*А. Н. Шайкин*

# Дедуктивный вывод на графовых структурах

**Аннотация:** *В статье рассмотрены наиболее известные графовые структуры логического вывода. Представлена новая модель дедуктивного вывода и операторы ее преобразования. Эта графовая модель позволяет одновременно использовать как оператор получения резольвенты, так и оператор получения нового благоприятного набора. При этом резольвирование может осуществляться не только по контрарной паре, а и по любому благоприятному набору, что дает возможность при подборе эвристик и распараллеливании значительно ускорить процесс вывода.*

**Ключевые слова:** *дедуктивный вывод, резолюция, благоприятный набор, семантическое дерево, аналитическая таблица, граф связей, граф дизъюнктов, сеть Петри.*

***Шайкин Александр Николаевич,***
***кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики РГСУ.***
***e-mail: rgsukvm@mail.ru***

**1. Введение.**

Общеизвестно, что исчисление предикатов является неразрешимым. Не существует метода для установления общезначимости или ее отсутствия для произвольной формулы исчисления предикатов. Тем не менее, если формула исчисления предикатов общезначима, то существует процедура для установления этого факта.

Для того чтобы доказать, что из множества формул логически следует данная, берут отрицание этой формулы и добавляют его к исходному множеству формул. После чего доказывают противоречивость формулы, являющейся конъюнкцией формул исходного множества и данной. Эта конъюнкция претерпевает вынос кванторов, их элиминацию и сколемизацию, а также приведение уже бескванторного выражения к конъюнктивной нормальной форме, которую далее рассматривают как набор дизъюнктов.

Далее обычно применяют наиболее распространенный метод логического вывода — метод резолюций [1]. Эффективность процедуры логического вывода приобретает особое значение при большом количестве этих дизъюнктов, их длине и экспоненциальном росте порождаемых резольвент. Здесь желательно сокращать на каждом шаге резольвирования число рассматриваемых контрарных пар и использовать алгоритм, позволяющий делать наиболее удачный выбор контрарной пары, исключать из дальнейшего рассмотрения дизъюнкты с чистыми литерами, тавтологии и поглощаемые дизъюнкты, иметь возможность применять как один метод логического вывода параллельно в нескольких направлениях, так и одновременно разные методы логического вывода.

**2. Разные графовые структуры дедуктивного вывода.**

Полное семантическое дерево [2] для множества дизъюнктов есть конечное бинарное дерево, в ярусе $i$ которого из каждой вершины $N$ исходят два ребра, из которых одно помечено литерой $p_i$, а другое — литерой $\neg p_i$. Всякой ветви дерева можно поставить в соответствие некоторую интерпретацию для множества дизъюнктов, и семантическое дерево исчерпывает все интерпретации. Вершина в семантическом дереве называется опровергающей, если путь от корня до вершины задает такие истинностные значения переменных, при которых опровергается некоторый дизъюнкт, но при этом никакая другая вершина от корня до данной вершины указанным свойством опровержимости не обладает. Множество дизъюнктов невыполнимо тогда и только тогда, когда любая ветвь в семантическом дереве имеет опровергающую вершину.

Метод аналитических таблиц [3] основан на опровержении и оперирует с формулами, представленными в ДНФ. Вывод осуществляется на бинарных деревьях, вершины которых отмечены формулами, причем вершина называется концевой, если она не имеет потомков, простой, если она имеет только одного потомка и дизъюнктивной, если она имеет двух потомков. Каждая ветвь дерева представлена конъюнкцией формул, а само дерево — дизъюнкцией своих ветвей. Замкнутой ветвью называется ветвь, которая содержит контрарную пару. Дерево называется замкнутым, если все его ветви замкнуты. В корень дерева помещается отрицание выводимой формулы. Далее, применяя правила [4] для выводимости и невыводимости отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, всеобщности и существования, строим ветви, вершины которых помечаются все более и более упрощенными подформулами, пока ветвь не станет замкнутой. Замкнутость дерева свидетельствует об опровержении отрицания выводимой формулы.

