

МЕТОДЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА СИСТЕМ И СЕТЕЙ ИНФОРМАЦИОННОГО ОБМЕНА

Рассматриваются методы анализа систем и сетей информационного обмена с использованием сетей Петри. Приводятся примеры анализа систем и сетей аналитическим методом и методом имитационного моделирования в среде математического пакета MathCad.

Анализ систем информационного обмена предполагает построение математических (имитационных) моделей. Отождествляя сообщение или документ в системе с заявкой, передачу (обработку) с обслуживанием, систему информационного обмена можно рассматривать как сеть массового обслуживания (СеМО), содержащую узлы или системы массового обслуживания (СМО). В случае анализа однофазных СМО используется аппарат дискретных и непрерывных цепей Маркова [1, 2]. Как правило, цепи Маркова изображают в виде ориентированного графа (диаграммы переходов). Если одна заявка последовательно обслуживается в системе с несколькими серверами, то имеет место многофазная СМО или СеМО. Разработка математической модели СеМО является более сложной задачей. В модели СеМО требуется отобразить топологию, маршруты перемещений и логику взаимодействия отдельных сообщений (требований).

На рисунке 1 приведена модель системы информационного обмена в виде временной сети Петри [3].

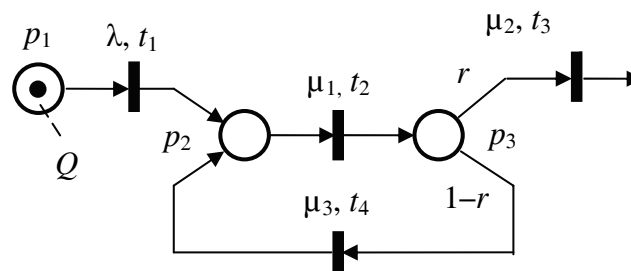


Рис. 1 Модель информационного обмена

Система информационного обмена является СеМО и содержит два узла. Переходы в сети Петри t_1, t_2, t_3, t_4 соответствуют источникам сообщений и серверам обслуживания. Позиции сети Петри p_1, p_2, p_3 соответствуют накопителям сообщений. В позиции p_1 размещено Q маркеров. Каждый маркер соответствует одному сообщению. Посредством (p_1, t_1) представлено поступление сообщения на передачу, (p_2, t_2) – передача сообщения по каналу связи, (p_3, t_3) – доставка сообщения адресату, (p_3, t_4) – запрос на повторную передачу документа по каналу связи. Система характеризуется показательным законом обслуживания в узлах и имеет следующие параметры:

- интенсивность пуассоновского потока сообщений на входе системы информационного обмена λ ;
- среднее время передачи сообщения по каналу связи системы информационного обмена $\tau_1 = 1/\mu_1$;
- среднее время доставки принятого сообщения адресату системы информационного обмена $\tau_2 = 1/\mu_2$;
- среднее время генерации запроса на повторную передачу сообщения по каналу связи $\tau_3 = 1/\mu_3$.

В соответствии с моделью на рисунке 1 можно составить систему дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы информационного обмена (СеМО):

$$\begin{cases} f_1'(t) = -\lambda f_1(t) + \mu_2 r f_3(t); \\ f_2'(t) = -\mu_1 f_2(t) + \lambda f_1(t) + \mu_3 (1-r) f_3(t); \\ f_3'(t) = -\mu_2 r f_3(t) + \mu_1 f_2(t) + \mu_3 (1-r) f_3(t), \end{cases} \quad (1)$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ – вероятности отсутствия сообщения в системе, передачи сообщения по каналу связи, доставки сообщения адресату соответственно. Система дифференциальных уравнений может быть решена средствами любого математического пакета, в том числе MathCad. Значения финальных вероятностей не зависят от начальных условий. Графики переходного процесса в СеМО в случае $\lambda = 0,8$ [1/мин], $\mu_1 = 10$ [1/мин], $\mu_2 = 1$ [1/мин], $\mu_3 = 5$ [1/мин] и $r = 0,99$ приведены на рисунке 2.

