Модел. и анализ информ. систем. Т. **20**, № **2** (2013) 139–156

УДК 519.71+004.021

Об эффективном моделировании неограниченного ресурса при помощи односчетчиковых контуров

Башкин В.А.[1]

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: v_bashkin@mail.ru

получена 20 марта 2013

Ключевые слова: односчетчиковые сети, VASS, сети Петри, достижимость, контур

Вводится и исследуется специфический формализм счетчиковых автоматов с одним неограниченным счетчиком без проверки на ноль, обладающий достаточно простым почти периодическим поведением и удобным графическим представлением.

Положительным односчетчиковым контуром называется сильно связная односчетчиковая сеть (недетерминированный конечный автомат с одним счетчиком без проверки на ноль), содержащая по крайней мере один цикл, увеличивающий значение счетчика. Показано, что в положительном контуре бесконечная часть множества достижимости описывается арифметической прогрессией; получены оценки параметров этой прогрессии через структурные свойства диаграммы переходов. Представлен компактный и наглядный способ графического представления контура.

В общем случае односчетчиковые сети обладают такой же выразительной мощностью, как сети Петри с одной неограниченной позицией и магазинные автоматы с односимвольным стековым алфавитом. Показано, что произвольная односчетчиковая сеть может быть представлена в виде конечного дерева односчетчиковых контуров.

Вводится понятие правильно сформированной односчетчиковой сети. Односчетчиковая сеть называется правильно сформированной, если счетчик используется только при порождении бесконечных периодических подмножеств множества достижимых состояний. Показано, что для любой односчетчиковой сети существует эквивалентная (в смысле совпадения множеств достижимости) правильно сформированная сеть, которая может быть эффективно построена из соответствующего дерева контуров.

---

[1]Работа поддержана РФФИ (проекты 12-01-00281, 12-01-31508) и программой “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (проект 14.B37.21.0392).

1. Введение

Односчетчиковые сети, известные также как одномерные системы векторного сложения с состояниями (1-dim Vector Addition Systems with States — VASS), эквивалентны сетям Петри с одной неограниченной позицией, а также магазинным автоматам с односимвольным стековым алфавитом. Ограничение количества счетчиков делает их менее выразительными, чем обыкновенные сети Петри. С другой стороны, многие алгоритмические проблемы становятся разрешимыми, и в результате сама модель оказывается более удобной для различных специфических задач моделирования и анализа систем. Проблемы достижимости, верификации формул различных темпоральных логик, подобия, бисимуляции и других поведенческих эквивалентностей для данного класса моделей рассматривались, среди прочих, в работах [1, 8–12, 14].

В работе [3] мы использовали теоретико-числовой метод, основанный на числах Фробениуса, для изучения периодичности значений счетчика односчетчиковой сети. Было показано, что любое полулинейное множество натуральных чисел может быть представлено в виде объединения непересекающихся конечного множества и конечного семейства линейных множеств с одинаковым периодом. Используя это свойство, мы доказали, что бесконечное множество достижимых значений счетчика полностью описывается конечным числом арифметических прогрессий с общей разностью.

В работе [4] был представлен метод приближения наибольшей бисимуляции в односчетчиковой сети, основанный на использовании однопериодической символьной арифметики и понятия расслоенной бисимуляции.

В данной статье изучаются циклические управляющие структуры односчетчиковой сети. Показано, что основным структурным свойством, определяющим границу между "хаотической" и чисто периодической частями пространства состояний, является наибольший общий делитель эффектов всех циклов сильно связных компонент диаграммы переходов сети.

Класс сильно связных односчетчиковых сетей вводится в качестве отдельного формализма, названного *односчетчиковыми контурами.* Такие сети обладают двумя полезными свойствами: простой структурой бесконечной части множества достижимости (на самом деле, это арифметическая прогрессия, параметры которой могут быть достаточно точно оценены при помощи чисел Фробениуса) и удобным графическим представлением — "контуром" из управляющих состояний, в котором длина и направление перехода полностью определяют его эффект.

Также исследуется класс произвольных односчетчиковых сетей. Показано, что произвольная сеть может быть представлена конечным *деревом односчетчиковых контуров,* полученным из конденсации диаграммы переходов исходной сети.

Вводится понятие *правильной* (правильно организованной) односчетчиковой сети. Сеть называется правильной, если счетчик используется только для порождения бесконечной периодической части множества достижимых состояний. В правильной сети нет использующих счетчик переходов, которые могли бы быть смоделированы при помощи "конечных" управляющих структур (переходов, не меняющих значение счетчика). Неправильность организации сети можно рассматривать как её конструктивный недостаток.

Если сеть правильная, то существует наименьшее начальное значение счетчика (*правильный ресурс*), такое, что любое дальнейшее увеличение начального ресурса не добавляет сети никаких новых поведений (в смысле множества достижимости). Показано, что для любой односчетчиковой сети существует эквивалентная ей правильная односчетчиковая сеть. Правильная сеть может быть эффективно построена на основе дерева контуров исходной сети, и, следовательно, правильность может быть достигнута автоматически.

Статья организована следующим образом. Во втором разделе мы напоминаем основные определения и обозначения, касающиеся линейных множеств, чисел Фробениуса и односчетчиковых сетей. В разделе 3 изучаются сильно связные односчетчиковые сети (односчетчиковые контуры). В разделе 4 рассматриваются произвольные односчетчиковые сети. Вводятся понятия дерева контуров и правильной сети. Раздел 5 содержит некоторые выводы.

2. Предварительные сведения

2.1. Линейные множества натуральных чисел

Через $\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_-$ и $\mathbf{Z}_+$ обозначим, соответственно, множества целых, отрицательных целых и положительных целых чисел. Через Nat обозначим множество неотрицательных целых чисел.

Множество $m \subseteq Nat$ называется *линейным,* если для некоторого $l \in \mathbf{Z}_+$ выполняется

$$m = Lin\{v, \{w_1, \ldots, w_l\}\} =_{\text{def}} \{v + n_1 w_1 + \ldots + n_l w_l \mid n_1, \ldots, n_l \in Nat\},$$

где $v, w_1, \ldots, w_l \in Nat$ фиксированы.

