Модел. и анализ информ. систем. Т.**15**, №**4** (2008) 3–9

УДК 681.3

Конечные группы автоморфизмов сетей Петри

Белов Ю.А.
Ярославский государственный университет, доцент
e-mail: belov@uniyar.ac.ru

получена 20 ноября 2008

Аннотация

Для систем помеченных переходов определяются понятия изоморфизма и автоморфизма, в частности, для структурированных систем (WSTS) – понятие монотонного автоморфизма. Показано, как каждому автоморфизму сопоставить некоторое отношение бисимуляции. Доказано, что группа монотонных автоморфизмов сети Петри конечна.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: *группа автоморфизмов, бисимуляция состояний, монотонный изоморфизм.*

1. Определения

Система помеченных переходов (labeled transition system LTS [1]) - это тройка $D = \langle S, L, T \rangle$, где S - произвольное бесконечное множество, называемое множеством состояний, L - конечное множество меток (имен) переходов, $T \subseteq S \times L \times S$ - множество переходов. Элементы из T записываются в следующем виде: $s \xrightarrow{l} s'$, если $(s, l, s') \in T$ и читаются так: система D из состояния s под действием перехода с именем l перешла в состояние s'.

Понятие изоморфизма системы использовалось, например, в работе [2].

Система $D = \langle S_1, L, T_1 \rangle$ называется *изоморфной* системе $H = \langle S_2, L, T_2 \rangle$, если существует биективное отображение α S_1 на S_2 такое, что $\forall s, s' \in S_1 \quad s \xrightarrow{l} s'$ тогда и только тогда, когда $\alpha(s) \xrightarrow{l} \alpha(s')$ («свойство переноса»).

Конечно, из определения следует, что между множествами T_1 и T_2 имеется биективное соответствие.

Ясно, что отношение изоморфности для систем переходов является отношением эквивалентности. Изоморфность систем практически означает, что две системы идентичны структурно и различаются лишь обозначениями множеств состояний и переходов.

Автоморфизмом системы называется изоморфное отображение системы на себя.

Группа автоморфизмов активно изучалась для произвольных алгебраических систем [3]. Как отмечалось в [4], группа автоморфизмов графа описывает его симметрии. Будем обозначать группу автоморфизмов системы D через $Aut(D)$ (см. [2]).

Для сетей Петри состояния задаются распределением ресурсов по позициям и естественным образом частично упорядочены. Для произвольных систем переходов аналогичную структуру приходится определять.

Отношением квазипорядка $\leq$ на произвольном множестве X будем называть бинарное отношение со свойствами рефлексивности и транзитивности. Отметим, что при квазипорядке для двух различных элементов $x, y \in X$ возможно одновременное выполнение условий $x \leq y$ и $y \leq x$. Такие элементы называются ассоциированными. (Ясно, что ассоциированность задает на множестве X отношение эквивалентности). По определению, $x < y$, если $x \leq y$ и элементы не ассоциированы.

Квазипорядок называется *правильным*, если всякая строго убывающая цепь конечна и отсутствуют бесконечные множества попарно несравнимых элементов (антицепей). Квазипорядок, определенный на множестве состояний S системы переходов, называется совместимым с отношением переходов, если из того, что $x \leq y$ и $x \xrightarrow{l} x'$ следует, что найдется такое состояние $y' \in S$, что $x' \leq y'$ и $y \xrightarrow{l} y'$.

LTS D называется *вполне структурированной системой переходов* (WSTS), если на её множестве состояний определено отношение $\leq$ правильного квазипорядка, совместимого с отношением переходов.

Приведенные выше, для произвольных LTS, определения изоморфизма и автоморфизма переносятся и на WSTS, однако при этом естественно учесть имеющиеся упорядоченности.

Пусть заданы две системы WSTS – $D = \langle S_1, L, T_1, \leq_1\rangle$ и $H = \langle S_2, L, T_2, \leq_2\rangle$. Биективное отображение $\alpha : S_1 \to S_2$ будем называть *монотонным изоморфизмом* D на H, если $\forall s, s' \in S_1 \quad s \xrightarrow{l} s'$ тогда и только тогда, когда $\alpha(s) \xrightarrow{l} \alpha(s')$ и $s \leq_1 s'$ тогда и только тогда, когда $\alpha(s) \leq_2 \alpha(s')$. Конечно, для WSTS можно рассматривать и немонотонные изоморфизмы, не согласованные с порядком состояний. Как и ранее, автоморфизмом (монотонным автоморфизмом) системы называется изоморфное (монотонное изоморфное) отображение системы на себя.

Ясно, что монотонные автоморфизмы образуют подгруппу в группе всех автоморфизмов: $Autm(D) \subseteq Aut(D)$.

