ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2016, № 4, с. 4–16

ПЕРСПЕКТИВЫ СИСТЕМ ИНФОРМАТИКИ

УДК 004.45

"ИСТИННО ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ" И НЕДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ СЕМАНТИКА ДИСКРЕТНО-ВРЕМЕННЫХ СЕТЕЙ ПЕТРИ *

© 2016 г. И.Б. Вирбицкайте[1,2], В.А. Боровлёв[2], Л. Попова-Цейгманн[3]

[1]*Институт систем информатики СО РАН*
630090 г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 6
[2]*Новосибирский государственный университет*
630090 г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2
[3]*Берлинский университет им. Гумбольдта*
10099 г. Берлин, пр. Унтер ден Линден, 6
E-mail: virb@iis.nsk.su, borovl.victor@gmail.com, popova@informatik.hu-berlin.de

Поступила в редакцию 14.03.2016

В статье определяется "истинно параллельная" и недетерминированная семантика в терминах ветвящихся процессов дискретно-временных сетей Петри (ДВСП), в которых возможно бесконечное число переходов и мест, неограниченное количеством фишек в местах, и (максимальные) шаги срабатывания параллельных переходов, что позволяет считать данный класс ДВСП самым мощным из известных ранее. Доказывается, что развертка (максимальный ветвящийся процесс) ДВСП является наибольшим элементом полной решетки, построенной на ветвящихся процессах ДВСП с шаговой семантикой. Кроме того, показывается, что этот результат верен и для случая максимальных шагов срабатывания переходов, но только если наложены дополнительные ограничения на структуру и поведение ДВСП.

1. ВВЕДЕНИЕ

"Развертка" моделей сетей Петри (СП) — это метод построения "истинно параллельного" и недетерминированного представления поведения систем, способствующий их эффективной верификации. Понятие "развертки" в виде максимального ветвящегося процесса СП, т.е. ациклической сети, содержащей информацию об отношениях причинной зависимости, параллелизма и конфликта между событиями моделируемых систем, и отображения этой сети в исходную СП, было впервые предложено в статье [1] в контексте безопасных СП. Чтобы показать, что "развертка" является корректным представлением поведения систем, в работе [2] была дана характеризация "развертки" как наибольшего элемента полной решетки ветвящихся процессов конечных безопасных СП (т.е СП, содержащих не более одной фишки в каждом месте при любой достижимой маркировке и не имеющих кратных дуг). Данный результат был распространен на случай конечных СП с кратными дугами в статье [3], а на случай СП без требований конечности структуры и количества фишек в местах — в работе [4].

В общем случае, "развертка" СП может быть бесконечной. Поэтому Мак-Миллан [5] предложил использовать конечный префикс "развертки", который содержит всю необходимую информацию о поведении (достижимых маркировках) исходной СП. Данный подход активно используется при решении проблем верификации [6, 8, 7, 9], планирования [10, 11] и диагностирования [12, 13] параллельных/распределенных систем. Кроме того, в статьях [14, 15, 16] демонстрируется перспективность применения данного подхода при проектировании корректных параллельных систем реального времени, представленных временными СП. Также следу-

*Работа частично поддержана DFG-РФФИ (проект CAVER, гранты BE 1267/14-1 и 14-01-91334).

ет отметить статьи [17] и [18], где были сделаны первые шаги по разработке так называемых причинных процессов, содержащих информацию об отношениях причинной зависимости и параллелизма между событиями моделируемых систем, предствленных соответственно непрерывно-временными безопасными СП и дискретно-временными ограниченными СП.

В данной статье определяется “истинно параллельная” и недетерминированная семантика в терминах ветвящихся процессов дискретно-временных сетей Петри (ДВСП), в которых возможно бесконечное число переходов и мест, неограниченное количеством фишек в местах и (максимальные) шаги срабатывания параллельных переходов, что позволяет считать данный класс ДВСП самым мощным из известных ранее. Показывается, что “развертка” является наибольшим элементом полной решетки, построенной на ветвящихся процессах ДВСП (с ограничениями) с семантикой (максимального) шага. Отметим, что из-за экономии места доказательства результатов представлены только для случая с семантикой максимального шага, как наиболее сложного.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Мультимножества. Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. *Мультимножеством* на множестве X называется функция $\mu : X \to \mathbb{N}$, т.е. $\mu \in \mathbb{N}^X$. Число $\mu(x) \in \mathbb{N}$ называется *коэффициентом* $x \in X$. *Носителем* мультимножества μ называют множество $\overline{\mu} = \{x \in X \mid \mu(x) > 0\}$, которое может быть бесконечным в общем случае. Пустое мультимножество обозначается $\emptyset$. Мультимножество часто представляется как сумма вида $\sum_{x \in X} \mu(x)x$. Операции сложения и вычитания мультимножеств на множестве X определяются поэлементно (однако отрицательные коэффициенты запрещены). На мультимножествах можно ввести частичный порядок, полагая $\mu \leq \nu$, если $\mu(x) \leq \nu(x)$ для каждого $x \in X$. Бесконечная сумма $\sum_{i \in I} \mu_i$ мультимножеств называется *корректно определённой*, если сумма $\sum_{i \in I} \mu_i(x)$ конечна для любого $x \in X$. Если X и Y — множества, то отображение $h : X \longrightarrow Y$ может быть распространено на мультимножества, $h : \mathbb{N}^X \longrightarrow \mathbb{N}^Y$, полагая $h(\mu) = \sum_{x \in X} \mu(x)h(x)$, если сумма корректно определена.

Графы. Пусть $(X, \to)$ — граф. Обозначим через $\xrightarrow{*}$ ($\xrightarrow{+}$) рефлексивное и транзитивное замыкание (транзитивное замыкание) отношения $\to$. Далее для подмножества $Y \subseteq X$ будут использованы следующие обозначения: ${}^\bullet Y = \{x \in X \mid \exists y \in Y, x \to y\}$, $Y^\bullet = \{x \in X \mid \exists y \in Y, y \to x\}$, ${}^*Y = \{x \in X \mid \exists y \in Y, x \xrightarrow{*} y\}$, $Y^* = \{x \in X \mid \exists y \in Y, y \xrightarrow{*} x\}$. Если $Y = \{y\}$, будем просто писать ${}^\bullet y$, $y^\bullet$, ${}^*y$ и y^*. Когда граф $(X, \to)$ *ацикличен* (т.е., $x \xrightarrow{+} x$ не верно для любого $x \in X$), отношение $\xrightarrow{*}$ является частичным порядком на множестве X. В этом случае будем говорить, что граф $(X, \to)$ *финитарен*, если $|\{y \in X \mid y \xrightarrow{*} x\}| < \infty$ для любого $x \in X$, т.е. каждая вершина имеет конечное число предшествующих относительно $\xrightarrow{*}$ вершин.

Решётки. Для частично упорядоченного множества $(X, \leq)$ и подмножества $Y \subseteq X$ будем говорить, что $x \in X$ — *нижняя (соответственно, верхняя) грань* Y, если $x \leq y$ (соответственно $y \leq x$) для каждого элемента $y \in Y$. Наибольшая нижняя (соответственно наименьшая верхняя) грань подмножества Y, если таковая существует, обозначается как $inf(Y)$ (соответственно $sup(Y)$). Если любые двухэлементные подмножества множества X имеют наибольшую нижнюю и наименьшую верхнюю грань, то X называют а *решёткой*. Решётка является *полной*, если любые подмножества множества X имеют наибольшую нижнюю и наименьшую верхнюю грани.

3. ВРЕМЕННЫЕ СЕТИ ПЕТРИ

В этом разделе представлены синтаксис и семантика (максимального) шага сетей Петри, в которых переходы помечены действиями, обладающими временными задержками.

Определение 1. *(Помеченная) временная сеть Петри (на множестве $\mathcal{A}$ действий) (обозначается ПВСП) — это кортеж $\mathcal{N}_\mathcal{A} = (P,\ T,\ Pre,\ Post,\ m_0,\ L,\ \Delta)$, где*

1. *$N(\mathcal{N}_\mathcal{A}) = (P, T, Pre, Post, m_0)$ — сеть Петри, состоящая из двух непересекающихся (конечных или бесконечных) множеств P и T, элементы которых называются* местами

и переходами *соответственно, двух мультимножеств Pre и $Post$ на множестве $P \times T$, называемых* функциями кратности входных и выходных дуг[1], *и мультимножества m_0 на множестве P, называемого* начальной маркировкой. Маркировка[2] m *в $N(\mathcal{N}_\mathcal{A})$ — мультимножество на множестве P.* Входные дуги *перехода $t \in T$ (обозначается $Pre(t)$) — маркировка $Pre(\cdot, t)$, и* выходные дуги *перехода t (обозначается $Post(t)$) — маркировка $Post(\cdot, t)$ в $N(\mathcal{N}_\mathcal{A})$. Более того, для любого $T' \subseteq T$ верно, что $\sum_{t\in T'} Pre(t)$ и $\sum_{t\in T'} Post(t)$ — маркировки[3] в $N(\mathcal{N}_\mathcal{A})$.*

2. $L : T \longrightarrow \mathcal{A}$ — функция пометки*, связывающая действие из $\mathcal{A}$ с каждым переходом $t \in T$.*

3. $\Delta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{N}$ — временная функция*, связывающая натуральное число из $\mathbb{N}$ с каждым действием из $\mathcal{A}$. Пусть $sup(\mathcal{N}_\mathcal{A}) = \sup\{\Delta(L(t)) \mid t \in T\}$.*

Заметим, что ПВСП — это дискретно-временная сеть Петри, представленная в работе [20] в случае, если множества P и T конечны, $\mathcal{A} = T$ и L — тождественная функция.