Множество $m \subseteq Nat$ называется *ограниченно неполным линейным множеством,* если $m = m' \setminus m''$, где m' — линейное множество, а m'' — конечное множество. Если $m' = Lin\{v, \{w_1, \ldots, w_l\}\}$ и $w \in Nat$ — наибольший элемент m'', то мы обозначаем m как $DLin\{v, w+1, \{w_1, \ldots, w_l\}\}$.

Отметим, что выражение $DLin\{v, w, E\}$ не является точным описанием множества m — это приближение сверху. Здесь нет точной информации о том, какие именно элементы удалены из исходного линейного множества. Указана лишь граница w между “испорченной” головой множества и бесконечным линейным хвостом.

Множество $Lin\{v, \{w\}\}$ представляет собой *арифметическую прогрессию* с разностью w.

2.2. Некоторые факты из теории множеств

В данной работе мы используем решение задачи Фробениуса о монетах, называемое также числами Фробениуса. Задачу для двух переменных (двух номиналов монет) решил Сильвестр в [15]:

Факт 1. *Для любых натуральных a, b и c, таких что a и b взаимно простые, а $c \geq (a-1)(b-1)$, уравнение $ax + by = c$ имеет натуральное решение.*

Простое следствие:

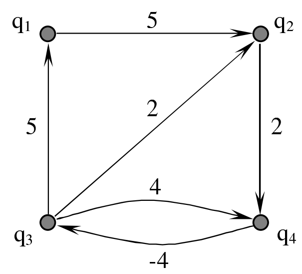


Рис. 1. Диаграмма переходов односчетчиковой сети

Лемма 1. *[3] Если $m = Lin\{v, \{w_1, w_2\}\}$, то, обозначив $p = НОД(w_1, w_2)$, получим $m = DLin\{v, v + p(\frac{w_1}{p} - 1)(\frac{w_2}{p} - 1), \{p\}\}$.*

Обобщение задачи Фробениуса для произвольного числа переменных до сих пор не имеет точного решения. Насколько нам известно, наилучшим приближением является [6, 7, 13]:

Факт 2. *Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — натуральные числа, не превосходящие n. Пусть X — множество всех натуральных значений x, таких, что диофантово уравнение $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = x$ имеет решение в натуральных числах. Тогда множество всех элементов X, превосходящих n^2, является арифметической прогрессией с разностью НОД$(a_1, \ldots, a_k)$.*

2.3. Односчетчиковые сети

(Непомеченной) односчетчиковой сетью называется пара $N = (Q, T)$, где Q — конечное множество управляющих состояний, $T \subset Q \times Q \times \mathbf{Z}$ — конечное множество переходов.

Односчетчиковую сеть удобно изображать при помощи её *диаграммы переходов* — взвешенного ориентированного графа с вершинами из Q и дугами из T (Рис. 1).

Состояние сети описывается парой $q|c$, где $q \in Q$ — текущее управляющее состояние, $c \in Nat$ — текущее значение счетчика.

Переход $t = (q, q', z)$ *активен* в состоянии $q|c$, если $c + z \geq 0$. Активный переход может *сработать*, переводя сеть в состояние $q'|c + z$ (обозначается $q|c \xrightarrow{t} q'|c + z$).

Для перехода $t = (q, q', z)$ величина z также называется *эффектом* t (обозначается $\mathrm{Eff}(t)$). *Ресурс* перехода определяется как:

$$\mathrm{Supp}(t) =_{\mathrm{def}} \begin{cases} 0, & z \geq 0; \\ |z|, & z < 0. \end{cases}$$

Последовательность переходов $\sigma = t_1. \ldots .t_n \in T^*$ может сработать в состоянии $s \in (Q \times Nat)$, если существуют состояния $s_1, \ldots, s_n \in (Q \times Nat)$, такие что $s \xrightarrow{t_1} s_1 \xrightarrow{t_2} \ldots \xrightarrow{t_n} s_n$ (обозначается $s \xrightarrow{\sigma} s_n$).

Состояние $s' \in (Q \times Nat)$ *достижимо* от состояния $s \in (Q \times Nat)$ (обозначается $s \xrightarrow{*} s'$), если существует последовательность переходов $\sigma \in T^*$, такая что $s \xrightarrow{\sigma} s'$.

Размеченной односчетчиковой сетью называется пара (N, s_0), где $N = (Q, T)$ — односчетчиковая сеть, $s_0 \in (Q \times Nat)$ – начальное состояние (начальная разметка).

Для размеченной односчетчиковой сети (N, s_0) её *множество достижимости* $\mathcal{R}(N, s_0)$ определяется как

$$\mathcal{R}(N, s_0) =_{\text{def}} \{s \in (Q \times Nat) \mid s_0 \xrightarrow{*} s\}.$$

Размеченная сеть (N, s_0) называется неограниченной, если $\mathcal{R}(N, s_0)$ бесконечно.

Для выделенного управляющего состояния $q \in Q$ его множество достижимых значений счетчика $\mathcal{R}(N, s_0)[q]$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{R}(N, s_0)[q] =_{\text{def}} \{c \in Nat \mid s_0 \xrightarrow{*} \; q|c\}.$$

Управляющее состояние $q \in Q$ достижимо, если $\mathcal{R}(N, s_0)[q] \neq \emptyset$.

Граф достижимости $\mathcal{RG}(N, s_0)$ размеченной односчетчиковой сети (N, s_0) представляет собой орграф с вершинами из $\mathcal{R}(N, s_0)$, в котором дуга с пометкой t связывает вершины s и s' тогда и только тогда, когда в сети возможен переход $s \xrightarrow{t} s'$.

Диаграмма переходов односчетчиковой сети представляет собой взвешенный ориентированный граф. Напомним несколько основных понятий теории графов.

Маршрут в графе — это чередующаяся последовательность вершин и рёбер, начинающаяся и заканчивающаяся вершинами, в которой вершины, идущие до и после дуги, являются её началом и концом соответственно.

Ориентированный граф называется *сильно связным*, если для любых двух вершин p и q существует маршрут из p в q.

