

**Вывод**

В отличие от известных предлагаемый метод решения дифференциальных уравнений волновой оптики в цилиндрической системе координат обладает рядом преимуществ, которые заключаются в следующем:

- 1) расширяется класс задач, решения которых могут быть получены в аналитическом виде;
- 2) снимаются ограничения на независимость параметра  $g$  уравнения (1) от значений координат, что позволяет учитывать нелинейный характер распространения волны.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Bradey L.C., Herrmann J. Appl. Opt. 13, 331 (1974).
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики М.: Наука, 1970.
3. Мищенко Е.Н. Тезисы доклада // Материалы 60-й науч. конф. проф.-преп. сост. РГУПС. Ростов н/Д, 2001.

УДК 519.95

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ОРГАНИЗАЦИИ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ СЕТЕЙ ПЕТРИ

С.В. Панков, В.И. Скаяров

**Введение**

*Сети Петри* (СП) являются инструментом для математического моделирования и исследования сложных систем, состоящих из множества взаимодействующих друг с другом компонент (параллельных систем). Цель представления системы в виде СП и последующего анализа этой сети состоит в получении важной информации о структуре и динамическом поведении моделируемой системы. Эта информация используется для оценки моделируемой системы (обнаружения ошибок и неэффективных проектных решений уже на ранних этапах проектирования) и выработки предложений по её усовершенствованию.

Впервые СП предложил немецкий математик Карл Адам Петри [1]. На русском языке наиболее полно классические СП описаны в [2] и [3]. СП широко применяются при создании и усовершенствовании параллельных, распределённых систем (как вычислительных, так и программных), автоматизированных систем управления, производственных систем и т. д.

Цель настоящей статьи состоит в демонстрации адекватности и полезности применения СП и средств их анализа в области организации железнодорожного движения. В статье содержится краткое описание СП, правил их выполнения, особенностей метода моделирования и анализа систем на основе СП. На некотором уровне абстракции СП моделируется функционирование железнодорожной станции с произвольным конечным числом приёмо-отправочных путей, двухпутного железнодорожного участка, ограниченного двумя станциями. Демонстрируется практическое значение средств анализа свойств СП для рассматриваемых систем на примере некоторых реальных свойств, которыми должны обладать эти системы.

**1. Основные понятия сетей Петри**

**Теоретико-множественное определение СП.** Пусть *мультимножество* – это множество, допускающее вхождение произвольного числа (включая 0) экземпляров одного и того же элемента (в [2] используется термин *комплект*).

**Определение 1.** СП  $N$  является четверкой  $N=(P, T, I, O)$ , где

- $P=\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  – конечное множество *позиций*,  $n \geq 0$ ;
- $T=\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  – конечное множество *переходов*,  $m \geq 0$ ;
- $I: T \rightarrow P^*$  – входная функция, сопоставляющая с переходом мультимножество позиций;
- $O: T \rightarrow P^*$  – выходная функция, сопоставляющая с переходом мультимножество позиций.

Позиция  $p \in P$  называется *входом* для перехода  $t \in T$ , если  $p \in I(t)$ . Позиция  $p \in P$  называется *выходом* для перехода  $t \in T$ , если  $p \in O(t)$ . Структура СП определяется ее позициями, переходами, входной и выходной функциями.

**Пример 1.** СП  $N=(P, T, I, O)$ .

$$P=\{p_1, p_2, p_3\}, T=\{t_1, t_2\}.$$

$$I(t_1)=\{p_1, p_1, p_2\}, \quad O(t_1)=\{p_3\},$$

$$I(t_2)=\{p_1, p_2, p_2\}, \quad O(t_2)=\{p_3\}.$$

**Графы СП.** Наиболее наглядное представление СП – графическое, которое представляет собой двудольный, ориентированный мультиграф [2]. *Граф* СП обладает двумя типами узлов: *кружок*  $O$ , представляющий позицию СП, и *планка*, представляющая переход СП (здесь используется прямоугольник). Ориентированные дуги этого графа (стрелки) соединяют переход с его входными и выходными позициями. При этом дуги направлены от входных позиций к переходу и от перехода к выходным позициям. Кратным входным и выходным позициям перехода соответствуют кратные входные и выходные дуги (рис. 1).