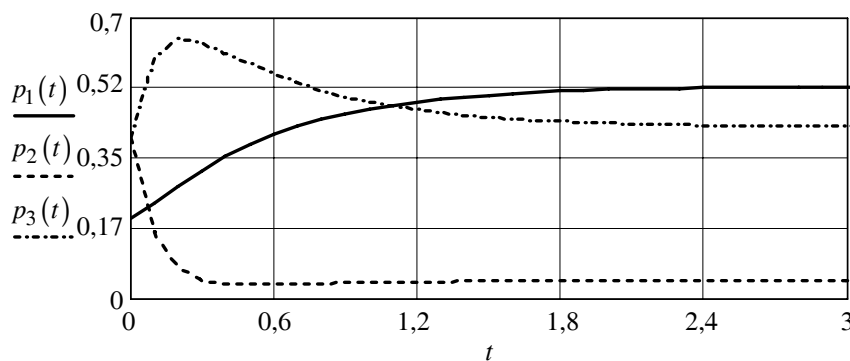


Рис. 2 График переходного процесса в системе

В соответствии с предлагаемым аналитическим методом анализа среднее время пребывания сообщения в системе информационного обмена рассчитывается по формуле

$$T_c = f_2(t_k) / ((\mu_1^* - \lambda) f_1(t_k)) + f_3(t_k) / ((\mu_2 - \lambda) f_1(t_k)) + 1/\mu_1^* + 1/\mu_2 ,$$

где μ_1^* – интенсивность передачи сообщений по каналу связи с учетом обратной связи в сети; t_k – окончание исследуемого временного интервала.

Интенсивность μ_1^* оценивается по следующей формуле:

$$1/\mu_1^* = 1/\mu_1 + \sum_{i=1}^n [(\mu_1 + \mu_3/\mu_1\mu_3)](1-r)^i.$$

При $\lambda = 0,8$ [1/мин], $\mu_1 = 20$ [1/мин], $\mu_2 = 1$ [1/мин], $\mu_3 = 5$ [1/мин] и $r = 0,99$ среднее время пребывания сообщения в системе информационного обмена $T_c = 5,15$ мин, среднее время ожидания обслуживания сообщения в системе информационного обмена $W_c = 4,047$ мин.

Состояние узла в СеМО, например узла (p_2, t_2) , в момент времени t можно определить как абстрактное множество C_t , для которого функция $\rho_t : C_t \times X_t \rightarrow Y_t$ является реакцией системы в момент времени t . Множество всех реакций узла ρ_t ,

$$\bar{\rho} = \{\rho_t : C_t \times X_t \rightarrow Y_t \text{ \& } t \in T\},$$

составляет *семейство реакций узла*, а множество $\bar{C} = \{C_t : t \in T\}$ – семейство состояний узла. Функция $\varphi_{tt'}$ является функцией перехода состояний на отрезке времени $\{t^* : t \leq t^* < t'\}$. Множество $\bar{\varphi}_{tt'}$,

$$\bar{\varphi} = \{\varphi_{tt'} : C_t \times X_{tt'} \rightarrow C_{t'} \text{ \& } t, t' \in T \text{ \& } t' > t\},$$

составляет семейство функций перехода состояний.

Чтобы определить семейства функций $\bar{\rho}$, $\bar{\varphi}_{tt'}$, рассмотрим временные диаграммы СМО типа М/М/1: 2, приведенные на рисунке 1.

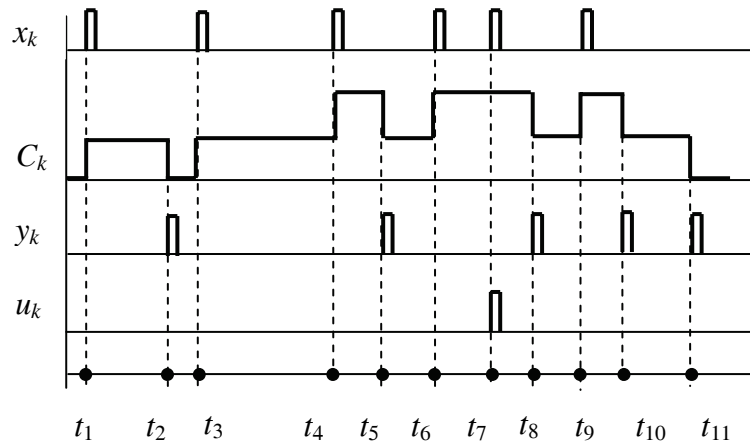


Рис. 3 Временная диаграмма СМО

Множество моментов времени, связанных с поступлением требований в СМО $M_1 = \{t_1, t_2, t_4, t_6, t_7, t_9\}$. Множество моментов времени, когда об-

