УДК 004.94
DOI 10.21685/2072-3059-2016-3-6

Г. В. Мартяшин, К. Ю. Тархов,
А. В. Калачев, Е. А. Бальзанникова, Д. В. Пащенко

ФОРМАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА ДЕКОМПОЗИЦИИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ СЕТЕЙ ПЕТРИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕНЗОРНОЙ МЕТОДОЛОГИИ

Аннотация.

Актуальность и цели. Объект исследования – сложная система, представленная в виде сети Петри. Предметом исследования является способ декомпозиции этой системы на примитивные фрагменты в сетях Петри. Цель работы – формальное описание алгоритма декомпозиции сложных систем с использованием тензорных преобразований.

Материалы и методы. Формальное описание алгоритма осуществлялось с использованием аппарата сетей Петри и тензорной методологии.

Результаты. Представленный алгоритм позволяет реализовать работу модуля системы автоматизированного проектирования структур параллельных вычислительных систем на основе тензорного исчисления сетевых моделей.

Выводы. Результаты могут быть использованы при решении проблем разработки и усовершенствования сложных систем.

Ключевые слова: сети Петри, тензорное преобразование, декомпозиция сложных систем.

G. V. Martyashin, K. Yu. Tarkhov,
A. V. Kalachev, E. A. Bal'zannikova, D. V. Pashchenko

A FORMAL DESCRIPTION OF A DECOMPOSITION ALGORITHM FOR COMPLEX SYSTEMS BASED ON PETRI NETS USING TENSOR METHODS

Abstract.

Background. The research object is a complex system in the form of a Petri net. The research subject a way of decomposition of the complex system to primitive fragments of Petri nets. The aim of the study is formally describe a decomposition algorithm for complex systems using tensor transformations.

Materials and methods. The formal description of the algorithm was carried outusing the Petri nets apparatus and tensor methodology.

Results. The algorithm presented in this article allows to implement the operation of the module of CAD structures of parallel computing systems on the basis of tensor calculation of network models.

Conclusions. The research results can be used for solving problems of development and improvement of complex systems.

Key words: Petri nets, tensor transformation, decomposition of complex systems.

Введение

В современной науке и технике при разработке сложных систем все чаще возникают задачи, требующие использовать методы математического моделирования [1]. Это обусловлено тем, что моделирование позволяет с меньшими затратами воссоздавать процессы в системе и выявлять критерии оптимизации [2, 3]. Важным преимуществом моделирования является возможность замены физического эксперимента модельным, что позволяет в значительной степени сократить затраты ресурсов и времени. Также инструменты моделирования являются необходимыми в случае, если к объекту проектирования или исследования имеется ограниченный доступ либо он находится в недоступных условиях окружающей среды, например, при разработке системы управления атомным реактором или динамическим электрокардиостимулятором в организме человека. Для моделирования сложных дискретных систем можно воспользоваться аппаратом сетей Петри [4, 5].

Сети Петри – это удобный математический аппарат, предназначенный для моделирования динамических дискретных систем, представляющий собой двудольный ориентированный граф, состоящий из вершин, называемых позициями и переходами, соединенных между собой дугами. Вершины одного типа не могут быть непосредственно соединены друг с другом. Позиции могут содержать в себе маркеры, имеющие возможность перемещаться по сети. Классический вариант сетей Петри предполагает, что необходимым условием срабатывания перехода является наличие маркеров во всех входных позициях перехода [6, 7].

Данный математический аппарат позволяет графически и формально описывать параллельные процессы системы, а также находить тупиковые состояния, выполнять проверку достижимости состояний исследуемой системы и т.д.

Модели сложной системы, построенной на основе сетей Петри, можно декомпозировать и трансформировать с целью повышения эффективности работы существующей системы с использованием тензорной методологии [8]. Такой подход часто применяется в математике для решения проблем, связанных с трансформацией и декомпозицией сложных систем. Тензорные преобразования позволяют преобразовать исходную модель системы в эквивалентную ей, которая обладает теми же свойствами, но способна более эффективно выполнять заданные функции [9, 10].

