Модел. и анализ информ. систем. Т. **20**, № **2** (2013) 92–103

УДК 519.7+515.14

Группы гомологий сети Петри конвейера

Хусаинов А.А., Бушмелева Е.С., Тришина Т.А. [1]

Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет
681013, Комсомольск-на-Амуре, просп. Ленина, 27.

e-mail: husainov51@yandex.ru

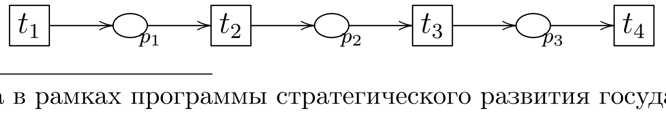
получена 12 декабря 2012

Ключевые слова: моноид трасс, асинхронная система переходов, элементарная сеть Петри, конвейер, полукубическое множество, гомологии малых категорий.

Сеть Петри называется элементарной, если каждое ее место может содержать не более одной фишки. В работе изучаются топологические свойства элементарной сети Петри конвейера, состоящего из n функциональных устройств. Если рассматривать работу функциональных устройств как непрерывную, то можно прийти к некоторому топологическому пространству “промежуточных” состояний. В работе вычислены группы гомологий этого топологического пространства. С помощью индукции по n, с применением аддиционной последовательности для групп гомологий полукубических множеств, доказано, что в размерностях 0 и 1 целочисленные группы гомологий этих сетей равны группе целых чисел, а в остальных размерностях равны нулю. Исследуются направленные группы гомологий. Установлена связь этих групп с тупиками и рассылками. Эта связь помогает доказать, что все направленные группы гомологий элементарной сети Петри конвейера равны нулю.

Введение

Группы гомологий элементарных сетей Петри были введены в работе [1]. Они предназначены для топологического анализа параллельных процессов и систем, описываемых этими сетями. Они также тесно связаны с гомологиями многомерных автоматов, изученных в работах [2]–[3] и примененных в [4] для решения проблем теории направленной гомотопии. Наша работа посвящена вычислению групп гомологий элементарной сети Петри конвейера $\mathfrak{P}_n$, состоящей из n переходов (событий) и $n-1$ мест (условий). В [1] были вычислены группы гомологий сети Петри конвейера $\mathfrak{P}_3$. В работе [5] построен алгоритм для вычисления всех групп гомологий элементарной сети Петри. Приведен пример вычисления групп гомологий элементарной сети Петри конвейера $\mathfrak{P}_4$:



[1]Работа выполнена в рамках программы стратегического развития государственных образовательных учреждений высшего профессионального образования, №2011-ПР-054.

С помощью описанного в [6] программного обеспечения мы вычислили группы гомологий сети $\mathfrak{P}_n$, при $n = 2, 3, 4, 5$. В этих случаях группы гомологий конвейера равны $H_0(\mathfrak{P}_n) = H_1(\mathfrak{P}_n) = \mathbb{Z}$, и $H_k(\mathfrak{P}_n) = 0$ при $k \geqslant 2$. Возникло естественное предположение о том, что это верно для всех $n \geqslant 2$. В данной работе мы доказываем это предположение (теорема 1). Кроме того, вторым соавтором данной работы было разработано программное обеспечение для вычисления направленных групп гомологий пространств состояний. Вычисления показали, что направленные группы элементарных сетей Петри $\mathfrak{P}_n$ при $n = 2, 3, 4, 5$ равны нулю во всех размерностях. В данной работе мы доказываем, что это верно для всех $n \geqslant 2$ (теорема 2).

1. Предварительные сведения

Через $\mathbb{Z}$ будем обозначать группу целых чисел. Для произвольной категории $\mathscr{C}$ обозначим через $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ класс всех ее объектов, $\mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$ – класс всех морфизмов, $\mathscr{C}^{op}$ – дуальную категорию. Для любых $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ множество всех морфизмов $A \to B$ в категории $\mathscr{C}$ обозначим через $\mathscr{C}(A, B)$.

Частичные отображения. Для произвольных множеств S и T *частичным отображением* $f : S \rightharpoonup T$ называется отношение $f \subseteq S \times T$, обладающее следующим свойством:

$$(s, t_1) \in f \ \& \ (s, t_2) \in f \ \Rightarrow \ t_1 = t_2 \,.$$

Обозначим через $PSet$ категорию множеств и частичных отображений.

Для произвольного множества S обозначим $S_* = S \sqcup \{*\}$. Пусть Set_* – категория, объектами которой являются множества, каждое из которых равно S_* для некоторого множества S. Для любых ее объектов S_* и T_* множество морфизмов $\mathrm{Set}_*(S_*, T_*)$ состоит из отображений $f : S_* \to T_*$, удовлетворяющих равенству $f(*) = *$. Легко видеть, что функтор $\Phi : PSet \to \mathrm{Set}_*$, определенный на объектах как $\Phi(S) = S_*$, а на морфизмах

$$\Phi(f)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \text{ определен,} \\ *, & \text{если } f(x) \text{ не определен или } x = *, \end{cases}$$

будет осуществлять изоморфизм категорий $PSet$ и Set_*. Этот изоморфизм позволяет нам отождествлять категорию $PSet$ с категорией Set_* и рассматривать частичные отображения как тотальные, сохраняющую точку $*$.

