

УДК 512.8

СЕТИ ПЕТРИ КАК ОКРЕСТНОСТНЫЕ СИСТЕМЫ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

С.Л. Блюмин

Липецкий государственный технический университет
Россия, 398600, г. Липецк, ул. Московская, 30
E-mail: sabl@lipetsk.ru

А.М. Шмырин

Липецкий государственный технический университет
Россия, 398600, г. Липецк, ул. Московская, 30
E-mail: amsh@lipetsk.ru

И.А. Седых

Липецкий государственный технический университет
Россия, 398600, г. Липецк, ул. Московская, 30
E-mail: sedykh-irina@yandex.ru

Ключевые слова: идентификация, сети Петри, окрестностные системы
Key words: identification, Petri nets, neighborhood's systems

Показано, что сети Петри являются частным случаем линейных окрестностных систем. Проведена идентификация линейных окрестностных систем, моделирующих сети Петри.

THE PETRI'S NETS AS NEIGHBORHOOD'S SYSTEMS WITH SPECIAL LIMITATIONS / S.L. Blyumin (Lipetsk State Technical University, 30 Moskovskaya, Lipetsk 398600, Russia, E-mail: slb@sabl@lipetsk.ru), A.M. Shmyrin (Lipetsk State Technical University, 30 Moskovskaya, Lipetsk 398600, Russia, E-mail: amsh@lipetsk.ru), I.A. Sedykh (Lipetsk State Technical University, 30 Moskovskaya, Lipetsk 398600, Russia, E-mail: sedykh-irina@yandex.ru). It was demonstrated that Petri's nets are a partial case of the linear neighborhood's systems. Identification of the linear neighborhood's systems, that are modeling Petri's nets, is implemented.

1. Введение

В работе [1] введены и исследованы окрестностные модели, обобщающие традиционные дискретные модели, допускающие неоднозначность трактовки характера переменных, отличающиеся гибкостью описания с помощью окрестностей (шаблонов соседства) структуры связей между узлами системы по состоянию и входу, что позволяет улучшить управление объектом.

В то же время, дискретные модели – сети Петри можно рассматривать как разновидность линейных окрестностных систем с некоторыми ограничениями. Это позволяет исследовать сети Петри с более общих позиций и использовать изложенные в [1] алгоритмы идентификации и управления линейными окрестностными системами.

2. Краткое описание сетей Петри

Графически сети Петри представляются в виде графов. Множество вершин в таких графах состоит из непересекающихся подмножеств позиций: $P = \{p_i\}$, $i = 1, \dots, n$ и переходов: $T = \{t_j\}$, $j = 1, \dots, m$, а множество дуг F разделяется на два подмножества: $\{p_i, t_j\} \subseteq P \times T$ и $\{t_j, p_i\} \subseteq T \times P$. Дуги (p_i, t_j) ориентированы от позиций к переходам, а дуги (t_j, p_i) – от переходов к позициям. Другие комбинации связей в графе не допускаются. В изображении графов, представляющих сети Петри, позиции принято обозначать кружками, а переходы – барьерами (планками) [2].

Каждой позиции p_i сети Петри сопоставим целое неотрицательное число (количество фишек), которое назовем маркировкой i -ой позиции. Маркировкой сети называется вектор $M \in \mathbf{N}_0^n$ (здесь \mathbf{N}_0 – множество натуральных чисел и ноль, т.е. $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$), состоящий из маркировок позиций. В процессе функционирования сети Петри количество и положение фишек может изменяться.

