***Мустафаев В.А.,*** *кандидат технических наук, доцент*
***Гусейнзаде Ш.С.,*** *старший преподаватель*

# РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ВЕКТОРА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ПЕТРИ

*Конструкции сетей Петри позволяют описывать поведения сложных систем. Математические модели активных элементов, функционирующих в условиях неопределенности, в основном, представляются в виде стохастических или нечетких сетей Петри. В статье дан алгоритм вычисления элементов вектора распределения вероятностей стохастических сетей Петри с произвольным конечным числом входов и выходов.*

# MAKING THE CONSIDERING ALGORITHM OF THE STOCHASTIC PETRI NETS PROBABILITIES DISTRIBUTION VECTOR ELEMENTS

*Petri nets constructions allow to describe complex systems conducts. Mathematical models of the active elements functioning in indefinite conditions on the whole are presented as stochastic or fuzzy Petri nets. The stochastic Petri nets probabilities distribution vector elements considering algorithm with arbitrary ending number of entries and outlets is given in the article.*

Применение сетей Петри в моделировании сложных систем требует возможные обобщения. Одно из предполагаемых обобщений сетей Петри связано с неопределенностью количества фишек в позициях сети. Так, как позиции сети, моделируют состояния отдельных элементов системы, количества фишек во всех позициях определяют глобальное состояние системы. При этом неопределенность наличия фишек может быть описана как с вероятностных позиций, так и с помощью теории нечетких множеств. Данная проблема в процессе моделирования систем решается с помощью стохастических и нечетких сетей Петри. Количество фишек в позициях определяют глобальное состояние моделируемой системы. В стохастических сетях Петри неопределенность наличия фишек описывается вектором распределения вероятностей наличия каждой позиции. Перераспределение наличия фишек отражается в длине и компонентах векторов распределения. Определение элементов вектора распределения с вычислительной точки зрения вызывает некоторые трудности. При срабатывании перехода с одним входом и выходом эта задача рассмотрена и решена [2]. Для преодоления этих трудностей в случае двух или больших конечных чисел входов и выходов, в статье разработан алгоритм автоматизации вычисления элементов вектора распределения вероятностей при изменении маркировки после срабатывания перехода.

Стохастические сети Петри [1] определяются парой $M_s=(c,\mu^s)$, где $c=(P,T,I,O)$ описывает структуру сети; $P=\{p_1, p_2, ..., p_n\}$, $n>0$ – конечное непустое множество позиции; $T=\{t_1, t_2, ..., t_m\}$, $m>0$ – конечное непустое множество переходов; $I:P\times T\to(0,1,...)$, $O:T\times P\to(0,1,...)$- соответственно функции входных и выходных инциденций, а отображение $\mu^s:P\to V_s=[0,1]$ присваивает каждой позиции вектор распределения вероятностей наличия фишек $\mu^s(p_i)$.

Если у вектора распределения вероятностей каждой входной позиции $p_i\in P$ имеется компонента неравная нулю, с номером, равным или большим числу дуг, соединяющих данную позицию с переходом $t_j\in T$, то срабатывается переход $t_j$. После срабатывания перехода происходит процесс перераспределения фишек в позициях. В стохастических сетях Петри это распределение отражается в изменении векторов вероятностей наличия фишек в позициях, иными словами изменяется маркировка сети. Для определения правила изменения маркировки при срабатывании перехода, введем понятие вектора диагональной свертки матрицы Грама двух векторов:

Пусть даны два вектора: $a^T=(a_0\ a_1 \dots a_m)$ ; $b^T=(b_0\ b_1 \dots b_к)$; $a_i, b_j \in [0,1]$, $i=\overline{1,m}$ ; $j=\overline{1,k}$ .

