ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2015, № 3, с. 20–31

УДК 519.681

КОМПАРАТИВНАЯ ТРАССОВАЯ СЕМАНТИКА ВРЕМЕННЫХ СЕТЕЙ ПЕТРИ *

© 2015 г. Д.И. Бушин*, И.Б. Вирбицкайте* **,
**Институт систем информатики СО РАН, 630090 Новосибирск, пр. Ак. Лаврентьева, 6*
***Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2*
E-mail: virb@iis.nsk.su, dima.bushin@gmail.com

Поступила в редакцию 01.12.2014

В данной работе определяется и исследуется семейство трассовых эквивалентностей в интерливинговой, шаговой, частично-упорядоченной и недетерминированной семантиках в контексте временных безопасных сетей Петри. Изучаемые эквивалентности основываются как на классическом понятии последовательностей срабатываний переходов, так и на временных процессах, т.е. временных расширениях сетей-процессов за счет сопоставления глобальных моментов времени срабатываниям переходов. Устанавливаются взаимосвязи эквивалентностей и строится иерархия классов эквивалентных временных сетей Петри.

1. ВВЕДЕНИЕ

Поведенческие эквивалентности обычно используются при спецификации и верификации систем с целью сравнения их поведения, а также упрощения их структуры. В теории параллельных систем и процессов известно большое разнообразие поведенческих эквивалентностей, взаимосвязи между которыми хорошо изучены в литературе (см., например, [1]). Трассовые эквивалентности являются базовыми и позволяют сравнивать поведения систем в терминах их языков. В интерливинговой семантике язык — это множество последовательностей действий, выполняемых системой. Однако такое представление поведения не позволяет судить о степени параллелизма и недетерминизма, присущих системам. Было сделано много попыток выйти за пределы интерливингового подхода, что привело к появлению эквивалентностей, базирующихся на "истинно параллельной" и недетерминированной семантиках (см., например, [2, 3, 4]), которые позволяют лучше понять природу и установить закономерности процессов, протекающих в параллельных/распределенных системах.

Отправной точкой в исследованиях по неинтерливинговым семантикам в контексте моделей сетей Петри (СП) стала статья [5], где были показаны тесные взаимосвязи между моделями сетей-процессов и первичных структур событий. В 1980-х годах наиболее активно изучались особенности и свойства семантики сетей-процессов различных подклассов СП (см., например, [6, 7]). В 1990-м году авторы статьи [8] показали, что такие семантические представления, как сети-процессы, трассы Мазуркевича, частично упорядоченные множества, первичные структуры событий, совпадают с точностью до изоморфизма в контексте безопасных СП. Семантика локальных структур событий, которые являются обобщением первичных структур событий и базируются на понятии шагов — множеств параллельно выполняемых действий — была разработана для СП в статье [9]. Далее асимметричные структуры событий контекстных СП были построены в [10]. Кроме того, семантики решеток и структур событий были предложены в работе [11] в контексте СП с ингибиторными дугами. В статьях в [12, 13, 14, 15] представлены новые методы построения и изуче-

*Данная работа частично финансируется DFG и РФФИ (проект CAVER, грант N BE 1267/14-1, грант No 14-01-91334).

ния семантики сетей-процессов на основе последовательностей шагов параллельных переходов для СП и их ингибиторных обобщений.

Функционирование реальных параллельных систем в значительной степени зависит от временных параметров, поэтому многие модели СП были обогащены понятием времени, что позволило описывать и исследовать не только качественные, но и количественные аспекты поведения систем. Однако введение и изучение временных характеристик в более абстрактные (семантические) "истинно-параллельные" и недетерминированные модели были не настолько активными. Семантика моделей сетей-процессов, включающих события и условия, находящиеся в отношениях причинной зависимости и параллелизма, была предложена в работе [16] для временных ограниченных СП, где с каждым переходом связана длительность его срабатывания, а также в статье [17] для временных безопасных СП, где каждому переходу сопоставлен интервал временных задержек его срабатывания. В более поздних работах (см., например, [18]) была исследована семантика сетей-процессов, расширенных отношением недетерминированного выбора (конфликта), где с каждым событием связан временной интервал его выполнения, для временных ограниченных ординарных СП. Однако, насколько нам известно, в литературе не представлены исследования по семантике структур событий (моделей, в которых события находятся в отношениях причинной зависимости, параллелизма и конфликта) временных расширений СП. Кроме того, в контексте временных моделей также практически не изучались и поведенческие эквивалентности. Исключением является статья [19], где тестовые эквивалентности были введены и исследованы для СП с временными характеристиками, сопоставленными фишкам и с временными интервалами, связанными с дугами из мест в переходы.

В данной работе для временных безопасных СП определяется и исследуется семейство трассовых эквивалентностей в интерливинговой, шаговой, частично-упорядоченной и недетерминированной семантиках. Устанавливаются взаимосвязи эквивалентностей и строится иерархия классов эквивалентных временных сетей Петри.

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом. В разделе 2 вводятся основные понятия и обозначения, связанные со структурой и интерливинговой/шаговой семантикой, построенной на состояниях временных СП. Определения базовых семантических представлений — временных расширений частично упорядоченных множеств, структур событий и сетей-процессов — приводятся в разделе 3. В разделе 4 данные семантики изучаются в контексте временных СП. Взаимосвязи трассовых эквивалентностей исследуются в заключительном разделе 5.

2. ВРЕМЕННЫЕ СЕТИ ПЕТРИ

Рассмотрим ряд понятий, связанных со структурой и поведением временной сети Петри (ВСП) [17]. Под ВСП понимается элементарная сетевая система, в которой с каждым переходом связан временной интервал, указывающий моменты времени, когда переход, готовый по наличию фишек в его входных местах, может сработать, только если достигнута нижняя граница интервала, и обязан сработать, если достигнута верхняя граница интервала.

Область $\mathbb{T}$ временных значений — множество натуральных чисел. Считаем, что $[\tau_1, \tau_2]$ — замкнутый интервал между двумя временными значениями $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{T}$. Бесконечность может появляться как правая граница в открытых справа интервалах. Пусть $Interv$ — множество всех таких интервалов. Кроме того, множество Act обозначает алфавит действий.

Определение 1. (Помеченная над Act) временная сеть Петри — *это кортеж* $\mathcal{TN} = ((P, T, F, M_0, L), D)$, *где* (P, T, F, M_0, L) — *сеть Петри с множеством* P *мест, множеством* T *переходов* ($P \cap T = \emptyset$), *отношением инцидентности* $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$, *начальной разметкой* $\emptyset \neq M_0 \subseteq P$, *помечающей функцией* $L : T \to Act$ *и* $D : T \to Interv$ — статическая временная функция, *связывающая с каждым переходом временной интервал.*

Введем ряд вспомогательных понятий и обозначений. Для элемента $x \in P \cup T$ пусть

${}^\bullet x = \{y \mid (y,x) \in F\}$ и $x^\bullet = \{y \mid (x,y) \in F\}$ – множества его *входных* и *выходных* элементов соответственно. Для подмножества $X \subseteq P \cup T$ определим множества ${}^\bullet X = \bigcup_{x \in X} {}^\bullet x$ и $X^\bullet = \bigcup_{x \in X} x^\bullet$. Для перехода $t \in T$ границы интервала $D(t)$ называются *ранним временем* Eft и *поздним временем* Lft срабатывания данного перехода.

Любое подмножество $M \subseteq P$ — *разметка* ВСП $\mathcal{TN}$. Переход t является *готовым при разметке* M, если ${}^\bullet t \subseteq M$. Пусть $En(M)$ — множество готовых переходов при M. Тогда $\emptyset \neq U \subseteq T$ — *шаг, готовый при разметке* M, если $(\forall t \in U \diamond t \in En(M))$ и $(\forall t \neq t' \in U \diamond {}^\bullet t \cap {}^\bullet t' = \emptyset)$.