1. Этапы моделирования сложной системы в сетях Петри и ее тензорное преобразование в эквивалентную систему

Моделирование сложной системы в виде формализованного описания сетей Петри [11, 12] и тензорное преобразование [13, 14] в эквивалентную систему можно представить в виде обобщенной схемы, представленной на рис. 1.

На рис. 1 видно, что исследуемая сложная система формализуется и представляется в виде сетей Петри, обозначена как «Исходная СП-модель» – N_i. Исходная СП-модель декомпозируется на компоненты, называемые линейными базовыми фрагментами (ЛБФ). Они представляют собой цепочки переходов и циклических последовательностей, образуя сеть Петри ЛБФ – N_L; N_i и N_L описаны в исходной системе координат. В общем случае существуют различные способы декомпозиции исходной сети Петри на ЛБФ. В ходе моделирования могут рассматриваться все варианты декомпозиции, что значительно увеличивает трудоемкость, или выбирается конкретный алгоритм декомпозиции.

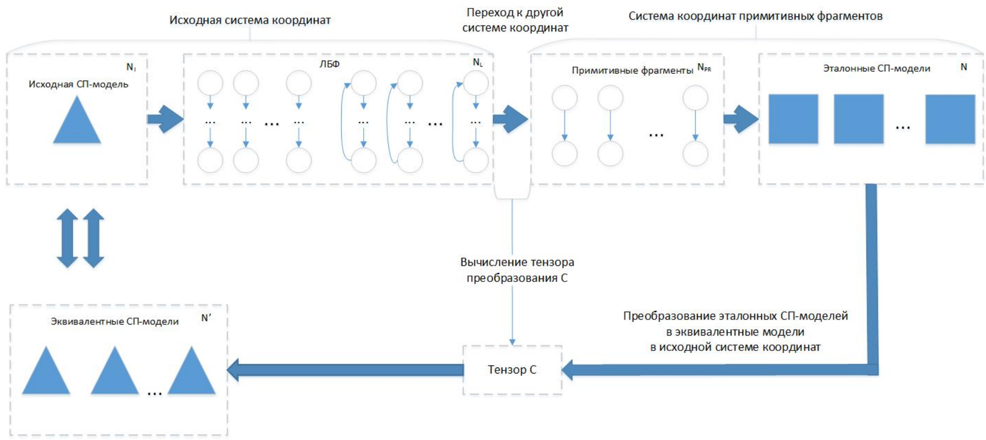

Рис. 1. Обобщенная схема моделирования сложной системы с помощью сетей Петри и тензорных преобразований

После получение ЛБФ осуществляется переход к другой системе координат, называемой системой координат примитивных фрагментов. На данном этапе происходит декомпозиция ЛБФ на примитивные фрагменты, которые совместно образуют сеть Петри примитивных фрагментов – N_{PR}. Также на этом этапе происходит вычисление тензора преобразования C.

Далее происходит отбор примитивных фрагментов по определенным правилам: из примитивных фрагментов, удовлетворяющих заданным условиям, формируются эталонные СП-модели, в свою очередь они в совокупности образуют сети Петри – N.

Как только эталонные СП-модели сформированы, происходит их преобразование в эквивалентные модели уже в исходной системе координат. На выходе формируются эквивалентные СП-модели (сети Петри), которые потенциально эквивалентны исходной сети Петри исследуемой сложной системы и по некоторым параметрам и эффективности в целом могут превосходить ее.

Целью научного исследования является разработка алгоритма декомпозиции сложной системы, представленной в виде линейных базовых фрагментов, на простейшие фрагменты.

2. Алгоритм декомпозиции и преобразования системы, построенной на основе сетей Петри с использованием тензорной методологии на примере упрощенной системы

В данной работе рассматривается часть программного комплекса, отвечающая за преобразование линейных базовых фрагментов в примитивы и построение тензоров преобразования.