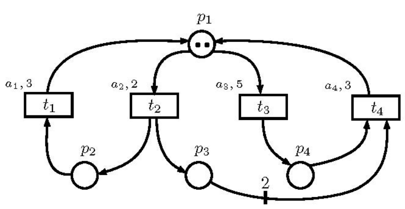

Рис. 1.
Графическое представление ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$.

Пример 1. *На рисунке 1 дано графическое представление ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ на множестве действий $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Места и переходы изображены окружностями и прямоугольниками соответственно, входные и выходные дуги переходов представлены помеченными натуральными числами дугами, если их кратность больше 1, начальная маркировка показана соответствующим числом фишек (жирных точек) в местах, каждый переход помечен действием из $\mathcal{A}$ и временной задержкой, изображенными рядом с переходом.*

Для двух ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A} = (P, T, Pre, Post, m_0, L, \Delta)$ и $\mathcal{N}'_\mathcal{A} = (P', T', Pre', Post', m'_0, L', \Delta')$ отображение $h : P \cup T \to P' \cup T'$ — *гомоморфизм* из $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ в $\mathcal{N}'_\mathcal{A}$, если

- $h(P) \subseteq P'$, $h(T) \subseteq T'$,
- $m'_0 = h(m_0)$,
- $\Delta' = \Delta$,
- для каждого перехода $t \in T$ выполнено:
  - $Pre'(h(t)) = h(Pre(t))$,
  - $Post'(h(t)) = h(Post(t))$,
  - $L'(h(t)) = L(t)$.

Заметим, что $h(m_0)$, $h(Pre(t))$ и $h(Post(t))$ должны быть корректно определены.

Перейдём к рассмотрению поведения ПВСП. *Состояние* ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ — это тройка $z = (m, ft, u)$, где m маркировка в $N(\mathcal{N}_\mathcal{A})$, ft — множество работающих переходов и $u : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{N}$ — *динамическая временная функция* такая, что $u(a) \le \Delta(a)$, для всех $a \in \mathcal{A}$. *Начальное состояние* z_0 — это пара $(m_0, \emptyset, u_0)$, где m_0 — *начальная маркировка* и $u_0(a) = 0$ для всех $a \in \mathcal{A}$. Подмножество $\emptyset \ne R \subseteq T$ называется *шагом в состоянии* z, если выполнено: (а) $\sum_{t\in R} Pre(t) \le m$, (б) $\forall t \in R : u(L(t)) = 0$, (в) $\forall t, t' \in R : t' \ne t \longrightarrow L(t) \ne L(t')$; *максимальным шагом в* z, если R — шаг в z и следующие свойства выполнены для всех $\widehat{t} \in T \setminus R$: $\big(Pre(\widehat{t}) \le m \ \wedge\ u(L(\widehat{t})) = 0 \ \wedge\ \forall t \in R : L(\hat{t}) \ne L(t)\big) \longrightarrow \big(\sum_{t\in R} Pre(t) + Pre(\hat{t}) \not\le m\big)$.

Определение 2. *Пусть $z = (m, ft, u)$ — состояние ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ и $R \subseteq T$. Тогда*

- *R может сработать в z (обозначается $z \xrightarrow{R}_{(max)}$), если R — (максимальный) шаг в z,*

[1] Количество дуг между каждым местом и каждым переходом — натуральное число.

[2] Маркировка содержит натуральное число фишек в каждом месте сети.

[3] Количество дуг между каждым местом и каждым подмножеством переходов — натуральное число.

- *после срабатывания (максимального) шага R в z, ПВСП переходит в состояние $z' = (m', ft', u')$ (обозначается $z \xrightarrow{R}_{(max)} z'$), где*

  1. $m' := m - \sum_{t \in R} Pre(t) + \sum_{\substack{t \in R, \\ \Delta(L(t))=0}} Post(t)$,
  2. $ft' := ft \cup \{t \in R \mid \Delta(L(t)) \neq 0\}$,
  3. $u'(a) := \begin{cases} \Delta(a), & \text{если } t \in R \wedge a = L(t), \\ u(a), & \text{иначе,} \end{cases}$

- *истечение единицы времени в семантике шага (обозначается $z \xrightarrow{1}$) всегда возможно в z; истечение единицы времени в семантике максимального шага (обозначается $z \xrightarrow{1}_{max}$) возможно в z, если $u(L(t)) = 0 \longrightarrow Pre(t) \not\leq m$ для каждого $t \in T$,*

- *после истечения единицы времени в семантике (максимального) шага в z, ПВСП переходит в состояние $z' = (m', ft', u')$ (обозначается $z \xrightarrow{1}_{(max)} z'$), где*

  1. $m' := m + \sum_{\substack{t \in ft \\ u(L(t))=1}} Post(t)$,
  2. $ft' := \{t \in ft \mid u(L(t)) > 1\}$,
  3. $u'(a) := \begin{cases} u(a) - 1, & \text{если } u(a) > 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Предложение 1. *Пусть h — гомоморфизм из ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ в ПВСП $\mathcal{N}'_\mathcal{A}$ и (m, ft, u) — состояние ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ такое, что $h(m)$ корректно определенно, h — инъективное отображение на множестве ft и $u = h(u)$,*

(а) *если $(m, ft, u) \xrightarrow{R} (m', ft', u')$ в $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, то h — инъективное отображение на множестве R, $h(m')$ корректно определенно и $h(m, ft, u) \xrightarrow{h(R)} h(m', ft', u')$ в $\mathcal{N}'_\mathcal{A}$,*

(б) *$(m, ft, u) \xrightarrow{1} (m', ft', u')$ в $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, то $h(m')$ корректно определенно, h — инъективное отображение на множестве ft' и $h(m, ft, u) \xrightarrow{1} h(m', ft', u')$ в $\mathcal{N}'_\mathcal{A}$.*

Доказательство. (а) Согласно определению 2,
$m' := m - \sum_{t \in R} Pre(t) + \sum_{\substack{t \in R \\ \Delta(L(t))=0}} Post(t)$. Покажем, что $h(m')(p') = \sum_{p \in h^{-1}(p')} m'(p) = \sum_{p \in h^{-1}(p')} (m(p) - \sum_{t \in R} Pre(p,t) + \sum_{\substack{t \in R \\ \Delta(L(t))=0}} Post(p,t)) \in \mathbb{N}$ для всех $p' \in P'$. Поскольку $h(m)$ является корректно определённой суммой мультимножеств, получаем, что $\sum_{p \in h^{-1}(p')} m(p) \in \mathbb{N}$. По определению гомоморфизма, $\sum_{p \in h^{-1}(p')} Pre(p,t) \in \mathbb{N}$ и $\sum_{p \in h^{-1}(p')} Post(p,t) \in \mathbb{N}$. Заметим, что $\sum_{t \in R} Pre(p,t) \in \mathbb{N}$ и $\sum_{\substack{t \in R \\ \Delta(L(t))=0}} Post(p,t) \in \mathbb{N}$ для всех $p \in P$, потому что $\sum_{t \in T'} Pre(t)$ и $\sum_{t \in T'} Post(t)$ — мультимножества для всех $T' \subseteq T$. Следовательно, $\sum_{p \in h^{-1}(p')} \sum_{t \in R} Pre(p,t) \in \mathbb{N}$ и $\sum_{p \in h^{-1}(p')} \sum_{\substack{t \in R \\ \Delta(L(t))=0}} Post(p,t) \in \mathbb{N}$ для всех $p' \in P'$.

Из определений гомоморфизма и шага в состоянии следует, что h — инъективное отображение на R. По определению гомоморфизма, верно, что $\sum_{p \in h-1(p')} Pre(p,t) = Pre'(p', h(t))$ и $\sum_{p \in h-1(p')} Post(p,t) = Post'(p', h(t))$ для всех $p' \in P'$. Тогда имеем, что $\sum_{t \in R} \sum_{p \in h^{-1}(p')} Pre(p,t) = \sum_{t' \in h(R)} Pre'(p', t')$ и $\sum_{\substack{t \in R \\ \Delta(L(t))=0}} \sum_{p \in h-1(p')} Post(p,t) = \sum_{\substack{t' \in h(R) \\ \Delta(L(t'))=0}} Post'(p', t')$ для всех $p' \in P'$. Следовательно, получаем, что $h(m') = h(m) - \sum_{t' \in h(R)} Pre'(t') + \sum_{\substack{t' \in h(R) \\ \Delta(L(t'))=0}} Post'(t')$. Также, по определению гомоморфизма, верно, что $h(ft') = h(ft) \cup \{t' \in h(R) \mid \Delta(L(t')) \neq 0\}$ и $u' = h(u')$, потому что $u = h(u)$. Таким образом, $h(m, ft, u) \xrightarrow{h(R)} h(m', ft', u')$.