Рассмотрим *поведение* ВСП $\mathcal{TN}$. *Состояние ВСП* $\mathcal{TN}$ — это тройка (M, I, GT), где M — разметка, $I : En(M) \longrightarrow \mathbb{T}$ — *динамическая временная функция* и $GT \in \mathbb{T}$ — *момент глобального времени. Начальное состояние ВСП* $\mathcal{TN}$ — это тройка $S_0 = (M_0, I_0, GT_0)$, где M_0 — начальная разметка, $I_0(t) = 0$ для всех $t \in En(M_0)$ и $GT_0 = 0$.

Шаг $U \subseteq T$, готовый при разметке M, *может выполниться из состояния* $S = (M, I, GT)$ *после временной задержки* $\theta \in \mathbb{T}$, если верно: $(\forall t \in U \diamond Eft(t) \leq I(t) + \theta)$ и $(\forall t' \in En(M) \diamond I(t') + \theta \leq Lft(t'))$. Пусть $Contact(S) = \{t \in U \mid$ шаг U может выполниться из состояния $S = (M, I, GT)$ после временной задержки $\theta \in \mathbb{T}$ и $(M \setminus {}^\bullet t) \cap t^\bullet \neq \emptyset)\}$.

Если шаг U может выполниться из состояния $S = (M, I, GT)$ после временной задержки θ, то *выполнение шага* U *приводит в состояние* $S' = (M', I', GT')$, которое определяется следующим образом:

- $M' = (M \setminus {}^\bullet U) \cup U^\bullet$,
- $\forall t' \in T \diamond I'(t') = \begin{cases} I(t') + \theta, & \text{если } t' \in En(M \setminus {}^\bullet U), \\ 0, & \text{если } t' \in En(M') \setminus En(M \setminus {}^\bullet U), \\ \text{void}, & \text{иначе}, \end{cases}$
- $GT' = GT + \theta$.

В этом случае будем писать $S \overset{(U,\theta)}{\longrightarrow} S'$, а также $S \overset{(A,\theta)}{\longrightarrow} S'$, если $A = L(U) = \sum_{t \in U} L(t)$. Конечная или бесконечная последовательность вида: $S = S^0 \overset{(U_1,\theta_1)}{\longrightarrow} S^1 \overset{(U_2,\theta_2)}{\longrightarrow} S^2 \ldots$ — *шаговая последовательность выполнений ВСП* $\mathcal{TN}$ *из состояния* S. Тогда $(U_1, \theta_1)\ (U_2, \theta_2) \ldots$ — *шаговое расписание выполнений ВСП* $\mathcal{TN}$ *из* S. Эта последовательность называется *интерливинговым расписанием выполнений ВСП* $\mathcal{TN}$ *из* S, если $|U_i| = 1$ для всех $i \geq 1$. Определим *шаговый (интерливинговый) язык ВСП* $\mathcal{TN}$ следующим образом: $\mathcal{L}_{s(i)}(\mathcal{TN}) = \{(A_1, \theta_1) \ldots (A_k, \theta_k) \mid \mid k \geq 0,\ (U_1, \theta_1) \ldots (U_k, \theta_k)$ — шаговое (интерливинговое) расписание выполнений ВСП $\mathcal{TN}$ из S_0 и $A_k = L(U_k)\}$.

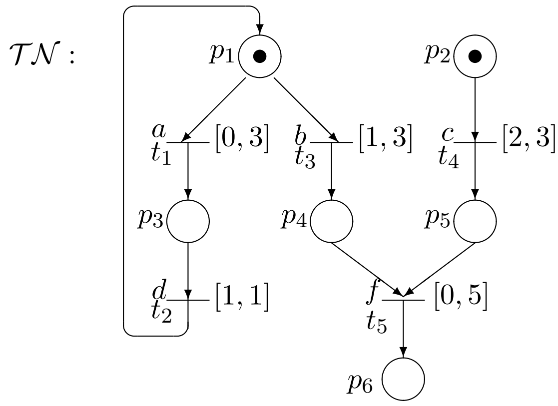

Рис. 1.

Состояние S ВСП $\mathcal{TN}$ является *достижимым*, если оно присутствует в некоторой шаговой последовательности выполнений ВСП $\mathcal{TN}$ из начального состояния S_0. Пусть $RS(\mathcal{TN})$ обозначает множество достижимых состояний ВСП $\mathcal{TN}$. Назовем ВСП $\mathcal{TN}$ *T-ограниченной*, если для любого перехода $t \in T$ верно, что ${}^\bullet t \neq \emptyset \neq t^\bullet$; *свободной от контактов*, если для всех состояний $S \in RS(\mathcal{TN})$ верно, что $Contact(S) = \emptyset$; *прогрессирующей по времени*, если в каждом бесконечном шаговом расписании выполнений (U_1, θ_1) (U_2, θ_2) $(U_3, \theta_3) \ldots$ ВСП $\mathcal{TN}$ из некоторого $S \in RS(\mathcal{TN})$ последовательность $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots$ дивергирует. В дальнейшем будем рассматривать только T-ограниченные, свободные от контактов и прогрессирующие по времени ВСП и называть их просто ВСП.

Пример 1. *Рисунок 1 показывает пример ВСП* $\mathcal{TN}$. *Обе последовательности* $\sigma = (\{t_1, t_4\}, 3)$ *и* $\sigma' = (\{t_1, t_4\}, 3)(\{t_2\}, 1)(\{t_3\}, 1)(\{t_5\}, 2) \ldots$ *являются шаговыми расписаниями выполнений ВСП* $\mathcal{TN}$ *из начального состояния* $S_0 = (M_0, I_0, GT_0)$, *где*

$$M_0 = \{p_1, p_2\},\ I_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in \{t_1, t_3, t_4\}, \\ void, & \text{иначе}, \end{cases}$$

и $GT_0 = 0$.

Кроме того, $\widehat{\sigma} = (\{t_2\}, 1)(\{t_3\}, 1)(\{t_5\}, 2)\ldots$ *— шаговое расписание выполнений ВСП* $\mathcal{TN}$ *из состояния* $S = (M, I, GT)$, *где* $M = \{p_3, p_5\}$, $I(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = t_2, \\ void, & \text{иначе,} \end{cases}$ *и* $GT = 3$. *Легко видеть, что* $\mathcal{TN}$ *действительно является* T*-ограниченной, свободной от контактов и прогрессирующей по времени.*

3. ВРЕМЕННЫЕ СЕМАНТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В данном разделе вводятся определения временных расширений таких семантических моделей, как частично упорядоченные множества, структуры событий и сети-процессы, которые понадобятся в дальнейшем при разработке “истинно-параллельной” и недетерминированной семантик ВСП.

Сначала рассмотрим базовые определения, связанные с временными частично упорядоченными множествами.

Определение 2. (Помеченное над Act) временное частично упорядоченное множество (ВЧУМ) *— это кортеж* $\eta = (X, \prec, \lambda, \tau)$, *состоящий из множества* X *элементов, транзитивного иррефлексивного отношения* $\prec$, *помечающей функции* $\lambda : X \to Act$ *и временной функции* $\tau : X \to \mathbb{T}$ *такой, что* $e \prec e' \Rightarrow \tau(e) \leq \tau(e')$. *Будем писать* $x \preceq y$, *если* $x \prec y$ *или* $x = y$. *Часто* $\prec$ *называется строгим частичным порядком, тогда как* $\preceq$ *— просто частичным порядком, т.е. рефлексивным, антисимметричным и транзитивным отношением.*

ВЧУМ $\eta = (X, \prec, \lambda, \tau)$ и $\eta' = (X', \prec', \lambda', \tau')$, помеченные над Act, являются *изоморфными* (обозначается $\eta \sim \eta'$), если существует биективное отображение $\beta : X \to X'$ такое, что: (а) $x \prec \widetilde{x} \iff \beta(x) \prec' \beta(\widetilde{x})$ для всех $x, \widetilde{x} \in X$; (б) $\lambda(x) = \lambda'(\beta(x))$ и $\tau(x) = \tau'(\beta(x))$ для всех $x \in X$. Класс изоморфизма ВЧУМ η, помеченного над Act, называется *временным частично упорядоченным мультимножеством (ВЧУММ), помеченным над* Act, и обозначается как $pom(\eta)$.

