УДК 681.3:519.6

Д.В. Сысоев

ФОРМИРОВАНИЕ ДОСТИЖИМОСТИ В ИССЛЕДОВАНИЯХ ПРОИЗВОДСТВЕННО – ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Аннотация: Описываются основанные на использовании сетей Петри методы построения пространств достижимости, которые могут быть использованы в структурных исследованиях систем различного предметного назначения

Ключевые слова: структура, теория графов, сети Петри, достижимость

D.V. Sysoev

THE FORMATION OF REACHABILITY IN THE RESEARCH PRODUCTION AND ECONOMIC SYSTEMS

Abstract: Methods of creation of spaces of approachibility which can be used in structural researches of systems of various subject appointment are described based on use of networks of Petri

Keywords: structure, theory of counts, Petri's networks, approachibility

Свойства производственно - экономических систем (ПЭС) различного предметного назначения в значительной степени определяются составом и взаимоотношениями их элементов. Учет взаимоотношений позволяет выделять ядра конфликта, содружества и безразличия [1], и использовать их для исследования систем [1-5]. Одним из подходов, используемых в структурных исследованиях, является исследование множеств достижимости в графах системы, позволяющие определить области влияния одних элементов системы на другие. Однако традиционные методы теории графов [6] не позволяют получить корректное описание этих множеств, поскольку не учитывают динамику системы.

Ниже описывается подход к описанию множеств достижимости, основанный на использовании методов теории сетей Петри [7], аппарат маркировки которых обеспечивает учет динамики исследуемых ПЭС.

Структурная формализация систем. С точки зрения структурной организации систему формально можно представить тройкой [1,2]

$$\Psi = \{Y, \Omega, A\},$$

где $Y = \{Y_i, i = 1...N\}$ - множество элементов (подсистем) системы Ψ; $\Omega = (Y, F)$ - ориентированный граф с множеством вершин γ и множеством дуг $F \subset \gamma \times \gamma$ (дуга $f_{ij} \notin E$ отражает наличие связи элемента γ_i с элементом γ_j); $A =< L, R >$ – алгебра с множеством носителей L и сигнатурой R [8], описывающая механизм функционирования элементов системы Ψ.

С точки зрения функциональной организации систему можно описать множеством глобальных состояний

$$W = \{W^{\omega}, \omega = 1..\eta\}.$$

При этом в рамках данного исследования примем, что каждое глобальное состояние системы Ψ – это вектор локальных состояний отдельных элементов системы:

$$W^{\omega} = (w_i^{\omega}, i = 1...N).$$

С точки зрения информационной организации систему Ψ можно представить как

$$\Psi \subset X \times W \times Y,$$

где $X = \{x^{\varphi}, \varphi = 1...\Phi\}$ – множество входных параметров системы, $Y = \{y^{\tau}, \tau = 1...\mathrm{T}\}$ – множество выходных параметров системы.

Функциональная и информационная организация отдельных элементов в целом повторяет функциональную и информационную структуру ПЭС в целом: каждый элемент системы может быть представлен как

$$Y_i \subset X_i \times W_i \times Y_i,$$

где $X_i = \{x_i^k, k = 1...\varphi_i\}$ – множество входных параметров элемента γ_i, $Y_i = \{y_i^{\delta}, \delta = 1...\tau_i\}$ – множество выходных параметров элемента γ_i, $W_i = \{w_i^{\omega}, \omega = 1..\eta_i\}$ – множество локальных состояний элемента γ_i.

В таком случае, носитель L и сигнатура R алгебры A представляется в виде

$$L = \times_i (X_i \times W_i \times Y_i), \qquad R = \times_i R_i$$

где $R_i : X_i \times W_i \to Y_i$ – функция, которая называется глобальной реакцией элемента γ_i [9], $\times_z$ – символ декартова произведения для всех значений параметра z.