Наряду с рассмотренным графическим представлением сетей Петри часто используется матричный способ их описания: $C = (R, M_0)$ или $C = (R^+, R^-, M_0)$, где $R = (r_{ij})$ — матрица инцидентов сети размера $n \times m$, M_0 – вектор начальной маркировки. Матрицы R^+, R^-, R определяются по формулам:

$$r_{ij}^+ = \begin{cases} W(p_i, t_j), p_i \in O(t_j), t_j \in T, p_i \in P; \\ 0, \text{ иначе} \end{cases};$$

$$r_{ij}^- = \begin{cases} W(p_i, t_j), p_i \in I(t_j), t_j \in T, p_i \in P; \\ 0, \text{ иначе} \end{cases};$$

$$r_{ij} = \begin{cases} W(p_i, t_j), p_i \in O(t_j), t_j \in T, p_i \in P \\ -W(p_i, t_j), p_i \in I(t_j), t_j \in T, p_i \in P; \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

$$R = R^+ - R^-,$$

где функция $W : F \rightarrow \mathbf{N}$ означает разметку кратностей дуг. Вектор начальной маркировки сети:

$$M_0 = (M_0(p_i)) = m_{0i} \in \mathbf{N}_0, i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

где m_{0i} – число, которым помечается позиция $p_i \in P$ при маркировке.

Если M_l – некоторая разметка сети Петри, то неравенство:

$$M_l \geq R^- \cdot \mu(k)$$

выражает условие возбуждения перехода $t_k \in T$, а уравнение:

$$(1) \quad M_{l+1} = M_l + R \cdot \mu(k)$$

формально задает правило нахождения новой маркировки сети, возникающей в ней сразу после срабатывания перехода t_k . Здесь $\mu(k)$ – вектор-столбец длины m с единицей на k -ом месте.

3. Особенности линейных окрестностных систем, моделирующих сети Петри

Покажем, что сеть Петри является частным случаем линейной окрестностной вероятностной системы со специальными ограничениями.

В соответствии с [1], модель линейной окрестностной системы:

$$(2) \quad \sum_{x \in O_x[a]} w_x[a, \alpha] x[\alpha] = \sum_{\beta \in O_v[a]} w_v[a, \beta] x[\beta],$$

$O_x[a]$, $O_v[a]$ – окрестности по x , v узла a , $a \in A = \{a_1, \dots, a_N\}$, $x[a] \in R^n$, $v[a] \in R^m$ – состояние и вход в узле a системы, $w_x[a, \alpha] \in R^{c \times n}$, $w_v[a, \alpha] \in R^{c \times m}$ – матрицы-параметры.

Если в модели (2) явно выделить время, то можно назвать ее динамической. При этом система уравнений примет вид:

$$(3) \quad \begin{aligned} \sum_{x \in O_x[t+1, a]} w_x[t+1, a, \alpha] x[t+1, \alpha] &= \sum_{x \in O_x[t, a]} w_x[t, a, \alpha] x[t, \alpha] + \\ &+ \sum_{\beta \in O_v[t, a]} w_v[t, a, \beta] x[t, \beta] \end{aligned}$$

$O_x[t+1, a]$, $O_x[t, a]$ – окрестности узла a по x соответственно в моменты времени $t+1$ и t , $O_v[t, a]$ – окрестность узла a по v в момент времени t , $a \in A = \{a_1, \dots, a_N\}$, $x[t+1, a] \in R^n$, $x[t, a] \in R^n$ – состояния в узле a системы соответственно в моменты времени $t+1$ и t , $v[t, a] \in R^m$ – вход в узле a системы в момент времени t , $w_x[t+1, a, \alpha] \in R^{c \times n}$, $w_x[t, a, \alpha] \in R^{c \times n}$, $w_v[t, a, \alpha] \in R^{c \times m}$ – матрицы-параметры.

Модель (3) можно представить в виде:

$$(4) \quad W_x[t+1] \cdot X[t+1] = W_x[t] \cdot X[t] + W_v[t] \cdot V[t],$$

где $W_x[t+1]$, $W_x[t]$ – матрицы коэффициентов по состояниям в моменты времени $t+1$ и t соответственно, $W_v[t]$ – матрица коэффициентов по входам в момент времени t .

Недетерминированной по окрестности линейной окрестностной системой будем называть окрестностную систему, в которой задаются несколько окрестностей каждого узла системы, и выбор конкретной окрестности осуществляется с некоторой заданной вероятностью.