Теперь определим базовые понятия для моделей структур событий.

Определение 3. (Помеченная над Act) временная структура событий (ВСС) *— это кортеж* $\xi = (E, \prec, \#, l, \tau)$, *включающий множество* E *событий, строгий частичный порядок* $\prec \subseteq E \times E$ *такой, что* $| \downarrow e = \{e' \in E \mid e' \prec e\}| < \infty$ *для всех* $e \in E$, *иррефлексивное симметричное отношение конфликта* $\# \subseteq E \times E$ *такое, что* $(e \# e' \prec e'') \Rightarrow (e \# e'')$ *для всех* $e, e', e'' \in E$, *помечающую функцию* $l : E \to Act$ *и временную функцию* $\tau : E \to \mathbb{T}$ *такую, что* $e \prec e' \Rightarrow \tau(e) \leq \tau(e')$.

ВСС $\xi = (E, \prec, \#, l, \tau)$ и $\xi' = (E', \prec', \#', l', \tau')$, помеченные над Act, являются *изоморфными* (обозначается $\xi \sim \xi'$), если существует биективное отображение $\beta : E \to E'$ такое, что (а) $e \prec e' \Leftrightarrow \beta(e) \prec' \beta(e')$ и $e \# e' \Leftrightarrow \beta(e) \#' \beta(e')$ для всех $e, e' \in E$; (б) $l(e) = l'(\beta(e))$ и $\tau(e) = \tau'(\beta(e))$ для всех $e \in E$. Класс изоморфизма ВСС ξ, помеченной над Act, обозначается как $les(\xi)$.

Далее приведем базовые определения для временных сетей-процессов.

Определение 4. (Помеченная над Act) временная сеть (ВС) *— это финитарная ациклическая сеть* $TN = (B, E, G, l, \tau)$, *состоящая из множества* B *условий, множества* E *событий, отношения инцидентности* $G \subseteq (B \times E) \cup (E \times B)$ *такого, что* $\{e \mid (e, b) \in G\} = \{e \mid (b, e) \in G\} = E$, *помечающей функции* $l : E \to Act$ *и временной функции* $\tau : E \to \mathbb{T}$ *такой, что* $e\ G^+\ e' \Rightarrow \tau(e) \leq \tau(e')$.

ВС $TN = (B, E, G, l, \tau)$ и $TN' = (B', E', G', l', \tau')$, помеченные над Act, являются *изоморфными* (обозначается $TN \simeq TN'$), если существует биективное отображение $\beta : B \cup E \to B' \cup E'$ такое, что (а) $\beta(B) = B'$ и $\beta(E) = E'$; (б) $x\ G\ y \iff \beta(x)\ G'\ \beta(y)$ для всех $x, y \in B \cup E$; (в) $l(e) = l'(\beta(e))$ и $\tau(e) = \tau'(\beta(e))$ для всех $e \in E$.

Рассмотрим вспомогательные понятия и обозначения для ВС $TN = (B, E, G, l, \tau)$. Пусть $\prec = G^+$, $\preceq = G^*$ и $\tau(TN) = \sup\{\tau(e) \mid e \in E\}$. Для элемента $x \in B \cup E$ определим множества: ${}^\bullet x = \{y \mid (y, x) \in G\}$ и $x^\bullet = \{y \mid (x, y) \in G\}$, а также для подмножества $X \subseteq B \cup E$ — ${}^\bullet X = \bigcup_{x \in X} {}^\bullet x$ и $X^\bullet = \bigcup_{x \in X} x^\bullet$, Кроме того, пусть ${}^\bullet TN = \{b \in B \mid {}^\bullet b = \emptyset\}$ и $TN^\bullet = \{b \in B \mid b^\bullet = \emptyset\}$. Для событий $e, e' \in E$, элементов $x, x' \in (B \cup E)$ и подмножества $E' \subseteq E$ определим:

- $\downarrow e = \{x \mid x \preceq e\}$ (предшественники);

- E' — *левозамкнутое подмножество множества* E, если $\downarrow e' \cap (E \times E) \subseteq E'$ для всех $e' \in E'$. В этом случае назовем E' *корректным по времени*, если $\tau(e') \leq \tau(e)$ для всех $e' \in E'$ и $e \in E \setminus E'$, а также определим множество $Cut(E') = (E'^{\bullet} \cup {}^{\bullet}TN) \setminus {}^{\bullet}E'$;

- $Earlier(e) = \{e' \in E \mid \tau(e') < \tau(e)\}$;

- $x \# x' \iff \exists e \neq e' \diamond e \preceq x, \wedge e' \preceq x' \wedge \wedge {}^{\bullet}e \cap {}^{\bullet}e' \neq \emptyset$ (конфликт);

- E' — *свободное от конфликтов подмножество множества* E, если $\neg(e' \# e'')$ для всех $e', e'' \in E'$;

- E' — *конфигурация* ВС TN, если E' — конечное, левозамкнутое и свободное от конфликтов подмножество множества E;

- $x \smile x' \iff \neg((x \prec x') \vee (x' \prec x) \vee \vee (x \# x') \vee (x = x'))$ (параллелизм);

- $\emptyset \neq E'$ — *шаг ВС* TN, если $e \smile e'$ и $\tau(e) = = \tau(e')$ для всех $e \neq e' \in E'$. В этом случае считаем, что $\tau(E') = \tau(e)$, где $e \in E'$;

- конечная или бесконечная последовательность $\rho = V_1V_2\ldots$ шагов ВС TN — *s-линеаризация*, если каждое событие ВС TN включено в эту последовательность ровно один раз и верно: $(e_i \prec e_j \vee \tau(e_i) < \tau(e_j)) \Rightarrow i < j$ для всех $e_i \in V_i$ и $e_j \in V_j$ $(i, j \geq 1)$. В этом случае $\rho = V_1V_2\ldots$ называется *i-линеаризацией* ВС TN, если $\mid V_i \mid = 1$ для всех $i \geq 1$. Для s-линеаризации $\rho = V_1V_2\ldots$ ВС TN, определим $E^k_\rho = \bigcup_{1 \leq i \leq k} V_i$ $(k \geq 0)$. Ясно, что E^k_ρ — левозамкнутое и корректное по времени подмножество множества E.

- TN называется *временной C-сетью*, если $|{}^{\bullet}b| \leq 1 \;\wedge\; |b^{\bullet}| \leq 1$ для всех $b \in B$; *временной O-сетью*, если $|{}^{\bullet}b| \leq 1$ и $\neg(x \#_{TN} x)$ для всех $x \in B \cup E$. Ясно, что $\eta(TN) = = (E_{TN}, \prec_{TN} \cap (E_{TN} \times E_{TN}), l_{TN}, \tau_{TN})$ – ВЧУМ, если TN — временная C-сеть, и $\xi(TN) = (E_{TN}, \prec_{TN} \cap (E_{TN} \times E_{TN}), \#_{TN} \cap (E_{TN} \times E_{TN}), l_{TN}, \tau_{TN})$ — ВСС, если TN — временная O-сеть.

Лемма 1. *Каждая временная C-сеть TN имеет s-линеаризацию $\rho = V_1V_2\ldots$. Кроме того, верно, что $Cut(E^k_\rho) = \big(Cut(E^{k-1}_\rho) \setminus {}^{\bullet}V_k\big) \cup V^{\bullet}{}_k$ и $\big(Cut(E^{k-1}_\rho) \setminus {}^{\bullet}e\big) \cap e^{\bullet} = \emptyset$ для всех $e \in V_k$ $(k \geq 1)$.*

Для ВС $TN = (B, E, G, l, \tau)$, $\widehat{TN} = = (\widehat{B}, \widehat{E}, \widehat{G}, \widehat{l}, \widehat{\tau})$ и $TN' = (B', E', G', l', \tau')$ будем говорить, что TN — *префикс для* TN' (обозначается $TN \longrightarrow TN'$), если $B' \subseteq B$, E — конечное, левозамкнутое и корректное по времени подмножество множества E', $G = G' \cap (B \times E \cup E \times B)$, $l = l' \mid_E$ и $\tau = \tau' \mid_E$; $\widehat{TN}$ — *суффикс для* TN' *относительно* TN, если $\widehat{E} = E' \setminus E$, $\widehat{B} = (B' \setminus B) \cup TN^{\bullet}$, $\widehat{G} = G' \cap (\widehat{B} \times \widehat{E} \cup \widehat{E} \times \widehat{B})$, $\widehat{l} = l' \mid_{\widehat{E}}$ и $\widehat{\tau} = \tau' \mid_{\widehat{E}}$. Будем писать $TN \xrightarrow{\widehat{TN}} TN'$, если $TN \longrightarrow TN'$ и $\widehat{TN}$ — суффикс для TN' относительно TN.

