ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

УДК 681.3; 519.711

ПОПУЛЯЦИИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ АВТОМАТОВ

Ю. В. Березовская, В. А. Воробьев

Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова, г. Архангельск, Россия

E-mail: vva100@atnet.ru

Описана модель коллективного поведения автоматов — популяция автоматов. Для моделирования динамики популяции применяется каузальная сеть Петри. Позициям сети соответствуют состояния автоматов. Маркировка сети задаёт число автоматов, находящихся в соответствующих состояниях. Переходы отображают события, возникающие в результате совместных действий элементов популяции. На переходах сети заданы их вероятности. Это позволяет составить систему дифференциальных уравнений, которые описывают динамику среднего числа автоматов в позициях при выполнении логических условий, заданных сетью Петри. Система решается численно, методом потактного компьютерного моделирования.

Ключевые слова: *популяция автоматов, каузальная сеть, сеть Петри, динамика средних, моделирование.*

Введение

Популяция автоматов — это система из $N \geqslant 2$ взаимодействующих автоматов (не обязательно одинаковых), в которых смена состояний отдельного автомата обусловлена состояниями некоторых других автоматов. А именно, состояния «воздействующих» автоматов влияют на «изменяемые» автоматы и переводят их в новые состояния, причём способ передачи воздействий и связи между автоматами не рассматриваются. Предполагается, что: 1) все N_i автоматов в состоянии i равномерно распределены по системе, и вероятность найти в любом месте автомат в состоянии i равна N_i/N (сильное перемешивание); 2) все потоки событий в системе ординарные.

Популяции автоматов пригодны для исследования разнообразных массовых объектов: биологических, экономических и технических систем, параллельных программ [1]. С этой целью автоматы должны иметь стохастические характеристики — вероятности переходов в каждом такте. Поскольку число состояний популяции чрезвычайно велико, вычисления проводятся не для всех состояний популяции, а для среднего числа автоматов в различных состояниях. Таким образом, полученный случайный процесс представляет динамику популяции «в среднем».

Трудность состоит в том, что в известном методе динамики средних [2] все компоненты независимы друг от друга. Между тем основное свойство, которое влияет на поведение популяции, — взаимодействие между автоматами. Следует как-то учесть это в методе динамики средних. Отсутствие метрики в популяции позволяет исследовать такие случайные системы, используя достижения теории параллельных процессов [1, 3]. В настоящей работе развиты идеи из [1, 3] с использованием теории сетей Петри и марковских процессов.

1. Каузальная сеть

1.1. Определение каузальной сети

Каузальная сеть (К-сеть) — это маркированная сеть Петри, в которой для каждого перехода задана интенсивность события перехода как функция от маркировки входных позиций перехода. Вид этих функций зависит от предметной области и задаётся отдельно в каждом конкретном случае. Потоки событий переходов простейшие, т. е. стационарные (интенсивности меняются медленно), ординарные и без последействия.

Определение 1. *Каузальная сеть* — это двудольный граф $G = \langle Q, D, In, Out, M, R\rangle$, где

- $Q = \{q_i : i = 0, 1, \dots, n\}$ — множество позиций, соответствующее объединению множеств состояний всех автоматов;
- $D = \{d_j : j = 1, 2, \dots, m\}$ — множество переходов автоматов из состояния в состояние;
- In — функция предшествования, которая каждой паре (q_i, d_j) ставит в соответствие неотрицательное число k_{ij} — вес дуги из позиции q_i в переход d_j; если соответствующей дуги нет, то $k_{ij} = 0$;
- Out — функция следования, которая каждой паре (d_j, q_i) ставит в соответствие неотрицательное число k_{ji} — вес дуги из перехода d_j в позицию q_i; если соответствующей дуги нет, то $k_{ji} = 0$;
- $M_t = \{N_{it} : i = 1, 2, \dots, n\}$ — вектор маркировки, компоненты которого задают число автоматов, находящихся в момент времени t в каждом из состояний множества Q;
- $R = \{p_j(M_t(^*d_j)) : j = 1, \dots, m\}$ — вектор-функция интенсивностей переходов, определяющая среднее число срабатываний перехода d_j в течение одного такта или число таких срабатываний в единицу времени, зависящее от маркировки множества $^*d_j$ — входных позиций перехода.

Функция $p_j(M_t(^*d_j))$ для перехода d_j в простейшем случае является линейной. В этом случае если $^*d_j$ содержит несколько позиций, то находится позиция $q_i \in {}^*d_j$ с минимальной маркировкой $N_{i\min}$, и тогда интенсивность перехода d_j равна $p_j N_{i\min}$, где p_j — вероятность срабатывания перехода d_j для одного элемента системы. В более сложных случаях интенсивность перехода может задаваться нелинейной функцией. Например, если для взаимодействия двух атомов в растворе необходимо их столкновение, то вероятность такого события пропорциональна произведению плотностей этих атомов.

Позиция $q_0 \in Q$ называется внешней, имеет сколь угодно большое или единичное (если надо) значение маркера N_0, не меняет его при переходах и может не изображаться на рисунке графа. Состояния автоматов и позиции множества $\{q_i : i = 1, \dots, n\}$ назовём собственными. Граф G изображает причинно-следственные связи между состояниями автоматов и интенсивности этих связей.

В отличие от канонической сети Петри, множество весовых коэффициентов дуг К-сети — это положительные действительные числа, приписанные входным и выходным дугам j-го перехода — k_{ij} или k_{ji} соответственно. Точно так же будем допускать действительные числа в качестве маркеров N_i для позиций. Это позволит маркировать сеть вероятностями состояний автоматов и вообще избавиться от целых чисел. В таких случаях будем считать популяцию счётным множеством.

1.2. Описание К-сети

Описание К-сети состоит в описании двух ее частей:

1) статическая часть — маркировка M_0 в начальный момент времени $t = 0$;
2) динамическая часть — описание переходов.