Мы рассматриваем только непустые маршруты, содержащие по крайней мере одну дугу.

Маршрут *замкнут*, если его первая и последняя вершины совпадают.

Цепью (орцепью) называется маршрут без повторяющихся дуг (вершины могут повторяться).

Простая цепь — это цепь, в которой вершины не повторяются.

Циклом называется замкнутая цепь.

Простой цикл — это цикл, в котором вершины не повторяются (кроме первой и последней).

Эффект и ресурс маршрута определяются индуктивно. Пусть t — переход, σ – маршрут, такой, что конец перехода t является началом первого перехода из σ. Обозначив как $t\sigma$ маршрут, полученный сцеплением t и σ, мы получим:

$$\text{Eff}(t\sigma) =_{\text{def}} \text{Eff}(t) + \text{Eff}(\sigma); \quad \text{Supp}(t\sigma) =_{\text{def}} \text{Supp}(t) + (\text{Supp}(\sigma) \ominus \text{Eff}(t)).$$

Здесь $\ominus$ обозначает усеченное вычитание: для $x, y \in Nat$ положим $x \ominus y =_{\text{def}} \mathbf{max}\{0, x - y\}$.

Положительным (*отрицательным*) называется маршрут с положительным (соответственно отрицательным) эффектом. Очевидно, что эффект цикла не зависит от выбора начального/конечного узла.

Узел q называется *генератором*, если существует положительный маршрут от q до q (образующий положительный цикл) с нулевым ресурсом.

Лемма 2. *Любой положительный цикл содержит хотя бы один генератор.*

Доказательство. Индукция по длине цикла. Заметим также, что без ограничения общности мы можем рассматривать только циклы четной длины с чередующимися положительными и отрицательными дугами. □

3. Сильно связные односчетчиковые сети

Определение 1. *Односчетчиковая сеть называется сильно связной, если её диаграмма переходов представляет собой сильно связный орграф.*

Определение 2. *Пусть $N = (Q, T)$ — сильно связная сеть. Назовём сеть N:*

- положительным контуром*, если она содержит по крайней мере один положительный цикл;*
- отрицательным контуром*, если она содержит по крайней мере один отрицательный цикл и ни одного положительного;*
- нейтральным контуром *в прочих случаях (т.е. когда все циклы имеют нулевой эффект).*

Все дальнейшие определения и утверждения данного раздела касаются сильно связных сетей (контуров).

Определение 3. *Пусть $q \in Q$ — управляющее состояние. Определим два важных поддерживающих ресурса для q:*

- *$RSupp(q)$ — наименьшее значение счетчика, такое что в $(N, q|RSupp(q))$ все управляющие состояния достижимы;*
- *$USupp(q)$ — наименьшее значение счетчика, такое что $(N, q|USupp(q))$ не ограничена.*

Утверждение 1. *1) Если N — положительный контур, то $USupp(q)$ равно наименьшему значению среди ресурсов всех маршрутов от q до генераторов; в остальных случаях (для отрицательных и нейтральных контуров) $USupp(q)$ не определено.*
2) Если N — положительный контур, то $RSupp(q) = USupp(q)$.

Доказательство. 1) Случай отрицательного и нейтрального контуров очевиден.

Легко заметить, что в случае положительного контура неограниченность сети влечёт неограниченность всех управляющих состояний (так как сеть является сильно связной). С другой стороны, неограниченность генератора влечёт неограниченность сети (опять же, из-за её сильной связности). Генератор ограничен тогда и только тогда, когда он не достижим, то есть достижимость хотя бы одного генератора эквивалентна неограниченности сети.

2) Очевидно, что $\mathrm{RSupp}(q) \leq \mathrm{USupp}(q)$. Предположим противное: $\mathrm{RSupp}(q) < \mathrm{USupp}(q)$. Согласно определению положительного контура, найдётся хотя бы один

положительный цикл θ. Он содержит по крайней мере один генератор q'. Произвольная цепь σ от q до q' требует ресурса, не меньшего, чем $\mathrm{RSupp}(q)$ (по определению), следовательно, согласно предыдущему свойству мы можем использовать $\mathrm{RSupp}(q)$ в качестве $\mathrm{USupp}(q)$ — противоречие. □

Отметим, что:

- оба ресурса могут быть эффективно вычислены (например, при помощи алгоритма Тарьяна [16]).
- в частности, из 1) следует, что сильно связная сеть структурно ограничена (ограничена при любой начальной разметке) тогда и только тогда, когда она не является положительным контуром.

Определение 4. *Назовём наибольший общий делитель эффектов всех циклов* периодом *контура и обозначим его как* $\Delta(N)$.

Период определен только для положительных и отрицательных контуров. Контур с периодом Δ мы также будем называть Δ-контуром.

Утверждение 2. *В* Δ*-контуре:*

1. *эффект любого замкнутого маршрута кратен* Δ;
2. *для любой пары управляющих состояний* (q, q') *найдётся неотрицательное целое число* $\mathit{Off}(q, q')$ *(назовём его* смещением*), такое что* $\mathit{Off}(q, q') < \Delta$ *и для любой простой цепи* σ *от* q *до* q' *выполняется* $\mathit{Eff}(\sigma) = \mathit{Off}(q, q') + k\Delta$ *для некоторого* $k \in \mathbf{Z}$;
3. *для любого маршрута* σ *от* q *до* q' *выполняется* $\mathit{Eff}(\sigma) = \mathit{Off}(q, q') + k\Delta$ *для некоторого* $k \in \mathbf{Z}$.

Доказательство. 1) Очевидно, так как любой замкнутый маршрут представляет собой комбинацию циклов (простой цикл и конечное число циклов, прикрепленных к его вершинам).

2) Пусть σ_1 и σ_2 — две различные простые цепи от q до q'. Пусть также

$$\mathrm{Eff}(\sigma_1) = \delta_1 + k_1\Delta \quad \text{и} \quad \mathrm{Eff}(\sigma_2) = \delta_2 + k_2\Delta,$$

где $\delta_1, \delta_2 \in \mathit{Nat}$, $\delta_1 < \Delta$, $\delta_2 < \Delta$ и $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$. Достаточно доказать, что $\delta_1 = \delta_2$ (и, следовательно, равно $\mathrm{Off}(q_1, q_2)$).