Лемма 2. *Если $TN \xrightarrow{\widehat{TN}} TN'$ и $\widehat{e} \in \widehat{E}$, то верно следующее:*

(а) ${}^{\bullet}TN = {}^{\bullet}TN' \neq \emptyset$ *и* ${}^{\bullet}\widehat{TN} = TN^{\bullet} \neq \emptyset$;

(б) $({}^{\bullet}\widehat{e} \setminus {}^{\bullet}\widehat{TN}) \subseteq ({}^{\bullet}\widehat{e} \setminus {}^{\bullet}TN')$;

(в) $Earlier(\widehat{e})$ *— левозамкнутое и корректное по времени подмножество множества* $\widehat{E}$.

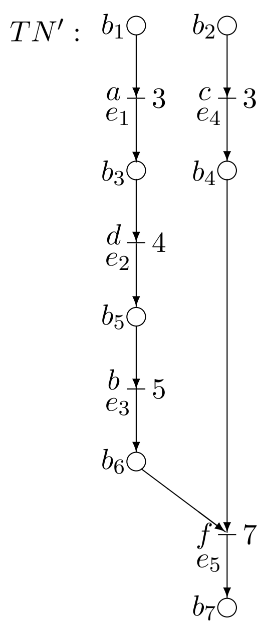

Рис. 2.

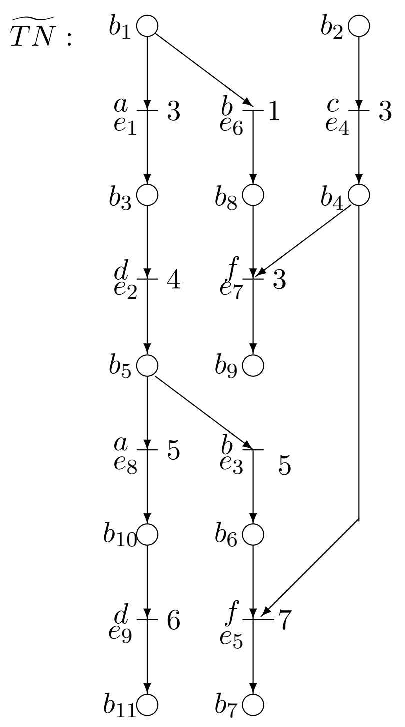

Рис. 3.

Пример 2. *Пример временной C-сети $TN' = (B', E', G', l', \tau')$ показан рис. 2, где сетевые элементы изображены вместе с их именами, а кроме того, около событий указаны соотвествующие значения функций l' и τ'. Построим временные C-сети $TN = (B, E, G, l, \tau)$, где $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, $E = \{e_1, e_4\}$, $G = G' \cap \cap (B \times E \cup E \times \times B)\}$, $l = l' \mid_E$, $\tau = \tau' \mid_E$, и $\widehat{TN} = (\widehat{B}, \widehat{E}, \widehat{G}, \widehat{l}, \widehat{\tau})$, где $\widehat{B} = (B' \setminus B) \cup \{b_3, b_4\}$, $\widehat{E} = E' \setminus E$, $\widehat{G} = G' \cap (\widehat{B} \times \widehat{E} \cup \widehat{E} \times \widehat{B})$, $\widehat{l} = l' \mid_{\widehat{E}}$, $\widehat{\tau} = \tau' \mid_{\widehat{E}}$. Легко видеть, что TN — префикс для TN', $\widehat{TN}$ — суффикс для TN' относительно TN, т.е. $TN \xrightarrow{\widehat{TN}} TN'$. Заметим, что $\rho_{TN'} = \{e_1, e_4\}\{e_2\}\{e_3\}\{e_5\}$ — s-линеаризация TN'.*

Пример временной O-сети $\widetilde{TN} = (\widetilde{B}, \widetilde{E}, \widetilde{G}, \widetilde{l}, \widetilde{\tau})$ показан на рис. 3, где сетевые элементы изображены вместе с их именами, а кроме того около событий указаны соотвествующие значения функций $\widetilde{l}$ и $\widetilde{\tau}$.

4. СЕМАНТИКА ВСП В ТЕРМИНАХ ВРЕМЕННЫХ СЕТЕЙ-ПРОЦЕССОВ

Для ВСП $\mathcal{TN} = ((P, T, F, M_0, L), D)$ с некоторой разметкой M и ВС $TN = (B, E, G, l, \tau)$ будем говорить, что отображение $\varphi : B \cup E \to \to P \cup T$ — *гомоморфизм* из TN в $\mathcal{TN}$ относительно M, если выполнены следующие условия:

- $\varphi(B) \subseteq P$, $\varphi(E) \subseteq T$,
- ограничение отображения φ на множество ${}^\bullet e$ — биекция между ${}^\bullet e$ и ${}^\bullet\varphi(e)$, и ограничение φ на $e^\bullet$ — биекция между $e^\bullet$ и $\varphi(e)^\bullet$ для всех $e \in E$,
- $\left({}^\bullet e = {}^\bullet e' \wedge \varphi(e) = \varphi(e')\right) \ \Rightarrow \ e = e'$,
- ограничение отображения φ на множество ${}^\bullet TN$ — биекция между множествами ${}^\bullet TN$ и M,
- $l(e) = L(\varphi(e))$ для всех $e \in E$.

4.1. *Временные C-процессы ВСП*

Определение 5. Временной C-процесс ВСП $\mathcal{TN}$ относительно ее разметки M — *это пара $\pi = (TN, \varphi)$, где TN — временная C-сеть, и φ — гомоморфизм из TN в $\mathcal{TN}$ относительно M, при этом $\tau(\pi) = \tau(TN)$.*

Пусть $\pi = (TN, \varphi)$ и $\pi' = (TN', \varphi')$ — временные C-процессы ВСП $\mathcal{TN}$ относительно ее начальной разметки M_0. Тогда $\pi \overset{\widehat{\pi}=(\widehat{TN},\widehat{\varphi})}{\longrightarrow} \pi'$, если $TN \xrightarrow{\widehat{TN}} TN'$, $\varphi = \varphi'|_{B \cup E}$ и $\widehat{\varphi} = \varphi'|_{\widehat{B} \cup \widehat{E}}$. Всякий раз, когда $\pi \xrightarrow{\widehat{\pi}} \pi'$, будем писать $\pi \xrightarrow{(a,\theta)} \pi'$, если $\widehat{E} = \{e\}$, $\widehat{\tau}(e) = \tau(\pi) + \theta$, $\widehat{l}(e) = a$, а также $\pi \xrightarrow{(A,\theta)} \pi'$, если $\widehat{\preceq} \cap (\widehat{E} \times \widehat{E}) = \emptyset$, $\widehat{l}(\widehat{E}) = \sum_{e \in \widehat{E}} \widehat{l}(e) = A$, $\widehat{\tau}(e) = \tau(\pi) + \theta$ для всех $e \in \widehat{E}$.