Частичное действие моноида. Пусть M – моноид. Операцию умножения в нем временно обозначим через $\cdot_M$. Всякий моноид M мы будем рассматривать как малую категорию, имеющую единственный объект pt_M. Множество морфизмов этой категории совпадает с множеством M. В частности определен дуальный моноид M^{op}. Произведение элементов $\mu_1, \mu_2 \in M$ в этом моноиде определяется по формуле $\mu_1 \cdot_{M^{op}} \mu_2 = \mu_2 \cdot_M \mu_1$. *Частичным действием моноида M справа на множестве S* называется произвольный гомоморфизм $M^{op} \to PSet(S, S)$. В соответствии с данным выше соглашением, частичное действие будем рассматривать как гомоморфизм $M^{op} \to \mathrm{Set}_*(S_*, S_*)$. Отсюда вытекает, что его можно рассматривать как функтор $M^{op} \to \mathrm{Set}_*$. Ниже повсюду вместо $\mu_1 \cdot_M \mu_2$ будем писать просто $\mu_1\mu_2$, оставляя символ '$\cdot$' для обозначения действия моноида.

Моноиды трасс и пространства состояний. Пусть E – множество, $I \subseteq E \times E$ называется *отношением независимости на* E, если для всех $a \in E$ верно $(a, a) \notin I$, и для каждой пары $(a, b) \in I$ имеет место $(b, a) \in I$. Моноид, порожденный множеством E и заданный с помощью соотношений $ab = ba$, для всех $(a, b) \in I$, называется *свободным частично коммутативным моноидом* или *моноидом трасс* и обозначается через $M(E, I)$. Он будет равен фактор-моноиду $E^*/\equiv$ моноида слов по наименьшему отношению конгруэнтности, содержащему пары (ab, ba) для всех пар $(a, b) \in I$. *Пространством состояний* называется пара $(S, M(E, I))$, где $M(E, I)$ – моноид трасс, действующий частично на некотором множестве S.

Пространство состояний элементарной сети Петри. *Элементарной сетью Петри* называется пятерка $(P, E, pre, post, s_0)$, состоящая из конечных множеств P и E, отображений $pre : E \to \{0,1\}^P$, $post : E \to \{0,1\}^P$ и подмножества $s_0 \subseteq E$. Здесь $\{0,1\}^P$ обозначает множество всех подмножеств $s \subseteq P$. В работе [7] элементарные сети Петри называются просто сетями Петри. Элементы $p \in P$ называются *местами*, а $a \in E$ – *событиями.*

Для произвольной элементарной сети Петри $\mathcal{N} = (P, E, pre, post, s_0)$ определяется моноид трасс $M(E, I)$, порожденный множеством E и отношением независимости

$$(a, b) \in I \;\Leftrightarrow\; (pre(a) \cup post(a)) \cap (pre(b) \cup post(b)) = \emptyset.$$

Пусть $a \in E$. Для всякого подмножества $s \subseteq P$, обладающего свойствами

- $pre(a) \subseteq s$,
- $(s \setminus pre(a)) \cap post(a) = \emptyset$,

обозначим $s \cdot a = (s \setminus pre(a)) \cup post(a)$. Это определяет для каждого $a \in E$ частичное отображение $s \mapsto s \cdot a$, из множества $\{0,1\}^P$ в $\{0,1\}^P$. Здесь подмножества $s \subseteq P$ рассматриваются как их характеристические функции.

Согласно [7, Prop. 42], полученное частичное отображение будет равно отношению перехода из [7]–[8], определенному как множество таких троек (s, a, s'), что

$$pre(a) \subseteq s \;\&\; post(a) \subseteq s' \;\&\; s \setminus pre(a) = s' \setminus post(a).$$

С помощью индукции по длине трассы $\mu = a_1 a_2 \cdots a_n$, по формуле $s \cdot a_1 a_2 \cdots a_n = (s \cdot a_1 a_2 \cdots a_{n-1}) \cdot a_n$, это действие определяет частичное действие моноида $M(E, I)$ справа на $\{0,1\}^P$. Полученное пространство состояний $(\{0,1\}^P, M(E, I))$ будем называть *пространством состояний элементарной сети Петри.*

Если рассматривать вместо $\{0,1\}^P$ множество достижимых состояний, то это частичное действие будет определять *пространство достижимых состояний элементарной сети.*

2. Гомологии полукубических множеств и пространств состояний

Напомним определение полукубического множества и его групп гомологий [9]. Опишем полукубическое множество, соответствующее категории состояний и имеющее такие же группы гомологий.

Полукубические множества.

Полукубическим множеством $X = (X_n, \partial_i^{n,\varepsilon})$ называется последовательность множеств X_n, $n \geqslant 0$, и семейство отображений $\partial_i^{n,\varepsilon} : X_n \to X_{n-1}$, определенных при $1 \leqslant i \leqslant n$, $\varepsilon \in \{0,1\}$, и делающих диаграммы

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "\partial_i^{n,\alpha}"] \arrow[d, "\partial_j^{n,\beta}"'] & X_{n-1} \arrow[d, "\partial_{j-1}^{n-1,\beta}"] \\ X_{n-1} \arrow[r, "\partial_i^{n-1,\alpha}"'] & X_{n-2} \end{tikzcd}$$

коммутативными для всех $n \geqslant 2,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n$.