Сеть является сильно связной, следовательно, существует простая цепь σ' от q' до q. Пусть $\mathrm{Eff}(\sigma') = e + m\Delta$, где $e \in \mathit{Nat}$, $e < \Delta$ и $m \in \mathbf{Z}$.

Маршруты $\sigma_1\sigma'$ и $\sigma_2\sigma'$ замкнуты, следовательно,

$$\mathrm{Eff}(\sigma_1\sigma') = n_1\Delta \quad \text{и} \quad \mathrm{Eff}(\sigma_2\sigma') = n_2\Delta \quad \text{для некоторых} \quad n_1, n_2 \in \mathbf{Z}.$$

Таким образом, мы имеем

$$\delta_1 + k_1\Delta + e + m\Delta = n_1\Delta; \qquad \delta_2 + k_2\Delta + e + m\Delta = n_2\Delta.$$

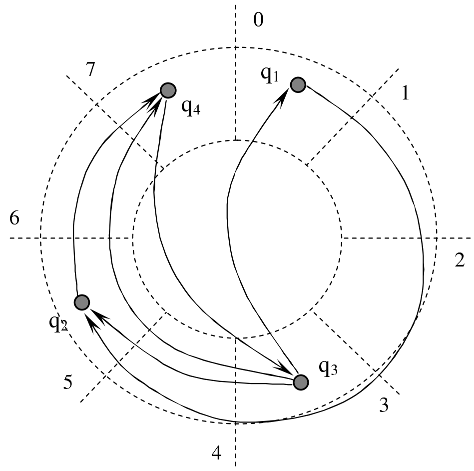


Рис. 2. Графическое представление Δ-контура при $\Delta = 8$

Равенства могут быть переписаны:

$$\delta_1 + e = (n_1 - k_1 - m)\Delta; \quad \delta_2 + e = (n_2 - k_2 - m)\Delta.$$

Натуральные числа δ_1, δ_2 и e меньше, чем Δ. Следовательно, $\delta_1 = \delta_2$.

3) Заметим, что любой маршрут от q до q' представляет собой простую цепь от q до q', к узлам которой прицеплено конечное число замкнутых маршрутов. $\square$

Это утверждение, в частности, показывает, что положительные и отрицательные контуры обладают удобным графическим представлением. Диаграмма переходов контура может быть изображена в виде кольца, состоящего из Δ секторов. Например, контур на Рис. 2 содержит 8 секторов (здесь мы видим сильно связную сеть с Рис. 1, изображенную в контурном виде). Отсчет секторов начинается с верхнего правого сектора (с нулевым номером) по часовой стрелке. Сектор с номером n соответствует смещению n относительно нулевого. Если начальное управляющее состояние q поместить в сектор 0, то все остальные управляющие состояния однозначным образом распределятся по секторам в соответствии со своими смещениями относительно q (например, если $\mathrm{Off}(q, q') = n$, то q' попадает в n-й сектор). Положительные переходы будут ориентированы по часовой стрелке, отрицательное — против часовой стрелки. Эффект перехода естественным образом определяется его длиной (количеством пересекаемых границ секторов).

3.1. Положительные контуры

Обозначим через C_+ и C_- конечные множества всех положительных и отрицательных циклов положительного контура. Рассмотрим множество замкнутых маршрутов C_*, построенное из элементов C_- добавлением наименьшего необходимого числа совместимых (инцидентных) положительных циклов таким образом, чтобы получались замкнутые положительные маршруты:

$$C_* =_{\mathrm{def}} \{\sigma^k\theta \mid \theta \in C_-,\ \sigma \in C_+,\ k \in Nat, \ \text{ такие что } \ \mathrm{Eff}(\sigma^k\theta) > 0 \ \wedge \ \mathrm{Eff}(\sigma^{k-1}\theta) \leq 0\}.$$

Поскольку сеть сильно связная, подходящий положительный цикл всегда найдётся. Заметим также, что наибольший эффект среди всех замкнутых маршрутов из C_* не превышает наибольший эффект среди всех положительных циклов (в противном случае значение $\mathrm{Eff}(\sigma^{k-1}\theta)$ было бы положительным).

Обозначим $C =_{\mathrm{def}} C_+ \cup C_*$. Это множество содержит все положительные циклы и некоторое количество замкнутых положительных маршрутов. Заметим, что, поскольку каждый положительный цикл содержит генератор, каждый элемент C по построению также содержит генератор.

Обозначим множество всех эффектов элементов множества C как E.

Лемма 3. *Для положительного Δ-контура выполняется НОД$\{E\} = \Delta$.*

Доказательство. Обозначим $g = \text{НОД}\{E\}$. Предположим противное: $g \neq \Delta$.

Рассмотрим случай $g < \Delta$. Он невозможен, так как согласно Утверждению 2(1) эффект любого замкнутого маршрута кратен Δ.

Рассмотрим случай $g > \Delta$. Поскольку C содержит все положительные циклы, должен существовать отрицательный цикл θ, эффект которого не делится на g. С другой стороны, C содержит замкнутый положительный маршрут $\phi = \sigma^k\theta$, где σ — положительный цикл, $k \in Nat$. $\mathrm{Eff}(\phi) = \mathrm{Eff}(\sigma^k\theta) = k\mathrm{Eff}(\sigma) + \mathrm{Eff}(\theta)$. Цикл σ — положительный, то есть он принадлежит C и его эффект делится на g. Следовательно, $\mathrm{Eff}(\phi) = kmg + \mathrm{Eff}(\theta)$ для некоторого $m \in Nat$. Замкнутый маршрут ϕ также принадлежит C, то есть $\mathrm{Eff}(\phi) = ng$ для некоторого $n \in Nat$. Мы получили, что $kmg + \mathrm{Eff}(\theta) = ng$, то есть $\mathrm{Eff}(\theta)$ делится на g — противоречие. □

Пусть q — управляющее состояние, $U(q)$ – множество всех положительных замкнутых цепей (циклов) от q до q, содержащих генераторы, $F(q)$ – множество эффектов этих цепей. Обозначим $W(q) =_{\mathrm{def}} \text{НОК}\{F(q)\}$ – наименьшее значение эффекта, которое может , быть получено "посещениями" любого из генераторов от управляющего состояния q. Другими словами, $W(q)$ — это наименьшее число, которое мы можем получить, итерируя любой цикл из множества $U(q)$. Очевидно, что $W(q)$ кратно Δ.