Каждый переход d_j описывается следующим образом:

1) перечислением элементов множества $^*d_j$ с коэффициентами k_{ij};
2) перечислением элементов множества d_j^* с коэффициентами k_{ji};
3) интенсивностью $p_j(M_t(^*d_j))$;
4) типом перехода.

В общем случае описание перехода — это выражение вида

$$^*d_j > d_j^* \ : \ p_j(M_t(^*d_j)) \ : \ \text{тип}.$$

Внешнее состояние в описании не присутствует, так что допустимы переходы с неполной левой или правой частью.

2. Каузальные модели популяций

Как и сеть Петри, К-сеть может использоваться для моделирования сложных систем, состоящих из множества взаимодействующих элементов — популяций. Абстрагируясь от природы популяции, будем называть её элементы автоматами. Динамическую модель, построенную на основе К-сети, будем называть *каузальной моделью* (*К-моделью*). Этот термин подчёркивает динамический характер и модельную функцию К-сети.

2.1. К-модель мобилизации

Проще всего пояснить основные идеи популяционного моделирования на примере. Рассмотрим замкнутую «популяцию», которую представим как популяцию автоматов-особей с двумя состояниями L (*live*, живая) и D (*dead*, мёртвая). Вероятность гибели особи (перехода из L в D) в течение одного такта равна p. Живая особь может поглотить одну мёртвую и разделиться на двух живых или, иначе говоря, оживить мёртвую особь. Вероятность этого события в течение одного такта равна q. Временем на поглощение и деление можно пренебречь по сравнению со временем поиска добычи. В популяции определены два перехода: гибель, независимая от состояния популяции, и восстановление, возможное только при наличии одной живой и одной мёртвой особи.

При описании К-моделей общего вида мы использовали обозначение N_i для числа автоматов, находящихся в состоянии i. Чтобы не загромождать запись уравнений буквой N, её можно опускать, и тогда имя состояния будет обозначать и число автоматов в этом состоянии, как это показано на рис. 1 и принято в элементарной алгебре. С той же целью экономии обозначений будем записывать функцию времени $X(t)$ в виде X_t или вообще без индекса.

Предложенная К-модель имеет множество различных интерпретаций. Это и модель заселения мест (М) экологической ниши живыми (Ж) организмами, и модель замены отказавших узлов системы (М) исправными узлами (Ж), это и модель спасения раненых на поле боя живыми бойцами, это, наконец, модель мобилизации призывников (М) теми, кто уже призван в армию (Ж), причём призывники активно избегают призыва — «умирают». Последняя интерпретация позволяет называть описанную популяцию моделью мобилизации, как это принято в экономической литературе. Автоматы этой модели будем называть особями.

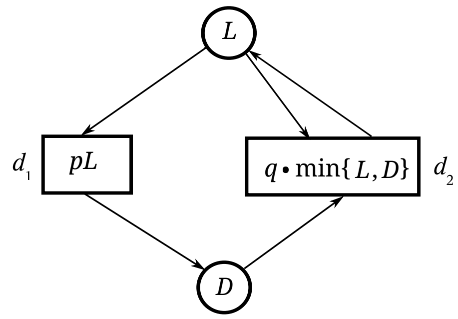

Рис. 1. Каузальная сеть линейной модели мобилизации

Зададим модель мобилизации с линейными интенсивностями переходов. К-сеть для неё показана на рис. 1. Описание этой популяции:

$L_0 = L_{\text{beg}}, D_0 = D_{\text{beg}}$;

$L > D : pL$: линейный;

$L : D > 2L : q \cdot \min\{L, D\}$: линейный.

Интерпретация предложенного описания популяции зависит от единицы времени. Если единица времени достаточно мала, то $p \ll 1$ и $q \ll 1$ — вероятности срабатывания переходов в течение такта, а pL и $q{\cdot}\min\{L, D\}$ — среднее число автоматов, изменяющих состояние за такт. Если единица времени велика, то p и q — интенсивности переходов одного автомата, а величины pL или $q \cdot \min\{L, D\}$ — это интенсивности переходов на всём множестве автоматов, готовых к переходу.

2.2. Динамика К-модели

Граф, который мы назвали К-сетью, — это статическая модель популяции автоматов. Она задаёт только причинно-следственные связи между элементами системы автоматов. Динамическая модель популяции — К-модель — определяется функционированием К-сети. Функционирование К-сети подобно несущей сети Петри с учётом интенсивностей переходов, а именно: переход d_j срабатывает только тогда, когда маркировка его входа такова, что $M(^*d_j) \geqslant In(d_j)$. Один переход К-сети описывает множество допустимых изменений состояний автоматов, заданное интенсивностью. В нашем примере $L \geqslant 1$ и $\min\{L, D\} \geqslant 1$. При срабатывании перехода маркировка на его входе уменьшается, а на выходе увеличивается согласно интенсивностям. В нашем примере переход $L > D : pL$ уменьшает маркировку L и увеличивает маркировку D на pL, а переход $L : D > 2L : q \cdot \min\{L, D\}$: линейный уменьшает D на $q \cdot \min\{L, D\}$ и увеличивает L на $q \cdot \min\{L, D\}$.

Пусть $N_t = \sum\limits_{i=1}^{n} N_{it}$ — численность популяции в момент t, $P_{it} = N_{it}/N_t$ — доля автоматов, находящихся в момент t в состоянии N_i. При $N_t \to \infty$ величина P_{it} — это вероятность пребывания автомата в i-м состоянии. Вектор-функция $P_t = \{P_{it} : i = 1, \ldots, n\}$ задаёт динамику популяции в среднем, или её *поведение*.

2.3. Уравнения динамики средних для замкнутой популяции

Пусть $\mathbf{R} = d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots, d_s$ — допустимая последовательность переходов К-сети. Рассмотрим только тот случай, когда сеть такова, что каждый из её переходов неоднократно найдётся в последовательности $\mathbf{R}$ при достаточно длительном наблюдении.

