© *А.А. Хусаинов, Е.С. Кудряшова, 2013*

МОДЕЛЬ ДЛЯ ВРЕМЕННЫХ ОЦЕНОК ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Хусаинов А.А. – д-р физ.-мат. наук, профессор, проф. кафедры «Математическое обеспечение и применение ЭВМ», e-mail: husainov51@yandex.ru; *Кудряшова Е.С.* – аспирант, ассистент кафедры «Информационная безопасность автоматизированных систем», e-mail: ekatt@inbox.ru (КнАГТУ)

Рассматривается асинхронная система, переходы которой соответствуют инструкциям вычислительной системы. Для каждой инструкции задано время выполнения. Предлагается математическая модель, позволяющая построить алгоритм для нахождения минимального времени выполнения параллельного процесса с заданной трассой. Рассматривается задача построения параллельного процесса с минимальным временем выполнения, переводящего систему из начального состояния в заданное. Показано, что она сводится к задаче поиска кратчайшего пути в направленном графе с длинами ребер, равными 1.

We consider an asynchronous system with transitions corresponding to the instructions of a computer system. For each instruction, a runtime is given. We propose a mathematical model, allowing us to construct an algorithm for finding the minimum time of the parallel process with a given trace. We consider a problem of constructing a parallel process which transforms the initial state to given and has the minimum execution time. We show that it is reduced to the problem of finding the shortest path in a directed graph with edge lengths equal to 1.

Ключевые слова: асинхронная система, моноид трасс, нормальная форма Фоаты, временные сети Петри.

Вычислительные системы, которые мы изучаем, имеют ячейки памяти, содержащие некоторые данные, и набор операций (инструкций, машинных команд), изменяющих состояния этой памяти. Некоторые из инструкций могут выполняться параллельно. Известно состояние системы в начальный момент времени. Для каждой операции определено время выполнения.

Последовательный процесс состоит из последовательности инструкций. Наша первая задача – указать алгоритм распараллеливания этого процесса, который указал бы вычисляемые инструкции для каждого момента времени. Вторая задача – для заданного состояния памяти указать минимальное время его достижения из начального состояния.

Асинхронной системой A=(S, s_0, E, I, $Tran$) /1/ называется пятерка, состоящая из множества *состояний* S, *начального состояния* $s_0 \in S$, множества E *инструкций*, а также антирефлексивного симметричного отношения $I \subseteq E \times E$ *независимости*, удовлетворяющих условиям

1. Если $(s,a,s') \in Tran$ & $(s,a,s'') \in Tran$, то $s'=s''$.
2. Для каждого $s \in S$, если $(a,b) \in I$ & $(s, a, s') \in Tran$ & $(s', b, s'') \in Tran$, то существует такой $s_1 \in S$, что $(s,b,s_1) \in Tran$ & $(s_1, a, s'') \in Tran$.

В частности, всякую сеть Петри можно рассматривать как асинхронную систему, состояниями которой будут маркировки, а инструкциями – переходы. Отношение независимости состоит из пар переходов, не имеющих общих мест.

Пусть E – множество, $I \subseteq E{\times}E$ – антирефлексивное симметричное отношение. Элементы $a, b \in E$ называются *независимыми*, если $(a,b) \in I$. На моноиде слов E^* определено отношение эквивалентности, состоящее из пар слов полученных друг из друга с помощью последовательностей перестановок рядом стоящих независимых букв. Для произвольного слова $w \in E^*$ его класс эквивалентности $[w]$ называется *трассой*. Легко видеть, что операция над трассами, определенная по правилу $[w_1][w_2]=[w_1w_2]$, превращает множество классов эквивалентности в моноид. Этот моноид обозначается через $M(E,I)$ и называется *моноидом трасс* или *свободным частично коммутативным моноидом*.

Трассы $[w_1]$, $[w_2] \in M(E,I)$ называются *параллельными*, если для любой буквы a_1 из слова w_1 и буквы a_2 из w_2 имеет место $(a_1, a_2) \in I$. Известно /2/, что всякую асинхронную систему A=(S, s_0, E, I, $Tran$) можно определить как множество S с частичным действием моноида $M(E,I)$ справа. Действие определяется по формуле $sa=s'$, если $(s,a,s') \in Tran$. Если не существует s', удовлетворяющее условию $(s,a,s') \in Tran$, то действие sa не определено.

Это позволяет рассматривать морфизмы асинхронных систем как морфизмы соответствующих множеств с частичным действием моноидов трасс.