служенные требования покидают СМО $M_2 = \{t_2, t_5, t_8, t_{10}, t_{11}\}$. Множество моментов времени блокировки требований $M_3 = \{t_7\}$. Множество моментов поступления требований $M_4 = M_1 \setminus M_3$.

Зададим поступление заявок на вход СМО с помощью δ -функции Дирака:

$$x_k = x_k(t) = \begin{cases} \delta_x(t - t_k), & \text{если } t_k \in M_1; \\ 0, & \text{если } t_k \notin M_1. \end{cases} \quad (1)$$

Моменты окончания обслуживания требований в СМО:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k(t) = \begin{cases} \delta_\varepsilon(t - t_k), & \text{если } t_k \in M_2; \\ 0, & \text{если } t_k \notin M_2. \end{cases} \quad (2)$$

Число заявок, поступивших на вход СМО, определяется соотношением

$$\alpha(t) = \int_0^t \sum x_k(\tau) [t_k \in M_4] d\tau. \quad (3)$$

Число заявок, покинувших СМО после обслуживания, определяется соотношением

$$\beta(t) = \int_0^t \sum \varepsilon_k(\tau) [t_k \in M_2] d\tau. \quad (4)$$

Число требований, находящихся в СМО в момент времени t (состояние системы),

$$C_t = \int_0^t \left(\sum x_k(\tau) [t_k \in M_4] - \sum \varepsilon_k(\tau) [t_k \in M_2] \right) d\tau. \quad (5)$$

С учетом выражений (1)–(5) среднее время, проведенное сообщением в системе информационного обмена, при анализе методом имитации может быть определено по формуле

$$T_c = \sum_{k=1}^N (v_k - z_k) / N, \quad (6)$$

где N – общее число сообщений на входе системы; z_k – момент времени поступления k -го сообщения в систему; v_k – момент времени покидания системы k -м сообщением.

Среднее число сообщений в системе информационного обмена за промежутки времени $(0, v_N)$ определяется выражением

$$N_c = \sum_{k=1}^N (v_k - z_k) / v_N, \quad (7)$$

где v_N – момент времени покидания системы последним сообщением.

Интенсивность поступления заявок на обслуживание может быть определена на основе формулы Литтла: $\lambda^* = N_c / T_c$ [1]. Так, если интенсивность поступления сообщений в систему обмена λ известна, то выполнение равенства $\lambda = \lambda^*$ является одним из подтверждений адекватности моделей.

На рисунке 4 приведены графики изменений состояния в первом узле СеМО (числа сообщений). Из графика видно, что число сообщений в узле не превышает двух. Следовательно, в первом узле необходимость в накопителе сообщений большой емкости отсутствует. Кроме того, вероятность нахождения сообщения в узле очень мала.

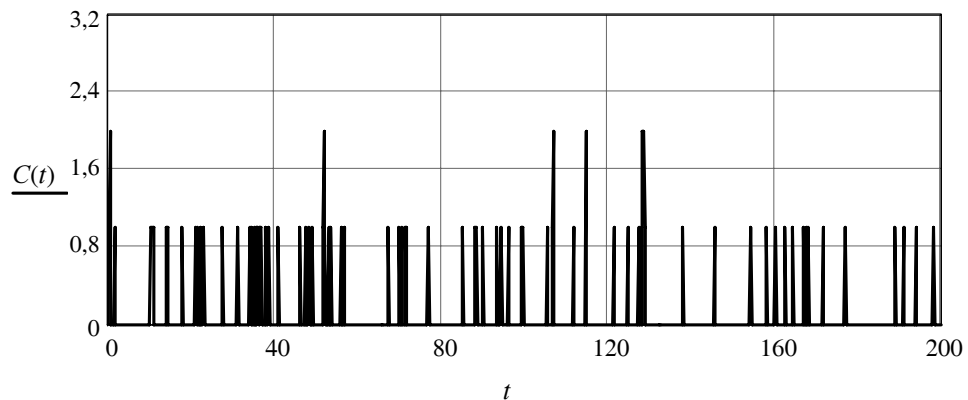


Рис. 4 График изменений состояний первого узла

На рисунке 5 приведен график изменений состояния второго узла в системе информационного обмена. Как следует из графика, вероятность возникновения длинной очереди сообщений в узле достаточно велика.