Для временного C-процеса $\pi = (TN, \varphi)$ ВСП $\mathcal{TN}$ относительно разметки M, состояния $S = (M, I, GT)$ ВСП $\mathcal{TN}$ и подмножества $B' \subseteq \subseteq B_{TN}$ наиболее поздний момент времени, когда фишки появляются во всех входных местах перехода $t \in En(\varphi(B'))$, определяется следующим образом: $\mathbf{TOE}_{\pi,S}(B', t) = \max\Big(\{\tau_{TN}({}^\bullet b) \mid b \in \in B'_{[t]} \setminus {}^\bullet TN\} \cup \{\overline{GT}\}\Big)$, где $B'_{[t]} = \{b \in B' \mid \mid \varphi_{TN}(b) \in {}^\bullet t\}$, $\overline{GT} = GT - I(t)$, если $B'_{[t]} \subseteq {}^\bullet TN$ и $\overline{GT} = GT$, иначе. Отметим, что данное определение является расширением соответствующего определения из [17] на случай временного C-процесса ВСП $\mathcal{TN}$ относительно произвольной ее разметки, а не только начальной.

Определение 6. *Временной C-процесс $\pi = (TN, \varphi)$ ВСП $\mathcal{TN}$ относительно разметки M* — временной C-процесс ВСП $\mathcal{TN}$ относительно состояния $S = (M, I, GT)$, *если для всех $e \in E$ выполняется следующее:*

- $\tau(e) \geq GT$,
- $\tau(e) \geq \boldsymbol{TOE}_{\pi,S}({}^\bullet e, \varphi(e)) + Eft(\varphi(e))$,
- $\forall t \in En(\varphi(C_e)) \diamond \tau(e) \leq \boldsymbol{TOE}_{\pi,S}(C_e, t) + Lft(t)$, *где* $C_e = Cut(Earlier(e))$.

Временной C-процесс $\pi_0 = (TN_0 = (B_0, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset), \varphi_0)$ ВСП $\mathcal{TN}$ относительно начального состояния называется *начальным временным C-процессом ВСП $\mathcal{TN}$*. Будем использовать $\mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ ($\mathcal{CP}(\mathcal{TN}, S)$) для обозначения множества временных C-процессов ВСП $\mathcal{TN}$ относительно начального состояния S_0 (состояния $S \in RS(\mathcal{TN})$).

Теперь мы намерены понять для ВСП взаимосвязи между ее расписаниями выполнений из достижимых состояний и ее C-процессами относительно этих состояний. Если ρ — s-линеаризация ВС TN, то будем говорить, что ρ — s-линеаризация в $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}, S)$.

Лемма 3. *Пусть $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}, S)$, $\rho = V_1 V_2 \ldots$ — s-линеаризация в π, $e \in V_k$, $C_e = Cut(Earlier(e))$ и $t \in En\big(\varphi(Cut(E_\rho^{k-1}))\big)$ ($k \geq 1$). Тогда верно:*

(а) $\varphi(e) \in En(\varphi(Cut(E_\rho^{k-1})))$,

(б) $\boldsymbol{TOE}_{\pi,S}(Cut(E_\rho^{k-1}), \varphi(e)) = \boldsymbol{TOE}_{\pi,S}({}^\bullet e, \varphi(e))$,

(в) $\boldsymbol{TOE}_{\pi,S}(Cut(E_\rho^{k-1}), t) \geq \boldsymbol{TOE}_{\pi,S}(C_e, t)$, *если* $t \in En\big(\varphi(C_e)\big)$,

(г) $\boldsymbol{TOE}_{\pi,S}(Cut(E_\rho^{k-1}), t) = \tau(V_k)$, *если* $t \notin En\big(\varphi(C_e)\big)$,

(д) $\boldsymbol{TOE}_{\pi,S}(Cut(E_\rho^{k-1}), t) = \boldsymbol{TOE}_{\pi,S}(Cut(E_\rho^{k}), t)$, *если* $t \in En\big(\varphi(Cut(E_\rho^{k}))\big)$,

(е) $\boldsymbol{TOE}_{\pi,S}(Cut(E_\rho^{k}), t') = \tau(V_k)$, *если* $t' \notin En\big((\varphi(Cut(E_\rho^{k-1}))) \setminus {}^\bullet V_k\big)$.

Определим для $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}, S)$ функцию $FS_{\pi,S}$, которая отображает произвольную s-линеаризацию $\rho = V_1 V_2 \ldots$ в последовательность вида: $FS_{\pi,S}(\rho) = (\varphi(V_1), \tau(V_1) - GT)$ $(\varphi(V_2), \tau(V_2) - \tau(V_1)) \ldots$.

Приведенная ниже теорема являются расширением теорем 19 и 21 из [17] на случай s-линеаризации временных C-процессов ВСП $\mathcal{TN}$ относительно произвольного достижимого состояния и шаговых расписаний выполнений ВСП $\mathcal{TN}$ из таких состояний.

Теорема 1. *(а) Для любого временного C-процесса $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}, S = (M, I, GT))$ с $s(i)$-линеаризацией $\rho = V_1 V_2 \ldots$ $FS_{\pi,S}(\rho)$ – шаговое (интерливинговое) расписание выполнений ВСП $\mathcal{TN}$ из состояния S.*

(б) Для любого шагового (интерливингового) расписания выполнений σ ВСП $\mathcal{TN}$ из состояния $S \in RS(\mathcal{TN})$ существует единственный (с точностью до изоморфизма) временной C-процесс $\pi \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}, S)$ с $s(i)$-линеаризацией ρ такой, что $FS_{\pi,S}(\rho) = \sigma$.

Доказательство.

(а) Пусть $\rho = V_1 V_2 \ldots$ — s-линеаризация в $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN},\ S = (M, I, GT))$. Справедливость данного пункта будем доказывать индукцией по длине k s-линеаризации ρ.

$k = 0$. Тогда верно, что $\rho_0 = \epsilon$ и $FS_{\pi,S}(\rho_0) = \epsilon$. Следовательно, $E_\rho^0 = \emptyset$, что означает $Cut(E_\rho^0) = {}^\bullet TN$. Согласно определению 5, имеем, что $\varphi({}^\bullet TN) = M$. Строим S^0 следующим образом: $M^0 = \varphi(Cut(E_\rho^0))$, $I^0(t) = \tau(V_0) - \mathbf{TOE}_{\pi,S}\big(Cut(E_\rho^0), t\big)$, если $t \in En(M^0)$, и I^0 неопределено, иначе, а также $GT^0 = \tau(V_0)$, где $\tau(V_0) = GT$. Значит, $S = S^0$. Таким образом, ϵ — шаговое расписание выполнений ВСП $\mathcal{TN}$ из состояния S.

$k > 0$. Необходимо показать, что $FS_{\pi,S}(\rho_k)$ — шаговое расписание выполнений ВСП $\mathcal{TN}$ из состояния S. По индукционной гипотезе, $FS_{\pi,S}(\rho_{k-1})$ — шаговое расписание выполнений ВСП $\mathcal{TN}$ из S. Кроме того, имеем, что $S^{k-1} = (M^{k-1}, I^{k-1}, GT^{k-1})$, где $M^{k-1} = \varphi\big(Cut(E_\rho^{k-1})\big)$,
$$I^{k-1}(t) = \begin{cases} \tau(V_{k-1}) - \mathbf{TOE}_{\pi,S}\big(Cut(E_\rho^{k-1}), t\big), & \text{если } t \in En(M^{k-1}), \\ \text{void}, & \text{иначе} \end{cases}$$
и $GT^{k-1} = \tau(V_{k-1})$.

Заметим, что $Contact(S^{k-1}) = \emptyset$. Поскольку верно, что $FS_{\pi,S}(\rho_k) = FS_{\pi,S}(\rho_{k-1})\big(\varphi(V_k), \tau(V_k) -$

$-\tau(V_{k-1})\big)$, достаточно показать, что $S^{k-1} \xrightarrow{(U,\theta)} S^k$, где $U = \varphi(V_k)$ и $\theta = \tau(V_k) - \tau(V_{k-1})$. Используя лемму 3(а), легко показать, что U — шаг, готовый при разметке $M^{k-1} = \varphi\big(Cut(E_\rho^{k-1})\big)$ в $\mathcal{TN}$, поскольку $\mathcal{TN}$ — свободная от контактов ВСП.