Теорема 1. *Пусть $N = (Q, T)$ — положительный Δ-контур, $e \in Nat$ – наибольший эффект среди всех циклов в N, $q \in Q$ – управляющее состояние. Тогда*

$$\mathcal{R}(N, q|u)[q] = DLin\{USupp(q), USupp(q) + W(q) + e^2, \{\Delta\}\}.$$

Доказательство. Другими словами, теорема утверждает, что, обозначив $u = \mathrm{USupp}(q)$ и $w = W(q)$, множество $\mathcal{R}(N, q|u)[q]$ является объединением двух непересекающихся множеств: конечного множества R_0, элементы которого не превосходят $u + w + e^2$, и арифметической прогрессии R_∞ с базой $u + w + e^2$ и разностью Δ :

$$\mathcal{R}(N, q|u)[q] = R_0 \bigsqcup R_\infty, \quad \text{где}$$

$$R_0 \subseteq \big\{x \in Lin\big\{u, \{\Delta\}\big\} \mid x < u + w + e^2\big\}, \quad R_\infty = Lin\big\{u + w + e^2, \{\Delta\}\big\}.$$

1) Рассмотрим достижимые значения счетчика, не превосходящие $u + w + e^2$. Достаточно показать, что "дистанция" от u до любого из них кратна Δ. Это следует

из Утверждения 2(3) и того очевидного факта, что $\mathrm{Off}(q,q) = 0$. Таким образом, структура R_0 доказана.

2) Рассмотрим достижимые значения счетчика, равные и превосходящие величину $u + w + e^2$.

Напомним, что $u = \mathrm{USupp}(q)$. Из Утверждения 1 (2) мы получим $u = \mathrm{RSupp}(q)$. Следовательно, все генераторы уже достижимы.

Построим множества C и E способом, описанным в Лемме 3. Также напомним, что $\max\{E\} = e$ по построению C.

Множество эффектов всех возможных замкнутых маршрутов, начинающихся в q, содержит в себе линейное множество $X = Lin\{w, E\}$. Заметим, что слагаемое w добавлено с единственной целью — чтобы гарантировать, что всевозможные линейные комбинации эффектов из E добавляются к одному и тому же базовому значению — ведь все соответствующие генераторы "посещаются" от q маршрутами (повторяющимися циклами) с одним и тем же эффектом w.

Из Факта 2 следует, что множество элементов X, превосходящих $w + e^2$, представляет собой арифметическую прогрессию с разностью НОД$\{E\}$. Из Леммы 3 следует, что НОД$\{E\} = \Delta$. Дополнительно, из Утверждения 2(3) и $\mathrm{Off}(q,q) = 0$ мы получим, что от управляющего состояния q нет замкнутых маршрутов с эффектами больше e^2, не вошедших в X. Действительно, Δ — наименьшее расстояние между достижимыми значениями счетчика для q (как и для любого другого управляющего состояния). Таким образом, структура R_∞ также доказана. □

Замечание 1. *Мы полагаем, что полученные оценки для "нижней границы регулярности" ($u + w + e^2$) могут быть улучшены (уменьшены). Например, можно попытаться уменьшить w, используя "ресурсы" из u. Однако это наверняка приведёт к ещё более тяжеловесным формулам.*

3.2. Отрицательные контуры

Теорема 2. *Пусть $N = (Q, T)$ — отрицательный Δ-контур, $e \in \mathbf{Z}_-$ – наименьший эффект цикла в N, $f \in \mathbf{Z}_-$ – наименьший эффект перехода в N, $q \in Q$ – управляющее состояние. Обозначим $\overline{\mathcal{R}}(N,q) =_{def} \{c \in Nat \mid 0 \in \mathcal{R}(N, q|c)[q]\}$. Тогда*

$$\overline{\mathcal{R}}(N,q) = DLin\{0, |f| + |e|^2, \{\Delta\}\}.$$

Доказательство. Заметим, что ресурс $|f|$ достаточен для запуска любого цикла в сети. □

Множество $\overline{\mathcal{R}}(N,q)$ полностью описывает все возможные уменьшения счетчика, которые может произвести отрицательный контур.

3.3. Соединение контуров

Определение 5. *Пусть $X \subseteq Nat$, $Y \subseteq Nat$. Через $X + Y$ и $X \ominus Y$ обозначим множества, полученные, соответственно, прибавлением/вычитанием элементов Y к элементам/из элементов X (сдвиги из Y применены к числам из X):*

$$X + Y =_{def} \{x + y \in Nat \mid x \in X, y \in Y\}.$$

$$X \ominus Y =_{def} \{x \ominus y \in Nat \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Утверждение 3. *Пусть* $X = DLin\{a, b, \{c\}\}$ *и* $Y = \{d\}$, *где* $a, b, c, d \in Nat$. *Тогда*

$$X + Y = DLin\{a + d, b + d, \{c\}\};\ X \ominus Y = DLin\{a \ominus d, b \ominus d, \{c\}\}.$$

Доказательство. Очевидно. □

Утверждение 4. *Если* $X = DLin\{a, b, \{c\}\}$ *и* $Y = DLin\{d, e, \{f\}\}$, *где* $a, b, c, d, e, f \in Nat$, *то, обозначив* $g =$ *НОД*(c, f), *мы имеем*

$$X + Y = DLin\big\{a + d, b + e + g(c/g - 1)(f/g - 1), \{g\}\big\}.$$

Доказательство. Легко убедиться в том, что неполная (“стираемая”) часть $X + Y$ действительно имеет такую структуру (поскольку если слагаемые делятся на g, то и сумма тоже делится на g).