Осуществим аналогичную формализацию для каждого элемента γ_i так же как и в [10], представив его структуру в виде ориентированного графа

$$G_i = (V_i, E_i).$$

Граф $G_i \forall i = 1...N$ имеет множество вершин $V_i = \{x_i^k, k = 1...\varphi_i\} \bigcup \{w_i^{\omega}, \omega = 1..\eta_i\} \bigcup \{y_i^{\delta}, \delta = 1...\tau_i\}$ и множество дуг E_i, где $\{x_i^k, k = 1...\varphi_i\} \neq \varnothing$, $\{w_i^{\omega}, \omega = 1..\eta_i\} \neq \varnothing$, $\{y_i^{\delta}, \delta = 1...\tau_i\} \neq \varnothing_i$ – множества входов, состояний и выходов элемента γ_i.

Следует заметить, что при такой структуризации в графе G_i отсутствуют взаимосвязи внутри множеств $\{x_i^k, k = 1...\varphi_i\}$, $\{w_i^{\omega}, \omega = 1..\eta_i\}$, $\{y_i^{\delta}, \delta = 1...\tau_i\}$, а также смежные вершины из множеств $\{x_i^k, k = 1...\varphi_i\}$ и $\{y_i^{\delta}, \delta = 1...\tau_i\}$. Вершины $\{y_i^{\delta}, \delta = 1...\tau_i\}$ достижимы из вершин $\{x_i^k, k = 1...\varphi_i\}$ только через вершины множества состояний $\{w_i^{\omega}, \omega = 1..\eta_i\}$. При этом нахождение элемента в различных состояниях в общем случае инициализирует различный состав входных и выходных вершин.

Графы G_i в полной мере отражают представление о взаимосвязях входов и выходов в отдельных элементах системы Ψ.

Целостность системы Ψ определяется тем, что выходы одних элементов совпадают с входами других элементов. Это может быть описано специальными графами $G_i^\delta = (V_i^\delta, E_i^\delta)$, которые строятся следующим образом:

✓ графы G_i^δ строятся для каждого выхода y_i^δ каждого элемента γ_i системы Ψ, который тождественен хотя бы одному входу какого либо элемента этой системы;

✓ множество вершин V_i^δ графа G_i^δ составляют указанный выход y_i^δ и тождественные ему входы, а также еще одна вершина π_i^δ, которую будем называть проектором выхода y_i^δ;

✓ дуги E_i^δ графа G_i^δ направлены от вершины y_i^δ к проектору π_i^δ, а от него ко всем вершинам $V_i^\delta \setminus y_i^\delta$, т. е. входам, которым тождественна вершина y_i^δ.

Графы G_i^δ в полной мере отражают представление о взаимосвязях выходов и входов различных элементов системы Ψ.

Вышеизложенное, позволяет, наряду с графом системы $\Omega = (Y, F)$, отображающим укрупненную структуру взаимоотношений элементов ПЭС, рассматривать развернутый граф $G = (V, E)$ с вершинами $V = \{\bigcup_{(i,j)} x_i^k\} \bigcup \{\bigcup_{(i,\omega)} w_i^\omega\} \bigcup \{\bigcup_{(i,\delta)} y_i^\delta\} \bigcup \{\bigcup_{(i,\delta)} \pi_i^\delta\}$ и дугами $E = \{\bigcup_i f_i\} \bigcup \{\bigcup_{(i,\delta)} e_i^\delta\}$ позволяющими описывать взаимоотношение элементов системы Ψ на уровне структурно – параметрического представления множеств входов и выходов.

Важной частью исследований взаимоотношений в ПЭС является исследование достижимости в графе G. Использование традиционного определения достижимости в рассматриваемой случае не корректно. Действительно, в каждый момент времени система находится в одном состоянии и, следовательно, инициализированы в графе G только те вершины w_i^ω, которые соответствуют этому состоянию и, следовательно, следует рассматривать только те маршруты достижимости, которые содержат указанные вершины.

Ниже вводится новое понятие достижимости в графах и осуществляется исследование его свойств.

Понятие -достижимости. Обозначим ϑ – некоторое подмножество вершин графа $\Omega : \vartheta \subset V$. Введем ряд определений.

