Модел. и анализ информ. систем. Т. **19**, № **4** (2012) 78–86

УДК 519.7

Обобщенные асинхронные системы

Кудряшова Е.С., Хусаинов А.А.[1]

Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет

e-mail: ekatt@inbox.ru

получена 9 марта 2012

Ключевые слова: асинхронные автоматы, асинхронные системы, системы переходов с отношением независимости, временные сети Петри

Работа посвящена математической модели параллельной системы, частным случаем которой является асинхронная система. В ней введены *дистрибутивные асинхронные автоматы.* Доказано, что сети Петри и системы переходов с отношением независимости можно рассматривать как дистрибутивные асинхронные автоматы. Стандартным образом, посредством отображения, сопоставляющего событиям временные интервалы, определяются *временные* дистрибутивные асинхронные автоматы. Доказано, что временные дистрибутивные асинхронные автоматы обобщают временные сети Петри и асинхронные системы.

Введение

Для исследования поведения параллельных процессов в задачах верификации применяются временные сети Петри [1]-[4], временные структуры событий [5], временные системы переходов [6], временные системы переходов с независимостью [7]. Они применяются также для разработки программного обеспечения [8] и исследования природных процессов [9]. Несмотря на то, что сети Петри являются очень удобными математическими моделями параллельных вычислительных систем, существуют задачи, для решения которых нужны более общие временные модели. Например, в работе [10] для решения задачи о читателях и писателях применяются асинхронные системы. В то же время асинхронные системы, в которых каждому переходу ставится в соответствие интервал времени, не являются обобщением временных сетей Петри, ибо отношение независимости на переходах сети Петри не удовлетворяет аксиомам асинхронной системы. В данной работе введено обобщение асинхронных систем, позволяющее определить временные системы, частным случаем которых являются временные сети Петри.

[1]Работа выполнена в рамках программы стратегического развития государственных образовательных учреждений высшего профессионального образования, № 2011-ПР-054

1. Дистрибутивные асинхронные автоматы

Введем математическую модель параллельных систем, обобщающую асинхронную систему М. Беднарчука [11] и докажем, что класс этих моделей включает автоматы с отношением независимости, введенные Е. Губо [12].

Определение 1. *Дистрибутивным асинхронным автоматом называется пятерка*

$$\mathcal{A} = (S, s_0, E, \mathcal{I}, Tran),$$

состоящая из множеств S и E, элемента $s_0 \in S$, отношения $Tran \subseteq S \times E \times S$ и семейства антирефлексивных симметричных отношений $\mathcal{I} = (I_s)_{s\in S}$, $I_s \subseteq E \times E$. Должны быть выполнены следующие условия

(i) $(s, a, s') \in Tran$ & $(s, a, s'') \in Tran \Rightarrow s' = s''$;

(ii) для любых $s \in S$, $(a_1, a_2) \in I_s$, $(s, a_1, s_1) \in Tran$ и $(s_1, a_2, s') \in Tran$ существует такое $s_2 \in S$, что $(s, a_2, s_2) \in Tran$ и $(s_2, a_1, s') \in Tran$ (см. рис. 1).

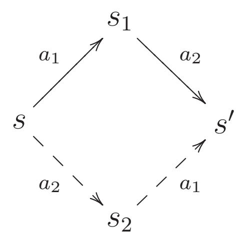


Рис. 1. Аксиома (ii) для асинхронных автоматов

Пример 1. *Всякую асинхронную систему $(S, s_0, E, I, Tran)$ можно рассматривать как дистрибутивный асинхронный автомат, полагая $I_s = I$ для всех $s \in S$.*

В работе Губо [12, Definition 3] было введено определение автомата с отношением независимости. В работе [13] были установлены интересные связи этой модели с сетями Петри.

Определение Губо отличается от данного выше тем, что условие (ii) заменяется следующим:

(ii)' Для любых $(a_1, a_2) \in I_s$ существуют $s_1, s_2, s' \in S$, для которых $(s, a_1, s_1) \in Tran$, $(s_1, a_2, s') \in Tran$, $(s, a_2, s_2) \in Tran$ и $(s_2, a_1, s') \in Tran$ (см. рис.1).