Рассмотрим бесконечную часть. Заметим, что все элементы $X+Y$, превышающие $b + e$, могут быть получены только прибавлением линейных комбинаций из c и f. Из Леммы 1 следует, что множество всех линейных комбинаций, превышающих $g(c/g - 1)(f/g - 1)$, является арифметической прогрессией с разностью g. □

Утверждение 5. *Если* $X = DLin\{a, b, \{c\}\}$ *и* $Y = DLin\{d, e, \{f\}\}$, *где* $a, b, c, d, e, f \in Nat$, *то, обозначив* $g =$ *НОД*(c, f), *мы имеем*

$$X \ominus Y = DLin\big\{a \ominus d, b \ominus e + g(c/g - 1)(f/g - 1), \{g\}\big\}.$$

Доказательство. Очевидно. □

Утверждения 4 и 5 показывают, что, если подать “на вход” контуру ограниченно неполное линейное множество, то на выходе также получится ограниченно неполное линейное множество. Более того, граничное значение, отделяющее хаотичную неполную “голову” от простого бесконечного “хвоста”, растёт при этом достаточно медленно. Также заметим, что если в положительном контуре имеются отрицательные циклы, то их эффект может только уменьшить значение этого граничного значения.

4. Произвольные односчетчиковые сети

4.1. Деревья контуров

Любая односчетчиковая сеть N содержит конечное число сильно связных компонент. Как известно из теории графов, если все вершины внутри каждой сильно связной компоненты орграфа объединить в единую “супервершину”, то результирующий “сжатый” орграф $\hat{N}$, сстоящий из таких “супервершин” (граф-конденсация) будет ациклическим (Рис. 3).

Путем копирования “супервершин” ациклический орграф $\hat{N}$ очевидным образом может быть трансформирован в дерево $\tilde{N}$ (Рис. 4).

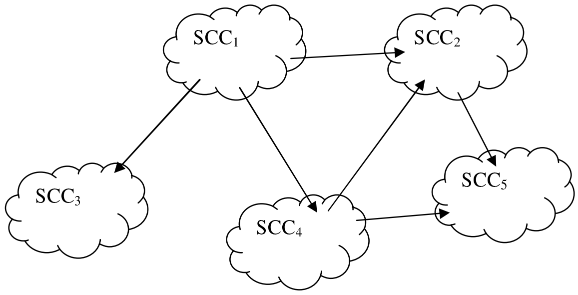


Рис. 3. Результат конденсации сильно связных компонент

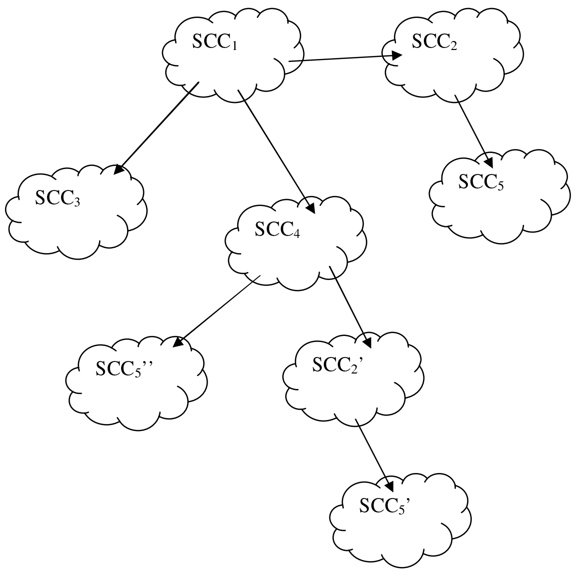
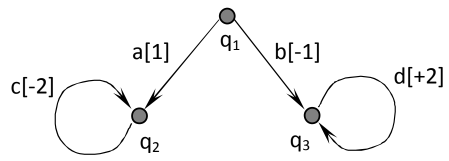
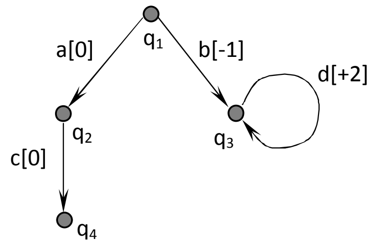


Рис. 4. Конденсированное дерево сильно связных компонент





Начальное состояние – $q_1|1$.

Рис. 5. Неправильно (слева) и правильно (справа) организованные односчетчиковые сети, порождающие один и тот же язык

Таким образом, любая односчетчиковая сеть может быть преобразована в дерево контуров. Каждому управляющему состоянию такой сети соответствует либо конечное, либо ограниченно неполное линейное множество достижимых значений счетчика. Периоды и граничные значения таких неполных линейных множеств являются структурными свойствами соответствующих контуров и не зависят от начального состояния сети. Грубо говоря, для односчетчиковых сетей проблема достижимости является *структурной* проблемой. Бесконечная часть множества достижимости оказывается слишком легко предсказуемой.

4.2. Правильные сети

Сравним две сети, изображенные на Рис. 5. Они порождают один и тот же язык $\{ac, bd, bdd, \ldots\}$. Однако сразу видно, что правая сеть "проще" — ветвь "ac" не использует счетчик. Цикл "c" в левой сети на самом деле избыточен, поскольку переход может сработать только один раз. Этот цикл можно рассматривать как "ошибку проектирования" – мы использовали неограниченное хранилище (счетчик) для хранения априорно ограниченной величины (количества срабатываний перехода "c"). Это подобно тому, как если бы мы использовали целочисленную переменную для хранения булевских значений. В каком-то другом контексте поведение этих двух сетей может стать весьма различным (например, при начальном состоянии $q_1|3$ левая сеть будет дополнительно генерировать "acc").

Неформально говоря, сеть является *правильной* (правильно организованной), если она использует свой счетчик только при порождении бесконечной части множества достижимости. Как мы покажем, неправильность является устранимой проблемой — для любой односчетчиковой сети существует эквивалентная ей правильная, которую можно эффективно построить.

Пусть $N = (Q, T)$ — односчетчиковая сеть.