Покажем, что любую сеть Петри можно представить в виде недетерминированной динамической линейной окрестностной системы. Рассмотрим произвольную сеть Петри $C = (R^+, R^-, M_0)$, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$. Пусть заданы матрицы R^+ и R^- , а также вектор начальной маркировки M_0 . Матрица инцидентов сети равна $R = R^+ - R^-$.

Поставим в соответствие позициям сети Петри $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ узлы окрестностной системы $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Маркировки позиций сети Петри будут соответствовать состояниям узлов окрестностной системы, начальная маркировка сети – состоянию окрестностной системы в начальный момент

времени: $X[0] = M_0$. На каждый узел a_i ($i = 1, \dots, n$) окрестностной системы в каждый момент времени t воздействует управляющий сигнал $v[a_i, t]$, определяющий величину изменения состояния этого узла.

Каждому переходу сети $t_k \in T$ ($k = 1, \dots, m$) поставим в соответствие совокупность элементарных окрестностей (слой), матрица смежности $S^k \in R^{n \times n}$ которого формируется на основе k -го столбца матриц R^+ и R^- по описанному ниже правилу:

$$S^k = R_k^- \cdot (R_k^+)^T + E,$$

где R_k^+ , R_k^- – k -ые столбцы матриц R^+ и R^- соответственно, E – единичная матрица размера $n \times n$.

Таким образом, в недетерминированной динамической линейной окрестностной системе, моделирующей заданную сеть Петри, существует m совокупностей элементарных окрестностей, каждая из которых соответствует конкретному переходу сети Петри и определяется своей матрицей смежности S^k .

Общую матрицу смежности окрестностной системы, эквивалентной сети Петри, обозначим S . Каждый элемент s_{ij} матрицы S ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$) определяется как максимальный из соответствующих элементов s_{ij}^k матриц S^k ($k = 1, \dots, m$):

$$S = (s_{ij}), \quad s_{ij} = \max_k s_{ij}^k, \quad (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m).$$

Для каждого k -го слоя окрестностной системы уравнение (4) будет иметь вид:

$$W_x^k[t+1] \cdot X[t+1] = W_x^k[t] \cdot X[t] + W_v^k[t] \cdot V[t],$$

где $W_x^k[t+1]$, $W_x^k[t]$ – матрицы коэффициентов k -го слоя по состояниям в моменты времени $t+1$ и t соответственно, $W_v^k[t]$ – матрица коэффициентов k -го слоя по входам в момент времени t .

В каждый момент времени $t = \{0, 1, 2, \dots, l, \dots\}$ на основании текущего состояния узлов системы $X[t]$ формируется случайный вектор $D \in R^m$ $D = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_m]^T$ (диспетчер), состоящий из нулей и одной единицы в позиции, соответствующей выбираемому слою k , по уравнениям которого происходит пересчет состояний узлов окрестностной системы в следующий момент времени $t+1$: $X[t] \rightarrow X[t+1]$.

Для всех слоев окрестностной системы имеем:

$$W_x^1[t+1] \cdot d_1 \cdot X[t+1] = W_x^1[t] \cdot d_1 \cdot X[t] + W_v^1[t] \cdot d_1 \cdot V[t]$$

$$W_x^2[t+1] \cdot d_2 \cdot X[t+1] = W_x^2[t] \cdot d_2 \cdot X[t] + W_v^2[t] \cdot d_2 \cdot V[t]$$

...

$$W_x^m[t+1] \cdot d_m \cdot X[t+1] = W_x^m[t] \cdot d_m \cdot X[t] + W_v^m[t] \cdot d_m \cdot V[t]$$

Таким образом, уравнение недетерминированной по окрестности динамической линейной окрестностной системы, моделирующей сеть Петри, будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \begin{bmatrix} W_x^1[t+1] & W_x^2[t+1] & \dots & W_x^m[t+1] \end{bmatrix} \cdot D \cdot X[t+1] = \\
 & = \begin{bmatrix} W_x^1[t] & W_x^2[t] & \dots & W_x^m[t] \end{bmatrix} \cdot D \cdot X[t] + \\
 & + \begin{bmatrix} W_v^1[t] & W_v^2[t] & \dots & W_v^m[t] \end{bmatrix} \cdot D \cdot V[t]
 \end{aligned}$$

Идентификация полученной модели недетерминированной по окрестности динамической линейной окрестностной системы дает следующие результаты:

1) Все матрицы коэффициентов k -го слоя равны между собой: $W_x^k[t+1] = W_x^k[t] = W_v^k[t] = W^k$ ($k=1, \dots, m$).