Пример асинхронной системы $S = \{s_0, s_1, s_2\}$, $E = \{a_1, a_2\}$, $I = \{(a_1, a_2), (a_2, a_1)\}$, имеющей переходы, изображенные на рис. 2, показывает, что не всякая асинхронная система будет автоматом с отношением независимости. Поэтому определение Губо не является более широким, чем наше.

Широкий класс дистрибутивных асинхронных автоматов, не являющихся автоматами с отношением независимости, можно построить следующим образом:

Если в дистрибутивном асинхронном автомате $\mathcal{A} = (S, s_0, E, \mathcal{I}, Tran)$ существуют состояния $s, s_1, s_2 \in S$, пара событий $(a_1, a_2) \in I_s$, пара переходов $(s, a_1, s_1) \in$

$$\begin{tikzcd}
s_0 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "a_2"'] & s_1 \\
s_2 &
\end{tikzcd}$$

Рис. 2. Асинхронная система, не автомат с отношением независимости

$Tran$ и $(s, a_2, s_2) \in Tran$, для которых не существует состояний $s' \in S$, допускающих переходы (s_1, a_2, s') или (s_2, a_1, s'), то $\mathcal{A}$ не будет удовлетворять аксиоме (ii)'. В этом случае мы будем говорить, что *в состоянии s нарушена конфлюэнтность*. Всякий дистрибутивный асинхронный автомат, имеющий хотя бы одно состояние, в котором нарушена конфлюэнтность, не будет удовлетворять аксиоме (ii)' и, значит, не будет автоматом с отношением независимости.

Например, дистрибутивный асинхронный автомат $\mathcal{A} = (S, s_0, E, \mathcal{I}, Tran)$, состоящий из множества состояний $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$, множества событий $E = \{a_1, a_2\}$, отношений независимости $I_{s_0} = I_{s_1} = \{(a_1, a_2), (a_2, a_1)\}$, $I_{s_2} = I_{s_3} = I_{s_4} = \emptyset$, переходы которого показаны на диаграмме

$$\begin{tikzcd}
s_0 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "a_2"'] & s_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "a_2"] & s_2 \\
s_3 \arrow[r, "a_1"'] & s_4 &
\end{tikzcd}$$

не будет автоматом с отношением независимости, ибо в s_1 нарушена конфлюэнтность.

Следующее утверждение показывает, что всякий автомат с отношением независимости будет дистрибутивным асинхронным автоматом.

Теорема 1. *Всякий автомат $(S, s_0, E, \mathcal{I}, Tran)$ с отношением независимости удовлетворяет аксиомам (i)-(ii) и, значит, является дистрибутивным асинхронным автоматом.*

Доказательство. Пусть для пятерки $(S, s_0, E, \mathcal{I}, Tran)$ выполнены условия (i) и (ii)'. Докажем (ii). С этой целью рассмотрим $s \in S$ и пару $(a_1, a_2) \in I_s$. Пусть $(s, a_1, s_1) \in Tran$ и $(s_1, a_2, s') \in Tran$. В силу (ii)' существуют $r_1, r_2, r' \in S$, для которых $(s, a_1, r_1) \in Tran$, $(r_1, a_2, r') \in Tran$, $(r, a_2, r_2) \in Tran$ и $(r_2, a_2, r') \in Tran$.

$$\begin{tikzcd}
 & s_1 \arrow[dr, "a_2"] & \\
s \arrow[ur, "a_1"] \arrow[r, dashed, "a_1"'] \arrow[d, dashed, "a_2"'] & r_1 \arrow[d, dashed, "a_2"] & s' \\
r_2 \arrow[r, dashed, "a_1"'] & r' &
\end{tikzcd}$$

В силу условия (i) будет $r_1 = s_1$ и $r' = s'$. Отсюда следует существование переходов $(s, a_2, r_2) \in Tran$ и $(r_2, a_1, s') \in Tran$. $\square$

2. Сети Петри как дистрибутивные асинхронные автоматы

Докажем, что сети Петри с отношением независимости, неявно использованным в работах [1]-[4], [14] при построении временных сетей Петри, можно рассматривать как дистрибутивные асинхронные автоматы.