Определение. *Гомоморфизмом* асинхронных систем $(\sigma,f)\colon A \to A'$ называется пара, состоящая из отображения $\sigma\colon S \to S'$ и гомоморфизма моноидов $f\colon M(E,I) \to M(E',I')$ удовлетворяющих условиям

1) f переводит параллельные трассы в параллельные;

2) $\sigma(s_0)=s_0'$;

3) $\sigma(sa)= \sigma(s)f(a)$, если действие sa определено.

Пусть A=(S, s_0, E, I, $Tran$) – асинхронная система. *Функцией времени* на A называется произвольная функция $\tau\colon E \to N$, принимающая значения во множество неотрицательных целых чисел $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Тройки $(s,e,s') \in Tran$ будем обозначать с помощью стрелок $s \xrightarrow{e} s'$. Всякую последовательность инструкций

$$s \xrightarrow{e_1} s_1 \xrightarrow{e_2} s_2 \to \cdots \to s_{n-1} \xrightarrow{e_n} s_n = s' ,$$

состоящую из троек принадлежащих *Tran*, мы будем называть *процессом* или *путем*, соединяющим состояния *s* и *s'*. В этом случае действие моноида *M(E,I)* на *S* будет сопоставлять паре $(s,[e_1 \cdots e_n])$ элемент $s' \in S$.

Минимальное время выполнения трассы. Если время выполнения инструкций одинаково и равно 1, то минимальное время выполнения трассы будет равно высоте ее нормальной формы Фоаты /3/. В общем случае, если каждой инструкции $e \in E$ соответствует время $\tau(e) \in N$, разложим каждую инструкцию в композицию мелких попарно зависимых инструкций, время выполнения которых равна 1, и применим алгоритм построения нормальной формы Фоаты для полученной трассы. Эти мелкие инструкции можно обозначить как инструкцию, в разложении которых они участвуют, а сама инструкция будет равна $e^{\tau(e)}$. Приходится также вводить промежуточные состояния. Для этой цели введем новую асинхронную систему, ассоциированную с функцией времени.

Пусть *A* – асинхронная система с функцией $\tau: E \to N$. Определим отношение линейного порядка на множестве *E*. Рассмотрим асинхронную систему $A_\tau = (S_\tau, s_0, E, I, Tran_\tau)$, определенную следующим образом. Ее множество состояний равно

$$S_\tau = \{(s, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_m^{i_m}) \mid s \in S, s \cdot a_1 a_2 \cdots a_m \in S, a_1 < a_2 < \cdots < a_m,$$
$$(a_i, a_j) \in I \textit{ при } 1 \le i < j \le m, 1 \le i_1 < \tau(a_1), ..., 1 \le i_m < \tau(a_m)\}$$

По техническим соображениям нам будет удобно рассматривать состояния $(s, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_m^{i_m})$, у которых для некоторых $q \in \{1, 2, \ldots, m\}$ имеют место $i_q = 0$ или $i_q = \tau(a_q)$. Они будут отождествляться с элементами из S_τ с помощью формул

$$(s, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_{q-1}^{i_{q-1}} a_q^0 a_{q+1}^{i_{q+1}} \cdots a_m^{i_m}) = (s, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_{q-1}^{i_{q-1}} a_{q+1}^{i_{q+1}} \cdots a_m^{i_m})$$
$$(s, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_{q-1}^{i_{q-1}} a_q^{\tau(a_q)} a_{q+1}^{i_{q+1}} \cdots a_m^{i_m}) = (sa_q, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_{q-1}^{i_{q-1}} a_{q+1}^{i_{q+1}} \cdots a_m^{i_m})$$

Определим частичное действие моноида *M(E,I)* на S_τ, полагая

$$(s, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_m^{i_m}) \cdot a = (s, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_{q-1}^{i_{q-1}} a_q^{i_q+1} a_{q+1}^{i_{q+1}} \cdots a_m^{i_m}),$$

если $a = a_q$ для некоторого $q \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Если $(a,a_r) \in I$ для всех $r \in \{1, 2, \ldots, m\}$, то вставим элемент $a \in E$ в последовательность так, чтобы были верны неравенства $a_1 < a_2 < \cdots < a_{q-1} < a < a_q < \cdots < a_m$, для некоторого q , и положим $(s, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_m^{i_m}) \cdot a = (s, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_{q-1}^{i_{q-1}} a a_q^{i_q} \cdots a_m^{i_m})$.

Во всех остальных случаях действие не определено.

Определим отображение множеств i: $S \to S_\tau$ по формуле $i(s)=(s,1)$. Пусть t: $M(E,I) \to M(E,I)$ – гомоморфизм, определенный значениями на элементах $a \in E$, равными $t(a)=a^{\tau(a)}$.

Предложение 1. Пара (i, t) является гомоморфизмом асинхронных систем $A \to A_\tau$.