Морфизмом полукубических множеств $f : X \to \tilde{X}$ называется последовательность отображений $f_n : X_n \to \tilde{X}_n$, $n \geqslant 0$, для которых диаграммы

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\partial_i^{n,\varepsilon}"'] & \tilde{X}_n \arrow[d, "\tilde{\partial}_i^{n,\varepsilon}"] \\ X_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"'] & \tilde{X}_{n-1} \end{tikzcd}$$

коммутативны для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ и $\varepsilon \in \{0,1\}$. Если морфизм полукубических множеств состоит из вложений $X_n \subseteq \tilde{X}_n$, для всех $n \geqslant 0$, то X называется *полукубическим подмножеством* в $\tilde{X}$.

Гомологии полукубических множеств. Пусть $X = (X_n, \partial_i^{n,\varepsilon})$ – полукубическое множество. Рассмотрим комплекс

$$0 \leftarrow LX_0 \overset{d_1}{\leftarrow} LX_1 \overset{d_2}{\leftarrow} LX_2 \overset{d_1}{\leftarrow} \cdots,$$

состоящий из свободных абелевых групп LX_n, $n \geqslant 0$, порожденных множествами X_n, и дифференциалов, действующих на элементах базиса по формуле

$$d_n(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (\partial_i^{n,1}(\sigma) - \partial_i^{n,0}(\sigma)).$$

Группы гомологий этого комплекса называются *группами гомологий $H_n(X)$ полукубического множества X, $n \geqslant 0$.*

Предложение 1. *Пусть $X = X_1 \cup X_2$ – объединение полукубических подмножеств. Тогда существует длинная точная последовательность групп*

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow H_0(X) \leftarrow H_0(X_1) \oplus H_0(X_2) \leftarrow H_0(X_1 \cap X_2) \leftarrow \cdots \\ \cdots \leftarrow H_n(X) \leftarrow H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) \leftarrow H_n(X_1 \cap X_2) \leftarrow \cdots \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим комплекс $C_n(X) = LX_n$, с дифференциалами $d_n(\sigma) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^i (\partial_i^{n,1}(\sigma) - \partial_i^{n,0}(\sigma))$. Рассмотрим точную последовательность комплексов, связанную с гомоморфизмом $\sigma_1 \oplus \sigma_2 \mapsto \sigma_1 - \sigma_2$,

$$0 \to C_n(X_1 \cap X_2) \overset{\theta_n}{\to} C_n(X_1) \oplus C_n(X_2) \overset{-}{\to} C_n(X_1 \cup X_2) \to 0,$$

где $\theta_n(\sigma) = \sigma \oplus \sigma$ для каждого $\sigma \in (X_1 \cap X_2)_n$. Длинная точная последовательность, соответствующая этой короткой точной последовательности, будет искомой. $\square$

Гомологии категории состояний и полукубических множеств.

Пусть $(S, M(E, I))$ – пространство состояний. Рассмотрим произвольное отношение линейного порядка на E. Оно определяет полукубическое множество

$$Q_n(S, E, I) = \{(s, a_1, \ldots, a_n) \in S \times E^n \mid a_1 < \cdots < a_n \ \& \ s \cdot a_1 \cdots a_n \in S \\ \& \ (a_i, a_j) \in I \text{ для всех } 1 \leqslant i < j \leqslant n\}, \quad n \geqslant 0,$$

с граничными операторами

$$\partial_i^{n,\varepsilon}(s, a_1, \ldots, a_n) = (s \cdot a_i^{\varepsilon}, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n),$$

при $1 \leqslant i \leqslant n$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Здесь $a_i^0 = 1$, и $a_i^1 = a_i$.

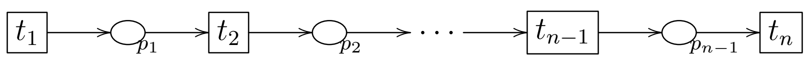
Категория состояний $K(S)$ пространства состояний $(S, M(E, I))$ имеет объектами элементы $s \in S$. Ее морфизмами $s \xrightarrow{\mu} t$ служат такие тройки элементов $s, t \in S$ и $\mu \in M(E, I)$, что $s \cdot \mu = t$. Композиция задана формулой $(t \xrightarrow{\nu} u) \circ (s \xrightarrow{\mu} t) = (s \xrightarrow{\mu\nu} u)$.

Для произвольной элементарной сети Петри $\mathcal{N}$ *группы гомологий* $H_n(\mathcal{N})$ определяются как группы гомологий $H_n(K(S))$ (нерва) ее категории достижимых состояний. Согласно [5, Corollary 4], $H_n(K(S)) \cong H_n(Q(S, E, I))$, для всех $n \geqslant 0$. Поэтому группы гомологий элементарной сети Петри $H_n(\mathcal{N})$ будут изоморфны группам гомологий полукубического множества, соответствующего ее пространству достижимых состояний.

3. Категория состояний сети Петри конвейера и ее группы гомологий

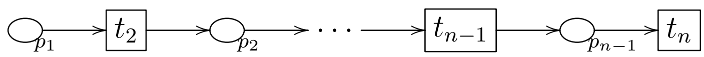
В этой части мы будем исследовать категорию состояний элементарной сети Петри конвейера и вычислим целочисленные группы гомологий этой категории.

Категория состояний элементарной сети Петри конвейера. Мы рассматриваем сеть Петри конвейера $\mathfrak{P}_n$:



Представим категорию состояний этой сети в виде объединения частично упорядоченных множеств, каждое из которых обладает наименьшим и наибольшим элементом.

Пусть $\mathcal{N}_n$ – сеть Петри



Обозначим через $\mathscr{C}_n$ ее категорию состояний. Всякое частично упорядоченное множество можно рассматривать как малую категорию $\mathscr{C}$, для любых объектов которой $x, y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ множество $\mathscr{C}(x, y)$ содержит не более одного элемента, а одновременное выполнение соотношений $\mathscr{C}(x, y) \neq \emptyset$ и $\mathscr{C}(y, x) \neq \emptyset$ невозможно в случае $x \neq y$.