Напомним, что сеть Петри определяется как пятерка $(P, T, pre, post, M_0)$, состоящая из конечных множеств P и T, функций $M_0 : P \to \mathbb{N}$, $pre : T \to \mathbb{N}^P$, $post : T \to \mathbb{N}^P$. Здесь $\mathbb{N}^P$ обозначает множество всех функций $P \to \mathbb{N}$. Элементы $p \in P$ называются *местами*, $t \in T$ – *переходами*, $M \in \mathbb{N}^P$ – *маркировками*, а M_0 – *начальной маркировкой*. Определим отношение порядка на $\mathbb{N}^P$, полагая $M \leqslant M'$, если для всех $p \in P$ верно $M(p) \leqslant M'(p)$. Сумму и разность функций определим как $(M \pm M')(p) = M(p) \pm M'(p)$. Для $M, M' \in \mathbb{N}^P$ и $t \in T$ запись $M \xrightarrow{t} M'$ будет означать, что выполнены следующие два условия

1. $M \geqslant pre(t)$;
2. $M' = M - pre(t) + post(t)$.

В этом случае мы будем говорить, что маркировка M' получена из M с помощью срабатывания перехода t.

Пусть $(P, T, pre, post, M_0)$ – сеть Петри. Обозначим ${}^\bullet t = \{p \in P : pre(t)(p) \neq 0\}$. Для произвольной маркировки $M \in \mathbb{N}^P$ определим отношение

$$I_M = \{(t_1, t_2) \in T \times T : M \geqslant pre(t_1) \;\&\; M \geqslant pre(t_2) \;\&\; {}^\bullet t_1 \cap {}^\bullet t_2 = \emptyset\}. \qquad (1)$$

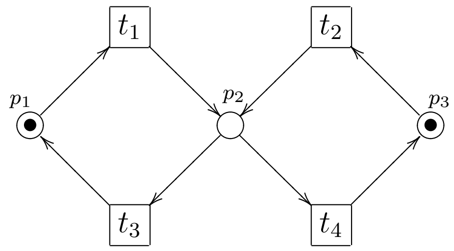
Теорема 2. *Сеть Петри $(P, T, pre, post, M_0)$ определяет дистрибутивный асинхронный автомат $(S, s_0, E, \mathcal{I}, Tran)$, $S = \mathbb{N}^P$, $E = T$, $s_0 = M_0$, $Tran = \{(M, t, M') \in \mathbb{N}^P \times T \times \mathbb{N}^P :$ существует $M \xrightarrow{t} M'\}$, для которого I_M определяется по формуле (1).*

Доказательство. Если $(t_1, t_2) \in I_M$, то существуют $M \xrightarrow{t_1} M_1$ и $M \xrightarrow{t_2} M_2$. Поэтому достаточно показать, что для срабатываний переходов

$$\begin{tikzcd}
& M_1 \arrow[dr, "t_2"] & \\
M \arrow[ur, "t_1"] \arrow[dr, "t_2"'] & & M' \\
& M_2 &
\end{tikzcd}$$

будет иметь место $M_2 \xrightarrow{t_1} M'$. Поскольку переход t_2 не влияет на фишки, находящиеся во входных местах перехода t_1, то $M_2 \geqslant pre(t_1)$. Имеет место $M_2 - pre(t_1) + post(t_1) = M - pre(t_2) + post(t_2) - pre(t_1) + post(t_1) = M_1 - pre(t_2) + post(t_2) = M'$. Стало быть, $M_2 \xrightarrow{t_1} M'$. $\square$

В качестве примера рассмотрим следующую ниже сеть Петри, будем обозначать ее через Ω:



Множество достижимых маркировок состоит из $M_0(1,0,1)$, $M_1(0,1,1)$, $M_2(1,1,0)$, $M_3(0,2,0)$, $M_4(2,0,0)$, $M_5(0,0,2)$. На рис. 3 показан дистрибутивный асинхронный автомат, который определяет данная сеть Петри.