Вектор R длины m, в котором j-я компонента есть число вхождений перехода d_j в последовательность $\mathbf{R}$, называется *характеристикой* последовательности $\mathbf{R}$ или *характеристикой динамики* К-сети. Взяв период наблюдения К-сети за единицу времени, отождествим характеристику R и вектор-функцию $R = \{p_j(M_t(^*d_j)) : j = 1, \ldots, m\}$ интенсивностей переходов. Пусть теперь R — вектор-столбец длины m, характеризующий динамику (число переходов) К-сети за единичное время. Тогда вектор-столбец $R\Delta t$ — характеристика динамики за время Δt.

Функции In и Out для К-сети задаются $(n \times m)$-матрицами инциденций, где строкам соответствуют позиции сети (кроме внешней), а столбцам — переходы. Элементы этих матриц — значения k_{ij} и k_{ji} соответственно. Наглядно это демонстрирует табл. 1.

Таблица 1

Матричное описание К-модели мобилизации

In	d_1	d_2
L	1	1
D	0	1

Out	d_1	d_2
L	0	2
D	1	0

D	d_1	d_2
L	-1	1
D	1	-1

$R = \{p_j(M_t(^*d_j)) : j = 1, 2\}$
pL
$q \cdot \min\{L, D\}$

Динамика К-сети (К-модель) задаётся матричным уравнением К-сети, аналогичным фундаментальному уравнению сети Петри:

$$\Delta M = Out \cdot R\Delta t - In \cdot R\Delta t = (Out - In) \cdot R\Delta t = D \cdot R\Delta t,$$

где $Out - In = D$ — оператор изменения маркировки сети, или D-оператор (от *Derivative* — производная); ΔM — вектор-столбец длины n — изменение маркировки сети при срабатывании любой допустимой последовательности переходов с характеристикой $R\Delta t$; $\cdot$ — матричное умножение.

Устремим Δt к нулю и заменим его на дифференциал dt. Тогда и ΔM станет величиной более высокого порядка малости по отношению к M: $\Delta M = o(M)$, и её тоже можно заменить на dM. Теперь можно перейти к дифференциальному виду и записать дифференциальное уравнение динамики средних К-сети в векторном виде:

$$\frac{dM}{dt} = D \cdot R.$$

Приравняв производную нулю, получим уравнение для стационарного режима:

$$D \cdot R = 0.$$

Кроме этих уравнений, для замкнутых популяций справедлива нормировка

$$\sum_{i=1}^{n} P_{it} = 1 \text{ или, что то же, } \sum_{i=1}^{n} N_{it} = N.$$

Особенностью полученных линейных систем является тот факт, что уравнения в них могут быть расщепляемыми.

В нашем примере с популяцией особей имеем систему

$$\begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = q \cdot \min\{L, D\} - pL, \\[2ex] \dfrac{dD}{dt} = pL - q \cdot \min\{L, D\}, \end{cases}$$

где каждое из уравнений расщепляется на два различных уравнения, действующих в зависимости от соотношения значений L и D. Поскольку популяция замкнута и $N = L + D = \mathrm{const}$, эти два дифференциальных уравнения сводятся к одному

$$\frac{dL}{dt} = q \cdot \min\{L, N - L\} - pL,$$

которое расщепляется на два уравнения и интегрируется.

Если в К-сети найдётся m переходов, меняющих интенсивности как функция $\min\{x, y\}$, то система из n уравнений даст $\mathrm{O}(2^m)$ вариантов систем в соответствии с различными наборами значений функций $\min\{x, y\}$. При этом популяция может иметь несколько различных стационарных состояний.

2.4. Классификация К-моделей

К-модели классифицируются по нескольким критериям.

Во-первых, следует выделить линейные и нелинейные модели взаимодействий. Эти модели отличаются видом функций интенсивностей переходов $p_j(M_t({}^*d_j))$.

Во-вторых, о сложности модели можно судить по числу состояний и автоматов, участвующих в одном акте взаимодействия и в переходе.

В-третьих, К-модели различаются по составу моделируемой популяции. Все эти различия решающим образом влияют на моделирование популяций и, следовательно, требуют более содержательного описания.

Линейные и нелинейные взаимодействия

Линейные взаимодействия таковы, что интенсивности $p_j(M_t({}^*d_j))$ пропорциональны минимальным маркерам N_{it} в $M_t({}^*d_j)$. Линейные модели адекватны в тех случаях, когда интенсивность перехода является имманентным свойством каждого отдельного автомата. Так, в нашей гипотетической популяции способность восстанавливать мертвую особь присуща только части особей, находящихся в состоянии L, но если уж эта способность есть, то она реализуется, и эта реализация единственна в данном такте.

Иной способ понимания свойства линейности К-модели — положить, что взаимодействия между автоматами являются дальнодействующими, т. е. взаимосвязи (отношение соседства) между элементами системы можно представить полным графом. Рассмотрим, например, боевое столкновение двух воюющих сторон 1 и 2 в чистом поле, когда каждый «живой» боец видит каждого «живого» противника и может поразить его из дальнобойной винтовки, т. е. перевести его в состояние «мёртвый». Пусть L_1 и L_2 — численности «живых» с обеих воюющих сторон в данный момент времени, p и q — вероятности попадания в противника у стрелков соответствующих сторон, D — численность «мёртвых». Общая численность мест, занятых всеми живыми и мёртвыми солдатами, равна $L_1 + L_2 + D$.

Линейная К-сеть такого столкновения показана на рис. 2. В ней два перехода d_1, d_2 и три позиции L_1, L_2, D.

Маркировка M_t этой К-сети задаётся тройкой $\{L_1, L_2, D\}$, а интенсивности уничтожения противников (число врагов, убитых каждой стороной в каждом такте времени) вычисляются по следующим формулам:

$$p_1(M_t({}^*d_1)) = p_1(L_1, L_2) = p \cdot \min\{L_1, L_2\}, \quad p_2(M_t({}^*d_2)) = p_2(L_1, L_2) = q \cdot \min\{L_1, L_2\},$$

где $p_1(L_1, L_2)$ — интенсивность перехода d_1 из L_2 в D; $p_2(L_1, L_2)$ — интенсивность перехода d_2 из L_1 в D. Член $\min\{L_1, L_2\}$ отражает тот очевидный факт, что число одновременных выстрелов не может превышать ни числа видимых противников, ни числа стреляющих. Этот член может появиться в сети автоматически. Таким образом, *чтобы задать линейные переходы, достаточно указать только их вероятности* (в данном случае p и q).

