Д. С. Звягин

УСЛОВИЯ ПРИМЕНЕНИЯ МАТРИЧНОГО ПОДХОДА К СТОХАСТИЧЕСКИМ СЕТЯМ ПЕТРИ

CONDITIONS FOR APPLICATION OF THE MATRIX APPROACH TO STOCHASTIC PETRI NETS

В статье приводятся результаты исследования, по разработке алгоритма добавления виртуальных элементов в стохастическую сеть Петри. Разработанный алгоритм необходим для применения матричных уравнений при анализе стохастических сетей Петри. При введении виртуальных элементов могут возникать случаи, связанные с несуществованием обратной составной матрицы. Предложенный алгоритм окажет помощь при решении задачи достижимости сетей Петри, позволяя оператору или эксперту добавлять правильно виртуальные элементы.

The article presents the results of a study on the development of an algorithm for adding virtual elements to a stochastic Petri net. The developed algorithm is necessary for using matrix equations in the analysis of stochastic Petri nets. When introducing virtual elements, there may be cases associated with the non-existence of an inverse composite matrix. The proposed algorithm will assist in solving the reachability problem for various Petri nets, allowing an operator or an expert to add correctly virtual vertices.

Введение. Сети Петри — это математический аппарат, предназначенный для моделирования различных динамических процессов, который впервые был описан Карлом Петри в 1962 году.

Данный математический аппарат представляет собой двудольный ориентированный граф, который состоит из вершин двух типов — позиций и переходов. Вершины соединены между собой дугами и при этом вершины одного типа не могут быть соединены между собой. По сети возможно движение меток (фишек) в зависимости от срабатывания определенных переходов, тем самым определяя работу рассматриваемой системы.

Теория языка сетей Петри позволяет смоделировать процессы математическим представлением в виде сетей, анализ которых помогает получить информацию о, их поведении и структуре [5, 6].

При рассмотрении различных процессов в математическом моделировании могут возникать условия неопределенности. Для учёта данных условий предлагается использовать стохастические (вероятностные) сети Петри, позволяющие определять вероятность нахождения фишек в необходимых позициях.

Стохастической сетью Петри называется пара $M_s = \{C, \mu^s\}$, где $C = \{P, T, I, O\}$, являющаяся описанием структуры сети Петри, а μ^s является функцией, присваивающей определенной позиции p_i вектор вероятностей $p \to V_s$ наличия фишек $\mu^s(P_i)$.

В математической модели процесса производства судебной почерковедческой экспертизы [7] стохастическая сеть Петри позволила решить задачу неопределенности, которая может возникнуть у оператора (эксперта, следователя) в вопросах правильности выбора тех или иных общих и частных признаков, в устойчивости и значимости совпадающих и/или различающихся признаков.

Для того чтобы получить желаемый результат, сеть должна находиться в каком-то определенном состоянии, установление которого возможно при помощи дерева достижимости. Дерево достижимости — это метод анализа сетей Петри, позволяющий решить задачи безопасности, ограниченности и достижимости. В настоящее время для решения задачи достижимости стохастической сети Петри используется два основных метода анализа: построение дерева достижимости и применение матричных уравнений.

Матричный подход является наиболее удобным и простым методом анализа, позволяющим помимо задачи достижимости определять возможную последовательность запуска переходов.

Постановка задачи. Для применения матричного подхода к стохастическим сетям Петри необходимо путем добавления виртуальных позиций или переходов привести их к такому виду, чтобы составная матрица изменений $D_{\text{п}}$ стала квадратной [8, 9].

Рассмотрим пример применения матричного подхода к анализу стохастической сети Петри с двумя позициями и одним переходом (рис. 1).

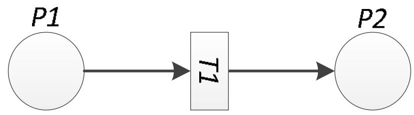

Рис. 1. Пример стохастической сети Петри

Для этой сети найдем составную матрицу изменений:

$$D^{+} = (0 \quad 1), D^{-} = (1 \quad 0),$$
$$D_1 = D_1^{+} - D_1^{-} = (0 \quad 1) - (1 \quad 0) = (-1 \quad 1).$$

Теперь рассмотрим все возможные варианты преобразования прямоугольной матрицы D_1 в квадратную матрицу, при этом стоит учитывать, что добавленный виртуальный переход будет являться переходом t_2, что в свою очередь приведет к добавлению дополнительной строки ниже основной, которая будет неизменна.

Вариант 1.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$D = D^{+} - D^{-} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Исходя из полученных данных, а именно из значений D^{+}и D^{-}, построим сеть Петри, дополнив ее виртуальным переходом (рис. 2).

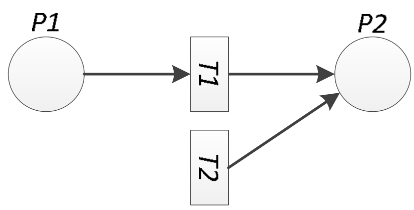

Рис. 2. Преобразованная стохастическая сеть Петри, приведенная на рис. 1

Вариант 2.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$D = D^{+} - D^{-} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Исходя из полученных данных, построим сеть Петри, дополнив ее виртуальным переходом (рис. 3).