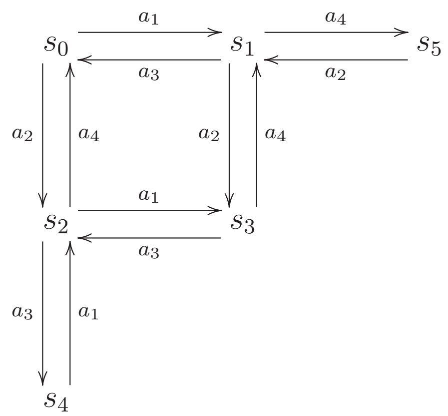


Рис. 3. Дистрибутивный асинхронный автомат для сети Петри Ω

Мы видим, что маркировкам сети Петри M_i соответствуют состояния дистрибутивного асинхронного автомата s_i, $0 \leqslant i \leqslant 5$, а переходам сети t_i соответствуют действия a_i, $i \in \{1,4\}$. Отношения I_s для данного автомата будут равны:

$$I_{s_0} = \{(a_1,a_2),(a_2,a_1)\}, I_{s_1} = \{(a_2,a_3),(a_3,a_2),(a_2,a_4),(a_4,a_2)\},$$
$$I_{s_2} = \{(a_1,a_3),(a_3,a_1),(a_1,a_4),(a_4,a_1)\}, I_{s_3} = \emptyset, I_{s_4} = \emptyset, I_{s_5} = \emptyset.$$

Замечание 1. *Если в качестве состояний сети Петри рассматривать маркировки $M : T \to \mathbb{N}$, удовлетворяющие для всех $p \in P$ неравенству $M(p) \leqslant 1$, то мы получим так называемую* элементарную *сеть Петри. Элементарная сеть Петри называется также C/E-сетью, а обычная – P/T-сетью. Всякую элементарную сеть Петри можно превратить в безопасную сеть, имеющую те же переходы, в которой недостижимы маркировки M, не удовлетворяющие неравенству $M(p) \leqslant 1$. Поэтому мы можем рассматривать элементарную сеть Петри как обычную. В частности, если для сети Петри Ω отбросить состояния s_3, s_4, s_5, то мы получим элементарную сеть Петри. Она будет определять дистрибутивный асинхронный автомат, с $I_{s_0} = \{(a_1,a_2),(a_2,a_1)\}$, $I_{s_1} = I_{s_2} = \emptyset$, который не будет автоматом с отношением независимости в смысле Губо [12]. Заметим,* *что в работах [1]-[3] изучаются элементарные временные сети Петри, а в работах [8], [9], [14] – просто временные сети Петри.*

3. Временные дистрибутивные асинхронные автоматы

Обобщим определение временной сети Петри, данное в работе [14]. Обозначим через $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ множество всех неотрицательных вещественных чисел.

Определение 2. *Временным дистрибутивным асинхронным автоматом называется дистрибутивный асинхронный автомат*

$$\mathcal{A} = (S, s_0, E, \mathcal{I}, Tran),$$

вместе с парой функций $eft : E \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $lft : E \to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \cup \{\infty\}$, удовлетворяющих для всех $a \in E$ неравенству $eft(a) \leqslant lft(a)$. Временной дистрибутивный асинхронный автомат обозначим через $(\mathcal{A}, eft, lft)$.

Введем *временные состояния*. С этой целью определим частичное отображение $S \times E \stackrel{\cdot}{\to} S$, $(s, a) \mapsto s \cdot a$, полагая $s \cdot a = s'$, если существует такой $s' \in S$, что $(s, a, s') \in Tran$. В противном случае значение $s \cdot a$ не определено. Стандартным образом, добавив к S состояние "зависания" $*$, превратим это частичное отображение в тотальное $\cdot : S \times E \to S \sqcup \{*\}$, полагая $s \cdot a = s'$, если $(\exists s' \in S)(s, a, s') \in Tran$, и $s \cdot a = *$, в других случаях.