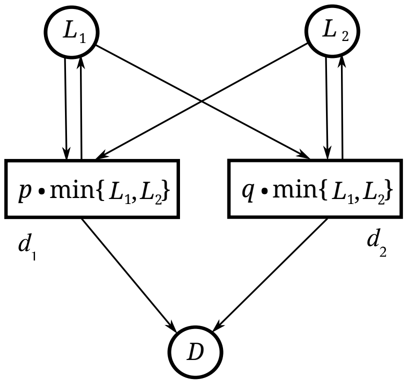

Рис. 2. Линейная К-сеть боевого столкновения

Нелинейные популяции таковы, что $p_j(M_t(^*d_j))$ зависит от степеней и произведений маркировок N_{it} из $M_t(^*d_j)$. Нелинейная модель адекватна, если интенсивность перехода пропорциональна вероятности возможных благоприятных сочетаний, причём все эти сочетания и соответствующие переходы могут быть реализованы в одном такте с заданной вероятностью. Так, в модели мобилизации следовало бы учесть вероятность «встречи» одной живой и одной мёртвой особи, точнее, попадания мёртвой особи в поле зрения живой. Тогда интенсивность восстановления пропорциональна величине $L \cdot M/N$.

По аналогии с линейной популяцией можно представить нелинейный случай, как *близкодействующее* взаимодействие автоматов. При этом взаимодействие происходит на некотором конечном расстоянии. Это расстояние можно задать коэффициентом, имеющим смысл эффективного сечения или зоны, в которой только и возможно взаимодействие. Будем называть эту зону *областью действия* для действующего автомата и *областью восприимчивости* для автомата, подвергающегося воздействию. В случае взаимодействия двух автоматов область действия и область восприимчивости совпадают и могут называться просто *областью взаимодействия*.

Так, в модели боевого столкновения следует полагать, что оружие (например, меч или копьё) не обладает бесконечной дальностью поражения. Для обеих воюющих сторон дальность поражения, т. е. область действия, может быть различной и задаётся коэффициентами k_1 и k_2. Теперь для того, чтобы задать интенсивность взаимодействия, мало задать вероятности p и q. Необходимо домножить их на коэффициенты k_1 и k_2 и на отношение $(N_1 \cdot N_2)/N$, которое задаёт интенсивность встречи двух близкодействующих бойцов. Значение $(N_1 \cdot N_2)/N$ можно получить автоматически, а величины pk_1 и qk_2 следует задать «руками». Ясно, что эти задаваемые величины теперь уже не обязаны быть вероятностями и могут превышать единицу. Более того, и итоговые интенсивности взаимодействий $(pk_1N_1N_2)/N$ и $(qk_2N_1N_2)/N$ превышают единицу, т. е. являются не вероятностями, а интенсивностями — средним числом переходов в такте. Нелинейная К-сеть боевого столкновения показана на рис. 3.

Простые популяции

Сложность популяции задаётся числом взаимодействующих автоматов в каждом переходе. Полезно выделить наиболее простые случаи.

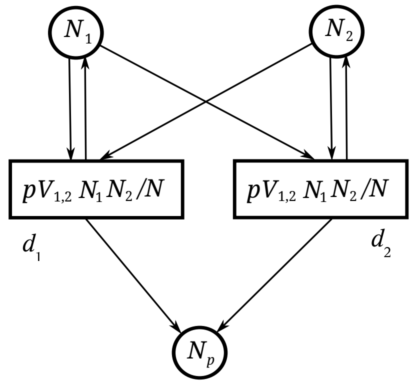

Рис. 3. Нелинейная К-сеть боевого столкновения

Простые популяции таковы, что взаимодействуют только пары автоматов. Каждый переход инициируется одним или двумя состояниями, а простой D-оператор состоит из нулей и единиц, может быть с разными знаками. В столбцах матрицы D находится не более двух единиц, как в примере с «особями».

Простейшая популяция — это простая линейная популяция.

Автоматная популяция — это простейшая популяция, в которой все элементы являются автономными вероятностными автоматами. Этот случай относится к известному методу динамики средних [2].

Простые растворы и смеси

Автоматизируем подсчёт интенсивностей переходов в простых К-моделях популяций. Будем полагать, что моделируемые популяции *сильно перемешаны*, т. е. каждый автомат в любом состоянии i может оказаться в любом месте с одинаковой вероятностью N_i/N независимо от расстояния до него.

Что касается *линейных* взаимодействий, то формулы для интенсивностей переходов, представленные в п. 2.1, в комментариях не нуждаются и их вычисление всегда можно провести автоматически. Однако *нелинейные* взаимодействия допускают различные интерпретации и способы вычисления интенсивностей. Рассмотрим только простые нелинейные популяции, поскольку результаты легко обобщаются на нелинейные популяции общего вида. Выделим два типа простых нелинейных популяций: *раствор* и *смесь*.

Популяция типа *раствор* представляет собой равномерное размещение взаимодействующих автоматов во множестве мощности N мест, большинство из которых — места, не содержащие взаимодействующих автоматов. Примерами таких популяций в биологии являются популяции белых медведей и птиц, которые не собираются в одном месте для воспроизводства. Проблемой таких популяций является низкая вероятность встречи, если ареал расселения велик по сравнению с численностью популяции. Вероятность встречи самца и самки может оказаться меньше, чем вероятность смерти отдельной особи, и популяция вымирает из-за малой численности в большом ареале расселения.