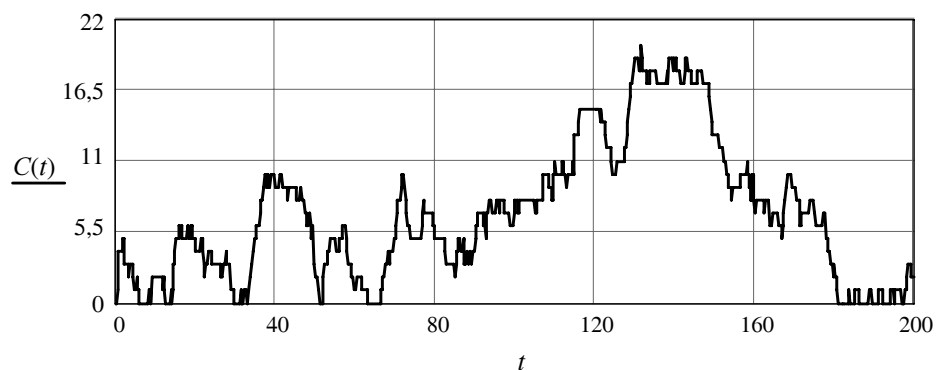


Рис. 5 График изменений состояния второго узла

Длина очереди может достигать более двадцати сообщений. Поэтому при реализации системы во втором узле необходимо установить накопитель для сообщений с достаточно большой емкостью.

На рисунке 6 приведен график изменения состояния всей системы информационного обмена. Из сопоставления графиков следует, что изменения очереди во втором узле и в системе в целом различаются очень мало.

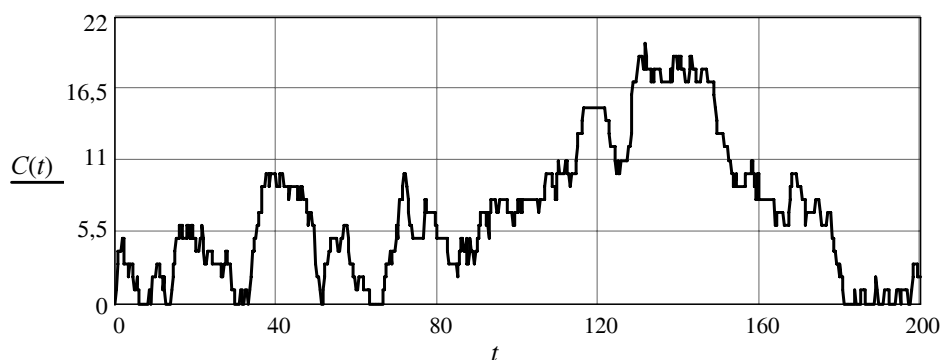


Рис. 6 График изменений числа сообщений в системе

Методом имитационного моделирования выполнен анализ системы информационного обмена с заданными выше параметрами. Результаты имитационного моделирования: $T_c = 5,17$ мин, $W_c = 4,065$ мин. Таким образом, относительная разность оценок средних времен пребывания требования в системе и времени ожидания в очереди, полученных аналитическим методом и методом имитационного моделирования, составила 0,4 и 0,45% соответственно. Кроме того, результаты, полученные аналитическим методом, удовлетворительно совпадают с оценками по известной методике [2].

Список литературы

1. **Крылов, В. В.** Теория телетрафика и ее приложения / В. В. Крылов, С. С. Самохвалова. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 288 с.
2. **Уолрэнд, Дж.** Введение в теорию сетей массового обслуживания / Дж. Уолрэнд ; пер. с англ. – М. : Мир, 1993. – 336 с.
3. **Котов, В. Е.** Сети Петри / В. Е. Котов. – М. : Наука, ГРФМЛ, 1984. – 128 с.