2) Матрица коэффициентов любого слоя в уравнениях системы совпадает с матрицей смежности этого слоя: $W^k = S^k$ ($k=1, \dots, m$).

3) Вектор $V[t]$ зависит от выбранного слоя: $V[t] = [R_1 \ R_2 \ \dots \ R_m] \cdot D$.

Тогда уравнение (5) принимает вид:

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \begin{bmatrix} W^1 & W^2 & \dots & W^m \end{bmatrix} \cdot D \cdot X[t+1] = \\
 & = \begin{bmatrix} W^1 & W^2 & \dots & W^m \end{bmatrix} \cdot D \cdot X[t] + \\
 & + \begin{bmatrix} W^1 & W^2 & \dots & W^m \end{bmatrix} \cdot D \cdot V[t]
 \end{aligned}$$

Преобразуя (6), получаем:

$$\begin{bmatrix} W^1 & W^2 & \dots & W^m \end{bmatrix} \cdot D \cdot (X[t+1] - X[t] - V[t]) = 0.$$

С учетом пункта 3:

$$\begin{bmatrix} W^1 & W^2 & \dots & W^m \end{bmatrix} \cdot D \cdot (X[t+1] - X[t] - [R_1 \ R_2 \ \dots \ R_m] \cdot D) = 0.$$

Здесь выражение в скобках соответствует левой части уравнения (1), записанного в виде:

$$M_{l+1} - M_l - R \cdot \mu(k) = 0.$$

4. Заключение

Таким образом, в работе предложен способ представления сетей Петри в виде окрестностных систем и произведена их идентификация. Перечислим особенности линейных окрестностных систем, моделирующих сети Петри:

1) Линейные окрестностные системы являются динамическими и недетерминированными.

2) Окрестностная система распадается на m слоев, равных количеству переходов в исходной сети Петри.

3) Каждому слою k ($k=1, \dots, m$) соответствует свои матрицы смежности S^k и коэффициентов $W_x^k[t+1]$, $W_x^k[t]$, $W_v^k[t]$.

4) Все матрицы коэффициентов k -го слоя равны между собой: $W_x^k[t+1] = W_x^k[t] = W_v^k[t] = W^k$ ($k=1, \dots, m$).

5) Матрица коэффициентов любого слоя в уравнениях системы совпадает с матрицей смежности этого слоя: $W^k = S^k$.

6) Матрицы коэффициентов W^k системы являются целочисленными.

7) Особенностью сетей Петри, возникающей при управлении, является случайный выбор слоя окрестностной системы, который осуществляется вектором D .

Таким образом, в статье предложен способ моделирования сетей Петри с помощью линейных окрестностных систем со специальными ограничениями, что позволит подойти к теории сетей Петри с более общих позиций.

Приложение

Рассмотрим сеть Петри (рис. 1). Запишем уравнения окрестностной системы, моделирующей данную сеть Петри.

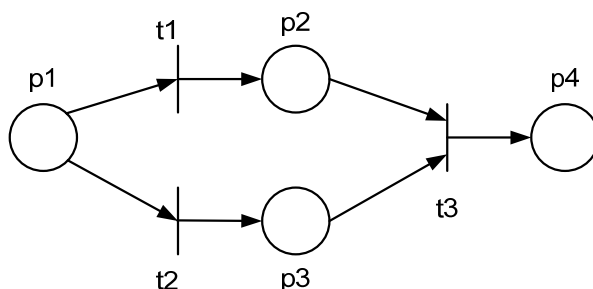


Рис. 1. Пример сети Петри.