Параллельным процессом, реализующим трассу μ называется композиция трасс

$$[a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_p}][a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_p}] \cdots [a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_r}] = \mu,$$

равная этой трассе и состоящая из блоков, внутри каждого из которых инструкции попарно независимы.

Предложение 2. Минимальное время выполнения трассы $[a_1 a_2 \cdots a_n]$, переводящей систему из состояния s в некоторое состояние s', равно высоте нормальной формы Фоаты трассы $[a_1^{\tau(a_1)} a_2^{\tau(a_2)} \cdots a_n^{\tau(a_n)}]$. Параллельный процесс, имеющий минимальное время, будет равен этой нормальной форме.

Пример. Рассмотрим сеть Петри конвейера, состоящего из трех операционных устройств

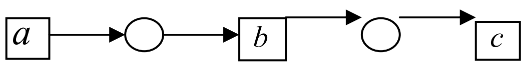

Рис. 1. Сеть Петри конвейера

Пусть времена выполнения равны $\tau(a)=3$, $\tau(b)=1$, $\tau(c)=2$. Если на входе получено n чисел, то временная трасса процесса будет равна $[(a^3bc^2)^n]$. Легко видеть, что нормальная форма Фоаты равна

$$[a][a][a]([b][ac][ac]\ a])^{n-1}[b][c][c].$$

Ее высота равна $4n+2$. Значит, минимальное время выполнения на трех процессорах равно $T_3= 4n+2$. Время выполнения на одном процессоре $T_1=6n$. Следовательно, среднее ускорение равно $6n/(4n+2) \approx 3/2$.

Поиск параллельного процесса с минимальным временем дости-жения заданного достижимого состояния из начального состояния. Рассмотрим асинхронную систему A с функцией времени $\tau : E \to N$. Пусть A_τ – соответствующая ей асиннхронная система. Построим направленный граф, множество вершин которого равно S_τ. Если

$$(s, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_p^{i_p}) \cdot e_1 \cdot e_2 \cdots \cdot e_n = (s', b_1^{j_1} b_2^{j_2} \cdots a_q^{j_q})$$

для некоторых вершин $(s, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_p^{i_p}) \in S_\tau$, $(s', b_1^{j_1} b_2^{j_2} \cdots a_q^{j_q}) \in S_\tau$ и таких $e_1, e_2, ..., e_n \in E$, что $(e_i, e_j) \in I$ для всех $1 \le i < j \le n$, то эти вершины соединяются направленной стрелкой длины 1.

Элементы $s \in S$ отождествляются с парами $(s,1) \in S_\tau$, где 1 - единичный элемент моноида $M(E,I)$.

Предложение 3. Параллельный процесс минимального времени, переводящий систему A из состояния s_0 в состояние s, соответствует кратчайшему направленному пути в построенном графе, соединяющем вершины $(s_0,1)$ и $(s,1)$.

Алгоритмы нахождения направленных кратчайших путей хорошо известны. Например, вершины графа раскрашиваются в цвета 0, 1, 2, … следующим образом: Сначала вершина s_0 раскрашивается цветом 0. Затем нераскрашенные концы выходящих из нее стрелок раскрашиваются цветом 1. Затем нераскрашенные концы стрелок выходящих из вершин цвета 1 раскрашиваются цветом 2, и т.д. до тех пора, пока не раскрасим заданную вершину s. Цвет вершины s будет длиной кратчайшего пути. Небольшая модификация алгоритма приводит к методу нахождения пути минимальной длины.

Заключение. Предложенную временную модель A_τ можно интерпретировать как дискретную модель временного автомата Е. Губо /4/. Аналогичную модель можно построить для дистрибутивных асинхронных автоматов, введенных в /5/. Но, для того, чтобы она позволяла строить алгоритмы для временных оценок, нужно привлечь некоторые дополнительные условия на эти автоматы.

Работа выполнена в рамках программы стратегического развития государственных образовательных учреждений высшего профессионального образования, № 2011-ПР-054.

Библиографические ссылки

1. *Bednarczyk M*. Categories of Asynchronous Systems: PhD Thesis. – Brighton: University of Sussex, 1987.
2. *Husainov A.A.* On the homology of small categories and asynchronous transition systems // Homology Homotopy Appl. – 2004. – V.1, N 6. – P. 439-471.
3. *Diekert V.* Combinatorics on Traces. Lecture Notes in Computer Science, 454, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
4. *Goubault E*. Durations for truly-concurrent transitions. *Programming Languages and Systems — ESOP '96*, Lecture Notes in Computer Science, 1058, Springer-Verlag, Berlin, 1996, 173—187.
5. *Кудряшова Е.С., Хусаинов А.А.* Обобщенные асинхронные системы // Модел. и анализ информ. систем. – 2012. – № 4. – С.78-86.