**Маркировка сетей Петри.** *Маркировка* – это размещение по позициям СП *фишек*, изображаемых на графе СП точками.

**Определение 2.** *Маркировка*  $\mu$  СП  $N=(P, T, I, O)$  есть функция, отображающая множество позиций  $P$  в множество неотрицательных целых чисел  $Nat$ .

Маркировка  $\mu$  для сети с непустым множеством позиций может быть также определена, как  $n$ -вектор  $\mu = \langle \mu(p_1), \mu(p_2), \dots, \mu(p_n) \rangle$ , где  $n = |P|$  и  $\mu(p_i) \in Nat$  – количество фишек в позиции  $p_i$  для всех  $1 \leq i \leq n$ .

**Правила выполнения сетей Петри.** СП *выполняется* посредством запусков переходов. Запуск перехода возможен, если он *разрешен*, т. е. если каждая из его входных позиций содержит число фишек, не меньшее, чем число дуг, ведущих из этой позиции в переход. Так, в СП на рис. 2 с маркировкой  $\mu = \langle 2, 1, 1 \rangle$  разрешен переход  $t_2$  и не разрешен переход  $t_1$ .

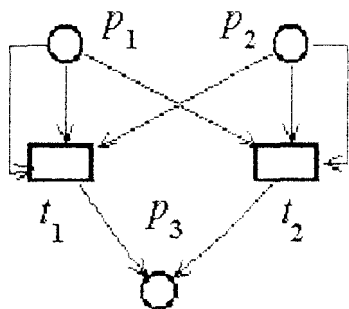


Рис. 1. Граф СП, определённый в примере 1

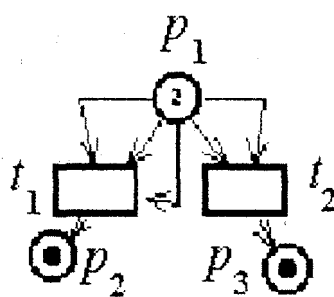


Рис. 2. Маркированная СП с разрешённым переходом  $t_2$

Для формального определения разрешённого перехода и его запуска две функции  $\hat{\#}: P \times T \rightarrow Nat$  и  $\#^*: T \times P \rightarrow Nat$ , задающие кратность входных и выходных дуг перехода соответственно. Для произвольных позиции  $p \in P$  и перехода  $t \in T$  значение  $\hat{\#}(p, t)$  совпадает с кратностью дуги, ведущей из  $p$  в  $t$ , если такая дуга существует, и с нулём – в противном случае. Значение  $\#^*(t, p)$  совпадает с кратностью дуги, ведущей из  $t$  в  $p$ , если такая дуга существует, и с нулём – в противном случае.

**Определение 3.** Переход  $t \in T$  в СП  $N$  с маркировкой  $\mu$  разрешен, если для всех  $p \in I(t)$  справедливо  $\mu(p) \geq \hat{\#}(p, t)$ .

*Запуск* разрешенного перехода  $t \in T$  из каждой своей входной позиции  $p \in I(t)$  удаляет  $\hat{\#}(p, t)$  фишек, а в каждую свою выходную позицию  $p' \in O(t)$  добавляет  $\#^*(t, p')$  фишек. На рис. 3 и 4 представлена СП до и после запуска перехода  $t_1$  соответственно.