Граф связей [5] ставит в соответствие каждому предикату исходного множества дизъюнктов вершину, а ребра соединяют предикаты, образующие контрарную пару, т. е. пару, допускающую резольвирование после применения унификатора. Вершины, соответствующие вершинам одного дизъюнкта, группируются вместе. Таким образом, в графе связей с каждым ребром ассоциируется резольвента, которую, после ее генерации, добавляют в граф. Новые связи резольвенты получаются наследованием связей ее предков. Когда резольвента добавлена в граф, ребро, которое породило резольвенту, удаляется из графа связей. Если вершина не имеет связей, то дизъюнкт, которому она принадлежит, удаляется из графа связей вместе с инцидентными ему ребрами. Также подлежит удалению дизъюнкт и инцидентные ему ребра, если он является тавтологией. Производятся упрощающие операции типа факторизации и поглощения. Успешное завершение процедуры вывода состоит в получении пустой резольвенты.

Дедуктивный вывод на графе дизъюнктов [6], также как и вывод на графе связей, относится к выводам резолюционного типа на основе опровержения. Граф дизъюнктов состоит из дизъюнктных вершин, предикатных вершин и дуг, идущих от дизъюнктных вершин к предикатным вершинам, если данный дизъюнкт содержит данный предикат. Если предикат входит в дизъюнкт без отрицания, то соответствующая дуга имеет один цвет, а если с отрицанием, то другой. Дуги помечаются кортежами соответствующих переменных. Предикатная вершина называется свободной от мультидуг, если данная предикатная вершина не соединена ни с какой дизъюнктной вершиной более чем одной дугой. Имеется два основных оператора преобразования графа дизъюнктов. Первый, оператор удаления вершины, применяется к предикатным вершинам, свободным от мультидуг. Пусть таковой является предикатная вершина $P$, связанная с дизъюнктными вершинами $C_1, \ldots, C_n$. Тогда после всевозможных резольвирований дизъюнктов $C_1, \ldots, C_n$ по предикату $P$ из графа удаляются дизъюнктные вершины $C_1, \ldots, C_n$ и добавляются новые вершины, полученные резольвированием $C_1, \ldots, C_n$. Успешное завершение процедуры вывода состоит в получении пустой сети. Вторым является оператор расщепления вершины [7], который применяется при наличии в предикатной вершине мультидуг. Если имеется множество дизъюнктов $\{P \vee \Phi, \Phi\}$, где $\Pi \vee \Gamma$ — дизъюнкт, в котором $\Gamma$ тоже содержит литеру $P$, а $\Phi$ — любое подмножество дизъюнктов. Тогда после применения оператора расщепления вершины множество дизъюнктов примет вид $\{P_1 \vee \Gamma, [\Phi]^{P_1/P}, \Phi\}$, где $[\Phi]^{P_1/P}$ — подстановка в $\Phi$ литеры $P_1$ вместо $P$.

### 3. Сети Петри как модели дедуктивного вывода.

В качестве модели дедуктивного вывода автором [8] был предложен новый класс сетей Петри высокого уровня для проведения рассуждений с помощью моделирования дизъюнктов Хорна фрагментами этой сети и распространения кортежей переменных, соответствующих предикатам, по сети. Фрагменты предложенной сетевой структуры моделируют правила, а ее динамика отражает порождение резольвент.

Дизъюнкт Хорна имеет вид $\neg d_{i1}(\vec{x}_{i1}) \vee \neg d_{i2}(\vec{x}_{i2}) \vee \ldots \vee \neg d_{i1}(\vec{x}_{i1}) \vee \neg d_i(\vec{x}_i)$ ($i = 1, \ldots, m$, где $m$ — множество имеющихся дизъюнктов, а $\vec{x}_{ij}$ и $\vec{x}_i$ — кортежи переменных в предикатах $d_{ij}$ и $d_i$, соответственно, где $j = 1, \ldots, n$). Каждому дизъюнкту соответствует переход $t_i$ сети Петри; каждому предикатному символу $d$ соответствует позиция $p$ сети Петри; из каждой позиции $p_i$, соответствующей головному предикату $d_i$ дизъюнкта, проводится стрелка к переходу $t_i$, соответствующему данному дизъюнкту, и эта стрелка помечается соответствующим данному предикату $d_i$ кортежем переменных $\vec{x}_i$; из каждого перехода $t_i$, соответствующего дизъюнкту, проводятся стрелки к позициям $p_{ij}$, соответствующим предикатам $d_{ij}$ из тела дизъюнкта, и эти стрелки помечаются соответствующими данным предикатам $d_{ij}$ кортежами переменных $\vec{x}_{ij}$.