В качестве входных данных алгоритм принимает сеть Петри, представленную в виде ЛБФ и заданную в матричной форме (рис. 2).

Далее выполняется преобразование ЛБФ в примитивы – фрагменты сети Петри, состоящие из одной входной позиции, одного перехода и одной выходной позиции. Оно производится путем анализа матрицы, задающей сеть Петри. Деление ЛБФ может производиться только по позиции. При этом имена новых позиций выбираются таким образом, чтобы по ним можно было однозначно определить, из каких позиций они были получены (рис. 3).

	p1	p2	p3
t1	-1	1	0
t2	0	-1	1

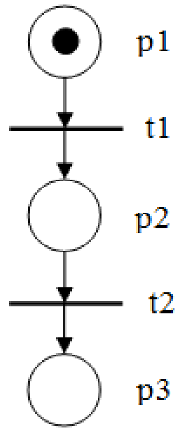

Рис. 2. Сеть Петри в виде ЛБФ и ее матричное представление

	p1	p21	p22	p3
t1	-1	1	0	0
t2	0	0	-1	1

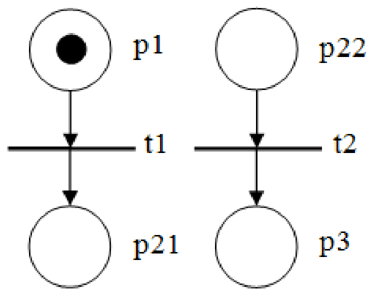

Рис. 3. Сеть Петри в виде примитивов и ее матричное представление

Полученные примитивы далее могут быть собраны различными способами, ограниченными заданными правилами для получения новой сети Петри, описывающей исходную систему. Однако требуется обеспечить связь между полученной сетью и исходной, т.е. передать некоторые свойства. Для этого будет использоваться тензорное преобразование.

Допустим, что полученная и исходная сети Петри находятся в разной системе координат. Для того чтобы перевести полученную сеть Петри в одну систему координат с исходной, необходимо определить тензор. Для этого требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} D = C \cdot D', \\ \mu = C \cdot \mu', \end{cases} \tag{1}$$

где D – матрица, описывающая сеть Петри, представленную в виде ЛБФ; матрица D' описывает сеть Петри, представленную в виде примитивов; C – тензор; μ – маркировка сети с ЛБФ; μ' – маркировка сети с примитивами.

Для определения тензора необходимо привести матрицы сетей Петри к одной размерности. Это может быть сделано так, как показано на рис. 4.