(б) Аналогично пункту (а), но с использованием инъективности фуекции h на множестве ft. $\Diamond$

Для ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ последовательность вида $\sigma := z_0 = z_0^0 \xrightarrow{R_1}_{(max)} z_1^0 \xrightarrow{1}_{(max)} z_1^1 \ldots \ldots z_1^{j_1-1} \xrightarrow{1}_{(max)} z_1^{j_1} \ldots z_{n-1}^{j_{n-1}} \xrightarrow{R_n}_{(max)} z_n^0 \xrightarrow{1}_{(max)} z_n^1 \ldots z_n^{j_n-1} \xrightarrow{1}_{(max)} z_n^{j_n}$, где $z_i^k \neq z_i^{k+1}$ для всех $1 \leq i \leq n$ и $0 \leq k < j_i$ ($n \geq 0$,

$j_i \geq 0$) будем называть *последовательностью срабатываний в семантике (максимального) шага*. Пусть $GT(\sigma, z_n^{j_n}) = \sum_{1 \leq i \leq n} j^i$. Состояние z *достижимо в семантике (максимального) шага* ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, если существует последовательность срабатываний в семантике (максимального) шага, заканчивающаяся в z. Пусть $GT(z) = \{GT(\sigma, z) \mid \sigma$ — последовательность срабатываний в семантике (максимального) шага, заканчивающаяся в $z\}$.

Будем говорить, что $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ — *квазиживая ПВСП в семантике (максимального) шага*, если для каждого $t \in T$ существует (максимальный) шаг R в некотором состоянии (m, ft, u), достижимом в семантике (максимального) шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, такой, что $t \in R$; *простая ПВСП*, если функция пометок L инъективна, т.е. $L(t) = L(t') \Rightarrow t = t'$, для всех $t, t' \in T$; *прогрессирующая по времени ПВСП*, если $\sum_{i>0} \Delta(L(t_i)) \geq sup(\mathcal{N}_\mathcal{A})$ для любого бесконечного множества $\{t_1, t_2, \ldots\}$ переходов таких, что $\forall i > 0 : t_i^\bullet \cap {}^\bullet t_{i+1} \neq \emptyset$; *ПВСП без кратных срабатываний* в семантике (максимального) шага, если для каждого состояния (m, ft, u), достижимого в семантике (максимального) шага, для каждого (максимального) шага R в (m, ft, u) и для каждого перехода $t \in R$ существует место $p \in {}^\bullet t$ такое, что $m(p) - \sum_{t' \in R} Pre(p, t') < Pre(p, t)$; *ПВСП с ограничениями*, если $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ — простая прогрессирующая по времени ПВСП без кратных срабатываний.

Пример 2. *Рассмотрим поведение ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, изображённой на рис. 1. Начальное состояние ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ — это $z_0 = (2p_1, \emptyset, 0)$. Множества $\{t_2\}$, $\{t_3\}$ и $\{t_2, t_3\}$ — шаги в z_0, и, более того, $\{t_2, t_3\}$ — единственный максимальный шаг в z_0. После срабатывания шага $\{t_2\}$ в состоянии z_0 ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ переходит в состояние $z_1 = (p_1, \{t_2\}, u(a_1) = u(a_3) = u(a_4) = 0; u(a_2) = 2)$ и после истечения единицы времени в шаговой семантике в состоянии z_1 ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ переходит в состояние $z_1^1 = (p_1, \{t_2\}, u(a_1) = u(a_3) = u(a_4) = 0; u(a_2) = 1)$. Кроме того, $\sigma = z_0 \xrightarrow{\{t_2,t_3\}}_{(max)} z_1^0 \xrightarrow{1}_{(max)} z_1^1 \xrightarrow{\{t_1\}}_{(max)} z_2^0 \xrightarrow{1}_{(max)} z_2^1 \xrightarrow{1}_{(max)} z_2^2 \xrightarrow{1}_{(max)} z_2^3 \xrightarrow{\{t_2\}}_{(max)} z_3^0 \xrightarrow{1}_{(max)} z_3^1 \xrightarrow{1}_{(max)} z_3^2 \xrightarrow{\{t_1,t_4\}}_{(max)} z_4^0$ — последовательность срабатываний в семантике (максимального) шага в $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, где $z_1^0 = (\emptyset, \{t_2, t_3\}, u(a_1) = u(a_4) = 0; u(a_2) = 2; u(a_3) = 5)$, $z_1^1 = (\emptyset, \{t_2, t_3\}, u(a_1) = u(a_4) = 0; u(a_2) = 1; u(a_3) = 4)$, $z_1^2 = (p_2 + p_3, \{t_3\}, u(a_1) = u(a_2) = u(a_4) = 0; u(a_3) = 3)$, $z_2^0 = (p_3, \{t_1, t_3\}, u(a_2) = u(a_4) = 0; u(a_1) = 3; u(a_3) = 3)$, $z_2^1 = (p_3, \{t_1, t_3\}, u(a_2) = u(a_4) = 0; u(a_1) = 2; u(a_3) = 2)$, $z_2^2 = (p_3, \{t_1, t_3\}, u(a_2) = u(a_4) = 0; u(a_1) = 1; u(a_3) = 1)$, $z_2^3 = (p_1 + p_3 + p_4, \emptyset, u(a_1) = u(a_2) = u(a_3) = u(a_4) = 0)$, $z_3^0 = (p_3 + p_4, \{t_2\}, u(a_1) = u(a_3) = u(a_4) = 0; u(a_2) = 2)$, $z_3^1 = (p_3 + p_4, \{t_2\}, u(a_1) = u(a_3) = u(a_4) = 0; u(a_2) = 1)$, $z_3^2 = (p_2 + 2p_3 + p_4, \emptyset, u(a_1) = u(a_2) = u(a_3) = u(a_4) = 0)$, $z_4^0 = (\emptyset, \{t_1, t_4\}, u(a_2) = u(a_3) = 0; u(a_1) = 3; u(a_4) = 3)$. Тогда $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ — квази-живая ПВСП в семантике (максимального) шага. Несложно проверить, что $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ — ПВСП с ограничениями.*

4. ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ И РАЗВЁРТКИ ПВСП

Следуя традициям, определим ветвящийся процесс ПВСП как пару, состоящую из так называемой O-сети (occurrence net) — некоторой ПВСП с ацикличным и финитарным графом, узлы которого называются условиями (а не местами) и событиями (а не переходами), и гомоморфизма из этой O-сети в ПВСП, удовлетворяющих некоторым дополнительным ограничениям.

ПВСП $\mathcal{O}_\mathcal{A} = (B, E, In, Out, q_0, l, \delta)$ назовём *(помеченной) временной O-сетью (на $\mathcal{A}$) (обозначается ПВОС)* в семантике (максимального) шага, если

- $|{}^\bullet b| \leq 1$ для каждого условия $b \in B$,
- носитель начальной маркировки q_0 — множество $\{b \in B \mid |{}^\bullet b| = 0\}$,
- $\mathcal{O}_\mathcal{A}$ — квазиживая ПВСП в семантике (максимального) шага.

Пусть $\mathcal{O}_\mathcal{A} = (B, E, In, Out, q_0, l, \delta)$ и $\mathcal{O}'_\mathcal{A} = (B', E', In', Out', q'_0, l', \delta')$ — две ПВОС. Будем говорить, что $\mathcal{O}_\mathcal{A}$ — *подсеть* для $\mathcal{O}'_\mathcal{A}$ (обозначается $\mathcal{O}_\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{O}'_\mathcal{A}$), если $B \subseteq B'$, $E \subseteq E'$, $q_0 = q'_0$, $\delta = \delta'$, и $In(e) = In'(e)$, $Out(e) = Out'(e)$, $l(e) = l'(e)$ для любого $e \in E$. Подсеть $\mathcal{O}_\mathcal{A}$ для

$\mathcal{O}'_{\mathcal{A}}$ — *префикс* для $\mathcal{O}'_{\mathcal{A}}$, если $x \in B \cup E$ всякий раз, когда $x \xrightarrow{*} y$ для некоторого $y \in B \cup E$. Не сложно увидеть, что любая подсеть $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ для $\mathcal{O}'_{\mathcal{A}}$ будет также ПВОС, если и только если $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ — префикс для $\mathcal{O}'_{\mathcal{A}}$.

Определение 3. *Пару* $\beta = (\mathcal{O}_{\mathcal{A}} = (B,\ E,\ In,\ Out,\ q_0,\ l,\ \delta),\ h)$ *назовём* ветвящимся процессом *в семантике (максимального) шага ПВСП* $\mathcal{N}_{\mathcal{A}} = (P,\ T,\ Pre,\ Post,\ m_0,\ L,\ \Delta)$, *если* $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ — *ПВОС в семантике (максимального) шага и* $h : B \cup E \to P \cup T$ — *гомоморфизм из* $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ *в* $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ *такой, что*

- h — *инъективное отображение на* $\overline{q}_0$ *и на выходных условиях* $e^{\bullet}$ *любого события* $e \in \in E$;
- *если* $In(e) = In(e')$ *и* $h(e) = h(e')$, *то* $e = e'$ *для любых* $e, e' \in E$.