Матрица инцидентий данной сети:

$$R = R^+ - R^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Данной сети Петри соответствуют три совокупности элементарных окрестностей (слоя).

1) Первый слой. Связи между узлами первого слоя окрестностной системы, соответствующего первому переходу сети Петри показаны на рис. 2.

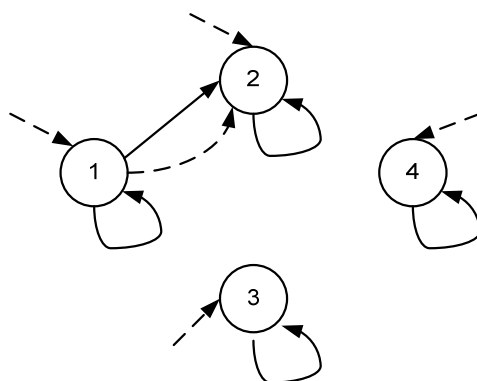


Рис. 2. Первый слой окрестностной системы.

Запишем уравнения этой совокупности в общем виде.

$$\begin{cases} w_x^1[t+1,1]x_1[t+1] + w_x^1[t+1,2]x_2[t+1] = w_x^1[t,1]x_1[t] + w_x^1[t,2]x_2[t] + \\ + w_v^1[t,1]v_1[t] + w_v^1[t,2]v_2[t] \\ w_x^1[t+1,2,2]x_2[t+1] = w_x^1[t,2,2]x_2[t] + w_v^1[t,2,2]v_2[t] \\ w_x^1[t+1,3,3]x_3[t+1] = w_x^1[t,3,3]x_3[t] + w_v^1[t,3,3]v_3[t] \\ w_x^1[t+1,4,4]x_4[t+1] = w_x^1[t,4,4]x_4[t] + w_v^1[t,4,4]v_4[t] \end{cases}$$

После идентификации получаем следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} x_1[t+1] + x_2[t+1] = x_1[t] + x_2[t] + v_1[t] + v_2[t] \\ x_2[t+1] = x_2[t] + v_2[t] \\ x_3[t+1] = x_3[t] + v_3[t] \\ x_4[t+1] = x_4[t] + v_4[t] \end{cases}$$

В матричной форме:

$$W_x^1[t+1] \cdot X[t+1] = W_x^1[t] \cdot X[t] + W_v^1[t] \cdot V[t],$$

$$\text{где } W_x^1[t+1] = W_x^1[t] = W_v^1[t] = S^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица S^1 формируется следующим образом:

$$\begin{aligned} S^1 &= R_1^- \cdot (R_1^+)^T + E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Управление для первого слоя: } V[t] = R_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2) Второй слой. Связи между узлами второго слоя окрестностной системы, соответствующего второму переходу сети Петри показаны на рис. 3.

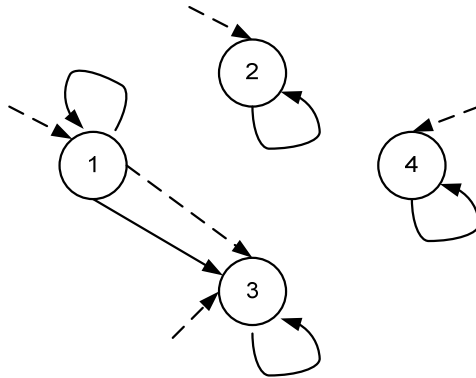


Рис. 3. Второй слой окрестностной системы.