В предложенной модели метки содержат кортежи $\vec{x}$ значений переменных соответствующих предикатов $d$. Целевой дизъюнкт моделируется не фрагментом сети, а помещением кортежей $\vec{x}_{G1}, \vec{x}_{G2}, \ldots, \vec{x}_{Gn}$ в соответствующие позиции $p_{G1}, p_{G2}, \ldots, p_{Gn}$ сети Петри. Маркировкой $M$ назовем совокупность меток (пустых или непустых наборов кортежей) в позициях сети Петри.

Скажем, что кортеж переменных $\vec{x}_i'$ согласуется посредством унификатора $u$ с кортежем переменных $\vec{x}_i$, если существует подстановка $u$ (называемая унификатором) в кортеж переменных $\vec{x}_i'$ таких значений, что $u\,(\vec{x}_i') \subset \vec{x}_i$. Перемещение маркировки осуществляется следующим образом. Переход $t_i$ считается возбужденным в маркировке $M$ с помощью кортежа переменных $\vec{x}_i'$ и унификатора $u$ тогда и только тогда, когда маркировка $M$ содержит кортеж переменных $\vec{x}_i'$ в позиции $p_i$, от которой имеется стрелка, ведущая к переходу $t_i$, и этот кортеж переменных $\vec{x}_i'$ согласуется посредством унификатора $u$ с кортежем переменных $\vec{x}_i$ предиката $d_i$, соответствующего позиции $p_i$ (то есть кортежем переменных $\vec{x}_i$, которым помечена стрелка, ведущая от позиции $p_i$ к переходу $t_i$). При возбуждении перехода $t_i$ при помощи кортежа переменных $\vec{x}_i'$ и унификатора $u$ происходит: изъятие кортежа переменных $\vec{x}_i'$ из позиции $p_i$; добавление в каждую из позиций $p_{ij}$ (в которые направлены стрелки из перехода $t_i$) кортежа переменных в соответствии с тем кортежем, которым помечена идущая из перехода $t_i$ в позицию $p_{ij}$ стрелка; возможно изменение посредством унификатора $u$ кортежей в других позициях (даже таких, которые с переходом $t_i$ не соединяются ни входящими, ни выходящими стрелками).

Если предикат $d_i$ является истинным на кортеже $\vec{x}_i''$ конкретных значений переменных, то ему соответствует фрагмент сети Петри, состоящий из перехода $t_i$; позиции $p_i$, соответствующей предикату $d_i$ и стрелки, направленной от позиции $p_i$ к переходу $t_i$, помеченной кортежем $\vec{x}_i''$. Таким образом, такой переход не имеет стрелок, из него выходящих. Следовательно, кортеж переменных $\vec{x}_i'$, попавший в такую позицию $p_i$, возбуждая переход $t_i$ (при условии, что существует унификатор $u$, такой что $u(\vec{x}_i') = \vec{x}_i''$), покидает сеть Петри. При этом возможно происходит изменение посредством унификатора $u$ кортежей в других позициях. Если существует такая последовательность срабатывания переходов (с соответствующими унификаторами), что все кортежи исчезли из сети, т. е. получена пустая маркировка, то считается, что вывод целевого дизъюнкта закончился успешно.

**4. Дедуктивный вывод на дипольном графе.**

В предлагаемой автором [9] модели каждому предикатному символу ставится в соответствие дипольная вершина двудольного графа с положительным и отрицательным полюсами, а если предикатный символ имеет несколько вхождений в набор дизъюнктов, например $m$ вхождений с отрицанием и $n$ вхождений без такового, то понадобится $n \times m$ дипольных вершин, а каждому дизъюнкту — квадратную вершину двудольного графа, ребра которого соединяют квадратные вершины с полюсами дипольных вершин, если соответствующие дизъюнкты содержат соответствующие предикатные символы или их отрицания. Эти ребра помечены кортежами переменных соответствующих предикатов. Можно заранее вычислить возможные наиболее общие унификаторы.