Популяция типа *смесь* собирается для взаимодействия в ограниченной области, как, например, птичьи базары, пассажиры в трамвае или покупатели в магазине. Так что вероятность взаимодействия данной пары не зависит от общего числа мест, а зависит только от количества автоматов, собравшихся вместе для взаимодействий.

Ясно, что в сложных системах различные взаимодействия могут происходить поразному: и линейно, и как в растворе, и как в смеси. Поэтому тип популяции может быть (и чаще всего бывает) *смешанным*, а характеристики — линейный, раствор и смесь — относятся далее не ко всей популяции, а отдельно к каждому взаимодействию. Рассмотрим интенсивности переходов для различных типов взаимодействий. Для экономии слов будем употреблять термины «раствор» и «смесь» достаточно вольно. Например, будем говорить о взаимодействиях или переходах в растворе или в смеси.

Пусть тройка (i, j, k) обозначает переход автомата из состояния j в состояние k под воздействием автомата, находящегося в состоянии i, а $p(i, j, k)$ — вероятность такого перехода. При этом число автоматов в состоянии i не изменяется, если $i \neq k$. Будем полагать, что каждый автомат занимает ровно одно место в пространстве, где «живёт» популяция. Общее число таких мест равно N. При этом часть мест может быть пустой, т. е. популяция как бы «растворена» во множестве мощности N. Пусть теперь:

— N_i — число автоматов в состоянии i;

— N_{ijk} — общая интенсивность перехода (i, j, k), т. е. число автоматов, совершающих этот переход в каждом такте моделирования;

— V_{ij} — область взаимодействия для перехода (i, j, k) — число мест в окрестности состояния i (или j), в которые должны попасть оба автомата i и j, чтобы взаимодействие состоялось. Ясно, что области взаимодействия состояний i и j одинаковы, т. е. $V_{ij} = V_{ji}$; следует также иметь в виду, что области V_{ij} должны быть порядка одного места — $V_{ij} \approx 1$, чтобы можно было пренебречь их пересечениями;

— $K(i, j, k) = p(i, j, k)V_{ij}$ — интенсивность перехода (i, j, k) для одной пары автоматов, попавших в область взаимодействия размера V_{ij} в состояниях i и j.

Задача состоит в вычислении общей интенсивности перехода N_{ijk} для различных типов взаимодействия. В растворе плотность автоматов в состоянии j равна $p_j = N_j/N$, общий объём области взаимодействия равен $V_{ij} \cdot \min\{N_i, N_j\}$. Пусть $N_i = \min\{N_i, N_j\}$. Тогда число взаимодействующих автоматов равно $V_{ij} \cdot \min\{N_i, N_j\} \cdot p_j = (V_{ij}N_iN_j)/N$. Отсюда следует, что для взаимодействия в растворе

$$N_{ijk} = p(i, j, k)\frac{V_{ij}N_iN_j}{N} = K(i, j, k)\frac{N_iN_j}{N}.$$

Точно те же рассуждения для взаимодействия в смеси приводят к выводу, что значение N следует заменить на сумму $(N_i + N_j)$, поскольку в этом случае оба взаимодействующих множества автоматов «смешаны друг с другом», а прочие автоматы роли не играют. Так, для заражения гриппом больные и здоровые люди должны встречаться в каком-нибудь тесном месте, например в офисе, чтобы обменяться вирусом, а прочие обстоятельства — размер города или всей страны — роли не играют. Итак, для взаимодействия в смеси

$$N_{ijk} = p(i, j, k)\frac{V_{ij}N_iN_j}{(Ni + Nj)} = K(i, j, k)\frac{N_iN_j}{(N_i + N_j)}.$$

Другой способ получения этих же формул состоит в следующем. Коль скоро $p_j = N_j/N$ — плотность состояния j в объёме N, то вероятность встречи двух состояний i и j в области взаимодействия V_{ij}, близкой к единице объёма, равна $(N_iN_j)/N^2$. Тогда во всём объёме N состоится $(N_iN_j)/N$ встреч, вероятность события-перехода в момент встречи равна $p(i, j, k)$, а интенсивность перехода $K(i, j, k) = p(i, j, k)V_{ij}$, где V_{ij} — коэффициент, учитывающий, что взаимодействие происходит на некотором расстоянии между автоматами. Интенсивность перехода $K(i, j, k)$ может превышать 1, и обычно она является эмпирическим коэффициентом. Очевидно, что величина $K(i, j, k)$ для одной пары автоматов — это параметр взаимодействия, который следует задать «руками», а остальная часть формулы для интенсивности перехода может быть вычислена автоматически, если указать тип перехода — линейный, раствор или смесь.

2.5. Инвариантность К-моделей

Поведение популяции мы определили как вектор-функцию $P_t = \{P_{it} : i = 1, \ldots, n\}$ вероятностей состояний, зависящую от времени. Очевидно, что поведение любой популяции не зависит ни от единиц измерения времени, ни от её точной численности. Поэтому будем говорить, что две вектор-функции P_t и P'_t инвариантны и задают одно и то же поведение, если одна из них переходит в другую при смене масштаба времени и/или численности. Такие преобразования масштабов назовём масштабированием. Соответственно модели, порождающие инвариантное поведение, эквивалентны. Рассмотрим условия, при которых такая инвариантность возможна.

Обратим внимание, что матрица D имеет как положительные, так и отрицательные элементы. Положительные элементы задают прирост $(+\Delta N_j)$ числа автоматов в состоянии j, отрицательные — убыль числа автоматов $(-\Delta N_j)$ в этом состоянии. Мы предполагали ранее, что эти приращения меньше, чем общее число автоматов: $|\Delta N_j| \ll N_j$ для всех $j = 1, \ldots, m$, чем обеспечивается достаточная точность вычислений. При этом графики функций в переходном режиме достаточно гладкие, т. е. не имеют точек излома и смены направления роста N_{jt} для всех $j = 1, \ldots, m$. Невнятный термин «достаточно» станет понятен при анализе конкретных моделей популяций. Пока предположим, что для данной К-модели существует максимальный вектор $R_{\max} = \{p_{j\max}(M_t(^*d_j)) : j = 1, \ldots, m\}$ интенсивностей переходов, такой, что выполняется $|\Delta N_j| \ll N_j$ и обеспечивается достаточная точность вычислений и гладкость графиков N_{jt} для всех $j = 1, \ldots, m$.