Определение 3. *Временным состоянием временного дистрибутивного асинхронного автомата $(\mathcal{A}, eft, lft)$ называется пара (s, h), состоящая из $s \in S$ и функции $h : E \to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \cup \{\#\}$, таких, что*

1. $s \cdot a \in S \Rightarrow h(a) \leqslant lft(a)$;
2. $s \cdot a = * \Rightarrow h(a) = \#$.

Каждое действие $a \in E$ имеет "часы". В начале работы временное состояние равно (s_0, h_0), где $h_0(a) = 0$, если существует $s' \in S$ и переход $s \xrightarrow{a} s'$.

Определение 4. *Будем писать $(s, h) \xrightarrow{a} (s', h')$ и говорить, что действие $a \in E$ переводит временное состояние (s, h) в (s', h'), если*

(1) $s \cdot a = s' \neq * \ \&\ eft(a) \leqslant h(a)$;

(2) $(\forall b \in E)\ h'(b) = \begin{cases} \# & \text{если } s' \cdot b = * \\ h(b) & \text{если и только если } s' \cdot b \neq * \ \&\ (a, b) \in I_s \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$

Определение 5. *Для $\tau \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ будем писать $(s, h) \xrightarrow{\tau} (s', h')$ и говорить, что состояние (s, h) заменяется состоянием (s', h') при истечении времени τ, если*

(1) $s' = s$;

(2) $(\forall a \in E)\ h(a) \neq \# \Rightarrow h(a) + \tau \leqslant lft(a)$;

(3) $(\forall a \in E)\ h'(a) = \begin{cases} \# & \text{если } s' \cdot a = * \\ h(a) + \tau & \text{если } s' \cdot a \neq *. \end{cases}$

Легко видеть, что определения 3–5 обобщают определение временного состояния и его изменения, введенного для сетей Петри в работе [14].

Рассмотрим, например, асинхронную систему, состоящую из двух независимых действий a_1 и a_2 и четырех состояний

$$\begin{tikzcd} s_0 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "a_2"'] & s_1 \arrow[d, "a_2"] \\ s_2 \arrow[r, "a_1"] & s_3 \end{tikzcd}$$

для которых известны $eft(a_i)$ и $lft(a_i)$, $i \in \{1, 2\}$. Вычислим минимальное время выполнения операций, приводящих к состоянию s_3. Временные состояния (s, h) будем рассматривать как тройки (s_i, τ_1, τ_2). Пусть $eft(a_1) \leqslant eft(a_2)$. Тогда возможен следующий путь выполнения

$$(s_0, 0, 0) \stackrel{eft(a_1)}{\longrightarrow} (s_0, eft(a_1), eft(a_1)) \stackrel{a_1}{\to} (s_1, \#, eft(a_1)) \\ \stackrel{eft(a_2)-eft(a_1)}{\longrightarrow} (s_1, \#, eft(a_2)) \stackrel{a_2}{\to} (s_3, \#, \#) \quad (2)$$

Легко видеть, что полученное время, равное сумме $eft(a_1) + eft(a_2) - eft(a_1)$, будет минимальным. Следовательно, в общем случае минимальное время будет равно $max(eft(a_1), eft(a_2))$.

Вычислим максимальное время, предполагая, что $lft(a_1) \leqslant lft(a_2)$.

$$(s_0, 0, 0) \stackrel{lft(a_1)}{\longrightarrow} (s_0, lft(a_1), lft(a_1)) \stackrel{a_1}{\to} (s_1, \#, lft(a_1)) \\ \stackrel{lft(a_2)-lft(a_1)}{\longrightarrow} (s_1, \#, lft(a_2)) \stackrel{a_2}{\to} (s_3, \#, \#) \quad (3)$$

Получаем максимальное время выполнения действий $max(lft(a_1), lft(a_2))$.

Замечание 2. *Мы благодарны рецензенту, который указал нам, что семейство отношений $I_M \subseteq T \times T$, состоящее для каждой маркировки M из множества пар*

$$I_M = \{(t_1, t_2) \in T \times T \mid M \geqslant pre(t_1) + pre(t_2)\},$$

будет определять дистрибутивный асинхронный автомат, строящийся как в теореме 2. В результате мы получаем новую математическую модель для изучения временных свойств процессов, описанных сетями Петри.