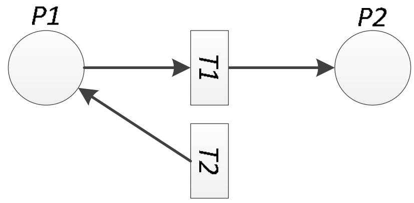

Рис. 3. Преобразованная стохастическая сеть Петри, приведенная на рис. 1

Вариант 3.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$D = D^{+} - D^{-} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Исходя из полученных данных, построим сеть Петри, дополнив ее виртуальным переходом (рис. 4).

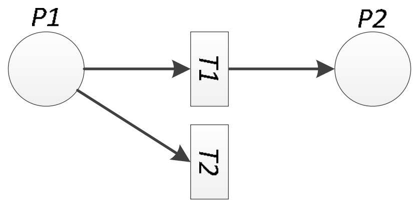

Рис. 4. Преобразованная стохастическая сеть Петри, приведенная на рис. 1

Вариант 4.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$D = D^{+} - D^{-} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Исходя из полученных данных, построим сеть Петри, дополнив ее виртуальным переходом (рис. 5).

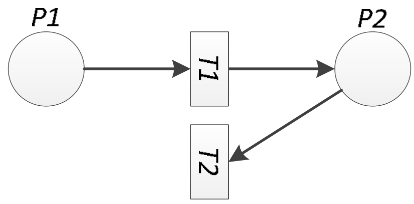

Рис. 5. Преобразованная стохастическая сеть Петри, приведенная на рис. 1

Исходя из рассмотренных примеров можно заметить, что если для преобразования прямоугольной матрицы в квадратную необходимо добавить дополнительные строки, то в первоначальной модели добавляется точно такое же количество виртуальных переходов. Если же для преобразования прямоугольной матрицы добавляются дополнительные столбцы, то в модели добавляется точно такое же количество виртуальных позиций.

Отметим также, что в прямоугольной матрице возникает задача заполнения недостающих элементов, необходимых для преобразования первоначальной матрицы в квадратную [1—3].

Добавление таких элементов в стохастической сети Петри должно осуществляться таким образом, чтобы выполнялись условия, при которых существовала бы обратная составная матрица изменений, исходя из свойств определителя $\det(D)$ [4].

Предложим следующий алгоритм добавления таких элементов:

Шаг 1. В первоначальной прямоугольной матрице определить ранг $rang(D_k)$ и убедиться, что его значение равно наименьшему из количества строк или столбцов:

$$rang(D_k) = k,$$

где k = min (|P|, |T|).

Шаг 2. Определить любое множество линейно-независимых строк (столбцов), т. е. полный базисный минор.

Шаг 3. Дополнить матрицу D_k строкой (столбцом) $k+1$, со значением 1 или –1 в столбце (строке), не соответствующим полному базисному минору. Убедиться, что ранг новой матрицы D_{k+1} равен $k+1$.

Шаг 4. Повторять шаг 3 до тех пор, пока матрица D_k не станет квадратной.

Приведем примеры работоспособности предложенного алгоритма для прямоугольных матриц 5×10 и 6×4.

Пример 1.

Пусть имеется прямоугольная матрица D:

$$D_k = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.

$$rang(D_k) = 5,$$
$$\mathrm{k} = \min(10, 5) = 5.$$

Условие выполняется.

Шаг 2. Полный базисный минор включает 1, 2, 4, 5 и 8 столбцы.

$$D_5 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3.

$$D_6 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{k} = \min(10, 6) = 6, \ \ rang(D_6) = 6.$$

Равенство выполняется.
Шаги 4—7.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Как видно из вышеописанных вычислений, предложенный алгоритм дополнения недостающих элементов позволяет преобразовать прямоугольную матрицу в квадратную таким образом, чтобы у полученной матрицы существовала обратная.

Используя полученную составную матрицу изменений D, построим сеть Петри, дополнив ее виртуальными переходами t_6, t_7, t_8, t_9 и t_{10}, предварительно вычислив D^+и D^- (рис. 6). Для этого необходимо, используя известные первоначальные значения $D_п^+$и $D_п^-$ прямоугольной матрицы, вычислить D^+и D^- квадратной матрицы. Если в составной матрице изменений D в добавленной строке (столбце) имеется значение 1, то в матрице D^+ в данном месте располагается 1. Если же в D имеется значение –1, то 1 ставится в матрице D^-:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.
$$