Убедимся в том, что U может выполниться в состоянии S^{k-1} после временной задержки θ. Рассмотрим произвольное событие $e \in V_k$. Напомним, что $\tau(e) = \tau(V_k)$. В силу леммы 3(б), имеем, что $\mathbf{TOE}_{\pi,S}({}^\bullet e, \varphi(e)) = \mathbf{TOE}_{\pi,S}(Cut(E_\rho^{k-1}), \varphi(e))$. Поскольку $\pi \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}, S)$ и $e \in E$, получаем, что $Eft(\varphi(e)) \le \tau(e) - \mathbf{TOE}_{\pi,S}(Cut(E_\rho^{k-1}), \varphi(e))$, по определению 6. Кроме того, верно, что $I^{k-1}(\varphi(e)) = \tau(V_{k-1}) - \mathbf{TOE}_{\pi,S}(Cut(E_\rho^{k-1}), \varphi(e))$, поскольку $\varphi(e) \in En(M^{k-1})$ по лемме 3(а). Таким образом, имеем, что $Eft(\varphi(e)) \le I^{k-1}(\varphi(e)) + \theta$.

Далее, рассмотрим произвольный переход $t' \in En(M^{k-1})$. Нужно показать, что верно $I^{k-1}(t') + \theta \le Lft(t')$. Возьмем произвольное событие $e \in V_k$. Так как $\pi \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}, S)$, то получаем, что $\tau(e) - \mathbf{TOE}_{\pi,S}(Cut(E_\rho^{k-1}), t') \le Lft(t')$, по определению 6. Заметим, что $C_e = C_{e'}$ для всех $e, e' \in V_k$. Возможны два случая.

– $t' \in En(\varphi(C_e))$. Тогда имеем, что
$\mathbf{TOE}_{\pi,S}(Cut(E_\rho^{k-1}), t') = \mathbf{TOE}_{\pi,S}(C_e, t')$,
в силу леммы 3(в).
Поскольку верно, что
$\tau(e) = \tau(V_k) = \theta + \tau(V_{k-1})$ и
$\mathbf{TOE}_{\pi,S}(Cut(E_\rho^{k-1}), t') = \tau(V_{k-1}) - I^{k-1}(t')$, имеем, что $I^{k-1}(t') + \theta \le Lft(t')$.

– $t' \notin En(\varphi(C_e))$. Тогда $\mathbf{TOE}_{\pi,S}(Cut(E_\rho^{k-1}), t') = \tau(V_k)$, по лемме 3(г). Значит, $\theta + I^{k-1}(t') = 0$, потому что $\mathbf{TOE}_{\pi,S}(Cut(E_\rho^{k-1}), t') = \tau(V_{k-1}) - I^{k-1}(t')$ и $\tau(V_k) = \theta + \tau(V_{k-1})$.
Ясно, что $I^{k-1}(t') + \theta \le Lft(t')$.

Наконец, убедимся в том, что выполнение шага $U = \varphi(V_k)$ из состояния S^{k-1} после временной задержки θ приводит в состояние S^k.
Легко показать, что $M^k = M^{k-1} \setminus {}^\bullet U \cup U^\bullet$.
Рассмотрим произвольный переход $t \in T$. Возможны три случая.

– $t \in En(M^{k-1} \setminus {}^\bullet U)$. Это означает, что $t \in En(M^k) \cap En(M^{k-1})$. В силу леммы 3(д), имеем, что $\mathbf{TOE}_{\pi,S}(Cut(E_\rho^k), t) = \mathbf{TOE}_{\pi,S}(Cut(E_\rho^{k-1}), t)$. Значит, верно, что $I^k(t) = I^{k-1}(t) + \theta$.

– $t \in En(M^k) \setminus En(M^{k-1} \setminus {}^\bullet U)$. Тогда из леммы 3(е), следует, что $\mathbf{TOE}_{\pi,S}(Cut(E_\rho^k), t) = \tau(V_k)$. Таким образом, имеем $I^k(t) = 0$.

– $t \notin En(M_\rho^k)$. Ясно, что значение $I^k(t)$ неопределено.

Отметим, что $GT^k = GT^{k-1} + \theta$.

Таким образом, $S^k \in RS(\mathcal{TN})$. Заметим, что $Contact(S^k) = \emptyset$, в силу леммы 1 и определения 5.

(б) Предположим, что $\sigma = (U_1, \theta_1), (U_2, \theta_2), \ldots$ — шаговое расписание выполнений ВСП $\mathcal{TN}$ из состояния $S = (M, I, GT) \in RS(\mathcal{TN})$. Без потери общности считаем, что $S = S^0 \xrightarrow{(U_1,\theta_1)} S^1 \xrightarrow{(U_2,\theta_2)} S^2 \ldots$, где $U_i = \{t_{(i,1)}, \ldots t_{(i,n_i)}\}$ $(i \ge 1)$, — шаговая последовательность выполнений ВСП $\mathcal{TN}$ из состояния S. Построим структуру $\pi = (TN = (B, E, G, L, \tau), \varphi)$, где

- $E = \bigcup_{i \ge 1} V_i = \{e_{(i,1)}, \ldots, e_{(i,n_i)} \mid n_i = |U_i|\}$,
- $B = B_0 = \{b^p_{(0,0)} \mid p \in M\} \cup \bigcup_{i \ge 1} B_i = \{b^p_{(i,j)} \mid 1 \le j \le n_i,\, p \in t^\bullet_{(i,j)}\}$,
- $G = \{\big(e_{(i,j)}, b^p_{(i,j)}\big) \mid i \ge 1,\, e_{(i,j)} \in V_i,\, b^p_{(i,j)} \in B_i\} \cup \{\big(b^p_{(k,m)}, e_{(i,j)}\big) \mid i \ge 1,\, e_{(i,j)} \in V_i,\, b^p_{(k,m)} \in B_k,\, p \in {}^\bullet t_{(i,j)},\, k = \max\{0 \le l < i \mid b^p_{(l,m')} \in B_l\}\}$,
- $l\big(e_{(i,j)}\big) = L\big(t_{(i,j)}\big)$ для всех $e_{(i,j)} \in E$,
- $\tau\big(e_{(i,j)}\big) = GT + \sum_{k=1}^{i} \theta_k$ для всех $e_{(i,j)} \in E$,
- $\varphi\big(e_{(i,j)}\big) = t_{(i,j)}$ для всех $e_{(i,j)} \in E$ и $\varphi\big(b^p_{(i,j)}\big) = p$ для всех $b^p_{(i,j)} \in B$.

Нетрудно показать индукцией по $i = |\sigma|$, что $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}, S)$ такой, что $FS_{\pi,S}(\rho) = \sigma$, где $\rho = V_1, V_2, \ldots$ — s-линеаризация в π.
Рассуждения относительно единственности с точностью до изоморфизма временного C-процесса π аналогичны соответствующим рассуждениям в доказательстве теоремы 22 из [17]. $\diamondsuit$

Теорема 2. *Для* $\pi = (TN, \varphi)$, $\pi' = (TN', \varphi') \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ *таких, что* $\pi \xrightarrow{\widehat{\pi}} \pi'$, *верно, что* $\widehat{\pi} = (\widehat{TN}, \widehat{\varphi}) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}, S =$

$= (M, I, GT))$, *где* $M = \varphi(TN^\bullet)$, $I(t) = \begin{cases} \tau(TN) - \boldsymbol{TOE}_{\pi,S_0}(TN^\bullet, t), & \text{если } t \in En(M), \\ void, & \text{иначе} \end{cases}$
и $GT = \tau(TN)$.

Доказательство. Используя введенные выше определения, нетрудно доказать, что $\widehat{\pi}$ — временной C-процесс ВСП $\mathcal{TN}$ относительно разметки M. Покажем, что $\widehat{\pi}$ — временной C-процесс ВСП $\mathcal{TN}$ относительно состояния S, т.е. условия определения 6 выполнены для $\widehat{\pi}$. Рассмотрим произвольное событие $\widehat{e} \in \widehat{E} = E' \setminus E$. Заметим, что $^\bullet\widehat{e} \subseteq \widehat{B} = (B' \setminus B) \cup TN^\bullet$.