Для ветвящегося процесса $\beta = (\mathcal{O}_{\mathcal{A}}, h)$ в семантике максимального шага ПВСП $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ состояние (q, fe, u), достижимое в семантике максимального шага ПВОС $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$, будем называть *финальным*, если в каждой последовательности срабатываний σ в семантике максимального шага ПВОС $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$, содержащей состояние (q, fe, u), не существует максимального шага ни в (q, fe, u) и ни в одном состоянии, присутствующем после (q, fe, u) в σ.

Ветвящийся процесс $\beta = (\mathcal{O}_{\mathcal{A}}, h)$ в семантике (максимального) шага ПВСП $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ будем называть *адекватным*, если для каждого состояния (q, fe, u), достижимого в семантике (максимального) шага ПВОС $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$, верно, что:

- если $(q, fe, u) \xrightarrow{R}_{(max)}$ в $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$, то $h(q, fe, u) \xrightarrow{h(R)}_{(max)}$ в $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$,
- если $(q, fe, u) \xrightarrow{1}_{(max)}$ в $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ (и (q, fe, u) – нефинальное состояние), то $h(q, ft, u) \xrightarrow{1}_{(max)}$ в $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$.

Заметим, что любой ветвящийся процесс в шаговой семантике $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ будет адекватным, но это не так для ветвящихся процессов в семантике максимально шага $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$.

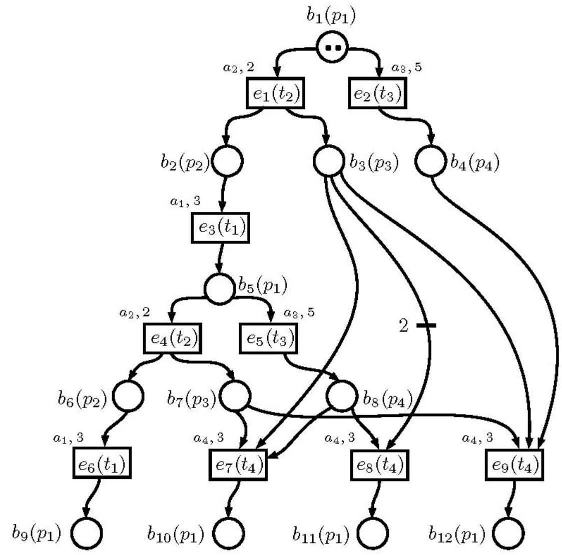

Рис. 2.
Ветвящийся процесс β в семантике шага ПВСП $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$.

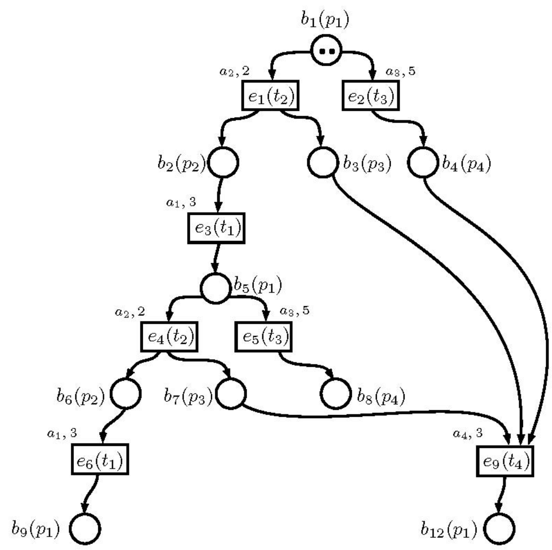

Рис. 3.
Ветвящийся процесс β' в семантике максимального шага ПВСП $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$.

Пример 3. *Сначала рассмотрим рис. 2 с ветвящимся процессом* $\beta = (\mathcal{O}_{\mathcal{A}}, h)$ *в семантике шага ПВСП* $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$, *изображённой на рис. 1. На рис. 2 рядом с событиями и условиями в скобках указаны соответствующие значения гомоморфизма* h. *Видим, что* β — *не ветвящийся процесс в семантике максимального шага ПВСП*

$\mathcal{N}_\mathcal{A}$, потому что невозможно найти максимальный шаг в некотором состоянии, достижимом в семантике максимального шага, содержащий либо событие e_7, либо событие e_8, т.е. $\mathcal{O}_\mathcal{A}$ — не квазиживая ПВОС в семантике максимального шага. На рис. 3 показан ветвящийся процесс $\beta' = (\mathcal{O}'_\mathcal{A}, h')$ в семантике максимального шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$. Более того, не сложно убедиться в том, что β' — адекватный ветвящийся процесс в семантике максимального шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$. Далее, рассмотрим подсеть $\mathcal{O}''_\mathcal{A}$ для $\mathcal{O}'_\mathcal{A}$, состоящую из события e_1 и условий b_1, b_2 и b_3, и сужение h'' гомоморфизма h' на элементы $\mathcal{O}''_\mathcal{A}$. Очевидно, что $\beta'' = (\mathcal{O}''_\mathcal{A}, h'')$ — ветвящийся процесс в семантике максимального шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$. Однако не сложно видеть, что β'' не будет адекватным ветвящимся процессом в семантике максимального шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, потому что $R^{O''} = \{e_1\}$ — максимальный шаг в начальном состоянии ПВОС $\mathcal{O}''_{\mathcal{TA}}$, однако $h''(R^{O''})$ не является максимальным шагом в начальном состоянии ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$.

Предложение 2. *Пусть $(\mathcal{O}_\mathcal{A}, h)$ — (адекватный) ветвящийся процесс в семантике (максимального) шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$. Если (q, fe, u) — (нефинальное) состояние, достижимое в семантике (максимального) шага ПВОС $\mathcal{O}_\mathcal{A}$, то $h(q, fe, u)$ — состояние, достижимое в семантике (максимального) шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$.*

Доказательство. Следует из определений адекватного ветвящегося процесса ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ и финального состояния ПВОС $\mathcal{O}_\mathcal{A}$. $\diamondsuit$

Предложение 3. *Пусть $(\mathcal{O}_\mathcal{A}, h)$ — (адекватный) ветвящийся процесс в семантике (максимального) шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ без кратных срабатываний. Тогда $\mathcal{O}_\mathcal{A}$ — ПВОС без кратных срабатываний.*

Доказательство. Предположим обратное, т.е. существует состояние (q, fe, u), достижимое в семантике максимального шага ПВОС $\mathcal{O}_\mathcal{A}$, максимальный шаг R в (q, fe, u) и событие $e \in R$ такие, что $\forall b \in {}^\bullet e : q(b) - \sum_{e' \in R} In(b, e') \geq In(b, e)$. Понятно, что (q, fe, u) — нефинальное состояние. Тогда $h(q, fe, u)$ — состояние, достижимое в семантике максимального шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, в силу предложения 2. Поскольку $(\mathcal{O}_\mathcal{A}, h)$ — адекватный ветвящийся процесс в семантике (максимального) шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, существует максимальный шаг $h(R)$ в состоянии $h(z_0^0)$ ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$. Тогда можно найти переход $t \in h(R)$ такой, что $t = h(e)$ и $\forall p \in {}^\bullet t$: $h(q_0)(p) - \sum_{t' \in h(R)} Pre(p, t') \geq Pre(p, t)$, в силу определения гомоморфизма. Пришли к противоречию, так как $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ — ПВСП без кратных срабатываний. $\diamondsuit$

Для ветвящихся процессов $\beta = (\mathcal{O}_\mathcal{A}, h)$ и $\beta' = (\mathcal{O}'_\mathcal{A}, h')$ в семантике (максимального) шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ гомоморфизм g из $\mathcal{O}_\mathcal{A}$ в $\mathcal{O}'_\mathcal{A}$ будем называть *гомоморфизмом из β в β'*, если $h = h' \circ g$.

Предложение 4. *Пусть $\beta = (\mathcal{O}_\mathcal{A}, h)$ и $\beta' = (\mathcal{O}'_\mathcal{A}, h')$ — ветвящиеся процессы в семантике (максимального) шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$. Тогда существует не более одного гомоморфизма g из β в β' и, более того, g — инъективное отображение, если g существует.*

Доказательство проводится индукцией по префиксам ПВОС $\mathcal{O}_\mathcal{A}$ с использованием свойств гомоморфизма. $\diamondsuit$

Расширим естественный частичный порядок $\sqsubseteq$ на ПВОС в семантике (максимального) шага до квазипорядка $\preceq$ на ветвящихся процессах в семантике (максимального) шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ следующим образом: $\beta \preceq \beta'$, если и только если существует гомоморфизм из β в β'. Будем говорить, что β и β' *изоморфны*, если $\beta \preceq \beta'$ и $\beta' \preceq \beta$. Максимальный относительно $\preceq$ ветвящийся процесс в семантике (максимального) шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ будем называть *развёрткой* в семантике (максимального) шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$.