Определение 6. *Размеченная сеть* $(N, q_0|c_0)$ *называется* правильной, *если для любого* $m \in Nat$ *выполняется или* $\mathcal{R}(N, q_0|c_0 + m) = \big\{(q|c+n) : (q|c) \in \mathcal{R}(N, q_0|c_0)\big\}$, *или* $\mathcal{R}(N, q_0|c_0) = \big\{(q|c+n) : (q|c) \in \mathcal{R}(N, q_0|c_0 + m)\big\}$ *для некоторого* $n \in Nat$.

Другими словами, множество $\mathcal{R}(N, q_0|c_0+m)$ может быть получено из множества $\mathcal{R}(N, q_0|c_0)$ посредством сдвига. Очевидно, что

Утверждение 6. *Если $(N, q_0|c_0)$ — правильная, то $(N, q_0|c_0 + m)$ — правильная для любого $m \in Nat$.*

Неформально, сеть является правильной, если начального значения счетчика достаточно для запуска всех возможных циклов и ветвей в графе достижимости (как мы показали в предыдущем разделе, этот граф бесконечен в общем случае, однако имеет достаточно простую структуру). Сеть не является правильной, если начальное значение счетчика используется также как часть конечной “управляющей подсистемы” сети. Действительно, если какой-нибудь из циклов или какая-нибудь из ветвей $\mathcal{R}(N, q_0|c_0+m)$ недоступна из $\mathcal{R}(N, q_0|c_0)$, то она “отключена” срабатыванием какого-то элемента сети (отрицательного цикла, как будет видно далее), который использует счетчик в “конечном” стиле — в качестве невозобновляемого ресурса.

Рассмотрим некоторые дополнительные определения:

Определение 7. *Управляющее состояние $q \in Q$ называется* правильным, *если существует $C \in Nat$, такое что сеть $(N, q|C)$ правильна. Наименьшее из удовлетворяющих этому условию значений C называется* правильным ресурсом *для управляющего состояния q.*

Односчетчиковая сеть называется структурно правильной, *если все её управляющие состояния правильны.*

Односчетчиковая сеть называется структурно неправильной, *если ни одно из её управляющих состояний не является правильным.*

Односчетчиковые контуры обладают рядом ценных свойств с точки зрения структурной правильности:

Утверждение 7. *Пусть $N = (Q, T)$ — положительный Δ-контур, $q_0 \in Q$ — управляющее состояние. Тогда, обозначив $z = RSupp(q_0)$, для любого $m \in Nat$ имеем*

$$\mathcal{R}(N, q_0|z+m) = \begin{cases} \big\{(q|c+m) : (q|c) \in \mathcal{R}(N, q_0|z)\big\}, & \text{если в диаграмме переходов } N \\ & \text{нет отрицательных циклов;} \\ \big\{(q|c+(m \textbf{ mod } \Delta)) : (q|c) \in \mathcal{R}(N, q_0|z)\big\}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Случай контура без отрицательных циклов тривиален.

Из Утверждения 1(2) получим, что $\mathrm{RSupp}(q_0) = \mathrm{USupp}(q_0)$ и, следовательно, этого ресурса достаточно для порождения любого неограниченного поведения контура. Таким образом, все возможные вычитания (по модулю Δ), производимые отрицательными циклами, уже учтены в $\mathcal{R}(N, q_0|\mathrm{RSupp}(q_0))$. □

Таким образом, мы получаем непосредственное следствие:

Следствие 1. *Каждое управляющее состояние q положительного контура правильно с ресурсом $RSupp(q)$.*

Другие тривиальные свойства правильной организованности:

Утверждение 8. *1. Любой неотрицательный контур структурно правилен.*

2. Любой отрицательный контур структурно неправилен.

Доказательство. (1) Следует из определения структурной правильности и Следствия 1.

(2) Предположим противное: управляющее состояние $q \in Q$ правильно с ресурсом $c \in Nat$. Очевидно, что множество достижимости отрицательного контура конечно при любом начальном состоянии. Следовательно, существует $m \in Nat$, такое что $|\mathcal{R}(N, q|c)| = m$. Более того, из определения правильности получим $|\mathcal{R}(N, q|c + k)| = m$ для любого $k \in Nat$.

Пусть s — ресурс некоторого отрицательного цикла, начинающегося от состояния q (поскольку N сильно связна, такой цикл найдётся всегда). Очевидно, что $(q|c) \in \mathcal{R}(N, q|c + s)$, и, более того, $(q|c + i * s) \in \mathcal{R}(N, q|c + m * s)$ для любого $i \in Nat$, такого что $0 \leq i \leq m$. Но из этого следует, что $|\mathcal{R}(N, q|c + m * s)| > m$ — противоречие. □

Рассмотрим произвольные односчетчиковые сети, представленные в форме деревьев контуров. Контуры, непосредственно достижимые от корня (без прохода через другие положительные или отрицательные контуры), назовём *верхними*.

Утверждение 9. *Размеченная односчетчиковая сеть* $(N, q_0|c_0)$ *правильна тогда и только тогда, когда выполнены два условия:*

1. *в дереве контуров все верхние контуры неотрицательны;*

2. *значение* c_0 *не меньше максимального правильного ресурса входных узлов всех верхних контуров.*

Доказательство. ($\Leftarrow$) – очевидно.

($\Rightarrow$) Предположим противное.

Во-первых, предположим, что в дереве один из верхних контуров отрицателен. В таком случае мы имеем ситуацию, подобную изображенной на Рис. 5. Увеличивая начальное значение счетчика, мы будем производить все более длинные последовательности вычитаний и, следовательно, постоянно увеличивающееся в размерах множество достижимых значений счетчика для управляющих состояний соответствующего отрицательного контура — противоречие с определением правильности.