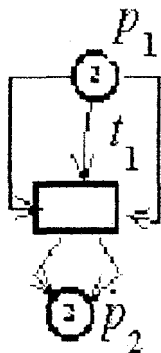


Рис. 3. СП до запуска перехода  $t_1$

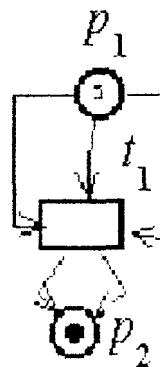


Рис. 4. СП после запуска перехода  $t_1$

**Определение 4.** Переход  $t$  в СП с маркировкой  $\mu$  может быть запущен всякий раз, когда он разрешен, и в результате запуска разрешенного перехода  $t$  образуется новая маркировка  $\mu'$ , определяемая, как  $\mu'(p) = \mu(p) - \hat{\#}(p, t) + \#^*(t, p)$ , для всех  $p \in P$ .

Такая маркировка  $\mu'$  называется *непосредственно достижимой* из маркировки  $\mu$ . Если  $\mu'$  получается из  $\mu$  последовательным запуском нескольких разрешенных переходов, то  $\mu'$  называется *достижимой* из  $\mu$  маркировкой. Выполнение СП *прекращается*, когда в ней не останется ни одного разрешенного перехода.

2. Особенности метода моделирования систем СП

Представление системы СП основано на двух понятиях: *событиях* и *условиях* [2]. Возникновением событий управляет состояние системы, которое может быть описано множеством условий. Возникновение события в системе возможно, если выполняются определённые условия – *предусловия* события. Возникновение события может привести к выполнению других условий – *постусловия* события.

В СП условия моделируются позициями, а события – переходами. Входы перехода определяются предусловиями соответствующего события, а выходы – его постусловиями. Выполнение условия представляется фишкой в позиции, соответствующей этому условию.

3. Моделирование организации железнодорожного движения

Сначала покажем, как можно моделировать СП работу железнодорожной станции. Пусть система «железнодорожная станция» (ЖС) включает в себя конечное число  $N$  приёмо-отправочных путей. В неё с северного и южного (чётного и нечётного) направлений могут прибывать поезда, а также отправляться по этим же направлениям. Прибывший поезд может быть принят на один из свободных путей.

Для построения модели системы ЖС в виде СП выделим в ней следующие условия:

- поезд прибывает с северного направления (обозначим это условие через  $C_{in}$ );
- поезд прибывает с южного направления ( $Ю_{in}$ );
- поезд отправился в с северном направлении ( $C_{out}$ );
- поезд отправился в южном направлении ( $Ю_{out}$ );
- на  $k$ -м (где  $1 \leq k \leq N$ ) пути находится поезд ( $П_k$ );
- на  $k$ -м пути нет поезда ( $НП_k$ ).

С этой же целью в системе ЖС выделим следующие события:

- поезд, прибывший с северного направления, принимается на  $k$ -й путь ( $СП_k$ );
- поезд, прибывший с южного направления, принимается на  $k$ -й путь ( $ЮП_k$ );
- поезд отправляется с  $k$ -го пути в северном направлении ( $ОС_k$ );
- поезд отправляется с  $k$ -го пути в южном направлении ( $ОЮ_k$ ).

В таблице определяются пред- и постусловия этих событий.

Пред- и постусловия событий для системы ЖС

Событие	Предусловия	Постусловия
$СП_k$	$C_{in}, НП_k$	$П_k$
$ЮП_k$	$Ю_{in}, НП_k$	$П_k$
$ОС_k$	$П_k$	$C_{out}$
$ОЮ_k$	$П_k$	$Ю_{out}$

СП, моделирующая систему ЖС, представлена на рис. 5. В этой сети частичная маркировка соответствует состоянию системы ЖС, в котором по одному поезду прибывает с северного и южного направлений, в северном направлении отправился поезд, первый путь свободен, а  $N$ -й путь занят.