Определение 1. Вершина $\omega_j \in V\vartheta$–достижима из вершины $\omega_i \in V$ будем обозначать через $\omega_i d_\vartheta \omega_j$ или $(\omega_i, \omega_j) \in \vec{d}_\vartheta$, если в графе $G = (V, E)$ существует ориентированный путь из ω_i в ω_j не содержащий вершин из множества ϑ.

Множеством ϑ – достижимости $D_\vartheta(\omega_i)$ вершины ω_i называется множество ϑ –достижимых из нее вершин: $D_\vartheta(\omega_i) = \{\omega_j : \omega_i \vec{d}_\vartheta \omega_j\}$.

Множеством ϑ –достижимости $D_\vartheta(V_i)$ множества вершин V_i называется объединение множеств ϑ – достижимости всех вершин, входящих в $V_i : D_\vartheta(V_i) = \bigcup_k \{D_\vartheta(\omega_k) : \omega_k \in V_i\}$.

Определение 2. Вершина $\omega_j \in V\vartheta$– контрдостижима из вершины $\omega_i \in V$ будем обозначать через $\omega_i \overleftarrow{d}_\vartheta \omega_j$ или $(\omega_i, \omega j) \in \overleftarrow{d}_\vartheta$ если в графе $G^\gamma = (G^\gamma, E^\gamma)$ существует ориентированный путь из ω_j в ω_i, не содержащий вершин из множества ϑ.

Множеством ϑ – контрдостижимости $K_\vartheta(\omega_i)$ вершины ω_i называется множество ϑ – контрдостижимых из нее вершин: $K_\vartheta(\omega_i) = \{\omega_j : \omega_i \overleftarrow{d}_\vartheta \omega_j\}$.

Множеством ϑ – контрдостижимости $K_\vartheta(V_i)$ множества вершин V_i называется объединение множеств ϑ – контрдостижимости всех вершин, входящих в $V_i : K_\vartheta(V_i) = \bigcup_k \{K_\vartheta(\omega_k) : \omega_k \in V_i\}$.

Определение 3. Вершина $\omega_j \in V\vartheta$– взаимодостижима из вершины $\omega_i \in V$ будем обозначать через $\omega_i \overleftrightarrow{d}_\vartheta \omega_j$ или $(\omega_i, \omega_j) \in \overleftrightarrow{d}_\vartheta$, если она одновременно ϑ – достижима и ϑ – контрдостижима из этой вершины.

Множеством ϑ – взаимодостижимости $V_\vartheta(\omega_i)$ вершины ω_i называется множество ϑ – взаимодостижимых из нее вершин: $V(\omega_i) = \{\omega_j : \omega_j \overleftrightarrow{d}_\vartheta \omega_j\}$.

Множеством ϑ – взаимодостижимости $V_\vartheta(\omega_i)$ множества вершин V_i называется пересечение множеств ϑ – взаимодостижимости всех вершин, входящих в $V_i : V_\vartheta(V_i) = \bigcap_k \{V_\vartheta(\omega_k) : \omega_k \in V_i\}$.

Определения ϑ – достижимости, ϑ – контрдостижимости и ϑ – взаимодостижимости совпадают с обычными определениями достижимости, контрдостижимости и взаимодостижимости [4] в случае, если $\vartheta = 0$.

Пространства ϑ^ω - достижимости в системе Ψ. Исследуем алгебраическую структуру множеств ϑ – достижимости, ϑ – контрдостижимости и ϑ – взаимодостижимости. С этой целью по аналогией с [5, 11] построим последовательность множеств:

✓ $M^{d0} = \{D_{\vartheta}(\omega_i^{Y}), i = 1...N\}$ – множество областей ϑ – достижимости всех элементов системы;

✓ $M^{d1} \subset M^{d0}$ – объединение наименьшего покрытия M^{d0} и $\varnothing$;

✓ $M^{d2} \supset M^{d1}$ – множество всех пересечений и дополнений элементов M^{d1} между собой и со всеми пересечениями, а также пересечений между собой;

✓ $M^{d3} \subset M^{d2}$ – наименьшее покрытие M^{d2} непересекающимися элементами;

✓ $M^{d4} \supset M^{d3}$ – объединение $\varnothing$ и множества всех объединений M^{d3}.