Заключение

В данной статье были введены дистрибутивные асинхронные автоматы. Это позволило обобщить временные сети Петри на асинхронные системы и автоматы с отношением независимости. Введены определения временных состояний и действия событий на этих состояниях, обобщающие соответствующие определения для сетей Петри.

Список литературы

1. Покозий Е.А. *Метод верификации свойств параллелизма временных сетей Петри*: Препринт № 61 / Институт Систем Информатики СО РАН. Новосибирск, 1999. 28 с.

2. Вирбицкайте И.Б., Покозий Е.А. Использование техники частичных порядков для верификации временных сетей Петри //*Программирование*. 1999. №1. С. 28–41.

3. Вирбицкайте И.Б., Покозий Е.А. Метод параметрической верификации поведения временных сетей Петри //*Программирование*. 1999. №4. С. 16–29.

4. Penczek W., Potrola A. *Advances in Verification of Time Petri Nets and Timed Automata*. Poland : Springer, 2006.

5. Вирбицкайте И.Б., Дубцов Р.С. Семантические области временных структур событий // *Программирование*. 2008. №3. С. 3–20.

6. Henzinger T.A., Manna Z., Pnueli A. Timed transition systems // G. Goos, J. Hartmanis, editor, *Real-Time: Theory in Practice*, Lecture Notes in Computer Science 600, Springer-Verlag, 1991. P. 226–251.

7. Дубцов Р.С. Теоретико-категорные исследования временных систем переходов с независимостью // IX Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, г. Кемерово, 28-30 октября 2008 года http://www.ict.nsc.ru/ws/YM2008/14295/dubtsov.pdf

8. Кудряшова Е.С. Временные сети Петри для мониторинга группы виртуальных машин // Современное состояние естественных и технических наук: материалы IV Международной науч.-практ. конф., Москва, 10 октября 2011 г. М.: Научный журнал “Естественные и технические науки” и изд-во “Спутник+”, 2011. С. 80–86.

9. Popova-Zeugmann L. Quantitative evaluation of time-dependent Petri nets and applications to biochemical networks // *Natural Computing*. 2011. 10, N3. P. 1017–1043.

10. Хусаинов А.А. Математическая модель задачи о читателях и писателях // Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления: материалы Международной науч.-практ. конф., Хабаровск, 4-6 октября 2011 г. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2011. С. 327–332.

11. Bednarczyk M.A. *Categories of Asynchronous Systems,* Ph.D. thesis, University of Sussex, report 1/88, 1988.
http://www.ipipan.gda.pl/ ~marek

12. Goubault E. Labeled cubical sets and asynchronous transitions systems: an adjunction // Preliminary Proceedings CMCIM'02, 2002. http://www.lix.polytechnique.fr/~goubault/papers/cmcim02.ps.gz

13. Goubault E., Mimram S. *Formal Relationships Between Geometrical and Classical Models for Concurrency,* Preprint, arXiv:1004.2818v1 [cs.DC], Cornell Univ., New York, 2010. 15p. http://arxiv.org/abs/1004.2818v1

14. Bachmann J.P., Popova-Zeugmann L. Time-independent Liveness in Time Petri Nets *Fundamenta Informaticae*, 102 (2010). P. 1–17 http://www2.informatik.hu-berlin.de/ popova/Bachm-Popova.pdf

Generalized Asynchronous Systems

Kudryashova E.S., Khusainov A.A.

Keywords: asynchronous automata, asynchronous systems, transition systems with independence, time Petri nets

The paper consider a mathematical model of a concurrent system, the special case of which is an asynchronous system. Distributed asynchronous automata are introduced here. It is proved that Petri nets and transition systems with independence can be considered as distributed asynchronous automata. Time distributed asynchronous automata are defined in a standard way by correspondence which relates events with time intervals. It is proved that the time distributed asynchronous automata generalize time Petri nets and asynchronous systems.

Сведения об авторах:
Кудряшова Екатерина Сергеевна
ФГБОУ ВПО "Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет", аспирант;
Хусаинов Ахмет Аксанович
ФГБОУ ВПО "Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет", профессор, доктор физико-математических наук