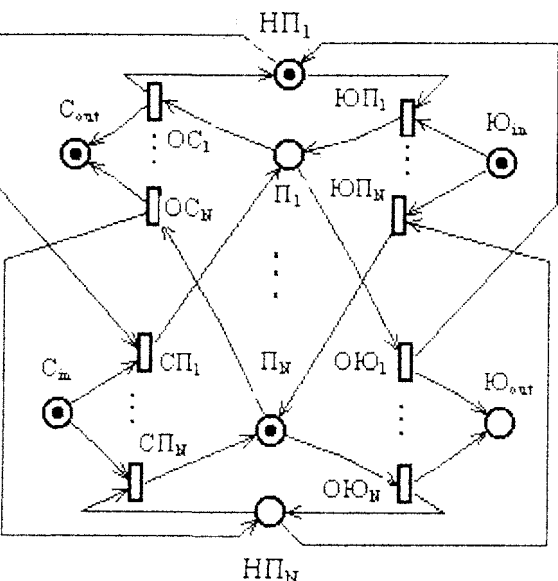


Рис. 5. СП, моделирующая функционирование ЖС

Теперь рассмотрим двухпутный участок железной дороги (УЖД), ограниченный двумя станциями ЖС, ЖС'. Станции ЖС и ЖС' содержат  $N$  и  $N'$  путей соответственно. Для моделирования системы УЖД будем использовать: 1) СП, моделирующие ЖС и ЖС' в виде, показанном на рис. 6; 2) позиции  $K$  и  $K'$ , представляющие количество поездов на участке дороги между ЖС и ЖС', для каждого из двух направлений движения; 3) а также переходы  $вх$ ,  $вых$  ( $вх'$  и  $вых'$ ), моделирующие вход и выход поезда из зоны ЖС (ЖС') соответственно, под зоной станции здесь понимается участок дороги, непосредственно примыкающий к станции. В сети на рис. 6 внутренняя работа станции скрыта прямоугольником, а связь с внешним миром будет осуществляться с помощью позиций  $C_{in}$ ,  $Ю_{in}$ ,  $C_{out}$ , и  $Ю_{out}$ . СП, моделирующая систему УЖД, представлена на рис. 7.

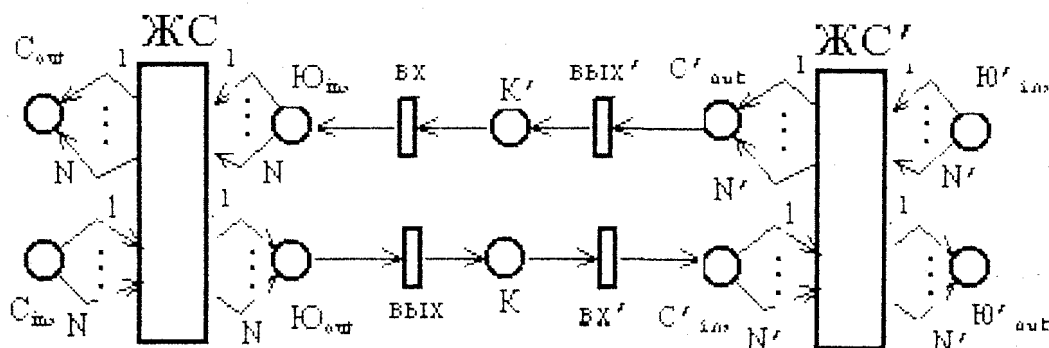


Рис. 6. Представление СП, моделирующей ЖС, в которой внутренняя работа станции скрыта прямоугольником

Заметим, что система УЖД допускает произвольное количество поездов на участке дороги между ЖС и ЖС' для каждого направления движения, а позиции **К** и **К'** моделирующей СП могут содержать произвольное число фишек. В реальной ситуации такое количество поездов ограничено межпоездным интервалом проследования поездов по участку.

Покажем, как модифицировать моделирующую СП, чтобы она описывала систему УЖД с ограниченным количеством поездов на участке дороги между ЖС и ЖС'. Для этого в СП на рис. 7 выделим подсети, моделирующие движение поездов от одной железнодорожной станции к другой (рис. 8) для каждого направления движения и построим эти подсети так, как показано на рис. 9. На рис. 8 приведена подсеть, моделирующая движение поездов в южном направлении, от ЖС к ЖС'.