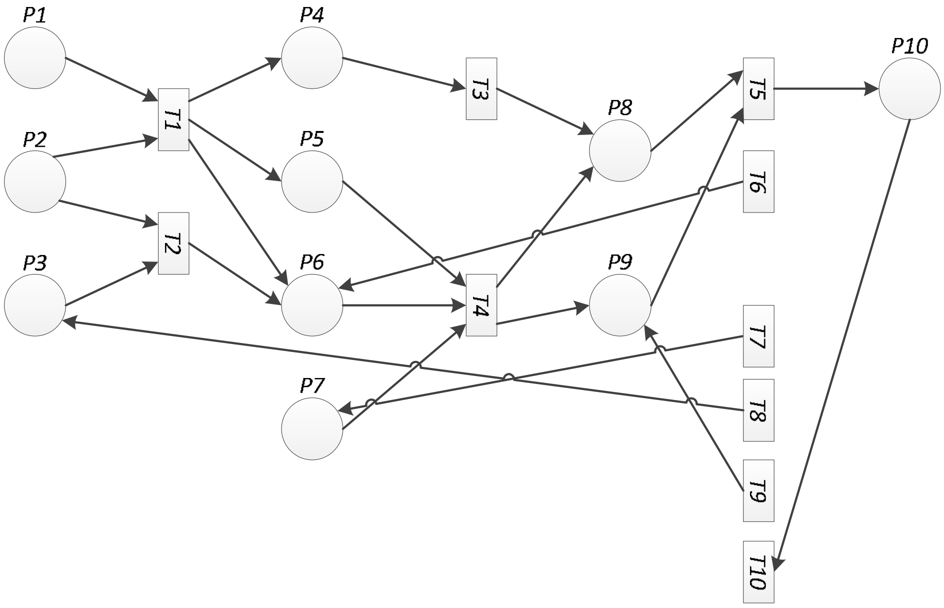

Рис. 6. Сеть Петри с добавленными виртуальными переходами

Пример 2.

В данном случае, в отличие от рассмотренного примера 1, для преобразования прямоугольной матрицы будут добавляться дополнительные столбцы, означающие, что в конечном итоге в модель стохастической сети Петри будут добавлены виртуальные позиции.

$$
D_k = \begin{pmatrix}
-1 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & -1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 1
\end{pmatrix}.
$$

Шаг 1.

$$
rang(D_k) = 4;\ \mathrm{k} = \min(4, 6) = 4.
$$

Условие выполняется.

Шаг 2. Полный базисный минор включает 2, 3, 4 и 6 строки

$$D_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3.

$$D_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{k} = \min(5,6) = 5,\ \ rang(D_5) = 5.$$

Равенство выполняется.

Шаг 4.

$$D_6 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{k} = \min(6,6) = 6,\ \ rang(D_6) = 6.$$

Равенство выполняется.

Используя полученную составную матрицу изменений $D = D_6$, построим сеть Петри, дополнив ее виртуальными позициями p_5 и p_6, вычислив D^+и D^- (рис. 7):

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

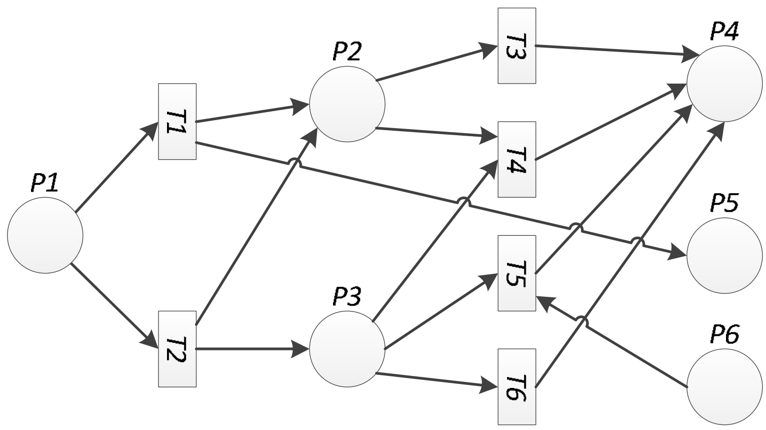

Рис. 7. Стохастическая сеть Петри с добавленными виртуальными позициями

Заключение. Предложенный алгоритм позволит согласно необходимым условиям правильно добавить необходимые виртуальные позиции или переходы для дальнейшего анализа и решения задачи достижимости стохастической сети Петри, в том числе и модели процесса производства судебной почерковедческой экспертизы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — М. : Наука, 1965. — 431 с.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 280 с.
3. Шилов Г. Е. Математический анализ (конечномерные линейные пространства). — М. : Наука, 1969. — 432 с.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 560 с.
5. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем / Дж. Питерсон. — М. : Мир, 1984. — 264 с.
6. Котов В. Е. Сети Петри. — Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 160 с.
7. Звягин Д. С. Моделирование процесса производства судебной почерковедческой экспертизы с использованием стохастических сетей Петри // Вестник Воронежского института МВД России. — 2020. — № 2. — С. 154—163.
8. Пьянков О. В., Звягин Д. С. Современные методы моделирования и исследования, как основа цифрового образования // Паритеты, приоритеты и акценты в цифровом образовании : сборник научных трудов : в 2 ч. — Саратов : Саратовский источник, 2021. — С. 147—149.
9. Звягин Д. С. Результаты вычислительного эксперимента по применению матричного подхода в стохастических сетях Петри // Общество. Наука. Инновации — 2021 : сборник статей XXI Всероссийской научно-практической конференции. — Киров : Вятский государственный университет, 2021. — С. 442—446.