Состоянием элементарной сети Петри $\mathcal{N}_n$ будет произвольная функция $f : \{p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}\} \to \{0, 1\}$. Отсюда следует, что состояние может быть задано последовательностью значений этой функции $\varepsilon_1\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{n-1}$, где $\varepsilon_i = f(p_i)$ при $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Пусть S_1 – множество состояний, начинающихся с $\varepsilon_1 = 1$, и S_0 – множество состояний, начинающихся с $\varepsilon_1 = 0$. Множество всех состояний будет равно $S = S_1 \sqcup S_0$. В общем случае элементы из S_1 и S_0 соединены переходами $10\varepsilon_3 \cdots \varepsilon_{n-1} \xrightarrow{t_2} 01\varepsilon_3 \cdots \varepsilon_{n-1}$.

Например, при $n = 4$, S_1 и S_0 будут линейно упорядоченными множествами, соответствующими столбцам диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
111 \arrow[d, "t_4"'] & 011 \arrow[d, "t_4"] \\
110 \arrow[d, "t_3"'] & 010 \arrow[d, "t_3"] \\
101 \arrow[d, "t_4"'] \arrow[uur, dashed, "t_2"'] & 001 \arrow[d, "t_4"] \\
100 \arrow[uur, dashed, "t_2"'] & 000
\end{tikzcd}$$

Переходы между S_1 и S_0 показаны пунктирными стрелками.

Для любого состояния $x = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n-1}$ введем число $|x| = \varepsilon_1 \cdot 2^{n-2} + \varepsilon_2 \cdot 2^{n-3} + \cdots + \varepsilon_{n-1} \cdot 2^0$. Например, $|11 \cdots 1| = 2^{n-1} - 1$ и $|00 \cdots 0| = 0$. Если существует переход $x \xrightarrow{t_k} y$, то $|x| < |y|$

Лемма 1. *Категория $\mathscr{C}_n$ является частично упорядоченным множеством, имеющим наибольший и наименьший элементы.*

Доказательство. С помощью индукции будем доказывать, что $\mathscr{C}_n$ – частично упорядоченное множество с наименьшим элементом $11 \cdots 1$ и наибольшим элементом $00 \cdots 0$. Пусть это доказано для $n-1$. Тогда $\mathscr{C}_{n-1}$ – частично упорядоченное множество с наименьшим и наибольшим элементами. Легко видеть, что полные подкатегории категории $\mathscr{C}_n$, с множествами объектов S_1 и S_0 будут изоморфны категории $\mathscr{C}_{n-1}$. Значит, они будут частично упорядоченными множествами. Будем обозначать эти частично упорядоченные множества через S_1 и S_0. В S_1 наименьший элемент согласно предположению индукции равен $11 \cdots 1$, а наибольший – $10 \cdots 0$. В S_0 наименьший элемент равен $01 \cdots 1$, а наибольший – $00 \cdots 0$.

Пусть $x \cdot \mu = y$, $x \in S_1$, $y \in S_0$. Тогда μ содержит букву t_2. Поэтому существуют такие μ_1 и μ_2, что $\mu = \mu_1 t_2 \mu_2$, причем μ_1 не содержит t_2. Далее будем переставлять с t_2 буквы из μ_1, до тех пор, пока не встретим t_3. Для некоторых μ_1 и μ_2 получим разложение $\mu = \mu_1 t_3 t_2 \mu_2$.

Следующее ниже действие будем выполнять до тех пор, пока не получим разложение вида $\mu = t_k \cdots t_2 \mu'$.

Предположим, что $\mu = \mu_1 t t_{k-1} \cdots t_2$, для некоторых $k \geqslant 3$ и $t \in E$. Опишем действие, выполняемое нами в каждом из возможных случаев:

(i) $t = t_k \Rightarrow$ увеличиваем k на 1,

(ii) $t = t_i$, для некоторого $i > k$, $\Rightarrow$ переставляем t с $t_{k-1}, t_{k-2}, \cdots, t_2$.

При $i \leqslant k-1$ разложение вида $\mu = \mu_1 t_i t_{k-1} \cdots t_2$ невозможно, ибо $x' \cdot t_{k-1} \cdots t_2$ тогда и только тогда определено, когда $x' = 11 \cdots 10\varepsilon_k \cdots \varepsilon_{n-1}$. Такой элемент x' не может получиться после действия t_i при $2 \leqslant i \leqslant k-1$. Отсюда вытекает, что итерация описанного действия приведет к разложению $\mu = t_k \cdots t_2 \mu'$.

Теперь будем доказывать, что $x \cdot \mu = x \cdot \nu = y \in S$ влечет $\mu = \nu$, откуда будет следовать, что $\mathscr{C}_n$ – предупорядоченное множество.

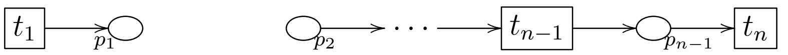
Если $x \cdot \mu = x \cdot \nu = y \in S_0$ и $y \in S_0$, то $\mu = \nu$, ибо S_0 – частично упорядоченное множество. Аналогичное верно в случае $x \cdot \mu = x \cdot \nu = y \in S_1$ и $y \in S_1$. Не существует $\mu \in M(E, I)$ и $x \in S_0$, для которых $x \cdot \mu \in S_1$.