Сначала проверим, что верно $\widehat{\tau}(\widehat{e}) \geq GT$. Поскольку $TN \xrightarrow{\widehat{TN}} TN'$, т.е. E — конечное, корректное по времени подмножество множества E' и $\tau = \tau' \mid_E$, $\widehat{\tau} = \tau' \mid_{\widehat{E}}$, получаем, что $\widehat{\tau}(\widehat{e}) \geq \geq \tau(TN) = GT$.

Теперь убедимся в том, что верно:
$\widehat{\tau}(\widehat{e}) \geq \mathbf{TOE}_{\widehat{\pi},S}(^\bullet\widehat{e}, \widehat{\varphi}(\widehat{e})) + Eft(\widehat{\varphi}(\widehat{e}))$. Так как $\pi' \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})$, то $\widehat{\tau}(\widehat{e}) \geq \mathbf{TOE}_{\pi',S_0}(^\bullet\widehat{e}, \widehat{\varphi}(\widehat{e})) + Eft(\widehat{\varphi}(\widehat{e}))$, поскольку $\pi \xrightarrow{\widehat{\pi}} \pi'$, т.е. $\widehat{e} \in E'$, множества $^\bullet\widehat{e}$ в $\widehat{\pi}$ и $^\bullet\widehat{e}$ в π' совпадают, $\widehat{\varphi} = \varphi' \mid_{\widehat{B} \cup \widehat{E}}$ и $\widehat{\tau} = \tau' \mid_{\widehat{E}}$. Следовательно, достаточно показать, что $\mathbf{TOE}_{\pi',S_0}(^\bullet\widehat{e}, \varphi'(\widehat{e})) \geq \mathbf{TOE}_{\widehat{\pi},S}(^\bullet\widehat{e}, \widehat{\varphi}(\widehat{e}))$. Возможны два случая.
– $^\bullet\widehat{e} \not\subseteq {}^\bullet\widehat{TN}$. Используя первый пункт определения 6, легко видеть, что
$\mathbf{TOE}_{\widehat{\pi},S}(^\bullet\widehat{e}, \widehat{\varphi}(\widehat{e})) = \max\left\{\widehat{\tau}(^\bullet\widehat{b}) \mid \widehat{b} \in \in {}^\bullet\widehat{e} \setminus {}^\bullet\widehat{TN}\right\}$ и $\mathbf{TOE}_{\pi',S_0}(^\bullet\widehat{e}, \varphi'(\widehat{e})) = \max\left\{\tau'(^\bullet b') \mid b' \in \in {}^\bullet\widehat{e} \setminus {}^\bullet TN'\right\}$. Из леммы 2(б) следует, что $(^\bullet\widehat{e} \setminus {}^\bullet\widehat{TN}) \subseteq (^\bullet\widehat{e} \setminus {}^\bullet TN')$. Значит, $\mathbf{TOE}_{\pi',S_0}(^\bullet\widehat{e}, \varphi'(\widehat{e})) \geq \mathbf{TOE}_{\widehat{\pi},S}(^\bullet\widehat{e}, \widehat{\varphi}(\widehat{e}))$.
– $^\bullet\widehat{e} \subseteq {}^\bullet\widehat{TN}$. Тогда $\mathbf{TOE}_{\widehat{\pi},S}(^\bullet\widehat{e}, \widehat{\varphi}(\widehat{e})) = = GT - I(\widehat{\varphi}(\widehat{e}))$. В силу определения 5 и условий теоремы получаем, что $\widehat{\varphi}(\widehat{e}) \in En(M)$. Следовательно, имеем, что $\mathbf{TOE}_{\widehat{\pi},S}(^\bullet\widehat{e}, \widehat{\varphi}(\widehat{e})) = \mathbf{TOE}_{\pi,S_0}(TN^\bullet, \widehat{\varphi}(\widehat{e}))$, вновь по условиям теоремы. Проверим справедливость факта: $\mathbf{TOE}_{\pi,S_0}(TN^\bullet, \widehat{\varphi}(\widehat{e})) = \mathbf{TOE}_{\pi',S_0}(^\bullet\widehat{e}, \varphi'(\widehat{e}))$. Рассмотрим возможные случаи.

- $^\bullet\widehat{e} \not\subseteq {}^\bullet TN'$. Тогда, используя первый пункт определения 6, имеем: $\mathbf{TOE}_{\pi',S_0}(^\bullet\widehat{e}, \varphi'(\widehat{e})) = = \max\{\tau(^\bullet b) \mid b \in {}^\bullet\widehat{e} \setminus {}^\bullet TN'\}$, а также $\mathbf{TOE}_{\pi,S_0}(TN^\bullet, \widehat{\varphi}(\widehat{e})) = \max\{\tau(^\bullet b) \mid b \in \in {}^\bullet\widehat{e} \setminus {}^\bullet TN\}$, в силу того, что $^\bullet\widehat{e} \subseteq {}^\bullet\widehat{TN} = = TN^\bullet$ и $^\bullet\widehat{e} \not\subseteq {}^\bullet TN' = {}^\bullet TN$, согласно лемме 2(а). Понятно, что $\mathbf{TOE}_{\pi,S_0}(^\bullet\widehat{e}, \widehat{\varphi}(\widehat{e})) = \mathbf{TOE}_{\pi',S_0}(^\bullet\widehat{e}, \varphi'(\widehat{e}))$, поскольку $\widehat{\varphi} = \varphi' \mid_{\widehat{B} \cup \widehat{E}}$.
- $^\bullet\widehat{e} \subseteq {}^\bullet TN'$. Легко видеть, что $\mathbf{TOE}_{\pi',S_0}(^\bullet\widehat{e}, \varphi'(\widehat{e})) = 0$. В силу леммы 2(а), $^\bullet\widehat{e} \subseteq {}^\bullet TN' = {}^\bullet TN$. Значит, верно, что $\mathbf{TOE}_{\pi,S_0}(^\bullet\widehat{e}, \widehat{\varphi}(\widehat{e})) = 0$.

Доказательство справедливости последнего пункта определения 6 аналогично доказательству предыдущего пункта. ♢

Пример 3. *Сначала определим отображение* φ' *из временной* C*-сети* TN' *(см. рис. 2) в ВСП* $\mathcal{TN}$ *(см. рис. 1) следующим образом:* $\varphi'(b_i) = p_i$ $(1 \leq i \leq 3)$, $\varphi'(b_4) = p_5$, $\varphi'(b_5) = p_1$, $\varphi'(b_6) = p_4$, $\varphi'(b_7) = p_6$ *и* $\varphi'(e_i) = t_i$ $(1 \leq i \leq 5)$. *Теперь для временных* C*-сетей* TN *и* $\widehat{TN}$*, специфицированных в примере 2, установим соответственно* $\varphi = \varphi' \mid_{E \cup B}$ *и* $\widehat{\varphi} = \varphi' \mid_{\widehat{E} \cup \widehat{B}}$. *Понятно, что* $\pi' = (TN', \varphi')$ *и* $\pi = (TN, \varphi)$ *— временные* C*-процессы ВСП* $\mathcal{TN}$ *относительно* M_0. *Так как* $TN \xrightarrow{\widehat{TN}} TN'$, *получаем, что* $\pi \xrightarrow{\widehat{\pi}=(\widehat{TN},\widehat{\varphi})} \pi'$. *Далее рассмотрим подмножество* $\widetilde{B} = \{b_1, b_2\} \subseteq B'$, *состояние* $S' = (M', I', GT')$, *где* $M' = \{p_1, p_2\}$, $I'(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in \{t_1, t_3, t_4\}, \\ void, & \text{иначе,} \end{cases}$ $GT' = 3$, *и переход* $t_1 \in En(\varphi'(\widetilde{B}))$. *Вычислим значение* $\boldsymbol{TOE}_{\pi',S'}(\widetilde{B}, t_1) = \max\Big(\{\tau_{TN'}(^\bullet b) \mid b \in \in \widetilde{B}_{[t_1]} \setminus {}^\bullet TN'\} \cup \{\overline{GT}\}\Big) = \max\Big(\emptyset \cup \{3 - 0\}\Big) = 3$. *Нетрудно понять, что* $\pi' = (TN', \varphi')$, $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}, S_0)$. *Тогда* $\widehat{\pi} \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}, S = (M, I, GT))$, *где* $M = \{p_3, p_5\}$, $I(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = t_2, \\ void, & \text{иначе} \end{cases}$ *и* $GT = 3$, *в силу теоремы 2. Для* s*-линеаризации* $\rho_{TN'} = \{e_1, e_4\}\{e_2\}\{e_3\}\{e_5\}\ldots$ *в* π' *(см. пример 2) получаем, что* $FS_{\pi',S_0}(\rho_{TN'}) = = \sigma' = (\{t_1, t_4\}, 3)(\{t_2\}, 1)(\{t_3\}, 1)(\{t_5\}, 2)\ldots$ *(см. пример 1), в подтверждение теоремы 1.*