Запишем уравнения этой совокупности.

$$\begin{cases} w_x^2[t+1,1,1]x_1[t+1] + w_x^2[t+1,1,3]x_3[t+1] = w_x^2[t,1,1]x_1[t] + w_x^2[t,1,3]x_3[t] + \\ + w_v^2[t,1,1]v_1[t] + w_v^2[t,1,3]v_3[t] \\ w_x^2[t+1,2,2]x_2[t+1] = w_x^2[t,2,2]x_2[t] + w_v^2[t,2,2]v_2[t] \\ w_x^2[t+1,3,3]x_3[t+1] = w_x^2[t,3,3]x_3[t] + w_v^2[t,3,3]v_3[t] \\ w_x^2[t+1,4,4]x_4[t+1] = w_x^2[t,4,4]x_4[t] + w_v^2[t,4,4]v_4[t] \end{cases}$$

После идентификации получаем следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} x_1[t+1] + x_3[t+1] = x_1[t] + x_3[t] + v_1[t] + v_3[t] \\ x_2[t+1] = x_2[t] + v_2[t] \\ x_3[t+1] = x_3[t] + v_3[t] \\ x_4[t+1] = x_4[t] + v_4[t] \end{cases}$$

В матричной форме:

$$W_x^2[t+1] \cdot X[t+1] = W_x^2[t] \cdot X[t] + W_v^2[t] \cdot V[t],$$

$$\text{где } W_x^2[t+1] = W_x^2[t] = W_v^2[t] = S^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Управление для второго слоя: } V[t] = R_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3) Третий слой. Связи между узлами третьего слоя окрестностной системы, соответствующего третьему переходу сети Петри показаны на рис. 4.

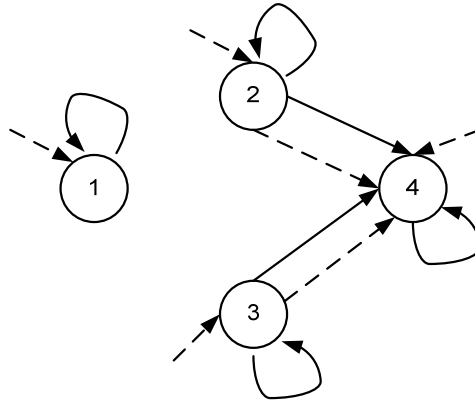


Рис. 4. Третий слой окрестностной системы.

Запишем уравнения совокупности элементарных окрестностей.

$$\begin{cases} w_x^3[t+1,1]x_1[t+1] = w_x^3[t,1,1]x_1[t] + w_v^3[t,1,1]v_1[t] \\ w_x^3[t+1,2,2]x_2[t+1] + w_x^3[t+1,2,4]x_4[t+1] = w_x^3[t,2,2]x_2[t] + w_x^3[t,2,4]x_4[t] + \\ + w_v^3[t,2,2]v_2[t] + w_v^3[t,2,4]v_4[t] \\ w_x^3[t+1,3,3]x_3[t+1] + w_x^3[t+1,3,4]x_4[t+1] = w_x^3[t,3,3]x_3[t] + w_x^3[t,3,4]x_4[t] + \\ + w_v^3[t,3,3]v_3[t] + w_v^3[t,3,4]v_4[t] \\ w_x^3[t+1,4,4]x_4[t+1] = w_x^3[t,4,4]x_4[t] + w_v^3[t,4,4]v_4[t] \end{cases}$$

После идентификации получаем следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} x_1[t+1] = x_1[t] + v_1[t] \\ x_2[t+1] + x_4[t+1] = x_2[t] + x_4[t] + v_2[t] + v_4[t] \\ x_3[t+1] + x_4[t+1] = x_3[t] + x_4[t] + v_3[t] + v_4[t] \\ x_4[t+1] = x_4[t] + v_4[t] \end{cases}$$

В матричной форме:

$$W_x^3[t+1] \cdot X[t+1] = W_x^3[t] \cdot X[t] + W_v^3[t] \cdot V[t],$$

$$\text{где } W_x^3[t+1] = W_x^3[t] = W_v^3[t] = S^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Управление для третьего}$$

$$\text{слоя: } V[t] = R_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Список литературы

1. Блюмин С.Л., Шмырин А.М. Окрестностные системы: монография. Липецк: ЛЭГИ, 2005. 132 с.
2. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. М.: Мир, 1984. 264 с.