Как известно, поле $G(2)$ – это множество, состоящее из двух элементов – 0 и 1, в котором определены две бинарные операции: « + » – сложение по *mod2*, « × » – умножение (в традиционном смысле).

Для произвольного графа G операция умножения на коэффициенты из поля $G(2)$ определяются следующим образом:

$$0 \cdot G = \varnothing, \quad 1 \cdot G = G .$$

Кольцевая сумма $\oplus$ произвольных графов G_1 и G_2 определяется как $G_1 \oplus G_2 = (G_1 \bigcup G_2) \setminus (G_1 \bigcap G_2)$ [12].

В описанных выше обозначениях верно следующее утверждение, доказательство которого аналогично доказательству теорем 1 и 2 в [5].

Теорема 1.

1) M^{d4} – векторное пространство по операции $\varnothing$ над полем $G(2)$;

2) M^{d3} – базис пространства M^{d4}.

3) Любой ориентированный цикл графа G^{γ} содержится только в одном элементе M^{d3}.

Нетрудно видеть, что утверждение, аналогичное теореме 1 верно и для множеств – ϑ – контрдостижимости.

Взаимоотношения элементов и ϑ^{ω} – достижимость. Перейдем к исследованию взаимоотношений элементов системы Ψ в пространстве достижимости.

В каждый момент времени каждый элемент системы, а, следовательно, и ПЭС в целом, находится в одном фиксированном состоянии, которое будем называть активным. С течением времени отдельные элементы могут перейти в другие состояния. Далее рассматривается функционирование системы γ в течение такого интервала времени, что смена активных состояний ни одного элемента не происходит.

Обозначим $W^{\omega} = (w_i^{\omega}, i = 1...N)$ – текущее состояние системы;

$\vartheta^{\varpi} = W \setminus W^{\varpi} \subset V$ – множество вершин графа G, соответствующих неактивным состояниям элементов системы Ψ.

Введем ряд определений.

Определение 4. Элемент γ_j системы Ψ достижим в состоянии W^{ϖ} (W^{ϖ} – достижим) из элемента γ_i, если $Y_j \subset D_{\vartheta_{\varpi}}(X_i)$.

Определение 5. Элемент γ_j системы Ψ контрдостижим в состоянии W^{ϖ} (W^{ϖ} – контрдостижим) из элемента γ_i, если $Y_j \subset K_{\vartheta_{\varpi}}(X_i)$

Определение 6. Элемент γ_j системы Ψ взаимодостижим в состоянии W^{ϖ} *(*W^{ϖ} – взаимодостижим) с элементом γ_i, если $Y_j \subset V_{\vartheta_{\varpi}}(X_i)$.

Динамические модели системы. Для построения пространства γ^{ϖ} - достижимости достаточно разработать механизм построения отдельных элементов этого пространства, т. е. множеств достижимости отдельных элементов системы Ψ. Это может быть осуществлено с помощью методов теории сетей Петри [7].

Заметим, что граф G является двудольным – множество его вершин разбивается на два множества взаимно несмежных вершин:

$$V^1 = \{\bigcup_{(i,k)} x_i^k\} \bigcup \{\bigcup_{(i,\delta)} y_i^{\delta}\},$$

$$V^2 = \{\bigcup_{(i,\varpi)} x_i^{\varpi}\} \bigcup \{\bigcup_{(i,\delta)} \pi_i^{\delta}\}.$$

Учитывая это обстоятельство, граф G может быть преобразован в сеть Петри $\xi = (V^1, V^2, \zeta, \varsigma)$,

где V^1 – множество позиций, V^2 – множество переходов, ζ – расширенная функция входов, отображающая состояния и проекторы в их входы, а выходы - в соответствующие им состояния и проекторы, ς – расширенная функция выходов, отображающая состояния и проекторы в их выходы, а входы - в использующие их состояния и проекторы.