Рассмотрим теперь случай $x \cdot \mu = x \cdot \nu = y \in S_0$, $x \in S_1$. В этом случае существуют разложения $\mu = t_k \cdots t_2 \mu'$ и $\nu = t_m \cdots t_2 \nu'$. Поскольку $x \cdot t_k t_{k-1} \cdots t_2 \mu' \in S_0$, то $x = 11 \cdots 10\varepsilon_{k+1} \cdots \varepsilon_{n-1}$, при некоторых $\varepsilon_{k+1}, \cdots, \varepsilon_{n-1} \in \{0,1\}$. Отсюда $m = k$. Получаем равенство

$$x \cdot t_k \cdots t_2 \mu' = x \cdot t_k \cdots t_2 \nu'.$$

Поскольку $x \cdot t_k \cdots t_2 \in S_0$ и S_0 – частично упорядоченное множество, то из этого равенства следует $\mu' = \nu'$. Следовательно, $\mu = \nu$ и $\mathscr{C}_n$ – предупорядоченное множество. Если для некоторых $x = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n-1}$, $y = \delta_1 \cdots \delta_{n-1}$ существует такое $\mu \neq 1$, что $x \cdot \mu = y$, то $|x| > |y|$. Поэтому из $x \cdot \mu = y$ и $y \cdot \nu = x$ будет следовать $\mu = \nu = 1$. Значит, отношение предпорядка будет антисимметричным, а $\mathscr{C}_n$ будет частично упорядоченным множеством. □

Группы гомологий конвейера. Пусть $\mathfrak{P}_n$ – элементарная сеть конвейера. Удаляя событие t_1, мы получили сеть $\mathcal{N}_n$. Удаляя из $\mathfrak{P}_n$ событие t_2, получим следующую элементарную сеть:



Обозначим ее через $\mathcal{N}'_n$.

Предложение 2. *Полукубическое множество $Q(\mathfrak{P}_n)$ равно объединению полукубических подмножеств $Q(\mathcal{N}_n) \cup Q(\mathcal{N}'_n)$. Пересечение $Q(\mathcal{N}_n) \cap Q(\mathcal{N}'_n)$ будет полукубическим множеством, имеющим две компоненты связности, каждая из которых изоморфна $Q(\mathcal{N}_{n-1})$.*

Доказательство. Имеет место $Q_0(\mathfrak{P}_n) = Q_0(\mathcal{N}_n) \cup Q_0(\mathcal{N}'_n)$, ибо все эти множества равны $S = \{0,1\}^{n-1}$. Если $k \geqslant 1$, то поскольку t_1 и t_2 зависимы, то они не могут принадлежать набору попарно независимых событий $(e_1, \cdots, e_m)$. Значит, для всякого $(s, e_1, \cdots, e_m) \in Q_m(\mathfrak{P}_n)$ будет иметь место $t_1 \notin \{e_1, \cdots, e_m\}$ либо $t_2 \notin \{e_1, \cdots, e_m\}$, откуда $(s, e_1, \cdots, e_m) \in Q_m(\mathcal{N}_n) \cup Q_m(\mathcal{N}'_n)$. Поскольку из $(s, e_1, \cdots, e_m) \in Q_m(\mathcal{N}_n)$ следует $(s \cdot e_i^{\varepsilon}, e_1, \cdots, e_{i-1}, e_{i+1}, \cdots, e_m) \in Q_{m-1}(\mathcal{N}_n)$ и из $(s, e_1, \cdots, e_m) \in Q_m(\mathcal{N}'_n)$ следует $(s \cdot e_i^{\varepsilon}, e_1, \cdots, e_{i-1}, e_{i+1}, \cdots, e_m) \in Q_{m-1}(\mathcal{N}'_n)$, то вложения перестановочны с граничными операторами. Стало быть, $Q(\mathfrak{P}_n)$ равно объединению своих кубических подмножеств $Q(\mathcal{N}_n)$ и $Q(\mathcal{N}'_n)$. □

Теорема 1. $H_0(\mathfrak{P}_n) = H_1(\mathfrak{P}_n) = \mathbb{Z}$, *и* $H_k(\mathfrak{P}_n) = 0$ *при* $k > 1$.

Доказательство. Согласно предложению 2, $Q(\mathfrak{P}_n) = Q(\mathcal{N}_n) \cup Q(\mathcal{N}'_n)$. Применим предложение 1. По лемме 1 категория состояний сети $\mathcal{N}_n$ обладает инициальным и терминальным объектом. Пусть $\mathbb{I} = \{0,1\}$ – частично упорядоченное множество, состоящее из элементов 0 и 1, с обычным отношением порядка $0 < 1$. Легко видеть, что категория состояний сети $\mathcal{N}'_n$ будет изоморфна произведению $\mathbb{I} \times \mathscr{C}_{n-2}$. Поэтому она тоже обладает инициальным и терминальным объектами. Отсюда вытекают изоморфизмы $H_k(Q(\mathcal{N}_n)) = H_k(Q(\mathcal{N}'_n)) = 0$, при $k > 0$. Точная последовательность предложения 1 приводит к изоморфизмам $H_k(Q(\mathfrak{P}_n)) \cong H_{k-1}(Q(\mathcal{N}_n) \cap Q(\mathcal{N}'_n))$, при $k \geqslant 2$. Из предложения 2 следует $Q(\mathcal{N}_n) \cap Q(\mathcal{N}'_n) \cong Q(\mathcal{N}_{n-1}) \sqcup Q(\mathcal{N}_{n-1})$. Получаем $H_k(Q(\mathfrak{P}_n)) \cong H_{k-1}(Q(\mathcal{N}_{n-1})) \oplus H_{k-1}(Q(\mathcal{N}_{n-1})) = 0$ при $k \geqslant 2$. Следовательно, $H_k(\mathfrak{P}_n) = 0$ при $k \geqslant 2$. Из предложения 1 получаем также точную последовательность