Далее, предположим, что не выполняется второе условие. Это означает, что в дереве имеется неотрицательный верхний контур, для полноценного срабатывания которого не хватает имеющегося начального ресурса. Опять же, при увеличении начального значения счетчика мы получим увеличение множеств достижимости — противоречие. □

Правильные сети не содержат избыточных отрицательных контуров (которые хорошо видны в соответствующем дереве). Очевидно, что даже если такой контур присутствует, для любого начального значения счетчика он произведёт только конечное число достижимых состояний (с управляющими состояниями из данного контура), и, следовательно, может быть безболезненно заменен на эквивалентный конечный автомат, не использующий счетчик (см. на Рис. 5).

Следствие 2. *Для любой односчетчиковой сети существует эквивалентная (обладающая тем же множеством достижимости) правильная односчетчиковая сеть.*

Правильные сети могут рассматриваться как “корректно сконструированные”. Более того, правильные деревья контуров могут использоваться в качестве “структурно правильного” способа конструирования односчетчиковых сетей.

5. Заключение

Односчетчиковые сети являются достаточно хорошо изученным формализмом с большим количеством установленных свойств. Тем не менее, насколько нам известно, представленный теоретико-числовой подход к полулинейному описанию их пространства состояний является новым.

Сильно связные односчетчиковые сети названы здесь *контурами*. На наш взгляд, этот термин достаточно оправдан в силу наличия у них “кругового” графического представления. Мы также считаем, что такое визуальное описание может быть весьма полезным в приложениях.

Дальнейшие исследования могут касаться проблемы *оптимального* представления односчетчиковых сетей. Например, легко заметить, что в некоторых случаях последовательная композиция из двух контуров может быть заменена одним контуром (иногда даже меньшего размера). Проблема поиска *нормальной формы* в классе односчетчиковых сетей по-прежнему открыта.

Кроме того, представляется интересным изучить проблемы определения правильности *помеченных* односчетчиковых сетей. В этом случае можно определить более сильные понятия правильности, основанные не на эквивалентности множеств достижимости, а на эквивалентности трасс (языков) или даже бисимуляционной эквивалентности и отношений на её основе [2].

Список литературы

1. Abdulla P. A., Čerans K. Simulation is decidable for one-counter nets // CONCUR’98. Lecture Notes in Computer Science. 1998. Vol. 1466. P. 253–268.

2. Bashkin V. A., Lomazova I. A. Resource similarities in Petri net models of distributed systems // PaCT’2003. Lecture Notes in Computer Science. 2003. Vol. 2763. P. 35–48.

3. Башкин В. А. Верификация на основе моделей с одним неограниченным счетчиком // Информационные системы и технологии. 2010. № 4(60). С. 5–12 (Bashkin V. A. Verification based on the models with a single unbounded counter // Information Systems and Technologies. 2010. № 4(60). P. 5–12 [in Russian]).

4. Башкин В. А. Построение приближений бисимуляции в односчетчиковых сетях // Моделирование и анализ информационных систем. 2011. Т. 18, № 4. С. 34–44 (Bashkin V. A. Approximating Bisimulation in One-counter Nets // MAIS. 2011. Vol. 18, № 4. P. 34–44 [in Russian]).

5. Bashkin V. A. One-counter Circuits // Concurrency, Specification and Programming. CSP 2012 Workshop Proceedings. Vol. 1. Berlin, Germany: Humboldt-Universitat zu Berlin, 2012. P. 25–36.

6. Brauer A. On a Problem of Partitions // American Journal of Mathematics. 1942. **64**(1).P. 299–312.

7. Erdös P., Graham R. L. On a linear diophantine problem of Frobenius // Acta Arithmetica. 1972. **21**. P. 399–408.

8. Göller S., Haase C., Ouaknine J., Worrell J. Model checking succinct and parametric one-counter automata // Automata, Languages and Programming. Lecture Notes in Computer Science. 2010. Vol. 6199. P. 575–586.

9. Göller S., R. Mayr, To A.W. On the computational complexity of verifying one-counter processes // Proc. of LICS '09, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, 2009.

10. Jančar P., Kučera A., Moller F., Sawa Z. DP lower bounds for equivalence-checking and model-checking of one-counter automata // Information and Computation. 2004. **188**(1). P. 1–19.

11. Kučera A. Efficient verification algorithms for one-counter processes // Automata, Languages and Programming. Lecture Notes in Computer Science. 2000. Vol. 1853. P. 317–328.

12. Kuzmin E. V., Chalyy D.Ju. On the Reachability Set of Automaton Counter Machines // Automatic Control and Computer Sciences. 2011. Vol. 45, No. 7. P. 444–451.

13. Liubicz U. I. Bounds for the optimal determinization of nondeterministic autonomic automata // Sibirskii Matemat. Journal. 1964. **2**. P. 337–355.

14. Serre O. Parity games played on transition graphs of one-counter processes // Foundations of Software Science and Computation Structures. Lecture Notes in Computer Science. 2006. Vol. 3921. P. 337–351.

15. Sylvester J. J. Question 7382 // Mathematical Questions with their Solutions, Educational Times. 1884. **41**. P. 21.

16. Tarjan R. Depth-First Search and Linear Graph Algorithms // SIAM Journal on Computing. 1972. **1**(2). P. 146–160.

On the Efficient Representation of an Unbounded Resource with the Aid of One-Counter Circuits

Bashkin V.A.

P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: one-counter nets, VASS, Petri nets, reachability, circuit

A class of infinite-state automata with a simple periodic behaviour and a convenient graphical representation is studied. A positive one-counter circuit is defined as a strongly connected one-counter net (one-counter nondeterministic finite automata without zero-testing) with at least one positive cycle. It is shown that in a positive circuit an infinite part of a reachability set is an arithmetic progression; numerical properties of this progression are estimated. A specific graphical representation of circuits is presented. General one-counter nets are equivalent to Petri Nets with at most one unbounded place and to pushdown automata with a single-symbol stack alphabet. It is shown that an arbitrary one-counter net can be represented by a finite tree of circuits. A one-counter net is called sound, if a counter is used only for “infinite-state” (periodic) behaviour. It is shown that for an arbitrary one-counter net an equivalent sound net can be effectively constructed from the corresponding tree of circuits.

Сведения об авторе:
Башкин Владимир Анатольевич,
ЯрГУ им. П.Г. Демидова,
канд. физ.-мат. наук, доцент