Рассмотрим характеризацию (адекватных) развёрток ПВСП в семантике (максимального) шага.

Утверждение 1. *(Адекватный) ветвящийся процесс $\beta = (\mathcal{O}_\mathcal{A}, h)$ в семантике (максимального) шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ (с ограничениями) является (адекватной) развёрткой в семантике (максимального) шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, если и только если выполнено следующее свойство:*

(*) всякий раз, когда (q, fe, u) — состояние, достижимое в семантике (максимального) шага ПВОС $\mathcal{O}_\mathcal{A}$, R — (максимальный) шаг в состоянии $h(q, fe, u)$ ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, содержащий переход

t такой, что $Pre(t) = h(\widetilde{q})$ для некоторой маркировки $\widetilde{q} \le q$, тогда существует (максимальный) шаг R^O в состоянии (q, fe, u) ПВОС $\mathcal{O}_\mathcal{A}$ такой, что $h(R^O) = R$, и содержащий событие e такое, что $h(e) = t$ и $In(e) = \widetilde{q}$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть β удовлетворяет свойству (*). Предположим обратное, т.е. существует адекватный ветвящийся процесс $\beta' = (\mathcal{O}'_\mathcal{A}, h')$ в семантике максимального шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ такой, что $\beta \preceq \beta'$. Без потери общности считаем, что $\mathcal{O}_\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{O}'_\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{O}_\mathcal{A}$ — префикс для $\mathcal{O}'_\mathcal{A}$. Покажем, что $\mathcal{O}_\mathcal{A} = \mathcal{O}'_\mathcal{A}$. Предположим обратное, т.е. существует хотя бы одно событие e', принадлежащее ПВОС $\mathcal{O}'_\mathcal{A}$ и не принадлежащее ПВОС $\mathcal{O}_\mathcal{A}$. Так как $\mathcal{O}'_\mathcal{A}$ — квазиживая ПВОС, то существуют последовательность срабатываний σ' в семантике максимального шага ПВОС $\mathcal{O}'_\mathcal{A}$, заканчивающаяся в состоянии (q', fe', u'), и максимальный шаг R' в этом состоянии, содержащий событие e'. Исходя из того, что $\mathcal{O}_\mathcal{A}$ — префикс для $\mathcal{O}'_\mathcal{A}$, без потери общности предполагаем, что все предшественники событий из R' принадлежат ПВОС $\mathcal{O}_\mathcal{A}$. т.е. входные условия этих событий находятся в ПВОС $\mathcal{O}_\mathcal{A}$. Более того, поскольку структура ПВОС $\mathcal{O}'_\mathcal{A}$ — финитарный и ацикличный граф, то можно найти максимальный начальный префикс σ для σ', являющийся последовательностью срабатываний в семантике максимального шага ПВОС $\mathcal{O}_\mathcal{A}$ и заканчивающийся в состоянии (q, fe, u) таком, что $\sum_{e \in R'} In(e) \le q$. Тогда имеем, что $\neg((q, fe, u) \xrightarrow{1}_{max})$ в $\mathcal{O}'_\mathcal{A}$, в силу определения истечения единицы времени в семантике максимального шага в состоянии. Значит, $(q, fe, u) \xrightarrow{R'}_{max}$ в $\mathcal{O}'_\mathcal{A}$. Так как $(\mathcal{O}'_\mathcal{A}, h')$ — адекватный ветвящийся процесс ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, то $h'(R')$ — максимальный шаг в состоянии $h'(q, fe, u)$ ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$. Тогда существует переход $h'(e') \in h'(R')$ такой, что $Pre(h'(e')) = h'(\widetilde{q})$. Поскольку $\mathcal{O}_\mathcal{A}$ удовлетворяет свойству (*), можно найти максимальный шаг R^O в (q, fe, u) такой, что $h(R^O) = h'(R')$, и содержащий событие e такое, что $h(e) = h'(e')$ и $In(e) = \widetilde{q}$. Так как h — сужение h' на $B \cup E$, то верно, что $h'(e) = h'(e')$. Поскольку $\mathcal{O}_\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{O}'_\mathcal{A}$, получаем, что $In'(e) = In'(e')$. Следовательно, $e = e'$, по определению ветвящегося процесса в семантике максимального шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$.

($\Leftarrow$) Пусть $\sigma := z_0 = z_0^0 \xrightarrow{R_1}_{max} z_1^0 \xrightarrow{1}_{max} z_1^1 \ldots \ldots z_1^{j_1-1} \xrightarrow{1}_{max} z_1^{j_1} \ldots \ldots z_{n-1}^{j_{n-1}} \xrightarrow{R_n}_{max} z_n^0 \xrightarrow{1}_{max} z_n^1 \ldots z_n^{j_n-1} \xrightarrow{1}_{max} z_n^{j_n} = (q, fe, u)$ — последовательность срабатываний в семантике максимального шага ПВОС $\mathcal{O}_\mathcal{A}$. Будем доказывать индукцией по n.

1. $\mathbf{n = 0}$. Предположим обратное, т.е. состояние $z_0^0 = (q_0, fe_0, u_0)$ не удовлетворяет свойству (*). Пусть $k_0^0 = \inf GT_{\mathcal{O}_\mathcal{A}}(z_0^0)$. Сформируем множество $H_0^{k_0^0} = \{(z_0^0, R_0, t_0) \mid R_0$ — максимальный шаг в состоянии $h(z_0^0)$ ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, t_0 — переход из R_0 такой, что $Pre(t_0) = h(\widetilde{q}_0)$ для некоторой маркировки $\widetilde{q}_0 \le q_0$, и E не содержит события e_0 такого, что $h(e_0) = t_0$ и $In(e_0) = \widetilde{q}_0\}$. Заметим, что $H_0^{k_0^0} \ne \emptyset$. Построим $(\mathcal{O}'_\mathcal{A}, h')$ следующим образом. Пусть $B' = B$, $E' = E$ и $q'_0 = q_0$, $\delta' = \delta$. Для каждой тройки $(z_0^0, R_0, t_0) \in H_0^{k_0^0}$: (а) добавим в множество E' новое событие e_0 и в множество B' множество новых условий B'_0, снабжённое биекцией g на носителе мультимножества $Post(t_0)$; (б) расширим отображения In, Out и l, положив $In'(e_0) = \widetilde{q}_0$, $Out'(e_0) = \sum_{b' \in B'_0} Post(g(b'), t_0)\, b'$ и $l'(e_0) = L(t_0)$; (в) определим расширение отображения h, установив $h'(e_0) = t_0$ и $h'(b') = g(b')$ для всех $b' \in B'_0$. Используя тот факт, что $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ — ПВСП с ограничениями, нетрудно показать, что $(\mathcal{O}'_\mathcal{A}, h')$ — адекватный ветвящийся процесс в семантике максимального шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ такой, что $\mathcal{O}_\mathcal{A} \sqsubset \mathcal{O}'_\mathcal{A}$ и h — сужение отображения h' на $(B \cup E)$. Пришли к противоречию с тем, что $(\mathcal{O}_\mathcal{A}, h)$ — адекватная развёртка в семантике максимального шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$.

2. $\mathbf{n > 0}$. По предположению индукции, все состояния в σ до состояния z_n^0 удовлетворяют свойству (*). Теперь продолжим доказывать индукцией по j_n.

   - $\mathbf{j_n = 0}$. Аналогично рассуждениям в базисе индукции по n, при этом $k_n^0 = \inf GT_{\mathcal{O}_\mathcal{A}}(z_n^0)$ и $H_n^{k_n^0} = \{(z', R', t') \mid z' = (q', fe', u')$ — состояние, достижимое в семантике максимального шага

ПВОС $(\mathcal{O}_\mathcal{A}, h)$, и такое, что $k_n^0 = \inf GT_{\mathcal{O}_\mathcal{A}}(z')$, R' — максимальный шаг в состоянии $h(z')$ ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, t' — переход из R' такой, что $Pre(t') = h(\widetilde{q}')$ для некоторой маркировки $\widetilde{q}' \leq q'$, и E не содержит события e' такого, что $h(e') = t'$ и $In(e') = \widetilde{q}'\}$.

- $\mathbf{j_n > 0}$. Аналогично рассуждениям в базисе индукции по j_n. ♢

Следующие предложения устанавливают дополнительные полезные свойства развёрток ПВСП.