Напомним ещё понятие отношения бисимуляции состояний данной системы $D = \langle S, L, T\rangle$. Бинарное отношение $R \subseteq S \times S$ обладает свойством переноса, если для любой пары $(s, t) \in R$ и любого перехода $s \xrightarrow{l} s'$ существует переход с тем же именем $t \xrightarrow{l} t'$ такой, что $(s', t') \in R$. Отношение R называется *отношением бисимуляции*, если R и R^{-1} обладают свойством переноса. Для данной системы D существует некоторый набор таких отношений бисимуляции. Два состояния (s, t) данной системы называются бисимулярными, если данная пара принадлежит некоторому отношению бисимуляции. Простейшим примером отношения бисимуляции является диагональ $I = \{(x, x) | x \in S\}$.

2. Замечания о бисимуляции

Отметим некоторые простые факты.

1. Объединение любого набора отношений бисимуляции является отношением бисимуляции, отношение, обратное к отношению бисимуляции, является отношением бисимуляции. Суперпозиция двух отношений бисимуляции является отношением бисимуляции.

2. Множество $Aut(D)$ всех автоморфизмов системы является группой относительно суперпозиции отображений: $(\alpha \circ \beta)(x) = \beta(\alpha(x))$.

3. Каждому автоморфизму $\alpha \in Aut(D)$ соответствует отношение бисимуляции R_α по правилу: $R_\alpha = \{(s, \alpha(s)) | s \in S\}$. При этом произведению $\alpha \circ \beta$ соответствует суперпозиция $R_\alpha \circ R_\beta$, обратному автоморфизму α^{-1} – обратное соответствие R_α^{-1}.

Все три утверждения проверяются непосредственно, хотя формально можно отметить, что третье свойство является следствием корректности автоморфизма, вытекающим из критерия корректности, доказанного в [5].

Третье утверждение может быть интересно в связи с тем, что бисимуляция для многих классов систем, в частности для сетей Петри, алгоритмически неразрешима – см. [6], а здесь описан способ построения некоторого класса этих отношений с помощью автоморфизмов. Конечно, вопрос описания всех автоморфизмов системы также может быть нетривиальным. Отметим, что, хотя группа автоморфизмов системы переходов аналогична, например, группе автоморфизмов графа, имеется существенная разница между этими объектами. Группа автоморфизмов графа всегда заведомо конечна, так как является некоторой группой подстановок на конечном множестве вершин графа. Группа же автоморфизмов системы переходов состоит из биекций бесконечного множества S состояний системы. Примеры систем с бесконечными группами автоморфизмов нетрудно привести (конечно, это возможно лишь для систем с бесконечным числом состояний). Даже для сетей Петри, которые в некотором смысле задаются конечными двудольными графами, группа всех автоморфизмов, вероятно, может быть бесконечной. С другой стороны, вопрос о конечности группы монотонных автоморфизмов сети Петри решается достаточно просто.

3. О монотонных автоморфизмах сетей Петри

Сети Петри являются одним из возможных видов вполне структурированных систем переходов – WSTS.

Краткое определение сети таково. Множество состояний – $S = N^n$, где $N = \{0, 1, 2, \ldots, k, \ldots\}$ – множество натуральных чисел, а $S = N^n$ – множество всевозможных n-мерных векторов с неотрицательными целочисленными координатами (n можно считать размерностью сети, n называется ещё числом позиций сети). Частичный порядок на множестве S – покоординатный: для $x, y \in S$ $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $0 \leq (y - x)$, то есть $(y - x) \in S$. Множество меток L – произвольное конечное множество символов (имён, действий) переходов. Каждой метке $l \in L$ сопоставлена пара (или несколько пар) векторов $a, b \in N^n$; с помощью их будут определяться переходы. Для данного состояния $s \in S$ активными переходами объявляются те и только те, для которых $s \geq a$. Срабатывать могут только переходы, активные в данном состоянии. Срабатывание активного перехода есть замена состояния s на состояние $s' = s - a + b$.

Для дальнейшего необходимы некоторые элементы из теории частично упорядоченных множеств.

Напомним определение, фактически уже данное ранее – изоморфизм частично упорядоченных множеств – см. [7]. Два частично упорядоченных множества X и Y

называются изоморфными, если существует биекция $\varphi : X \to Y$ такая, что $x \leq x'$ выполняется тогда и только тогда, когда $\varphi(x) \leq \varphi(x')$.

Для доказательства теоремы конечности для сетей Петри нам будет достаточно рассмотреть изоморфные отображения на себя (автоморфизмы) частично упорядоченного множества $S = N^n$ с рассмотренной выше покоординатной упорядоченностью.

Отметим сначала некоторые примеры изоморфных отображений множества N^n на себя. Возьмём произвольную перестановку p чисел от 1 до n и каждому вектору $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S$ сопоставим вектор $(x_{p(1)}, x_{p(2)}, \dots, x_{p(n)})$. Ясно, что указанное отображение является изоморфизмом $S = N^n$ на себя.