	p1	p21	p22	p3
t1	-1	1	1	0
t2	0	-1	-1	1

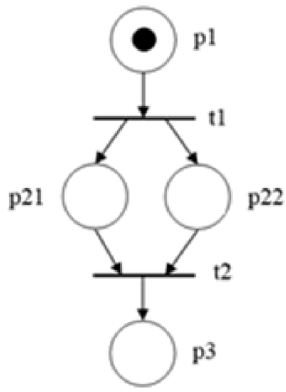

Рис. 4. Исходная сеть Петри с увеличенной размерностью

После получения матриц D и D' одинаковой размерности можно вычислить тензор C, используя (1). Решение данной системы сводится к решению системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} d'_{11} = c_{11} \cdot d_{11} + c_{12} \cdot d_{21} + c_{13} \cdot d_{31} + c_{14} \cdot d_{41}, \\ d'_{21} = c_{21} \cdot d_{11} + c_{22} \cdot d_{21} + c_{23} \cdot d_{31} + c_{24} \cdot d_{41}, \\ d'_{31} = c_{31} \cdot d_{11} + c_{32} \cdot d_{21} + c_{33} \cdot d_{31} + c_{34} \cdot d_{41}, \\ d'_{41} = c_{41} \cdot d_{11} + c_{42} \cdot d_{21} + c_{43} \cdot d_{31} + c_{44} \cdot d_{41}, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} d'_{12} = c_{11} \cdot d_{12} + c_{12} \cdot d_{22} + c_{13} \cdot d_{32} + c_{14} \cdot d_{42}, \\ d'_{22} = c_{21} \cdot d_{12} + c_{22} \cdot d_{22} + c_{23} \cdot d_{32} + c_{24} \cdot d_{42}, \\ d'_{32} = c_{31} \cdot d_{12} + c_{32} \cdot d_{22} + c_{33} \cdot d_{32} + c_{34} \cdot d_{42}, \\ d'_{42} = c_{41} \cdot d_{12} + c_{42} \cdot d_{22} + c_{43} \cdot d_{32} + c_{44} \cdot d_{42}, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \mu'_1 = c_{11} \cdot \mu_1 + c_{12} \cdot \mu_2 + c_{13} \cdot \mu_3 + c_{14} \cdot \mu_4, \\ \mu'_2 = c_{21} \cdot \mu_1 + c_{22} \cdot \mu_2 + c_{23} \cdot \mu_3 + c_{24} \cdot \mu_4, \\ \mu'_3 = c_{31} \cdot \mu_1 + c_{32} \cdot \mu_2 + c_{33} \cdot \mu_3 + c_{34} \cdot \mu_4, \\ \mu'_4 = c_{41} \cdot \mu_1 + c_{42} \cdot \mu_2 + c_{43} \cdot \mu_3 + c_{44} \cdot \mu_4. \end{cases} \quad (4)$$

После подстановки имеющихся значений матриц D и D' была получена следующая система уравнений:

$$\begin{cases} -1 = -c_{11} + c_{12}, \\ 1 = -c_{21} + c_{22}, \\ 1 = -c_{31} + c_{32}, \\ 0 = -c_{41} + c_{42}, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} 0 = -c_{13} + c_{14}, \\ -1 = -c_{23} + c_{24}, \\ -1 = -c_{33} + c_{34}, \\ 1 = -c_{43} + c_{44}, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} 1 = c_{11}, \\ 0 = c_{21}, \\ 0 = c_{31}, \\ 0 = c_{41}. \end{cases} \tag{7}$$

Используя значения из (7) в системе (5), можно получить

$$\begin{cases} 0 = c_{12}, \\ 1 = c_{22}, \\ 1 = c_{32}, \\ 0 = c_{42}. \end{cases} \tag{8}$$

Данная система линейных уравнений имеет несколько решений. Для получения одного из решений требуется, чтобы число неизвестных в системе (6) было равно числу уравнений. Допустим, что $c_{13} = 0$, $c_{23} = 1$, $c_{33} = 1$ и $c_{43} = 0$. Тогда система (6) примет вид

$$\begin{cases} 0 = c_{14}, \\ 0 = c_{24}, \\ 0 = c_{34}, \\ 1 = c_{44}. \end{cases} \tag{9}$$

Таким образом, тензор преобразования будет выглядеть, как показано на рис. 5.

1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

Рис. 5. Тензор преобразования

Проверим правильность полученного результата. Выполним умножение тензора C на матрицу D (рис. 6).

Полученная матрица совпадает с матрицей D', что свидетельствует о том, что синтезированный тензор преобразования C является решением системы (1).

Приведенный выше способ позволяет получить все возможные значения тензора C, но его недостатком является сложность вычислений. В статье [4] на основе анализа ЛБФ был выведен более компактный алгоритм построения тензора преобразования:

1) сформировать матрицу C размерности $n \times n$;

2) $C = 0$;

3) для всех $i = \overline{1,n}$ выполнить: $c(i,i) = 1$;

4) для всех $i = \overline{1,m-1}$ выполнить: $c(2i, 2i+2) = -1$, $c(2i+1, 2i) = 1$.

-1	0
1	-1
1	-1
0	1

Рис. 6. Результат умножения тензора преобразования на матрицу примитивных элементов

На основе данного алгоритма был построен тензор преобразования для исследуемой системы (рис. 7).

