6	3	8
4	0	0	3	2	0	2	1	0	1	2	0	1	2	0
4	2	0	5	1	0	3	1	0	3	1	0	3	1	0

мируется соответствующий управляющий маркер, который генерируется в переходе  $t_3$ .

4) По данным из пункта 3 формируются вектора задержек  $Z(\tau)$  и  $S(\tau)$ .

5) Опираясь на данные, полученные в пункте 3, активируется выбранная светофорная группа. В рассматриваемой сети Петри это реализовано перемещением управляющего маркера в соответствующий переход.

6) Там, где время блокировки перехода равно 0, машины-маркеры разрешенных цветов будут перемещаться без задержек.

7) По окончании времени блокировки управляющего маркера он удаляется из модели, после чего переходим к пункту 3.

### ПРИМЕР ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СЕТИ ПЕТРИ ПЕРВОГО ПЕРЕКРЕСТКА

В рассматриваемом примере начальная маркировка будет формироваться по реальным данным перекрестка из табл. 1.

Первый столбец в приведенной выше таблице определяет текущее время наблюдения за перекрестком. Второй столбец указывает на светофорную группу, которая будет ак-

тивирована на данной итерации. Цифры от одного до четырех в первой строке шапки таблицы соответствуют светофорным группам, цифры от одного до десяти во второй строке – полосам. В колонке «было» указывается количество машин на полосе на начало текущей итерации. Столбцы «+» и «–» определяют число прибывших и покинувших данную полосу машин на текущей итерации.

Начальную маркировку возьмем по данным из второй строки табл. 1:

$$\mu(0) =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 11 & 10 & 6 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Первые 10 столбцов соответствуют цветам полос, последние четыре – управляющим маркерам. Для маркировки в следующий момент времени  $\tau + 1$  необходимо найти матрицы инцидентности  $R_k^-$  и  $R_k^+$ , алгоритм формирования которых приведен ранее.

По алгоритму работы имитационной модели, представленному ранее, далее будет вы-



брана 3-ая светофорная группа с цветами 6, 7 и 8. Для выполнения условий блокировки потребуются матрицы задержек. В рассматриваемом случае, как было отмечено ранее, будем пользоваться векторной формой. Таким образом, получим:

$$Z(0) = [24 \ 24 \ 24 \ 24 \ 0 \ 0 \ 0 \ 24 \ 24 \ 0 \ 0 \ 23 \ 0];$$

$$S(0) = [0 \ 0 \ 24 \ 24 \ 0 \ 24 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Так как транспорт на перекрестке меняет свое положение не моментально, а в течение некоторого времени, то следующую маркировку имеет смысл приводить не при  $\tau = 1$ , а при  $\tau = 3$ . Соответственно получим:

$$\mu(3) =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 10 & 9 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Управляющий маркер переместился в переход  $t_6$ , тем самым активировав третью светофорную группу. Далее за прошедшие три секунды машины-маркеры с цветами 6 и 7 переместились в исходящие направления-позиции  $P_2$  и  $P_5$  соответственно. С восьмой полосы машина-маркер с соответствующим цветом еще не покинула свою позицию. Также за это время на полосы 9 и 10 прибыло по одной машине-маркеру с соответствующим цветом. Вектора задержек  $Z(\tau)$  и  $S(\tau)$  соответственно примут вид:

$$Z(3) = [20 \ 20 \ 20 \ 20 \ 20 \ 0 \ 0 \ 0 \ 20 \ 20 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0];$$

$$S(3) = [0 \ 0 \ 0 \ 20 \ 20 \ 0 \ 20 \ 20 \ 0 \ 0].$$

В результате, к окончанию работы светофорной группы получим следующую маркировку:

$$\mu(24) =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 & 3 & 6 & 3 & 2 & 1 & 6 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Далее весь алгоритм повторяется в соответствии с пунктом три. Второй перекресток функционирует по такой же схеме параллельно первому.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена система из двух перекрестков, по которой была спроектирована имитационная модель на основе иерархических временных раскрашенных вероятностных сетей Петри. Также приведен пример, демонстрирующий функционирование системы. Предложенная модель позволяет увеличить пропускную способность каждого из рассмотренных перекрестков. В дальнейшем планируется расширить и дополнить данный подход на большее количество транспортных узлов.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №16-07-00-854 а).*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седых И. А. Гибкое управление светофорной системой перекрестка на основе нейронных сетей / И. А. Седых, Д. С. Демахин // Автоматизация процессов управления. – 2017. – №1(47). – С. 94–100.
2. Демахин Д. С. Алгоритм генерации обучающей выборки нейронной сети для модифицированной светофорной системы / Д. С. Демахин, И. А. Седых // Тенденции развития современной науки: сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета: в 2-х частях. Ч. 2. – Липецк : ЛГТУ, 2017. – С. 225–227.
3. Воевода А. А. Временные сети Петри и диаграммы UML / А. А. Воевода, Д. О. Романников // Сборник научных трудов Новосибирского государственного технического университета. – Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2009. – С. 169–174.
4. Ехлаков Ю. П. Цветные сети Петри в моделировании социально-экономических систем / Ю. П. Ехлаков, В. Ф. Тарасенко, О. И. Жуковский // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. – 2013. – №3(29). – С. 83–92.
5. Мальков М. В. Сети Петри и моделирование / М. В. Мальков, С. Н. Малыгина // Тру-

ды Кольского научного центра РАН. – 2010. – № 3. – С. 35–40.

6. Седых И. А. Представление цементного производства иерархическими раскрашенными временными сетями Петри на основе окрестностных моделей / И. А. Седых, Е. С. Аникеев // Вестник Липецкого государственного технического университета. – 2017. – №1(31). – С. 19–24.

**Седых И. А.** – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический университет».

E-mail: sedykh-irina@yandex.ru

**Демахин Д. С.** – магистрант кафедры информатики ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический университет».

E-mail: dima-demahin@mail.ru

7. Седых И. А. Применение раскрашенных временных сетей Петри для моделирования цементного производства / И. А. Седых, Е. С. Аникеев // Вестник Донского государственного технического университета. – 2016. – №4(87). – С. 140–145.

**Sedykh I. A.** – candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematics Department at the Lipetsk State Technical University.

E-mail: sedykh-irina@yandex.ru

**Demahin D. S.** – master student of informatics chair at the Lipetsk State Technical University.

E-mail: dima-demahin@mail.ru