$$0 \leftarrow H_0(Q(\mathfrak{P}_n)) \leftarrow H_0(Q(\mathcal{N}_n)) \oplus H_0(Q(\mathcal{N}'_n)) \\ \leftarrow H_0(Q(\mathcal{N}_n) \cap Q(\mathcal{N}'_n)) \leftarrow H_1(Q(\mathfrak{P}_n)) \leftarrow 0.$$

Группы H_0 свободно порождены компонентами связности полукубических множеств. Гомоморфизм

$$H_0(\theta) : H_0(Q(\mathcal{N}_n) \cap Q(\mathcal{N}'_n)) \to H_0(Q(\mathcal{N}_n)) \oplus H_0(Q(\mathcal{N}'_n))$$

индуцирован цепным гомоморфизмом

$$\theta_k : C_k(Q(\mathcal{N}_n) \cap Q(\mathcal{N}'_n)) \to C_k(Q(\mathcal{N}_n)) \oplus C_k(Q(\mathcal{N}'_n)),$$

определенным на $\sigma \in (Q(\mathcal{N}_n) \cap Q(\mathcal{N}'_n))_k$ по формуле $\theta_k(\sigma) = \sigma \oplus \sigma$. Отсюда вытекает, что $H_0(\theta)$ действует на классах гомологий по формуле $H_0(\theta)(cls(\sigma)) = cls(\sigma) \oplus cls(\sigma)$. Поскольку эти классы гомологий равны компонентам связности полукубических множеств, то $H_0(\theta)$ будет гомоморфизмом $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, заданным матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Но $H_1(\mathfrak{P}_n)$ изоморфен ядру гомоморфизма $H_0(\theta)$, а $H_0(\mathfrak{P}_n)$ – коядру. Отсюда, например, с помощью приведения этой матрицы к нормальной форме Смита, получаем $H_0(\mathfrak{P}_n) = H_1(\mathfrak{P}_n) = \mathbb{Z}$. □

4. Направленные гомологии

Приведем вспомогательные сведения по группам гомологий Губо полукубических множеств. Изучим свойства направленных групп гомологий категории состояний и их интерпретацию в размерности 0. Вычислим направленные группы гомологий сети Петри конвейера.

Группы гомологий Губо. Пусть $X = (X_n, \partial_i^{n,\varepsilon})$ – полукубическое множество. Для каждого $\varepsilon \in \{0, 1\}$ рассмотрим цепной комплекс абелевых групп $C_n(X) = L(X_n)$ с дифференциалами

$$0 \leftarrow C_0(X) \xleftarrow{d_1^\varepsilon} C_1(X) \leftarrow \cdots C_{n-1}(X) \xleftarrow{d_n^\varepsilon} C_n(X) \leftarrow \cdots,$$

где $d_n^\varepsilon(\sigma) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^i \partial_i^{n,\varepsilon}(\sigma)$.

Группы гомологий $H_n^\varepsilon(X)$ этого комплекса называются *группами гомологий Губо* полукубического множества X. Они были изучены в работе [2].

Группы $H_n^0(X)$ называются *инициальными*, а $H_n^1(X)$ – *финальными* группами гомологий Губо.

Предложение 3. *Пусть $X = X_1 \cup X_2$ – объединение полукубических подмножеств $X_1 \subseteq X$ и $X_2 \subseteq X$. Тогда для каждого $\varepsilon \in \{0,1\}$ существует длинная точная последовательность*

$$0 \leftarrow H_0^\varepsilon(X) \leftarrow H_0^\varepsilon(X_1) \oplus H_0^\varepsilon(X_2) \leftarrow H_0^\varepsilon(X_1 \cap X_2) \leftarrow \cdots$$
$$\cdots \leftarrow H_n^\varepsilon(X) \leftarrow H_n^\varepsilon(X_1) \oplus H_n^\varepsilon(X_2) \leftarrow H_n^\varepsilon(X_1 \cap X_2) \leftarrow \cdots$$

Доказательство дословно повторяет доказательство предложения 1.

Направленные группы гомологий категории состояний. *Группами гомологий малой категории $\mathscr{C}$ с коэффициентами в функторе $F : \mathscr{C} \to$* Ab называются значения $\varinjlim_n^{\mathscr{C}} F$ левых производных функторов функтора копредела $\varinjlim^{\mathscr{C}} : \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}} \to$ Ab на F.