1	0	0	0
0	1	0	-1
0	1	1	0
0	0	0	1

Рис. 7. Тензор преобразования, полученный при использовании упрощенного алгоритма

При применении полученного тензора преобразования к матрице инцидентности примитивных фрагментов была получена матрица инцидентности ЛБФ, из чего можно сделать вывод, что данный алгоритм позволяет получить одно из решений системы (1).

Операция вычисления тензора преобразования необходима для выполнения последующих этапов алгоритма синтеза потенциально эквивалентных СП-моделей. Тензор C используется при преобразовании эталонных СП-моделей в потенциально эквивалентные модели при переводе их в исходную систему координат.

Заключение

Рассмотренный алгоритм позволяет реализовать один из этапов моделирования сложной системы с помощью сетей Петри и тензорных преобразований. На данный момент разработан прототип системы автоматизированного проектирования структур параллельных вычислительных систем на основе тензорного исчисления сетевых моделей, модуль преобразования ЛБФ в примитивы и построения тензоров преобразования, которой имеет реализацию, основывающуюся на данном алгоритме.

В дальнейшем планируется рассмотреть различные аспекты программной реализации предложенного алгоритма и результаты его использования, интересные с практической точки зрения.

Список литературы

1. **Симанков, В. С.** Моделирование сложных объектов в режиме реального времени на основе сетей Петри / В. С. Симанков, Д. М. Толкачев // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. 4. Естественно-математические и технические науки. – 2012. – № 4. – С. 84–92.

2. **Kizilov, E.** Modeling of QoS in the industrial Ethernet switches / E. Kizilov, D. Pashenko, D. Trokoz, N. Konnov // 5th International Workshop on Computer Science and Engineering Information Processing and Control Engineering, WCSE 2015-IPCE, 2015. – P. 185–190
3. **Domnin, A.** Modeling EMA and MA Algorithmas to Estimate the Bitrate of Data Streams in Packet Switched / A. Domnin, N. Konnov, V. Mekhanov // Communication in Computer and Information Science, 2014 – P. 81–86.
4. **Волчихин, В. И.** Моделирование подсистемы загрузки данных наземной системы контроля авиационных радиолокационных комплексов с использованием аппарата сетей Петри / В. И. Волчихин, Д. В. Пащенко, Д. А. Трокоз // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2010. – № 3 (15). – С. 37–48.
5. **Diaz, M.** Petri Nets: Fundamental Models, Verification and Applications / Michel Diaz. – Hoboken, NJ, USA : John Wiley & Sons, Wiley-ISTE, 2013. – 656 p.
6. **Pashchenko, D. V.** Equivalnce of inhibitory and non-inhibitory safe petri nets, Innovative information technologies / D. V. Pashchenko, D. A. Trokoz // Materials of the International scientific : practical conference. – Praga, 2014. – P. 550–556.
7. **Pashenko, D.** Formal transformation inhibitory safe Petri nets into equivalent not inhibitory / D. Pashenko, D. Trokoz, N. Konnov // Procedia Computer Science. – 2015. – P. 99–103.
8. **Kulagin, V. P.** Tensor Methods of Designing Computer System Structures / V. P. Kulagin // Automatic Control and Computer Sciences. – 1989. – P. 55-61.
9. **Obsieger, B.** Metoda Rubnih Elementata I / Boris Obsieger. – USA : Createspace, 2015. – 32 p.
10. **Jeevanjee, N.** An Introduction to Tensors and Group Theory for Physicists / Nadir Jeevanjee. – Second Edition. – Berlin, Germany : Springer, 2015. – 305 p.
11. **Patil, S.** Neutralizing semantic ambiguities of function block architecture by modeling with ASM / S. Patil, V. Dubinin, C. Pang, V. Vyatkin // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). – St. Petersburg, Russia, 2015. – P. 93–97
12. **Dai, W. W.** Function block implementation of service oriented architecture: Case study / W. W. Dai, J. H. Christensen, V. Vyatkin, V. Dubinin // Proceedings – 2014 : 12th IEEE International Conference on Industrial Informatics, INDIN, 2014. – Porto-Allegre, Brazil, 2014. – P. 64–70
13. **Hogben, L.** Handbook of Linear Algebra / Leslie Hogben. – Second Edition. – London, UK: Chapman and Hall/CRC, 2013. – 1904 p.
14. **Kron, G.** Tensor Analysis of Networks / Kron Gabriel. – London, UK : Facsimile Publisher, 2015 – 662 p.