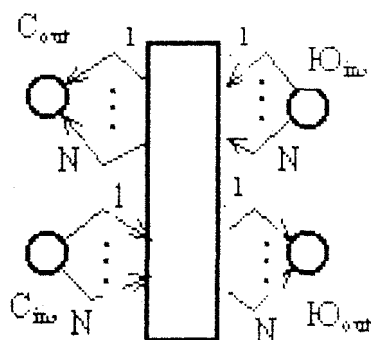


Рис. 7. СП, моделирующая работу УЖД

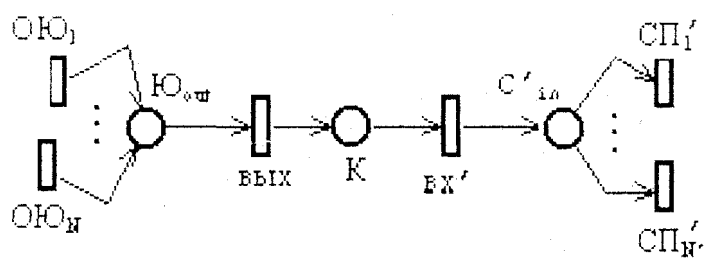


Рис. 8. СП, моделирующая движение поездов от ЖС к ЖС'

В начальный момент позиция **Огр** СП на рис. 9 содержит число фишек, совпадающее с максимально допустимым количеством поездов  $z$  на рассматриваемом участке дороги, а позиция **К** пуста. Запуск любого перехода, моделирующего отправление поезда со станции ЖС, удаляет одну фишку из позиции **Огр**. Запуск любого перехода, моделирующего прибытие поезда на станцию ЖС', добавляет одну фишку в эту позицию. Если на участке дороги находится  $z$  поездов, то позиция **Огр** будет пустой, а запуск перехода, моделирующего отправление поезда, невозможен.

Детализация и уточнение моделирующей СП для системы УЖД может быть продолжена.

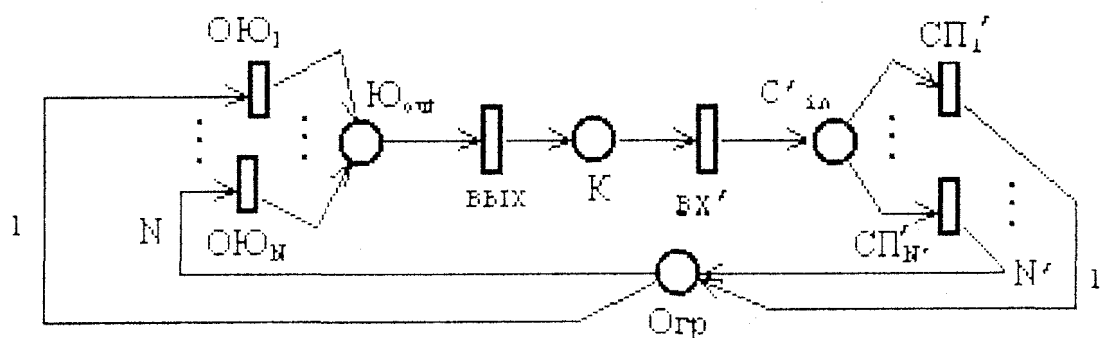


Рис. 9. СП, моделирующая движение поездов от ЖС к ЖС' с ограничением количества поездов на участке дороги между ЖС и ЖС'

#### 4. Анализ поведения систем с помощью сетей Петри

Моделирование систем СП, прежде всего, обусловлено необходимостью проведения глубокого исследования их поведения. Для проведения такого исследования необходимы методы анализа свойств самих СП. Этот подход предполагает свести исследования свойств реальной системы к анализу определённых свойств моделирующей СП. Здесь приведём только два свойства СП – безопасность и ограниченность – и продемонстрируем их практическое значение для железнодорожных систем, промоделированных в предыдущем разделе.