Предложение 5. *Пусть $\beta = (\mathcal{O}_\mathcal{A}, h)$ — (адекватный) ветвящийся процесс и $\beta' = (\mathcal{O}'_\mathcal{A}, h')$ — (адекватная) развёртка в семантике (максимального) шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ (с ограничениями). Тогда существует единственный гомоморфизм g из β в β'.*

Доказательство. Очевидно, что для $\beta = (\mathcal{O}_\mathcal{A}, h)$ можно построить последовательность $\beta^0 = (\mathcal{O}^0_\mathcal{A}, h^0), \ldots, \beta^k = (\mathcal{O}^k_\mathcal{A}, h^k)$ $(k \geq 0)$ адекватных ветвящихся процессов в семантике максимального шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ таких, что $\mathcal{O}^0_\mathcal{A}$ содержит только начальные условия, которые инъективно отображаются посредством h в $\overline{m}_0$, $(\mathcal{O}^i_\mathcal{A}, h^i) \prec (\mathcal{O}^{i+1}_\mathcal{A}, h^{i+1})$ $(0 \leq i < k)$ и не существует адекватного ветвящегося процесса $(\mathcal{O}^j_\mathcal{A}, h^j)$ в семантике максимального шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ такого, что $(\mathcal{O}^i_\mathcal{A}, h^i) \prec (\mathcal{O}^j_\mathcal{A}, h^j) \prec (\mathcal{O}^{i+1}_\mathcal{A}, h^{i+1})$. Без потери общности предположим, что $\mathcal{O}^0_\mathcal{A} \sqsubset \mathcal{O}^1_\mathcal{A} \sqsubset \ldots \sqsubset \mathcal{O}^{k-1}_\mathcal{A} \sqsubset \mathcal{O}^k_\mathcal{A}$. Тогда верно, что $E^0 \subset E^1 \subset \ldots \subset E^{k-1} \subset E^k$. Очевидно, что $h^0 \subset h^1 \subset \ldots \subset h^{k-1} \subset h^k$. Будем доказывать индукцией по k.

- $\mathbf{k = 0}$. Так как h и h' — инъективные отображения соответственно на $\overline{q}_0$ и $\overline{q}'_0$, то отображение $g^0 : \beta^0 \longrightarrow \beta'$ может быть однозначно определено на $\overline{q}_0$.

- $\mathbf{k > 0}$. По индукционному предположению, гомоморфизм $g^{k-1} : \beta^{k-1} \longrightarrow \beta'$ определён. Пусть значения отображения g^{k-1} не определены на множестве $\widetilde{E}^k \subseteq E^k$. Заметим, что для каждого события $\widetilde{e} \in \widetilde{E}^k$ существует максимальный шаг R в состоянии $(\widetilde{q}, \widetilde{fe}, \widetilde{u})$, достижимом в семантике максимального шага ПВОС $\mathcal{O}^k_\mathcal{A}$ и содержащий $\widetilde{e}$, потому что $\mathcal{O}^k_\mathcal{A}$ — квазиживая ПВОС.

  Для каждого состояния (q, fe, u), достижимого в семантике максимального шага ПВОС $\mathcal{O}^k_\mathcal{A}$ и такого, что отображение g^{k-1} определено на $\overline{q}$, для каждого максимального шага R в состоянии (q, fe, u), для каждого события $e \in R$ такого, что отображение $g^{k-1}(e)$ не определено и $In(e) = \widetilde{q} \leq q$ верно: (а) $h(R)$ — максимальный шаг в состоянии $h(q, fe, u)$ ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, потому что $(\mathcal{O}^k_\mathcal{A}, h^k)$ — адекватный ветвящийся процесс в семантике максимального шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, $Pre(h(e)) = h(\widetilde{q})$, по определению гомоморфизма h, и $h'(g^{k-1}(q, fe, u)) = h(q, fe, u)$, по построению g^{k-1}; (б) R' — максимальный шаг в состоянии $g^{k-1}(q, fe, u)$ ПВОС $\mathcal{O}^k_\mathcal{A}$ такой, что $h'(R') = h(R)$, и содержащий событие e' такое, что $h(e') = h(e)$ и $In'(e') = g(In(e))$, по утверждению 1; (в) если $g^k|_{B^{k-1} \cup E^{k-1}} = g^{k-1}$, то можно расширить гомоморфизм g^k, положив $g^k(e) = e'$ и $g^k(b) = h'^{-1}(h(b)) \cap e'^\bullet$ для каждого $b \in e^\bullet$, пользуясь тем, что h' — инъективное отображение на $e'^\bullet$.

Предложение 4 гарантирует единственность отображения $g : \beta \longrightarrow \beta'$. ♢

Предложение 6. *Пусть β и β' — (адекватные) развёртки в семантике (максимального) шага $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ (с ограничениями) такие, что $\beta \preceq \beta'$. Тогда β и β' изоморфны.*

Доказательство. Пусть $g : \beta \to \beta'$ — гомоморфизм. По предложению 4, g — инъективный гомоморфизм. Покажем, что g — изоморфизм, т.е. g — также сюръективное отображение.

Поскольку $\mathcal{O}'_\mathcal{A}$ — квазиживая ПВОС, то для каждого события $e' \in E'$ существует максимальный шаг R' в состоянии (q', fe', u'), достижимом в семантике максимального шага ПВОС $\mathcal{O}'_\mathcal{A}$, такой, что $e' \in R'$. Следовательно, все входные и выходные условия событий появляются в маркировках некоторых состояний, достижимых в семантике максимального шага ПВОС $\mathcal{O}'_\mathcal{A}$. По определению ПВОС, изолированные условия могут быть только в носителе маркировки начального состояния, которое присутствует в каждой последовательности срабатываний в семантике

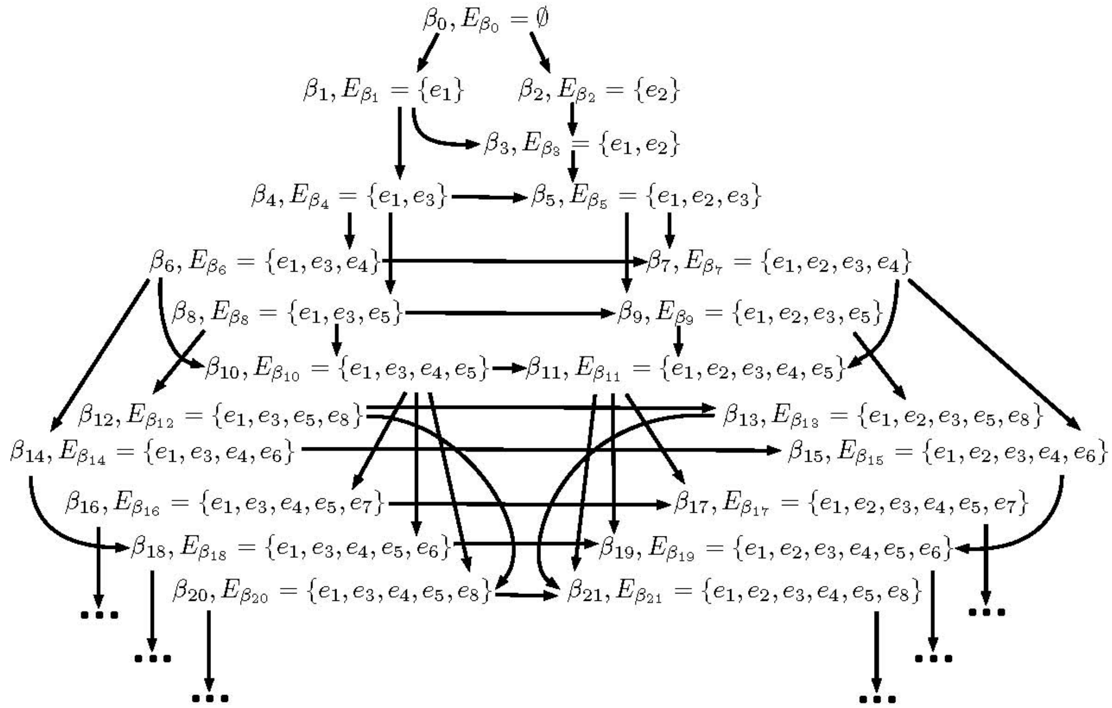

Рис. 4.
Начальный фрагмент полной решётки ветвящихся процессов в шаговой семантике ПВСП $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$.

максимального шага ПВОС $\mathcal{O}'_{\mathcal{A}}$. Поэтому достаточно показать, что для каждой последовательности σ' срабатываний в семантике максимального шага ПВОС $\mathcal{O}'_{\mathcal{A}}$ существует последовательность σ срабатываний в семантике максимального шага ПВОС $\mathcal{O}'_{\mathcal{A}}$ такая, что $g(\sigma) = \sigma'$. Без потери общности предположим, что $\sigma' = z'_0 \xrightarrow{R'_1}_{max} {z_1^0}' \xrightarrow{1}_{max} {z_1^1}' \dots {z_1^{j_1-1}}' \xrightarrow{1}_{max} z_1^{j_1} \dots {z_{n-1}^{j_{n-1}}}' \xrightarrow{R'_n}_{max} {z_n^0}' \xrightarrow{1}_{max} {z_n^1}' \dots {z_n^{j_n-1}}' \xrightarrow{1}_{max} {z_n^{j_n}}'$. Будем доказывать индукцией по n.

1. $\mathbf{n = 0}$. По определению гомоморфизма, $(g(q_0), \emptyset, u_0) = (q'_0, \emptyset, u'_0)$. Следовательно, отображение g сюръективно на носителе маркировки q'_0.