К-модели имеют следующие свойства.

Масштабируемость

К-модели масштабируемы. Это означает следующее:

1) вектор-функцию $R_{\max}$ интенсивностей переходов можно умножать на число $0 < r < 1$ без изменения стационарного поведения популяции;
2) компоненты вектора M_0 можно одновременно умножать на произвольное действительное число $s > 0$ без изменения стационарного поведения популяции.

Нормировка

Если в замкнутой К-модели сумма всех (кроме N_0) компонент вектора M_t равна 1, то $M_t = P_t$ — вектор вероятностей её собственных состояний.

Эти свойства справедливы в силу исходного предположения, что все потоки событий в системе простейшие, т. е. плотность вероятности события и интенсивность потока событий связывает соотношение $dp = \lambda dt$. Другим, уже чисто математическим, основанием для утверждений об инвариантности и вероятностях состояний является тот факт, что изменение масштаба времени или численности популяции эквивалентно умножению матриц In, Out, D, R и M на одно и то же число, что не меняет характера решения соответствующих уравнений (кроме, разумеется, масштабов).

Для вектор-функции интенсивностей переходов выполняется условие $R \ll M_t$, только если длительность такта Δt и соответственно компоненты вектора R достаточны малы. В этом случае модель популяции допускает компьютерное моделирование *методом* Δt, где за величину приращения времени Δt берётся один такт, и каждое новое значение N_{jt} вычисляется потактно. Это не что иное, как численное интегрирование дифференциальных уравнений динамики средних для популяции. Такая модель называется *синхронной*.

Масштабируемость имеет место только для стационарного состояния К-модели. Дело в том, что если потактные изменения ΔN_{jt} будут слишком велики, то возникнет эффект малой точности вычислений в переходном режиме. В результате процесс моделирования может «проскакивать» малые изменения N_{jt}. Модель станет слишком грубой, и это исказит график функции N_{jt}, нарушит его гладкость. В таких случаях компоненты вектора R могут и превышать значения компонент вектора M_t, как в уравнениях Колмогорова — Чепмена или в уравнениях динамики средних с интенсивностями потоков событий. Соответственно такие модели называются *асинхронными* и могут превращаться в синхронные умножением интенсивностей на подходящее число $0 < r < 1$ согласно утверждению об инвариантности. Асинхронная модель не может быть непосредственно реализована методом Δt, однако она имеет свои методологические преимущества.

Конвертируемость

Умножением R на подходящее число $r > 0$ можно превращать синхронную модель популяции в асинхронную и наоборот.

Могут ли синхронные модели, реализуемые методом Δt, иметь компоненты вектора R, превышающие 1? Такие модели могут возникать, например, для растущих популяций.

Соразмерность

Соразмерность — ещё одно свойство вектор-функции $P_t = \{P_{it} : i = 1, \ldots, n\}$, которое следует из утверждений инвариантности. Напомним, что при определении интенсивности перехода (i, j, k) используются вероятности переходов $p(i, j, k)$, которые являются исходными характеристиками системы и задаются «руками». Верно следующее утверждение.

Вероятности $p(i, j, k)$ входят в выражения для P_{it} и N_{it} соразмерно, т. е. так, что если умножить все эти вероятности на одно и то же действительное число $r > 0$, то формулы для P_{it} и N_{it} (согласно свойству масштабируемости) не изменятся, т. е. число r сократится.

Следствие из свойства соразмерности

Если поведение P_t популяции зависит только от двух вероятностей $p_1(i, j, k)$ и $p_2(i, j, k)$, то оно зависит только от их отношения $p_1(i, j, k)/p_2(i, j, k)$.

3. Метод компьютерного моделирования популяций

Опишем метод моделирования с помощью компьютерной программы «Популяция» простой популяции автоматов, функционирующей в дискретном времени $T = 1, 2, 3, \ldots, t, \ldots$ Вообще говоря, такие системы можно моделировать линейными или нелинейными системами дифференциальных уравнений, для решения которых можно использовать известные численные методы, писать программы или применять готовые системы прикладных программ. Проблема состоит в высокой трудоёмкости этого пути. Между тем построение требуемых уравнений и их численное решение — настолько стандартная процедура, что можно ограничиться только заданием К-сети. Кроме того, в дидактических целях программа должна быть простой, легко управляемой и давать наглядные результаты в виде графиков и массивов результатов моделирования.

3.1. Моделирование простых и автоматных популяций

Пусть N — количество автоматов, n — число состояний, в которых может находиться каждый из автоматов. При этом каждый конкретный автомат не обязательно имеет все n состояний. Популяция может состоять из автоматов различных классов, отличающихся набором состояний и поведением. В каждом i-м состоянии пребывает N_i автоматов, так что $N = N_1 + N_2 + \cdots + N_n$ (n — натуральное, N_i — неотрицательное действительное при $i = 1, \ldots, n$). Использование действительных чисел вместо целых позволяет не задавать очень большие числа N_i и избежать погрешности при округлении. В конечном итоге нас все равно интересует только динамика, или поведение популяции. При этом можно использовать вероятности и другие статистические характеристики.

В каждом такте, то есть через заданный промежуток времени, количество автоматов в j-м состоянии изменяется или остается тем же. Это происходит следующим образом. Некоторое состояние i влияет на состояние j и переводит его в состояние k с интенсивностью $K(i,j,k)$. Множество всех таких интенсивностей — трехмерный массив $P = \{K(i,j,k) : i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, n\}$.

Это означает, что N_i автоматов, находящихся в состоянии i, влияют на N_j автоматов, находящихся в состоянии j, и переводят некоторое их количество M_{ijk} в состояние k, что можно кратко записать как $i : j \to k$. Значение M_{ijk} вычисляется следующим образом.