Оказывается, все изоморфизмы N^n на себя этими примерами и исчерпываются.

Предложение. Существует ровно $n!$ различных изоморфных отображений частично упорядоченного множества N^n на себя, все они определяются перестановками координат векторов, как указано выше.

Доказательство. Для упрощения записей будем рассматривать случай $n = 3$. Доказательство в общем случае проводится совершенно аналогично. Как обычно, будем писать $x < y$, когда $x \leq y$ и $x \neq y$. Напомним – наименьший элемент частично упорядоченного множества – тот, который меньше всех других элементов, минимальный элемент – тот, меньше которого нет.

Как легко понять, при изоморфизме наименьший элемент отображается в наименьший, минимальный – в минимальный, пара несравнимых элементов отображается в несравнимую пару (иначе для обратного отображения нарушалось бы условие изоморфности) (подробности в [7]).

В множестве N^3 рассмотрим «базисные» векторы $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Докажем, что если $\varphi(e_1) = e_1$, $\varphi(e_2) = e_2$, $\varphi(e_3) = e_3$, то $\varphi(x) = x, \forall x \in S$, то есть φ - тождественное отображение. Как будет показано далее, этого будет достаточно для полного доказательства предложения.

Доказывать тождественность φ будем индукцией по сумме координат векторов (для краткости будем говорить – «по весу»). Наименьший вектор в N^3 – нулевой вектор. Как отмечалось выше, он должен отображаться в наименьший, то есть оставаться на месте. Базисные векторы остаются неподвижными по предположению. Для наглядности сделаем ещё один частный шаг. Рассмотрим множество $N^3_{(2)}$ всех векторов весов не меньше двух, то есть $N^3_{(2)} = N^3 \backslash \{0, e_1, e_2, e_3\}$. Легко понять, что минимальными элементами в множестве $N^3_{(2)}$ будут векторы веса 2 и только они: $(0, 0, 2), (0, 2, 0), (2, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)$. Заметим, что аналогичная картина имеется и в других множествах $N^3_{(k)}$: множество минимальных векторов в $N^3_{(k)}$ есть в точности множество векторов веса k.

Как отмечалось ранее, множество минимальных векторов отображается на себя. Для $N^3_{(2)}$ это означает, что указанное множество из шести векторов отображается на себя. Докажем, что все они остаются неподвижными при отображении φ. Рассмотрим вектор $\varphi((0, 0, 2))$. Вектор $(0, 0, 2)$ несравним с e_1, значит, и образ его – $\varphi((0, 0, 2))$ несравним с $\varphi(e_1)$, но $\varphi(e_1) = e_1$. Это означает, что первая компонента вектора $\varphi((0, 0, 2))$ равна 0, иначе выполнялось бы неравенство: $\varphi((0, 0, 2)) \geq e_1 = \varphi(e_1)$. Аналогично доказывается равенство нулю второй компоненты вектора $\varphi((0, 0, 2))$.

Тогда, в силу того, что $\varphi((0,0,2))$ – один из шести минимальных векторов, можно заключить, что $\varphi((0,0,2)) = (0,0,2)$.

Таким же образом устанавливается, что все три вектора с двумя нулевыми компонентами остаются на месте.

Аналогично можно установить, что при отображении трёх других векторов указанной шестёрки нулевые компоненты сохраняются, и, так как эта тройка отображается на себя, все векторы остаются неподвижными при отображении φ.

Общий случай рассматривается аналогично. Действительно, пусть имеется вектор (l, m, p) некоторого веса. Предполагаем, что векторы меньших весов при отображении φ неподвижны. Отметим, что указанный вектор является минимальным в множестве $N^3_{(l+m+p)}$, и, как отмечалось ранее, множество всех минимальных векторов в $N^3_{(l+m+p)}$ исчерпывается векторами веса $l + m + p$.