References

1. Simankov V. S., Tolkachev D. M. *Vestnik Adygeyskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. 4. Estestvenno-matematicheskie i tekhnicheskie nauki* [Bulletin of Adygea State University. Series 4. Natural, mathematical and engineering sciences]. 2012, no. 4, pp. 84–92.
2. Kizilov E., Pashenko D., Trokoz D., Konnov N. *5th International Workshop on Computer Sci-ence and Engineering Information Processing and Control Engineering, WCSE 2015-IPCE*. 2015, pp. 185–190
3. Domnin A., Konnov N., Mekhanov V. *Communication in Computer and Information Science*. 2014, pp. 81–86.
4. Volchikhin V. I., Pashchenko D. V., Trokoz D. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Engineering sciences]. 2010, no. 3 (15), pp. 37–48.

5. Diaz Michel *Petri Nets: Fundamental Models, Verification and Applications*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Wiley-ISTE, 2013, 656 p.
6. Pashchenko D. V., Trokoz D. A. *Materials of the International scientific: practical conference*. Praga, 2014, pp. 550–556.
7. Pashenko D., Trokoz D., Konnov N. *Procedia Computer Science*. 2015, pp. 99–103.
8. Kulagin V. P. *Automatic Control and Computer Sciences*. 1989, pp. 55–61.
9. *Boris Obsieger Metoda Rubnih Elementata I*. Createspace, 2015, 432 p.
10. Jeevanjee N. *An Introduction to Tensors and Group Theory for Physicists*. Second Edition. Birkhauser: Springer, 2015, 305 p.
11. Patil S., Dubinin V., Pang C., Vyatkin V. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*. GOROD 2015, pp. 93–97
12. Dai W. W., Christensen J. H., Vyatkin V., Dubinin V. *Proceedings – 2014: 12th IEEE International Conference on Industrial Informatics, INDIN*. 2014, pp. 64–70
13. Leslie Hogben *Handbook of Linear Algebra*. Second Edition. Chapman and Hall/CRC, 2013, 1904 p.
14. Kron Gabriel *Tensor Analysis of Networks*. Facsimile Publisher, 2015, 662 p.

Мартяшин Георгий Викторович
аспирант, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: nowargore@gmail.com

Martyashin Georgiy Viktorovich
Postgraduate student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Тархов Кирилл Юрьевич
аспирант, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: soulesspnz@gmail.com

Tarkhov Kirill Yur'evich
Postgraduate student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Калачев Андрей Валентинович
студент, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: andrei.kalachev@gmail.com

Kalachev Andrey Valentinovich
Student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Бальзанникова Елена Алексеевна
магистрант, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: elenabalzannikova@gmail.com

Bal'zannikova Elena Alekseevna
Master’s degree student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Пащенко Дмитрий Владимирович
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной техники, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: dmitry.pashchenko@gmail.com

Pashchenko Dmitriy Vladimirovich
Doctor of engineering sciences, professor, head of sub-department of computer engineering, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 004.94

Формальное описание алгоритма декомпозиции сложных систем на основе сетей Петри с использованием тензорной методологии / Г. В. Мартяшин, К. Ю. Тархов, А. В. Калачев, Е. А. Бальзанникова, Д. В. Пащенко // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2016. – № 3 (39). – С. 62–71. DOI 10.21685/2072-3059-2016-3-6