При линейном (дальнодействующем) взаимодействии $M_{ijk} = K(i,j,k) \cdot \min\{N_i, N_j\}$; при нелинейном взаимодействии в растворе (при $i \neq j$) $M_{ijk} = K(i,j,k) \cdot \dfrac{N_i N_j}{N}$; при нелинейном взаимодействии в растворе (при $i = j$) $M_{ijk} = K(i,j,k) \cdot \dfrac{N_i N_j}{2N}$; при нелинейном взаимодействии в смеси $M_{ijk} = K(i,j,k) \cdot \dfrac{N_i N_j}{N_i + N_j}$, где $j = 1, \ldots, n$, т. е. одно i-е состояние может воздействовать на множество j-х. Соотношения $(N_i N_j)/N$, $(N_i N_j)/(2N)$ и $(N_i N_j)/(N_i + N_j)$ задают интенсивности встреч автоматов в i-м и j-м состояниях в области действия всех i-х автоматов.

Обратим внимание, что если никаких других состояний, кроме i и j, в системе нет, то $N_i + N_j = N$ и интенсивности переходов в растворе и смеси совпадают. Кроме того, при условии $i = j$ область взаимодействия в растворе сократится вдвое, что и отражено в формулах. В смеси это обстоятельство учитывается автоматически, поскольку $N_i + N_j = 2N_j = 2N$.

При линейном взаимодействии условие $i = j$ означает, что автомат, находящийся в состоянии i, самостоятельно переходит в состояние k независимо ни от каких других автоматов. Если все переходы в популяции линейные и для всех переходов $i = j$, то имеет место простейшая, т. е. линейная автоматная популяция.

При нелинейном переходе условие $i = j$ означает, что для взаимодействия необходима встреча двух автоматов в i-м состоянии, один из которых перейдет в k-е состояние с интенсивностью $K(i,i,k)$.

Если при переходах автоматов из одних состояний в другие общее число автоматов N неизменно, то популяция является замкнутой. В замкнутой популяции можно получить статистические вероятности состояний автоматов $P_i = N_i/N$.

Интерес представляют открытые популяции, где возможно удаление автоматов и появление новых. Для записи этих действий используется *внешнее* или 0-*состояние* q_0, обозначаемое символом «*» или «−». Будем считать, что автоматов, находящихся в 0-состоянии, всегда достаточно для реализации переходов, а их численность не меняется.

Появление новых автоматов происходит под воздействием уже существующих. Автоматы, находящиеся в состоянии i, добавляют в состояние j новые автоматы с интенсивностью $K(i,*,j)$. Количество появившихся автоматов равно $K(i,*,j)N_i$ при всех типах взаимодействий. Отметим, что при порождении новых автоматов интенсивность — это любое число, соответствующее числу «потомков». Например, пусть рыба мечет 5 тыс. икринок, состояние с — самка, готовая метать икру, и — икринка; тогда $K(\text{с},*,\text{и}) = 5000$.

Удаление автоматов, находящихся в состоянии j, происходит под воздействием уже существующих автоматов, находящихся в некотором i-м состоянии. Удаление происходит с интенсивностью $K(i,j,*)$, т. е. автоматы в i-м состоянии «убивают» автоматы в j-м состоянии с вероятностью $p(i,j,*)$ в окрестности взаимодействия.

В общем случае может оказаться так, что число удаляемых автоматов в состоянии i больше N_i. В этом случае удаляются только N_i автоматов из числа находящихся в состоянии i, т. е. получается $N_i = 0$. Эта возможность учтена в формулах для числа удаляемых автоматов. Кроме того, в программе моделирования популяций предусмотрен сторож, не допускающий значения $N_i < 0$. Обратим внимание, что свойства инвариантности на случай получения $N_i < 0$ не распространяются.

Итак, количество автоматов в такте t изменяется по правилу $N_{i(t+1)} = N_{it} + \Delta N_i$, где $\Delta N_i = V_i - I_i + R_i$; $V_i = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} M_{jki}$ — число автоматов, перешедших в i-е состояние; $I_i = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=0}^{n} \min\{N_i, M_{jik}\}$ — число автоматов, покинувших i-е состояние; $R_i = \sum\limits_{j=1}^{n} N_j \cdot K(j,^*,i)$ — число автоматов, «родившихся» в i-м состоянии. Здесь M_{ijk} вычисляются по формулам, приведенным выше. Чтобы получить среднее количество автоматов в каждом состоянии на $(t+1)$-м шаге, необходимо воспользоваться этими формулами t раз.

3.2. Дополнительные возможности К-моделирования

Выше описано только использование простых переходов, изображённых на рис. 4. Однако некоторые очевидные изменения в программе «Популяция» значительно расширяют возможности моделирования. Добавленные виды переходов изображены на рис. 5–8. Это сохраняющий, удаляющий, остаточный и ингибиторный переходы.

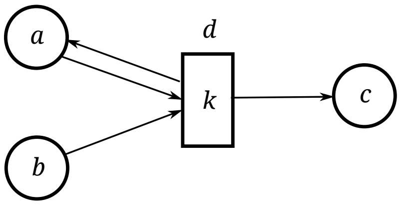

Рис. 4. К-сеть простого перехода $a : b > c : k$: тип 0, 1, 2. Число состояний a — сохраняется, b — убывает, c — увеличивается

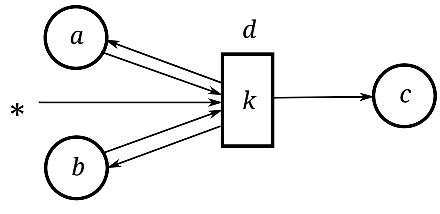

Рис. 5. К-сеть сохраняющего перехода $a, b :> c : k$: тип 3, 4, 5. Число состояний a и b — сохраняется, c — увеличивается. Внешнее состояние «*» не записывается в переход