Резольвирование предлагается проводить следующим образом. Выбирается дипольная вершина и два ее ребра так, чтобы кортежи переменных, приписанные этим ребрам, допускали унификацию. Эта дипольная вершина и два ребра удаляются. Если полученная резольвента — пустая, то вывод успешно заканчивается. Иначе добавляем квадратную вершину, соответствующую новой резольвенте, и ребра, помеченные кортежами переменных с учетом унификации, идущие к соответствующим полюсам дипольных вершин. Далее удаляем изолированные квадратные вершины, квадратные вершины с инцидентными им ребрами, соответствующие возникающим в таких ситуациях чистым или тавтологичным дизъюнктам, упрощаем на основании применения операций факторизации и поглощения дизъюнктов. В случае, когда не остается ни одного дизъюнкта, то вывод заканчивается неудачей. В противном случае выбираем очередную дипольную вершину.

**5. Дальнейшее развитие графовых моделей дедуктивного вывода.**

Пусть имеется множество дизъюнктов, противоречивость которого необходимо доказать. Предлагаемой автором в данной работе моделью дедуктивного вывода является двудольный граф, один тип вершин которого будем обозначать кружками с вписанными в них предикатными буквами или их отрицаниями. Заметим, что каждой предикатной букве будет соответствовать столько кружков, сколько она имела вхождений в множестве дизъюнктов. Другой тип вершин разобьем на два подтипа: квадратные, соответствующие дизъюнктам, и треугольные, соответствующие контрарным парам. Ребрами могут соединяться только кружки с квадратами и кружки с треугольниками. Квадрат, соответствующий дизъюнкту, соединяется ребром с кружком, соответствующим предикату, если этот дизъюнкт содержит этот предикат. При этом каждый кружок соединен не более чем с одним квадратом. Ребру, их соединяющему приписывается кортеж переменных данного предиката в данном дизъюнкте. Треугольник, соответствующий контрарной паре, в начальной стадии соединяется ребрами с двумя кружками, образующими контрарную пару. Этим ребрам приписываются кортежи переменных предикатов, соответствующих инцидентным кружкам с учетом унификации. В случае неунифицируемости треугольник с инцидентными ему ребрами отсутствует.

Для дедуктивного вывода на так введенной модели можно использовать разные методы. Сначала опишем предлагаемый оператор резольвирования (терминология используется вслед за Дж. Робинсоном). Для этого выбирается один из треугольников. Проверяется унифицируемость кортежей переменных предикатов, соответствующих смежным этому треугольнику кружкам. В отрицательном случае выбираем другой треугольник, а если таковых больше нет, то попытка вывода завершается неудачей. В положительном случае получаем резольвенту. Если резольвента пустая, то вывод успешно завершен. В противном случае, удаляем данный треугольник и инцидентные ему ребра. Вводим новый квадрат, соответствующий резольвенте, новые кружки для предикатов этой резольвенты. Соединяем эти кружки ребрами с этим квадратом и приписываем ребрам кортежи переменных предикатов резольвенты с учетом унификации. Также, соединяем эти кружки ребрами с треугольниками, если соответствующие кружки дизъюнктов-предков данной резольвенты имели связи с этими треугольниками. Далее удаляем фрагменты графа, соответствующие образовавшимся, возможно, дизъюнктам-тавтологиям, чистым дизъюнктам, упрощаем граф с учетом факторизации и поглощения дизъюнктов. Если граф после применения оператора резольвирования не содержит ни одного дизъюнкта, то процесс завершается неудачно.