Матрица Грама векторов $a$ и $b$ является двумерной матрицей в размерности $m \times k$ следующего вида:

$$G(a,b) = a \cdot b^T = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \cdot (b_0 b_1 \cdots b_k) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 \cdot b_0 & a_0 \cdot b_1 \cdots & a_0 \cdot b_к \\ a_1 \cdot b_0 & a_1 \cdot b_1 \cdots & a_1 \cdot b_к \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_m \cdot b_0 & a_m \cdot b_1 \cdots & a_m \cdot b_к \end{vmatrix}$$

Диагональной сверткой матрицы Грама векторов $a$ и $b$ называется вектор, в размерности $(m+к) \times 1$, компоненты которого равны сумме элементов, расположенных на одной линии, симметричной относительно главной диагонали, т.е.

$$d_i(G(a,b)) = \begin{pmatrix} a_0 \cdot b_0 \\ a_1 \cdot b_0 + a_0 \cdot b_1 \\ a_2 \cdot b_0 + a_1 \cdot b_1 + a_0 \cdot b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_m \cdot b_k \end{pmatrix}$$

Алгоритм вычисления элементов вектора диагональной свертки матрицы Грама стохастических сетей Петри основывается по следующему принципу: элементы матрицы Грама, у которых сумма индексов равна на $l$. Если i+j= $l$ то выполняется суммирование:

$$d_l = \sum_{i+j=l} a_i \cdot b_j \ .$$

На основе принципа построения матрицы Грама и вектора диагональной свертки и учитывая правило изменения маркировки разработан алгоритм вычисления элементов вектора распределения вероятностей стохастических сетей Петри. Алгоритм предусматривает выявлению и коррекцию конфликтных и тупиковых ситуаций в сети Петри. Разработанный алгоритм состоит из следующих шагов:

*Шаг 1.* Создание матрицы входных инциденций $F=\{f_{ij}\}$, где $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$ .

Элемент $f_{ij}$ равен числу дуг от $i$-ой позиции к $j$-му переходу.

*Шаг 2.*Создание матрицы выходных инциденций $H=\{h_{ji}\}$, где $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$.
Элемент $h_{ji}$ равен числу дуг от $j$-го перехода к $i$-ой позиции.

*Шаг 3.* Создание начальной маркировки $\mu = \{\mu_i\}, i = \overline{1,n},$ где $\mu_i = (\mu_{i0}, \mu_{i1}, \ldots, \mu_{ik_i})$ вектор распределения вероятностей *i*-ой позиции.

*Шаг 4.* Определение матрицы $K = \{k_i\}, i = \overline{1,n},$ где $k_i$ длина вектора распределения вероятностей *i*-ой позиции.

*Шаг 5.* Поиск разрешенного перехода. Переход $t_j$ разрешен, если у вектора распределения вероятностей каждой входной позиции перехода имеется компонента, не равная нулю, с номером равным или большим числу дуг, соединяющих данную позицию с переходом:

а) выбираются все $f_{ij}\neq 0$, при $i = \overline{1,n}$;

б) для каждого фиксированного *i* должен быть $\exists \mu_{ik}\neq 0$, при $k = \overline{f_{ij}, k_i}$, т.е.

$$\sum_{k=f_{ij}}^{k_i} \mu_{ik} \neq 0\,.$$

*Шаг 6.*Если для перехода $t_j$ условие срабатывания не выполняется, то индекс *j* увеличивается на единицу: $j=j+1$. При $j\leq m$ осуществляется переход к пункту а) шага 5, в противном случае вывод сообщения о тупиковом состоянии и завершении поиска.

*Шаг 7.*Формирование вектора распределения вероятностей каждой входной позиции после срабатывания перехода $t_j$:

а) вычисление нулевой компоненты вектора распределения вероятностей:

$$\mu'_{i0} = \sum_{\alpha=0}^{f_{ij}} \mu_{i\alpha}\,.$$

б) вычисление остальных компонент вектора распределения вероятностей:

$$\mu_{i\beta} = \mu_{i,\beta} + f_{ij}, \beta = 1,2,\ldots, k_i - f_{ij}\,.$$

в) при запуске перехода $t_j$ размерность вектора распределения вероятностей каждой входной позиции уменьшается по числу входных дуг: $k_i=k_i-f_{ij}$.