Динамика ПЭС, т. е. процесс смены ее состояний в процессе функционирования, задается с помощью маркировок:

- ✓ выполнение перехода $w_i^{\varpi} \in V^2$ означает инициализацию элемента γ_i в состоянии w_i^{ϖ};
- ✓ выполнение перехода $\pi_i^{\varpi} \in V^2$ означает инициализацию проектора π_i^{ϖ};
- ✓ маркировка позиции (занесение фишки в позицию) - нахождение данного в результате функционирования элемента системы или проектора.

Однако непосредственно сеть Петри ξ использована быть не может. Для этого ее необходимо преобразовать в другую сеть – ξ_d, которая обладает следующими свойствами:

✓ обеспечивает отбор только тех состояний, которые включены во множество W^{ω};

✓ все переходы имеют в точности один вход: $\forall \omega_i \in V^2 \mid \zeta(\omega_i) \mid = 1$ (для проекторов это выполняется по определению).

Опишем локальную операцию преобразования сети Петри ξ для каждого перехода w_i^{ω}, соответствующего состоянию элемента системы. Данный переход вместе со смежными позициями может быть представлен в виде, изображенным на рис. 1.

Заменим переход w_i^{ω} новыми переходами $w_i^{w1}, w_i^{w2}, ..., w_i^{wK}$, где $K = \mid \zeta(w_i^{\omega}) \mid = 1$, так, чтобы выполнялись следующие условия:

✓ у каждого перехода $w_i^{\omega i}$ только одна входная позиция из множества $\zeta(w_i^{\omega})$;

✓ каждая позиция множества $\zeta(w_i^{\omega})$ только с одним из переходов $w_i^{\omega i}$;

✓ выходы всех переходов $w_i^{\omega i}$ совпадают с выходами перехода $w_i^{\omega} : \varsigma(w_i^{\omega i}) = \varsigma(w_i^{\omega})$

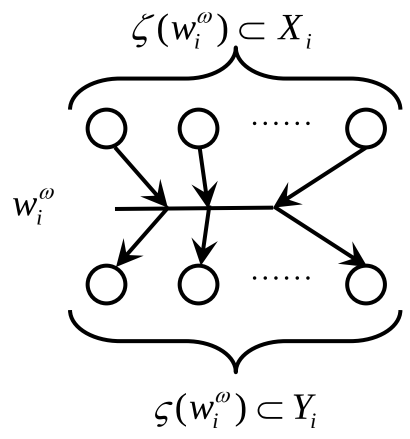

Рис. 1. Окрестность перехода сети Петри ξ, ассоциированного с состоянием w_i^{ω} элемента системы Ψ

Кроме того, для каждого состояния w_i^{ω} каждого элемента γ_i введем дополнительную входную позицию - индикатор $x(w_i^{\omega})$, которая будет входной для всех переходов $w_i^{\omega i}$.

Далее будем помечать те из позиций $x(w_i^{\omega})$, соответствующие состояния для которых включены во множество W^{ω}.

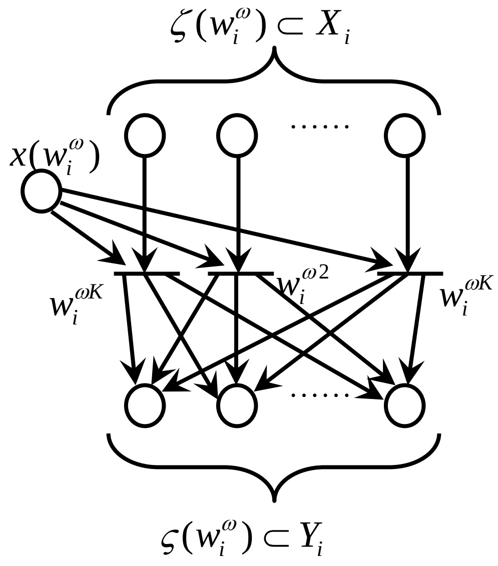

Рис. 2. Преобразованный вид окрестности перехода сети Петри ξ, ассоциированного с состоянием w_i^{ω} элемента системы Ψ

Построение пространств ϑ^{ω} – достижимости, ϑ^{ω} - контрдостижимости, ϑ^{ω} - взаимодостижимости. Для построения пространств ϑ^{ω} – достижимости может быть использовано следующее утверждение.