2. $\mathbf{n > 1}$. По предположению индукции, имеем, что $g(q_{n-1}^{j_{n-1}}, fe_{n-1}^{j_{n-1}}, u_{n-1}^{j_{n-1}}) = ({q_{n-1}^{j_{n-1}}}', {fe_{n-1}^{j_{n-1}}}', {u_{n-1}^{j_{n-1}}}')$. Следовательно, отображение g сюръективно на носителе маркировки ${q_{n-1}^{j_{n-1}}}'$. Будем продолжать доказательство индукцией по j_n.

   - $\mathbf{j_n = 0}$. Так как $(\mathcal{O}'_{\mathcal{A}}, h')$ — адекватный ветвящийся процесс, $h'(R'_n)$ — максимальный шаг в состоянии $h'({q_{n-1}^{j_{n-1}}}', {fe_{n-1}^{j_{n-1}}}', {u_{n-1}^{j_{n-1}}}') = h'(g(q_{n-1}^{j_{n-1}}, fe_{n-1}^{j_{n-1}}, u_{n-1}^{j_{n-1}})) = h(q_{n-1}^{j_{n-1}}, fe_{n-1}^{j_{n-1}}, u_{n-1}^{j_{n-1}})$ ПВСП $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$. Возьмём произвольное событие $e' \in R'_n$ такое, что $In'(e') = {\widetilde{q}_{n-1}^{j_{n-1}}}' \le {q_{n-1}^{j_{n-1}}}'$. Тогда верно, что $h(e') \in h'(R'_n)$ и $Pre(h'(e')) = h'({\widetilde{q}_{n-1}^{j_{n-1}}}') = h(g(\widetilde{q}_{n-1}^{j_{n-1}})) = h(\widetilde{q}_{n-1}^{j_{n-1}})$ для некоторой маркировки $\widetilde{q}_{n-1}^{j_{n-1}} \le q_{n-1}^{j_{n-1}}$. Согласно утверждению 1, существует максимальный шаг R_n в состоянии $(q_{n-1}^{j_{n-1}}, fe_{n-1}^{j_{n-1}}, u_{n-1}^{j_{n-1}})$ ПВОС $\mathcal{O}'_{\mathcal{A}}$ такой, что $h(R_1) = h'(R'_n)$, и содержащий событие e такое, что $h(e) = h'(e')$ и $In(e) = \widetilde{q}_{n-1}^{j_{n-1}}$. Значит, $h'(e') = h'(g(e))$ и $In'(g(e)) = g(\widetilde{q}_{n-1}^{j_{n-1}}) = {\widetilde{q}_{n-1}^{j_{n-1}}}' = In'(e')$, т.е. $g(e) = e'$, в силу определения ветвящегося процесса ПВСП $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$. Тогда отображение g сюръективно на R'_n. Пусть $(q_{n-1}^{j_{n-1}}, fe_{n-1}^{j_{n-1}}, u_{n-1}^{j_{n-1}}) \xrightarrow{R'_n}_{max} (q_n^0, fe_n^0, u_n^0)$ в ПВОС $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$. По определе-

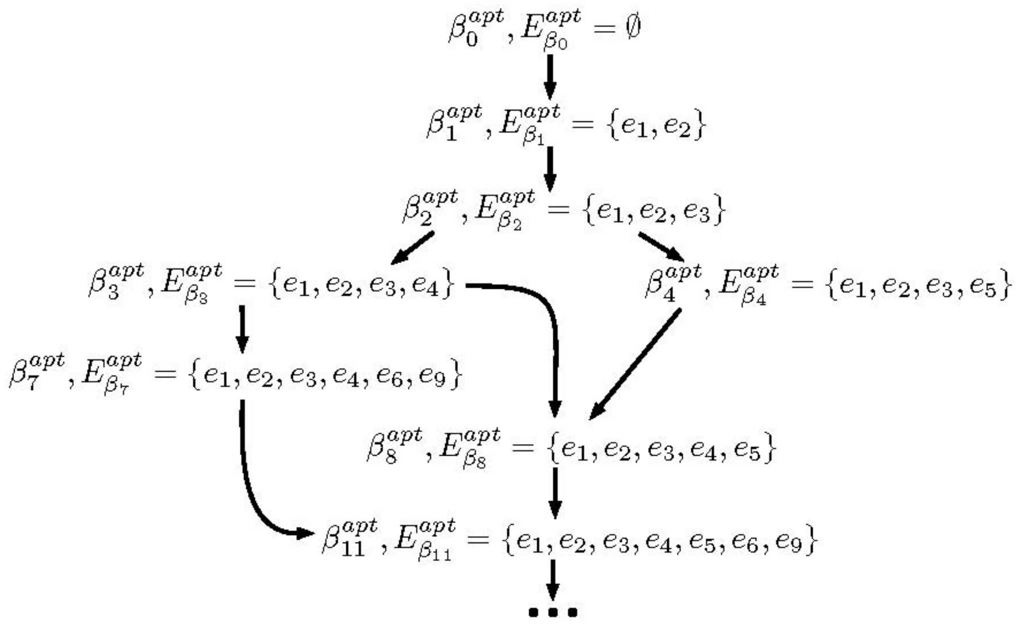

Рис. 5.
Начальный фрагмент полной решётки адекватных ветвящихся процессов в семантике максимального шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$.

ниям гомоморфизма и срабатывания максимального шага в состоянии, верно, что $g(q_n^0, fe_n^0, u_n^0) = (q_n^{0\prime}, fe_n^{0\prime}, u_n^{0\prime})$. Следовательно, отображение g сюръективно на носителе маркировки $q_n^{0\prime}$.

- $\mathbf{j_n > 0}$. По предположению индукции, $g(q_n^{j_n-1}, fe_n^{j_n-1}, u_n^{j_n-1}) = (q_n^{j_n-1\prime}, fe_n^{j_n-1\prime}, u_n^{0\prime})$. Следовательно, отображение g сюръективно на носителе маркировки $q_n^{j_n-1\prime}$. Так как $E \subseteq E'$, то, по определению, $(q_n^{j_n-1}, fe_n^{j_n-1}, u_n^{j_n-1}) \xrightarrow{1}_{max}$ в ПВОС $\mathcal{O}_\mathcal{A}$, поскольку $(q_n^{j_n-1\prime}, fe_n^{j_n-1\prime}, u_n^{0\prime}) \xrightarrow{1}_{max}$ в ПВОС $\mathcal{O}'_\mathcal{A}$. Пусть $(q_n^{j_n-1}, fe_n^{j_n-1}, u_n^{j_n-1}) \xrightarrow{1}_{max} (q_n^{j_n}, fe_n^{j_n}, u_n^{j_n})$ в ПВОС $\mathcal{O}_\mathcal{A}$. Из определений гомоморфизма и истечения единицы времени в семантике максимального шага в состоянии получаем, что $g(q_n^{j_n}, fe_n^{j_n}, u_n^{j_n}) = (q_n^{j_n\prime}, fe_n^{j_n\prime}, u_n^{j_n\prime})$. Следовательно, отображение g сюръективно на носителе маркировки $q_n^{j_n\prime}$. $\diamondsuit$

Теорема 1. *Каждая ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ (с ограничениями) имеет единственную с точностью до изоморфизма (адекватную) развёртку $\mathcal{U}_{(apt)}$ в семантике (максимального) шага такую, что $\beta \preceq \mathcal{U}_{(apt)}$ для любого (адекватного) ветвящегося процесса β в семантике (максимального) шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$.*

Доказательство. Положим $n = 0$. Для ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ построим структуру $\mathcal{O}_\mathcal{A}^0 = (B^0 = \overline{m}^0, E^0 = \emptyset, Pre^0 = \emptyset, Post^0 = \emptyset, q_0^0 = m_0, l^0 = \emptyset, \delta^0 = \Delta)$ и определим тождественное отображение h^0 на $\overline{m}_0$. Очевидно, $(\mathcal{O}_\mathcal{A}^0, h^0)$ — адекватный ветвящийся процесс в семантике максимального шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$. Положим $k^n = 0$ и $H_0^0 = \{(z_0, R_0, t_0) \mid R_0$ — максимальный шаг в состоянии $h^0(z_0)$, достижимом в семантике максимального шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, $t_0 \in R_0$ такой, что $Pre(t_0) = h^0(\widetilde{q}_0)$ для некоторой маркировки $\widetilde{q}_0 \leq q_0\}$.

Предположим, что для ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, уже построен ряд её адекватных ветвящихся процессов $(\mathcal{O}_\mathcal{A}^i, h^i)_{0 \leq i \leq n}$ в семантике максимального шага такой, что $\mathcal{O}_\mathcal{A}^i \sqsubset \mathcal{O}_\mathcal{A}^j$, если $i < j$. Тогда $\mathcal{O}_\mathcal{A}^i$ — префикс для $\mathcal{O}_\mathcal{A}^j$ и h^i — сужение отображения h^j

на $(B^i \cup E^i)$. Также, значение k^i установлено для всех $0 \leq i \leq n$.