*Шаг 8.*Формирование вектора распределения вероятностей каждой выходной позиции после срабатывания перехода. Этот вектор равен вектору диагональной свертки матрицы Грама исходного выходного вектора и промежуточного вектора $r = (r_0, r_1, \ldots, r_{h_{jk}})$:

а) выбор всех $h_{jz} \neq 0$, при $z = \overline{1,n}$;

б) вычисление последней компоненты вектора r:

$$r_{h_{jz}} = \prod_i \sum_{\alpha=f_{ij}}^{k_i-1} \mu_{i\alpha}$$ , для всех фиксированных *i*, при $f_{ij}\neq 0$;

в) вычисление нулевой компоненты: $r_0 = 1 - r_{h_{jz}}$;

г) вычисление остальных компонент: $r_i=0$, $i = \overline{1, h_{jz} - 1}$.

*Шаг 9.*Формирование матрицы Грама векторов $\mu_z$ и $r^T$:

$$G(\mu_z, r^T) = (\mu_{z0}\mu_{z1}\cdots\mu_{zk_z})\cdot\begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{h_{jz}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{z0}\cdot r_0 \ \mu_{z0}\cdot r_1 \cdots \mu_{z0}\cdot r_{h_{jz}} \\ \mu_{z1}\cdot r_0 \ \mu_{z1}\cdot r_1 \cdots \mu_{z1}\cdot r_{h_{jz}} \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ \mu_{zk_z}\cdot r_0 \ \mu_{zk_z}\cdot r_1 \cdots \mu_{zk_z}\cdot r_{h_{jz}} \end{pmatrix}.$$

Вычисление элементов $g_{\ell k}$ матрицы Грама:

$$g_{\ell k} = \mu_{z\ell}\cdot r_k \quad , \ell = \overline{0, k_z} \ , k = \overline{0, h_{jz}}.$$

*Шаг 10.* Вычисление вектора диагональной свертки матрицы Грама $d(G(\mu_z, r^T))$:

$$d(G(\mu_z, r^T)) = \begin{pmatrix} \mu_{z0}\cdot r_0 \\ \mu_{z1}\cdot r_0 + \mu_{z0}\cdot r_1 \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ \mu_{zk_z}\cdot r_0 + \mu_{zk_{z-1}}\cdot r_1 + \cdots + \mu_{z-h_{jz}}\cdot r_{h_{jz}} \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ \mu_{\mathrm{zk_z}}\cdot r_{h_{jz}} \end{pmatrix}.$$

Вычисление элементов этого вектора по формуле :

$$d_\ell = \sum_{k+i=\ell}\mu_{zk}r_i \text{ , при } k = \overline{0, k_z},\ i = \overline{1, h_{jz}}.$$

*Шаг 11.* Размерность вектора распределения увеличивается по числу $h_{jz}$:

$$k_z = k_z + h_{jz}.$$

*Шаг 12.* Формирование вектора $\mu'_z = \{\mu'_{z0}\ \mu'_{z1}\ldots\mu'_{kz}\}$ распределения вероятностей выходной позиции $p_z$:

$$\mu'_{zk} = d_k, k = \overline{0, k_z} \ .$$

*Шаг 13.* По усмотрению пользователя, или процесс продолжается и осуществляется переход к шагу 5, или прекращается.

На примере рассмотрим стохастическую сеть с позициями

$P=\{p_1, p_2,\ldots,p_{11}\}$ и переходами $T=\{t_1, t_2,\ldots,t_6\}$. Функции входной и выходной инцидентности представляются соответственно матрицами F и H:

$$F=\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix},\qquad H=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0 \end{pmatrix}.$$

Начальная маркировка $\mu_0$ представляется векторами:

$\mu(0,1) = (\ 1.000\ \ 0.000\ )$
$\mu(0,2) = (\ 1.000\ \ 0.000\ )$
$\mu(0,3) = (\ 1.000\ \ 0.000\ )$
$\mu(0,4) = (\ 0.000\ \ 0.400\ \ 0.600\ )$
$\mu(0,5) = (\ 0.200\ \ 0.300\ \ 0.500\ )$
$\mu(0,6) = (\ 0.000\ \ 0.100\ \ 0.000\ \ 0.900\ )$
$\mu(0,7) = (\ 0.100\ \ 0.200\ \ 0.700\ )$
$\mu(0,8) = (\ 0.000\ \ 0.100\ \ 0.300\ \ 0.600\ )$
$\mu(0,9) = (\ 0.300\ \ 0.000\ \ 0.000\ \ 0.700\ )$
$\mu(0,10) = (\ 1.000\ \ 0.000\ )$
$\mu(0,11) = (\ 1.000\ \ 0.000\ )$

На основе разработанного алгоритма получены следующие результаты автоматизации вычисления:

срабатывается переход $t_1$ , полученная маркировка имеет вид:

$\mu(1,1) = (\ 1.000\ \ 0.000\ )$
$\mu(1,2) = (\ 1.000\ \ 0.000\ )$
$\mu(1,3) = (\ 1.000\ \ 0.000\ )$
$\mu(1,4) = (\ 0.000\ \ 0.400\ \ 0.600\ )$
$\mu(1,5) = (\ 0.500\ \ 0.500\ )$
$\mu(1,6) = (\ 0.000\ \ 0.100\ \ 0.000\ \ 0.900\ )$
$\mu(1,7) = (\ 0.300\ \ 0.700\ )$
$\mu(1,8) = (\ 0.100\ \ 0.300\ \ 0.600\ )$
$\mu(1,9) = (\ 0.300\ \ 0.000\ \ 0.000\ \ 0.700\ )$
$\mu(1,10) = (\ 0.280\ \ 0.720\ \ 0.000\ )$
$\mu(1,11) = (\ 1.000\ \ 0.000\ )$

срабатывается переход $t_2$ , полученная маркировка имеет вид:

$\mu(2,1) = (\ 1.000\ \ 0.000\ )$
$\mu(2,2) = (\ 0.280\ \ 0.720\ \ 0.000\ )$
$\mu(2,3) = (\ 1.000\ \ 0.000\ )$
$\mu(2,4) = (\ 0.000\ \ 0.400\ \ 0.600\ )$
$\mu(2,5) = (\ 0.500\ \ 0.500\ )$
$\mu(2,6) = (\ 0.000\ \ 0.100\ \ 0.000\ \ 0.900\ )$
$\mu(2,7) = (\ 0.084\ \ 0.412\ \ 0.504\ )$
$\mu(2,8) = (\ 0.028\ \ 0.156\ \ 0.384\ \ 0.432\ )$

$\mu(2,9) = ( 0.300 \quad 0.000 \quad 0.000 \quad 0.700 )$
$\mu(2,10) = ( 1.000 \quad 0.000 )$
$\mu(2,11) = ( 1.000 \quad 0.000 )$

срабатывается переход $t_3$ , полученная маркировка имеет вид:

$\mu(3,1) = ( 0.280 \quad 0.720 \quad 0.000 )$
$\mu(3,2) = ( 1.000 \quad 0.000 )$
$\mu(3,3) = ( 1.000 \quad 0.000 )$
$\mu(3,4) = ( 0.400 \quad 0.600 )$
$\mu(3,5) = ( 0.140 \quad 0.500 \quad 0.360 )$
$\mu(3,6) = ( 0.000 \quad 0.100 \quad 0.000 \quad 0.900 )$
$\mu(3,7) = ( 0.084 \quad 0.412 \quad 0.504 )$
$\mu(3,8) = ( 0.028 \quad 0.156 \quad 0.384 \quad 0.432 )$
$\mu(3,9) = ( 0.300 \quad 0.000 \quad 0.000 \quad 0.700 )$
$\mu(3,10) = ( 1.000 \quad 0.000 )$
$\mu(3,11) = ( 1.000 \quad 0.000 )$