В качестве другого оператора предлагается оператор получения благоприятного набора (термин «благоприятный набор» используется вслед за С. Ю. Масловым [10, 11]). Для этого выбирается один из квадратов. Для каждого кружка, связанного ребром с данным квадратом, выбираем по одному треугольнику, связанному с упомянутым кружком. Во-первых, такие треугольники можно выбрать, поскольку кружок, не соединенный ни с одним треугольником, свидетельствовал бы о том, что выбранный квадрат соответствует чистому дизъюнкту, а, следовательно, подлежал предварительному удалению вместе с соединенными с ним кружками и инцидентными им ребрами. Во-вторых, проверяем, что к выбранному набору треугольников оператор получения благоприятного набора еще не применялся. В противном случае выбираем другой квадрат. В-третьих, все кружки, соединенные с выбранными треугольниками, должны иметь допускающие унификацию кортежи переменных, приписанные соединяющим ребрам (унификацию, единую по всем кружкам, соединенным со всеми выбранными треугольниками). При отсутствии такой унификации выбираем другой квадрат, а при невозможности выбора квадрата с получением описанной унификации, делается заключение о неуспешной попытке вывода. При наличии такой унификации применяем предлагаемый оператор получения благоприятного набора, а именно, вводим новый треугольник, соединяем с ним все кружки, соединенные с выбранными треугольниками, кроме тех из них, которые соединены с выбранным квадратом. Если это множество кружков содержит только кружки, соединенные с квадратами, которым не смежны никакие другие кружки, то вывод успешно завершен. Иначе, ребра, инцидентные новому треугольнику, помечаем кортежами переменных предикатов, соответствующих инцидентным этим ребрам кружкам с учетом унификации. Для упрощения графа своевременно используем удаление фрагментов графа, избыточных для вывода, по аналогии с тем, как это делалось после применения оператора резольвирования, на основании связи между методом резолюций и обратным методом [12].

**6. Заключение.**

В данной работе рассмотрены некоторые графовые структуры дедуктивного вывода: как наиболее распространенные, так и предложенные в свое время автором, а также представлена новая модель дедуктивного вывода и операторы ее преобразования. Эта графовая модель позволяет одновременно использовать как предложенный оператор получения резольвенты, имитирующий шаги вывода в исчислении резолюций, так и предложенный оператор получения нового благоприятного набора, имитирующий шаги вывода в исчислении благоприятных наборов. При этом резольвирование может осуществляться не только по контрарной паре, а и по любому благоприятному набору, что дает возможность при подборе эвристик и распараллеливании значительно ускорить процесс вывода.

**Литература:**

1. Robinson J. A. A Machine Oriented Logic Based on the Resolution Principle // Journal of the ACM. 1965. V. 12. (Русский перевод: Машино-ориентированная логика, основанная на принципе резолюции // Кибернетический сб. Нов. сер. 7. — М.: Мир, 1970).
2. Chang C. L., Lee R. C. T. Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving. — N. Y.; London: Academic Press, 1973. (Русский перевод: Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. — М.: Наука, 1983).
3. Smullyan R. M. First-Order Logic. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer-Verlag, 1968.
4. Fitting M. First-Order Logic and Automated Theorem Proving. — N. Y.: Springer-Verlag, 1990.
5. Kowalski R. A Proof Procedure Using Connection Graphs // J. of the ACM. 1975. V. 22 (4).
6. Вагин В. Н., Кикнадзе В. Г. Дедуктивный вывод на семантических сетях в системах принятия решений // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1984. № 5.
7. Достоверный и правдоподобный вывод в интеллектуальных системах / Под ред. В. Н. Вагина, Д. А. Поспелова. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
8. Шайкин А. Н., Мотылев М. В., Троянкин А. Ю. Алгоритм нечеткого логического вывода в исчислении предикатов с использованием сетей Петри. // Проблемы управления безопасностью сложных систем: Труды XII международной конференции. Москва, декабрь 2004 г. / Под ред. Н. И. Архиповой и В. В. Кульбы. — М.: РГГУ, 2004.
9. Шайкин А. Н. Дипольный граф как модель дедуктивного вывода. // Математическое моделирование социальных процессов и современные образовательные технологии: IX Международный социальный конгресс: Москва, РГСУ, 2009.
10. Маслов С. Ю. Обратный метод установления выводимости в классическом исчислении. // ДАН СССР, 1964, 159, № 1.
11. Маслов С. Ю. Обратный метод установления выводимости для логических исчислений. // Тр. Матеем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, 98. — М.: Наука, 1968.
12. Давыдов Г. В. Синтез метода резолюций с обратным методом // Зап. научн. сем. ЛОМИ, 20, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1971.