Если m и p больше нуля, в $N^3_{(l+m+p-1)}$ существуют векторы $(l, m, p-1)$ и $(l, m-1, p)$. Так как $(l, m, p) > (l, m, p-1)$, имеется неравенство: $\varphi((l, m, p)) > \varphi((l, m, p-1)) = (l, m, p-1)$. Это означает, что первая и вторая координата $\varphi((l, m, p))$ не меньше l и m соответственно. Сравнив $\varphi((l, m, p))$ с $(l, m-1, p)$, можно аналогично заключить, что третья компонента $\varphi((l, m, p))$ не меньше p. В силу того, что минимальные векторы $N^3_{(l+m+p)}$ отображаются на минимальные, вектор $\varphi((l, m, p))$ имеет тот же вес, что и (l, m, p). Но только что установлено, что $\varphi((l, m, p)) \geq (l, m, p)$. Отсюда следует, что $\varphi((l, m, p)) = (l, m, p)$. Если в исходном векторе (l, m, p) ровно одна координата равна 0, например, $p = 0$, то, как и ранее, отмечаем, что вектор $(l, m, 0)$ несравним с e_3. Значит, как отмечалось ранее, образ его – $\varphi((l, m, 0))$ – несравним с $\varphi(e_3) = e_3$. Это означает, что третья компонента $\varphi((l, m, 0))$ равна 0. Для получения оценок первой и второй компонент вектора $\varphi((l, m, 0))$ сравним вектор $(l, m, 0)$ с векторами $(l, m-1, 0)$ и $(l-1, m, 0)$, которые, напомним, остаются неподвижными при отображении φ. Как и выше, можно заключить, что первая и вторая компонента вектора $\varphi((l, m, 0))$ не меньше l и m соответственно. И снова можно заключить, что, в силу сохранения веса, $\varphi((l, m, 0)) = (l, m, 0)$.

Если у исходного вектора (l, m, p) две компоненты равны нулю, рассуждения аналогичны.

Таким образом доказано, что если изоморфизм φ оставляет на месте тройку базисных векторов, то он тождественный: $\varphi = 1$. Докажем теперь, что если два изоморфизма, φ и ψ, одинаково отображают базисную тройку, то они совпадают всюду, то есть $\varphi = \psi$. Действительно, рассмотрим изоморфизм $\varphi \circ \psi^{-1}$. По условию, он тождественно действует на базисные векторы. Тогда, как доказано, он будет равен 1, $\varphi \circ \psi^{-1} = 1$, значит, $\varphi = \psi$.

Последнее утверждение означает, что всякий автоморфизм частично упорядоченного множества N^3 определяется образами базисной тройки $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. При этом тройка должна отображаться на себя биективно. То есть всякий автоморфизм определяется некоторой подстановкой на трёх символах. Таким образом, при $n = 3$ предложение доказано. Для произвольного n доказательство проходит аналогично

$\square$

Из доказанного предложения вытекает результат для монотонных автоморфизмов сети Петри.

Теорема 1. Группа монотонных автоморфизмов $Autm(D)$ произвольной сети Петри D конечна. Если количество позиций сети Петри равно n, то группа $Autm(D)$ изоморфна некоторой подгруппе полной симметрической группы S_n на n символах. В частности, порядок группы $Autm(D)$ не превосходит $n!$.

Доказательство. Всякий монотонный автоморфизм является, по определению, изоморфизмом на себя частично упорядоченного множества состояний сети $S = N^n$ и, значит, задаётся подстановкой базисных векторов. При этом, кроме условий на порядок, автоморфизм должен удовлетворять условиям согласованности для переходов («условиям переноса»)

□

В [2] доказано, что группа автоморфизмов сети Петри может содержать подгруппу, изоморфную полной симметрической группе S_3 (и, аналогично, S_n). Отметим теперь, что указанная в теореме подгруппа состоит из монотонных автоморфизмов, другими словами, справедливо следующее уточнение теоремы из [2]:

Теорема 2. Всякая конечная группа изоморфно вкладывается в (конечную) группу *монотонных* автоморфизмов некоторой сети Петри

Список литературы

1. *Кузьмин, Е.В.* Структурированные системы переходов / Е.В. Кузьмин, В.А. Соколов. — М.: Физматлит, 2006.

2. *Белов, Ю.А.* Автоморфизмы систем переходов / Ю.А. Белов // Моделирование и анализ информационных систем. — 2007. — Том 14, №1. — С. 55-57.

3. *Плоткин, Б.И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем / Б.И. Плоткин. — М.: Наука, 1966.

4. *Емеличев, В.А.* Лекции по теории графов / В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, В.И. Тышкевич. — М.: Наука, 1990.

5. *Белов, Ю.А.* Корректные отображения систем с переходами / Ю.А. Белов // Моделирование и анализ информационных систем. — 2001. — Том 8, №1. — С. 47 — 49.

6. *Башкин, В.А.* Эквивалентность ресурсов в сетях Петри / В.А. Башкин, И.А. Ломазова. — М.: Научный мир, 2008.

7. *Скорняков, Л.А.* Элементы теории структур / Л.А. Скорняков. — М.: Физ-мат. лит., 1970.

Finite automorphism groups of Petri Nets

Belov J.A.

The notion of isomorphism and automorphism for labeled transition systems are defined, in particular monotonic isomorphism and automorphism — for well structured transition systems. It is shown, that any automorphism corresponds to a sertain bisimulation. It is prowed, that a group of monotonic automorphisms in any Petri Nets is finite.

Key words: group of automorphism, bisimulation of states, monotonic isomorphism