Положим $k^{n+1} = k^n$. Пока множество $H_n^{k^{n+1}}$ пусто, будем увеличивать k^{n+1} на единицу и формировать заново множество $H_n^{k^{n+1}} = \{(z, R, t) \mid z = (q, fe, u)$ — незавершающее состояние[4], достижимое в семантике максимального шага ПВОС $(\mathcal{O}_\mathcal{A}^n, h^n)$ и такое, что $k^{n+1} = \inf GT_{\mathcal{O}_\mathcal{A}^n}(z)$, R — максимальный шаг в состоянии $h^n(z)$ ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, t — переход из R такой, что $Pre(t) = h^n(\widetilde{q})$ для некоторой маркировки $\widetilde{q} \leq q$, и E^n не содержит события e такого, что $h^n(e) = t$ и $In^n(e) = \widetilde{q}\}$.

Построим $(\mathcal{O}_\mathcal{A}^{n+1}, h^{n+1})$ следующим образом. Пусть $B^{n+1} = B^n$, $E^{n+1} = E^n$ и $q_0^{n+1} = q_0^n$, $\delta^{n+1} = \delta^n$. Для каждой тройки (z, R, t) из $H_n^{k^{n+1}}$: (а) добавим в множество E^{n+1} новое событие e и в множество B^{n+1} множество новых условий B, снабжённое биекцией g на носителе $Post(t)$, (б) расширим отображения In^n, Out^n и l^n, положив $In^{n+1}(e) = \widetilde{q}$, $Out^{n+1}(e) = \sum\limits_{b \in B} Post(g(b), t)\, b$ и $l^{n+1}(e) = L(t)$, (в) определим расширение отображения h^n, установив $h^{n+1}(e) = t$ и $h^{n+1}(b) = g(b)$ для всех $b \in B$. Сформируем новое множество $H_{n+1}^{k^{n+1}} = \{(z, R, t) \mid z = (q, fe, u)$ — незавершающее состояние, достижимое в семантике максимального шага ПВОС $(\mathcal{O}_\mathcal{A}^{n+1}, h^{n+1})$ и такое, что $k^{n+1} = \inf GT_{\mathcal{O}_\mathcal{A}^{n+1}}(z)$, R — максимальный шаг в состоянии $h^{n+1}(z)$ ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, t — переход из R такой, что $Pre(t) = h^{n+1}(\widetilde{q})$ для некоторой маркировки $\widetilde{q} \leq q$, и E^{n+1} не содержит события e такого, что $h^{n+1}(e) = t$ и $In^{n+1}(e) = \widetilde{q}\}$.

Используя тот факт, что $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ — ПВСП с ограничениями, нетрудно показать, что $(\mathcal{O}_\mathcal{A}^{n+1}, h^{n+1})$ — адекватный ветвящийся процесс в семантике максимального шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, $\mathcal{O}_\mathcal{A}^n \sqsubseteq \mathcal{O}_\mathcal{A}^{n+1}$ и h^n — сужение отображения h^{n+1} на $(B^n \cup E^n)$.

Определим структуру $\mathcal{U}_{apt} = (B, E, In, Out, q_0, l, \delta)$ следующим образом: $B = \bigcup_{i \in I} B^i$, $E = \bigcup_{i \in I} E^i$, $q_0 = q_0^0$, $\delta = \delta^0$ и для каждого $e \in E$ установим: $In(e) = In^i(e)$, $Out(e) = Out^i(e)$ и $l(e) = l^i(e)$, если $e \in E^i$. Отображение $h : B \cup E \longrightarrow P \cup T$ определим так: $h(x) = h^i(x)$, если $x \in B^i \cup E^i$, для каждого $x \in B \cup E$. Используя утверждение 1, можно показать, что $\mathcal{U}_{apt}$ — адекватная развёртка в семантике максимального шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$. Пусть $\beta' = (\mathcal{O}'_\mathcal{A}, h')$ — некоторый адекватный ветвящийся процесс в семантике максимального шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$. По предложению 5, существует единственный гомоморфизм $g : \beta' \longrightarrow \mathcal{U}_{apt}$, т.е. $\beta' \preceq \mathcal{U}_{apt}$. Наконец, если β' — другая адекватная развёртка в семантике максимального шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, результат следует из предложения 6. $\Diamond$

[4] Финальное состояние (q, fe, u) ПВОС $\mathcal{O}_\mathcal{A}$ называется *завершающим*, если существует последовательность срабатываний σ в семантике максимального шага ПВОС $\mathcal{O}_\mathcal{A}$, содержащая (q, fe, u) и финальное состояние (q', fe', u'), стоящее перед (q, fe, u) и такое, что существует максимальный шаг R в $h(q', fe', u')$ в ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$.

Теорема 1 и предложение 4 гарантируют, что каждый (адекватный) ветвящийся процесс в семантике (максимального) шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ (с ограничениями) изоморфен единственному префиксу (адекватной) развёртки в семантике (максимального) шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$. Таким образом, можно установить следующий факт.

Утверждение 2. *Множество (адекватных) ветвящихся процессов в семантике (максимального) шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$ (с ограничениями) представимо в форме полной решётки относительно квазипорядка $\preceq$.*

Пример 4. *На рис. 4 и 5 показаны начальные фрагменты полных решёток соответственно ветвящихся процессов в шаговой семантике и адекватных ветвящихся процессов в семантике максимального шага ПВСП $\mathcal{N}_\mathcal{A}$, изображённой на рис. 1.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nielsen M., Plotkin G.D., Winskel G.* Petri Nets, Event Structures and Domains, Part I // Theoretical Computer Science. 1981. V. 13. No. 1. P. 85–108.

2. *Engelfriet J.* Branching processes of Petri nets // Acta Informatica. 1991. V. 28. No. 6. P. 575–591.

3. *Meseguer J., Montanari U., Sassone V.* On the Semantics of Place/Transition Petri Nets // Mathematical Structures in Computer Science. 1997. V. 7. No. 4. P. 359–397.

4. *Couvreur J., Poitrenaud D., Weil P.* Branching processes of general Petri nets // Fundamenta Informaticae. 2013. V. 122. P. 31–58.

5. *McMillan K.I.* A Technique of a State Space Search Based on Unfolding // Formal Methods in System Design. 1995. V. 6. No. 1. P. 45–65.

6. *Baldan P., Bruni A., Corradini A., Koenig B., Rodriguez C., Schwoon S.* Efficient unfolding of contextual Petri nets // Theoretical Computer Science. 2012. V. 449. P. 2–22.

7. *Bergenthum R., Mauser R., Lorenz S., Juhas G.* Unfolding Semantics of Petri Nets Based on Token Flows // Fundamenta Informaticae. 2009. V. 94. No. 3–4. P. 331–360.

8. *Bonet B., Haslumb P., Khomenko V., Thiebauxb S., Vogler W.* Recent advances in unfolding technique // Theoretical Computer Science. 2014. V. 551. P. 84–101.

9. *Esparza J.* Model checking using net unfoldings // Science of Compututer Programming. V. 23. No. 2–3. P. 151–195.

10. *Bonet B., Haslumb P., Hickmott S., Thiebauxb S.* Directed unfolding of Petri nets // Lecture Notes in Computer Science. V. 5100. No. 2008. P. 172–198.

11. *Hickmott S., Rintanen J., Thiebaux S., White L.* Planning via Petri net unfolding // Proc. of 20th Int. Joint Conference on Artificial Intelligence, AAAI Press. 2007. P. 1904–1911.

12. *Baldan P., Haar S., Koenig B.* Distributed unfolding of Petri nets // Lecture Notes in Computer Science. 2006. V. 3921. P. 126–141.

13. *Benveniste A., Fabre E., Jard C., Haar S.* Diagnosis of asynchronous discrete event systems, a net unfolding approach // IEEE Trans. on Automatic Control. 2003. V. 48. No. 5. P. 714–727.

14. *Chatain T., Jard C.* Time supervision of concurrent systems using symbolic unfoldings of time Petri nets // Lecture Notes in Computer Science. 2005. V. 3829. P. 196–210.

15. *Fleischhack H., Pelz E.* Hierarchical timed high level nets and their branching processes // Lecture Notes in Computer Science. 2003. V. 2679. P. 397–416.

16. *Fleischhack H., Stehno Ch.* Computing a Finite Prefix of a Time Petri Net // Lecture Notes in Computer Science. 2002. V. 2360. P. 163–181.

17. *Aura T., Lilius J.* Time Processes for Time Petri Nets. Lecture Notes in Computer Science. 1997. V. 1248. P. 136–155.

18. *Valero V., de Frutos D., Cuartero F.* Timed Processes of Timed Petri Nets // Lecture Notes in Computer Science. 1995. V. 935. P. 490–509.

19. *Khomenko, V., Koutny, M., Vogler, W.* Canonical prefixes of Petri net unfoldings // Acta Informatica. 2003. V. 40. No. 2. P. 95–118.

20. *Popova-Zeugmann L.* Time and Petri Nets // Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2013. 209 p.