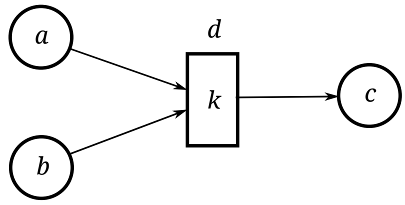

Рис. 6. К-сеть удаляющего перехода $d : a, b > c : k$: тип 6, 7, 8. Число состояний a и b — убывает, c — увеличивается

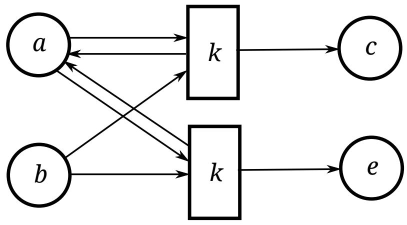

Рис. 7. К-сеть остаточного перехода $a : b > e : k$: тип 9, 10, 11 в комбинации с простым переходом $a : b > c : k$: тип 0, 1, 2. Число состояний a — сохраняется, все автоматы из b переходят в c и e

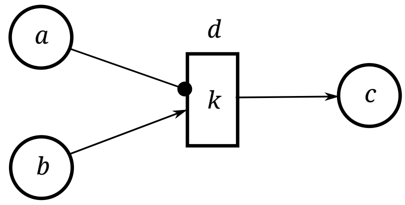

Рис. 8. К-сеть перехода с ингибитором $a : b > c : k$: тип 0, 1, 2. Число состояний a — сохраняется, b — убывает, c — увеличивается. Ингибитор изображён стрелкой с кружком на конце

Итак, имеем следующие переходы:

1) *Простой* переход, описанный правилом «Состояние a переводит состояние b в состояние c с интенсивностью k по типу 0, 1, 2».
2) *Сохраняющий* переход, не изменяющий числа состояний в обеих входных позициях, что позволяет моделировать, например, гиперболический рост с обострением. Его правило «Состояния a и b не изменяются, но порождают новые состояния c с интенсивностью k по типу 3, 4, 5».
3) *Удаляющий* переход, извлекающий маркеры из обеих входных позиций, как это делается в стандартной сети Петри. Его правило «Состояния a и b исчезают и порождают новые состояния c с интенсивностью k по типу 6, 7, 8».
4) *Остаточный* переход — модификация простого перехода, такая, что изменяют свои состояния все те автоматы популяции, которые не изменили его в аналогичном простом переходе. Его правило «Состояние a переводит в состояние c те автоматы, которые находятся в состоянии b, но не перешли бы в состояние c при простом переходе. Интенсивность k; типы 9, 10, 11».
5) *Ингибиторный* переход, дополнительный к простому: «Если в области действия нет состояния a, то состояние b переходит в состояние c с интенсивностью k по типу 0, 1, 2». Здесь состояние a играет роль не инициатора, а ингибитора, запрещающего переход.

Все эти переходы могут работать линейно, в растворе и в смеси. Таким образом, имеется три типа и пять видов переходов, отличающихся способом подсчета интенсивностей. В результате получается следующая таблица возможных переходов в К-моделях.

Таблица 2

Виды и типы переходов программы «Популяция»

Вид перехода	Тип перехода		
	Линейный	Раствор	Смесь
Простой	0	1	2
Сохраняющий	3	4	5
Остаточный	6	7	8
Удаляющий	9	10	11
Ингибиторный	12	13	14

Кроме того, допустимы и временные запаздывания действующих состояний К-сети. Например, число повзрослевших особей в популяции определяется не наличным числом рождённых, а рождёнными некоторое время назад, определяемое возрастом взрослой особи.

Заключение

Итак, впервые получен метод составления и численного решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений динамики средних (К-модели) на базе маркированного графа параллельных процессов в популяции взаимодействующих автоматов (К-сети).

Несмотря на некоторую ограниченность данного подхода, класс моделируемых популяций включает множество интересных систем, допускающих множество интерпретаций в различных предметных областях: вычислительной технике, биологии, социологии, истории, экономике и т. д. — везде, где поведение системы можно представить как параллельное функционирование множества автоматов, взаимодействующих между собой.

Имея программу «Популяция», достаточно описать поведение отдельных элементов исследуемой системы в их связи с другими элементами, и получается модель, которая легко модифицируется и быстро даёт наглядные результаты. При этом будет представлено и поведение популяции в переходном режиме. А это уже немало в тех предметных областях, где господствуют качественные рассуждения. Это касается гуманитарных наук и, особенно, истории. Проблема математизации исторических исследований давно стоит на повестке дня [4 – 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ачасова С. М., Бандман О. Л.* Корректность параллельных вычислительных процессов. Новосибирск: Наука, 1990. 314 с.
2. *Вентцель Е С., Овчаров Л. А.* Теория случайных процессов и её инженерные приложения. Учебн. пособие для втузов. 2-е изд., стер. М.: Высшая школа, 2000. 383 с.
3. *Воробьев В. А., Кочнев А. И.* Популяционное моделирование коллективного поведения автоматов // Вестник Томского госуниверситета. Приложение. 2007. № 23. С. 270–275.
4. *Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г.* Синергетика и прогнозы будущего. 2-е изд. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 288 с.
5. *Воробьев В. А., Воробьева Т. В.* Экологическая пауза — системный кризис человечества // Труды АНИГ «Прогноз». Вып. 1. Исследования в области глобального катастрофизма. Новосибирск: НГУ, 2006. С. 69–109.

6. *Коротаев А. В., Комарова Н. Л., Халтурина Д. А.* Законы истории: вековые циклы и тысячелетние тренды. Демография, экономика, войны. 2-е изд., испр. и доп. / под ред. Н. Н. Крадина. М.: КомКнига, 2007. 256 с.
7. *Коротаев А. В., Малков А. С., Халтурина Д. А.* Законы истории: математическое моделирование развития Мир-Системы. Демография, экономика, культура. 2-е изд., испр. и доп. / под ред. Н. Н. Крадина. М.: КомКнига, 2007. 224 с.