Пусть $(S, M(E,I))$ – пространство состояний, $K(S)$ – его категория состояний. Рассмотрим функторы $\Delta^0\,\mathbb{Z} : K(S) \to \mathrm{Ab}$ и $\Delta^1\,\mathbb{Z} : K(S)^{op} \to \mathrm{Ab}$, принимающие на объектах постоянные значения $\Delta^0\,\mathbb{Z}(s) = \Delta^1\,\mathbb{Z}(s) = \mathbb{Z}$. А на морфизмах определенные по формулам

$$\Delta^\varepsilon\,\mathbb{Z}(s \xrightarrow{\mu} s') = \begin{cases} 1_s, & \text{если } \mu = 1, \\ 0, & \text{если } \mu \neq 1. \end{cases}$$

Определение 1. *Направленные группы гомологий пространства состояний определяются по формулам*

$$H_n^0(S, M(E,I)) =_{def} \varinjlim_n^{K(S)} \Delta^0\,\mathbb{Z}, \quad H_n^1(S, M(E,I)) =_{def} \varinjlim_n^{K(S)^{op}} \Delta^1\,\mathbb{Z}.$$

Для произвольной элементарной сети Петри $\mathcal{N}$ ее группы гомологий $H_n^\varepsilon(\mathcal{N})$ определяются как группы гомологий ее пространства состояний.

Предложение 4. *Для элементарной сети Петри $\mathcal{N}_n$, полученнной с помощью удаления перехода t_1 из сети Петри конвейера $\mathfrak{P}_n$, группы гомологий равны*

$$H_k^\varepsilon(\mathcal{N}_n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \textit{если } k = 0 \\ 0, & \textit{если } k > 0. \end{cases}$$

Доказательство. Согласно лемме 1, категория $\mathscr{C}_n$ состояний сети Петри $\mathcal{N}_n$ имеет инициальный и терминальный объекты. Если малая категория имеет терминальный объект, то копредел функтора по этой категории равен значению этого функтора на терминальном объекте. Отсюда $H_k^\varepsilon(\mathcal{N}_n) = \varinjlim_k \Delta^\varepsilon\,\mathbb{Z} = 0$ при $k > 0$ и $H_0^\varepsilon(\mathcal{N}_n) = \varinjlim \Delta^\varepsilon\,\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. □

Согласно [5, Corollary 5], для произвольного отношения линейного порядка на E имеют место изоморфизмы

$$\varinjlim_n^{K(S)} \Delta^0\,\mathbb{Z} \cong H_n^0(Q(S,E,I)), \quad \varinjlim_n^{K(S)^{op}} \Delta^1\,\mathbb{Z} \cong H_n^1(Q(S,E,I)). \tag{1}$$

Отсюда получаем следующую интерпретацию направленных гомологий пространства состояний в размерности 0. Состояние s называется *тупиком*, если не существует $a \in E$, для которых $s \cdot a \in S$. Оно называется *рассылкой*, если не существует таких пар $s' \in S$ и $a \in E$, что $s' \cdot a = s$. В категории состояний тупиком будет объект, из которого не выходят морфизмы (кроме тождественного), а в рассылку нет входящих в нее морфизмов (кроме тождественного).

Предложение 5. *Группа $H_0^0(S, M(E,I))$ изоморфна свободной абелевой группе порожденной тупиками, а $H_0^1(S, M(E,I))$ – рассылками.*

Доказательство. Из [5, Corollary 5] следует, что $H_0^0(S, M(E,I))$ будет изоморфно коядру гомоморфизма $d_1^0 : LQ_1(S,E,I) \to LQ_0(S,E,I)$, действующего как $d_1^0(s,a) = s$. Коядро порождено множеством, полученным отождествлением с нулем элементов $s \in S$, для которых существуют такие $a \in E$, что $s \cdot a \in S$. Из множества S удаляются не тупики, а оставшееся множество порождает коядро. Аналогично доказывается для $H_0^1(S, M(E,I))$ – из S удаляются элементы, равные $s \cdot a$, для некоторых $s \in S$ и $a \in E$. Остаются рассылки, порождающие $H_0^1(S, M(E,I))$. $\square$

Пример 1. *Категория состояний элементарной сети Петри конвейера не имеет ни рассылок, ни тупиков, откуда $H_0^0(\mathfrak{P}_n) = H_0^1(\mathfrak{P}_n) = 0$.*

Направленные группы гомологий конвейера. Согласно приведенному выше примеру, группы $H_0^0(\mathfrak{P}_n)$ и $H_0^1(\mathfrak{P}_n)$ равны нулю. Следующее утверждение показывает, что $H_k^0(\mathfrak{P}_n)$ и $H_k^1(\mathfrak{P}_n)$ равны 0 для всех $k \geqslant 0$.

Теорема 2. *$H_k^\varepsilon(\mathfrak{P}_n) = 0$, для всех $n \geqslant 2$, $k \geqslant 0$ и $\varepsilon \in \{0,1\}$.*

Доказательство. Выше мы установили, что полукубическое множество $Q(\mathfrak{P}_n)$ равно объединению полукубических множеств $Q(\mathcal{N}_n)$ и $Q(\mathcal{N}'_n)$. Категории состояний сетей $\mathcal{N}_n$ и $\mathcal{N}'_n$ имеют наибольшие и наименьшие элементы. Значит, $H_k^\varepsilon(\mathcal{N}_n) = H_k^\varepsilon(\mathcal{N}'_n) = 0$ при $k > 0$, и $H_0^\varepsilon(\mathcal{N}_n) = H_k^\varepsilon(\mathcal{N}'_n) = \mathbb{Z}$. По предложению 2, $Q(\mathcal{N}_n) \cap Q(\mathcal{N}'_n) \cong Q(\mathcal{N}_{n-1}) \sqcup Q(\mathcal{N}_{n-1})$. Отсюда следует, что фрагмент точной последовательности предложения 3

$$\leftarrow H_{k-1}^\varepsilon(Q(\mathcal{N}_n) \cap Q(\mathcal{N}'_n)) \leftarrow H_k^\varepsilon(Q(\mathfrak{P}_n)) \leftarrow H_k^\varepsilon(Q(\mathcal{N}_n)) \oplus H_k^\varepsilon(Q(\mathcal{N}'_n)) \leftarrow$$