срабатывается переход $t_4$ , полученная маркировка имеет вид:

$\mu(4,1) = ( 1.000 \quad 0.000 )$
$\mu(4,2) = ( 1.000 \quad 0.000 )$
$\mu(4,3) = ( 0.280 \quad 0.720 \quad 0.000 )$
$\mu(4,4) = ( 0.112 \quad 0.456 \quad 0.432 )$
$\mu(4,5) = ( 0.140 \quad 0.500 \quad 0.360 )$
$\mu(4,6) = ( 0.100 \quad 0.000 \quad 0.900 )$
$\mu(4,7) = ( 0.084 \quad 0.412 \quad 0.504 )$
$\mu(4,8) = ( 0.028 \quad 0.156 \quad 0.384 \quad 0.432 )$
$\mu(4,9) = ( 0.300 \quad 0.000 \quad 0.000 \quad 0.700 )$
$\mu(4,10) = ( 1.000 \quad 0.000 )$
$\mu(4,11) = ( 1.000 \quad 0.000 )$

срабатывается переход $t_5$ , полученная маркировка имеет вид:

$\mu(5,1) = ( 1.000 \quad 0.000 )$
$\mu(5,2) = ( 1.000 \quad 0.000 )$
$\mu(5,3) = ( 1.000 \quad 0.000 )$
$\mu(5,4) = ( 0.112 \quad 0.456 \quad 0.432 )$
$\mu(5,5) = ( 0.140 \quad 0.500 \quad 0.360 )$
$\mu(5,6) = ( 0.100 \quad 0.000 \quad 0.900 )$
$\mu(5,7) = ( 0.496 \quad 0.504 )$
$\mu(5,8) = ( 0.028 \quad 0.156 \quad 0.384 \quad 0.432 )$
$\mu(5,9) = ( 0.300 \quad 0.000 \quad 0.700 )$
$\mu(5,10) = ( 1.000 \quad 0.000 )$
$\mu(5,11) = ( 0.538 \quad 0.462 \quad 0.000 )$

срабатывается переход $t_6$ , полученная маркировка имеет вид:

$\mu(6,1) = ( 1.000 \quad 0.000 )$
$\mu(6,2) = ( 1.000 \quad 0.000 )$
$\mu(6,3) = ( 1.000 \quad 0.000 )$
$\mu(6,4) = ( 0.112 \quad 0.456 \quad 0.432 )$
$\mu(6,5) = ( 0.140 \quad 0.500 \quad 0.360 )$
$\mu(6,6) = ( 0.054 \quad 0.046 \quad 0.485 \quad 0.415 )$
$\mu(6,7) = ( 0.267 \quad 0.500 \quad 0.233 )$

$$\mu(6,8) = (\ 0.028 \quad 0.156 \quad 0.384 \quad 0.432\ )$$
$$\mu(6,9) = (\ 0.162 \quad 0.138 \quad 0.377 \quad 0.323\ )$$
$$\mu(6,10) = (\ 1.000 \quad 0.000\ )$$
$$\mu(6,11) = (\ 1.000 \quad 0.000\ )$$

По результатам видно что, последовательность запусков переходов принимает вид $\delta=(t_1\ t_2\ t_3\ t_4\ t_5\ t_6)$. Полученное множество достижимостей в виде совокупности векторов распределения дает возможностьей для анализа этой сети. Ресурсы современных компьютеров позволяют решить эти задачи с матрицами достаточно большого размера, что вполне удовлетворяет моделирование реальных сложных объектов, которые функционируют в условиях неопределенности.

## ЛИТЕРАТУРА


1. А.А.Лескин, П.А.Мальцев, А.М.Спиридонов. Сети Петри в моделировании и управлении. Л. /Наука/, 1989
2. М.А.Ахмедов, В.А.Мустафаев, Ш.С.Гусейнзаде. Алгоритм вычисления элементов вектора распределения степеней принадлежности нечетких сетей Петри. Вестник Бакинского университета, №1, 2001.