Теорема 2. Если выполнить следующие действия:

1) пометить позиции $x(w_i^{\omega})$ для всех состояний из множества W^{ω};

2) пометить произвольную входную позицию того состояния элемента γ_i которое включено в множество W^{ω};

3) выполнить все активные переходы;

то те элементы системы Ψ**,** переходы состояний w_i^{ω} которых будут выполнены, ϑ^{ω} - достижимы из элемента γ_i.

Доказательство непосредственно вытекает из описания сети Петри ξ_d и операций смены маркировок в сетях Петри.

Во-первых, условием выполнения перехода, соответствующего состоянию является попадание маркера в его входную позицию, что будет осуществляться в соответствии с определением проекторов.

Во-вторых, входные позиции $x(w_i^{\omega})$ тех состояний, которые не содержатся во множестве W^{ω} не могут быть маркированы.

Определение 7. Сеть Петри

$$\xi^* = (V^1, V^2, \zeta, \varsigma),$$

называется инверсная к сети Петри

$$\xi = (V^1, V^2, \zeta, \varsigma).$$

Фактически инверсная сеть отличается от исходной изменением направлений всех дуг на противоположные. Поэтому понятие ϑ^{ω} - достижимости в обычной сети эквивалентно понятию ϑ^{ω}- контрдостижимости в инверсной сети. В связи с этим действия, перечисленные в теореме 2 с инверсной сетью Петри ξ_d^* позволят построить множество ϑ^{ω} - контрдостижимости элемента γ_i.

Пересечение множеств ϑ^{ω} - достижимости и ϑ^{ω}- контрдостижимости элемента γ_i представляет собой множество ϑ^{ω} - взаимодостижимости этого элемента. Это множество всегда не пусто, т. к. содержит по крайней мере сам элемент γ_i.

Список использованных источников

1. Сысоев В.В. Конфликт. Сотрудничество. Независимость. Системное взаимодействие в структурно-параметрическом взаимодействии. – М.: Московская академия экономики и права, 1999. – 151 с.
2. Сысоев В.В. Приведенные системы и условия возникновения частичного конфликта // Вестник ВГТА.- Воронеж: ВГТА, 2000. - № 5. - с. 27 - 35.
3. Сысоев В.В. Структурные и алгоритмические модели автоматизированного проектирования производства изделий электронной техники. – Воронеж: Воронежский технологический институт, 1993. – 207 с.
4. Сысоев В.В. Взаимные системные отношения в структурно-параметрическом представлении. // Кибернетика и технологии XXI века. Доклады международной научно-технической конференции. – Воронеж, 2000, с. 134 - 144.
5. Сысоев В.В. Исследование конфликтных взаимодействий в процессе синтеза управляющих воздействий / В.В. Сысоев, В.В. Меньших // Кибернетика и технологии XXI века. Доклады международной научно-технической конференции. – Воронеж, 2000, с. 145-151.
6. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. - 432 с.
7. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. – М.: Мир, 1984. – 264 с.
8. Сысоев Д.В. Модель поиска информации о конкурентах в информационных сетях / Д.В. Сысоев, О.В. Курипта // Вестник Воронежского государственного технического университета. –Воронеж: ВГТУ. 2011. – Том 7. -№4. –С. 165-167.
9. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: математические основы. – М.: Мир, 1978. – 311 с.
10. Шильяк Д.Д. Децентрализованное управление сложными систе-

мами. - М.: Мир, 1994. – 576 с.
11. Сысоев В.В. Структурные исследования графов систем и их приложения к декомпозиции задачи исследования конфликтов / В.В. Сысоев, В.В. Меньших // Теория конфликта и ее приложения. Материалы I Всероссийской научно-технической конференции. – Воронеж: ВГТА, 2000, с. 21-23.
12. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. – М.: Мир, 1984. – 455с.