приводит к равенствам $H_k^\varepsilon(Q(\mathfrak{P}_n)) = 0$ при $k \geqslant 2$. Кроме того, имеет место точная последовательность

$$0 \leftarrow H_0^\varepsilon(Q(\mathfrak{P}_n)) \leftarrow H_0^\varepsilon(Q(\mathcal{N}_n)) \oplus H_0^\varepsilon(Q(\mathcal{N}'_n)) \xleftarrow{H_0^\varepsilon(\theta)}$$
$$H_0^\varepsilon(Q(\mathcal{N}_n) \cap Q(\mathcal{N}'_n)) \leftarrow H_1^\varepsilon(Q(\mathfrak{P}_n)) \leftarrow 0$$

Согласно примеру 1 и изоморфизмам (1) $H_0^\varepsilon(Q(\mathfrak{P}_n)) = 0$. Получаем эпиморфизм $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{H_0^\varepsilon(\theta)} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Но $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ – проективный объект категории абелевых групп. Отсюда следует существование гомоморфизма γ такого, что $H_0^\varepsilon(\theta) \circ \gamma = 1_{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}$. Значит, определитель матрицы $H_0^\varepsilon(\theta)$ обратим, откуда следует, что ядро гомоморфизма $H_0^\varepsilon(\theta)$ равно нулю. Следовательно, $H_1^\varepsilon(Q(\mathfrak{P}_n)) = 0$. Мы доказали, что $H_k^\varepsilon(Q(\mathfrak{P}_n)) = 0$ для всех $k \geqslant 0$. Из изоморфизмов (1) получаем $H_k^\varepsilon(\mathfrak{P}_n) \cong H_k^\varepsilon(Q(\mathfrak{P}_n))$, откуда вытекает утверждение теоремы. $\square$

Список литературы

1. Husainov A. A. On the homology of small categories and asynchronous transition systems // Homology Homotopy Appl. 2004. V. 6, №1. P. 439–471. http://www.rmi.acnet.ge/hha

2. Goubault E. The Geometry of Concurrency: *Thesis Doct. Phylosophy (Mathematics).* Ecole Normale Supérieure, 1995.

3. Gaucher P. About the globular homology of higher dimensional automata // Topol. Geom. Differ. 2002. V. 43, №2. P. 107–156.

4. Goubault E., Haucourt E., Krishnan S. Covering space theory for directed topology // Theory Appl. Categ. 2009. V. 22, №9. P. 252–268.

5. Husainov A.A. The Homology of Partial Monoid Actions and Petri Nets // Appl. Categor. Struct. 2012. DOI: 10.1007/s10485–012–9280–9

6. Хусаинов А.А., Бушмелева Е.С. Гомологии асинхронных систем // *Актуальные проблемы математики, физики, информатики в вузе и школе: материалы Международной научно-практической конференции 23 марта 2012 г. Комсомольск-на-Амуре.* Комсомольск-на-Амуре: Изд-во АмГПГУ, 2012. С. 24–31 (Husainov A.A., Bushmeleva E.S. Gomologii asinhronnyh sistem // Aktualnye problemy matematiki, fiziki, informatiki v vuze i shkole: materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii 23 marta 2012, Komsomolsk-na-Amure. Komsomolsk-na-Amure: Izd-vo AmGPGU, 2012. S. 24–31 [in Russian]).

7. Winskel G., Nielsen M. Models for Concurrency. *Handbook of Logic in Computer Science. Vol. IV / ed. Abramsky, Gabbay and Maibaum.* Oxford University Press, 1995. P. 1–148.

8. Nielsen M., Winskel G. Petri nets and bisimulation // Theoretical Computer Science. 1996. V. 153, №1–2. P. 211–244.

9. Хусаинов А. А. О группах гомологий полукубических множеств // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 1. С. 224–237 (English transl.: Khusainov A. A. Homology groups of semicubical sets // Sib. Math. J. 2008. V. 49, No 1. P. 593–604).

Homology Groups of a Pipeline Petri Net

Husainov A.A., Bushmeleva E.S., Trishina T.A.

Komsomolsk-on-Amur State Technical University,
Lenina prosp., 27, Komsomolsk-on-Amur, 681013, Russia

Keywords: trace monoid, asynchronous transition system, elementary Petri net, pipeline, semicubical set, homology of small categories.

Petri net is said to be elementary if every place can contain no more than one token. In this paper, it is studied topological properties of the elementary Petri net for a pipeline consisting of n functional devices. If the work of the functional devices is considered continuous, we can come to some topological space of "intermediate" states. In the paper, it is calculated the homology groups of this topological space. By induction on n, using the Addition Sequence for homology groups of semicubical sets, it is proved that in dimension 0 and 1 the integer homology groups of these nets are equal to the group of integers, and in the remaining dimensions are zero. Directed homology groups are studied. A connection of these groups with deadlocks and newsletters is found. This helps to prove that all directed homology groups of the pipeline elementary Petri nets are zeroth.

Сведения об авторах:
Хусаинов Ахмет Аксанович,
ФГБОУ ВПО "Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет", профессор, доктор физико-математических наук;
Бушмелева Елена Сергеевна,
ФГБОУ ВПО "Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет", аспирант;
Тришина Таисия Александровна,
ФГБОУ ВПО "Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет", студентка