##### 4.1. Безопасность

**Определение 5.** Позиция  $p \in P$  СП  $N=(P, T, I, O)$  с начальной маркировкой  $\mu$  является *безопасной*, если  $\mu'(p) \leq 1$  для любой достижимой маркировки  $\mu' \in R(N, \mu)$  (где  $R(N, \mu)$  – множество достижимых маркировок из начальной маркировки  $\mu$  в СП  $N$ ). СП *безопасна*, если безопасны все позиции сети.  $\square$

Свойство безопасности позиций моделирующей СП может гарантировать, что организация работы ЖС из п. 3 исключает ситуацию, при которой на одном пути оказываются более одного поезда одновременно. Для этого позиции  $P_1, \dots, P_N$  в моделирующей СП (см. рис. 5) должны быть безопасными.

##### 4.2. Ограниченность

**Определение 6.** Позиция  $p \in P$  СП  $N=(P, T, I, O)$  с начальной маркировкой  $\mu$  является *k-ограниченной*, если  $\mu'(p) \leq k$  для любой достижимой маркировки  $\mu' \in R(N, \mu)$ . Позиция называется *ограниченной*, если она является *k-ограниченной* для некоторого целого значения  $k$ . СП *ограниченна*, если все ее позиции ограничены.

Свойство ограниченности позиций моделирующей СП для УЖД из п. 3 может гарантировать, что количество поездов на участке дороги между станциями ЖС и ЖС' удовлетворяет заданному ограничению (имеется в виду СП, моделирующая систему УЖД с учётом таких ограничений). Для этого позиции  $K$  и  $K'$  в моделирующей СП (см. рис. 7 и 9) должны быть  $z$  и  $z'$ -ограниченными соответственно, где  $z$  ( $z'$ ) – максимально допустимое число поездов, следующих от ЖС к ЖС' (от ЖС' к ЖС).

##### 4.3. Методы анализа

Особый интерес вызывают методы анализа свойств СП, которые обеспечивают автоматический анализ моделируемых систем. Существуют два основных метода анализа СП. Первый метод анализа основан на использовании *дерева достижимости* [2, 3], представляющего все достижимые маркировки и все возможные последовательности запусков переходов. Второй метод основан на решении *матричных уравнений*. На основе метода дерева достижимости, в частности, разрешимы проблемы безопасности и ограниченности (существует разрешающий алгоритм) [2, 3]. Таким образом, рассматриваемые в этом разделе свойства железнодорожных систем могут устанавливаться автоматически.

Метод анализа СП на основе дерева достижимости также позволяет устанавливать автоматически, что система УЖД никогда не войдёт в тупиковую ситуацию. Необходимо отметить, что все эти свойства анализируются относительно начального условия системы, задаваемого начальной маркировкой СП. Таким образом, одна и та же модель железнодорожного участка в виде СП может быть использована для исследования её поведения при различных начальных условиях, отражающих, например, различные количества находящихся в ней поездов.

#### Заключение

В заключении хотелось бы отметить, что приведённое в этой статье краткое описание средств моделирования и анализа СП содержит минимальные сведения из теории СП, необходимые для понимания статьи читателями, не знакомыми с СП. Продемонстрированное практическое значение применения этих средств в области организации движения на железнодорожном транспорте далеко не исчерпывается приведёнными примерами реальных свойств железнодорожных систем, поддающихся автоматическому обоснованию. Авторы надеются, что настоящая статья привлечет внимание специалистов в области организации железнодорожного движения к СП и будет способствовать более активному их применению в этой области.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Petri C. Kommunikation mit Automaten. Ph. D. dissertation / University of Bonn, Bonn, West Germany, 1962 (in German); M. I. T. Memorandum MAC-M-212, Project MAC / Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts; Clifford F. Greene, Jr. (translator), Communication with Automata, Supplement 1 to Technical Report RADC-TR-65-377,1, Rome Air Development Center, Griffiss Air Force Base, New York, January, 1966, p. 89.
2. Питерсон Джс. Теория сетей Петри и моделирование систем. М.: Мир, 1984. С. 263.
3. Котов В.Е. Сети Петри. М.: Наука, 1984. С. 157.