4.2. Временные O-процессы ВСП

Определение 7. Временной O-процесс ВСП $\mathcal{TN}$ относительно ее разметки M *— это пара* $\nu = (TN, \psi)$, *где* TN *— временная* O*-сеть, и* ψ *— гомоморфизм из* TN *в* $\mathcal{TN}$ *относительно* M.

Вычисление временного O-процесса $\nu = (TN = (B,\ E,\ G,\ l,\ \tau), \psi)$ ВСП $\mathcal{TN}$ относительно ее разметки M — это конечный временной C-процесс $\pi = (TN' = (B',\ E',\ G',\ l',\ \tau'), \psi|_{B' \cup E'})$ ВСП $\mathcal{TN}$ относительно M такой, что $E' \subseteq E$ — конфигурация ВС TN. Временной O-процесс $\nu = (TN, \psi)$ ВСП $\mathcal{TN}$ относительно разметки M — *временной O-процесс ВСП $\mathcal{TN}$ относительно состояния* $S = (M, I, GT) \in RS(\mathcal{TN})$, если все вычисления ν принадлежат множеству $\mathcal{CP}(\mathcal{TN}, S)$. Через $\mathcal{OP}(\mathcal{TN})$ будем обозначать множество всех временных O-процессов ВСП $\mathcal{TN}$ относительно начального состояния S_0.

Пример 4. *Поясним понятия, введенные выше. Сначала определим отображение ψ из временной O-сети $\widetilde{TN}$ (см. рис. 3) в ВСП $\mathcal{TN}$ (см. рис. 1) следующим образом: $\psi(b_1) = \psi(b_5) = \psi(b_{11}) = p_1$, $\psi(b_2) = p_2$, $\psi(b_3) = \psi(b_{10}) = p_3$, $\psi(b_4) = p_5$, $\psi(b_6) = \psi(b_8) = p_4$, $\psi(b_7) = \psi(b_9) = p_6$ и $\psi(e_1) = \psi(e_8) = t_1$, $\psi(e_2) = \psi(e_9) = t_2$, $\psi(e_3) = \psi(e_6) = t_3$, $\psi(e_4) = t_4$, $\psi(e_5) = \psi(e_7) = t_5$. Тогда $\nu = (\widetilde{TN}, \psi)$ — временной O-процесс ВСП $\mathcal{TN}$ относительно M_0. Ясно, что временные C-процессы π и π' ВСП $\mathcal{TN}$ относительно начальной разметки M_0, специфицированные в примере 3, — вычисления ν. Легко видеть, что все вычисления ν принадлежат множеству $\mathcal{CP}(\mathcal{TN})$. Тогда ν — временной O-процесс ВСП $\mathcal{TN}$ относительно S_0.*

5. ИЕРАРХИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЕЙ

Сначала рассмотрим трассовые эквивалентности ВСП, построенные на их расписаниях выполнений.

Определение 8. *ВСП $\mathcal{TN}$ и $\mathcal{TN}'$, помеченные над Act, являются* шагово (интерливингово) трассово эквивалентными *(обозначается $\mathcal{TN} \equiv_{s(i)} \mathcal{TN}'$), если $\mathcal{L}_{s(i)}(\mathcal{TN}) = \mathcal{L}_{s(i)}(\mathcal{TN}')$.*

Для ВСП $\mathcal{TN}$ введем вспомогательные понятия и обозначения:

- $Trace_{i\text{–}pr}(\mathcal{TN}) = \{(\{a_1\}, \theta_1) \dots (\{a_n\}, \theta_n) \in (2^{Act} \times \mathbb{T})^* \mid \pi_0 \overset{(a_1,\theta_1)}{\longrightarrow} \pi_1 \dots \pi_{n-1} \overset{(a_n,\theta_n)}{\longrightarrow} \pi_n$ $(n \geq 0)$ в $\mathcal{TN}\}$,

$$\begin{tikzcd}
 & & \equiv_{les\text{–}pr} \arrow[d] & \equiv_{o\text{–}pr} \arrow[l] \arrow[d] \\
\equiv_{i\text{–}pr} & \equiv_{s\text{–}pr} \arrow[l] & \equiv_{pom\text{–}pr} \arrow[l] & \equiv_{c\text{–}pr} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Рис. 4.

- $Trace_{s\text{–}pr}(\mathcal{TN}) = \{(A_1, \theta_1) \dots (A_n, \theta_n) \in (\mathbb{N}^{Act} \times \mathbb{T})^* \mid \pi_0 \overset{(A_1,\theta_1)}{\longrightarrow} \pi_1 \dots \pi_{n-1} \overset{(A_n,\theta_n)}{\longrightarrow} \pi_n$ $(n \geq 0)$ в $\mathcal{TN}\}$,
- $Trace_{pom\text{–}pr}(\mathcal{TN}) = \{pom(\eta(TN)) \mid \pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})\}$,
- $Trace_{c\text{–}pr}(\mathcal{TN}) = \{[TN]_{\simeq} \mid \pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})\}$,
- $Trace_{les\text{–}pr}(\mathcal{TN}) = \{les(\xi(TN)) \mid \nu = (TN, \psi) \in \mathcal{OP}(\mathcal{TN})\}$,
- $Trace_{o\text{–}pr}(\mathcal{TN}) = \{[TN]_{\simeq} \mid \nu = (TN, \psi) \in \mathcal{OP}(\mathcal{TN})\}$.

Теперь можем определить трассовые эквивалентности на временных процессах ВСП.

Определение 9. *$* \in \{i - pr, s - pr, pom-pr, c-pr, les-pr, o-pr\}$. ВСП $\mathcal{TN}$ и $\mathcal{TN}'$, помеченные над Act, являются* $*$-трассово эквивалентными *(обозначается $\mathcal{TN} \equiv_* \mathcal{TN}'$), если $Trace_*(\mathcal{TN}) = Trace_*(\mathcal{TN}')$.*

Лемма 4. *Пусть $* \in \{i, s\}$. Тогда $\mathcal{TN} \equiv_* \mathcal{TN}' \iff \mathcal{TN} \equiv_{*-pr} \mathcal{TN}'$.*

Установим взаимосвязи между трассовыми процессными эквивалентностями ВСП.

Теорема 3. *Пусть $\star, * \in \{i\text{–}pr, s\text{–}pr, pom\text{–}pr, c\text{–}pr, les-pr, o-pr\}$. Тогда*

$$\mathcal{TN} \equiv_\star \mathcal{TN}' \ \Rightarrow\ \mathcal{TN} \equiv_* \mathcal{TN}',$$

если и только если существует направленный путь из $\equiv_\star$ в $\equiv_*$ на рис. 4.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Все импликации (стрелки) на рис. 4 следуют из определений, лемм, утверждений и теорем, приведенных выше.
($\Rightarrow$) Продемонстрируем, что на рис. 4 из одной эквивалентности к другой нельзя провести ни

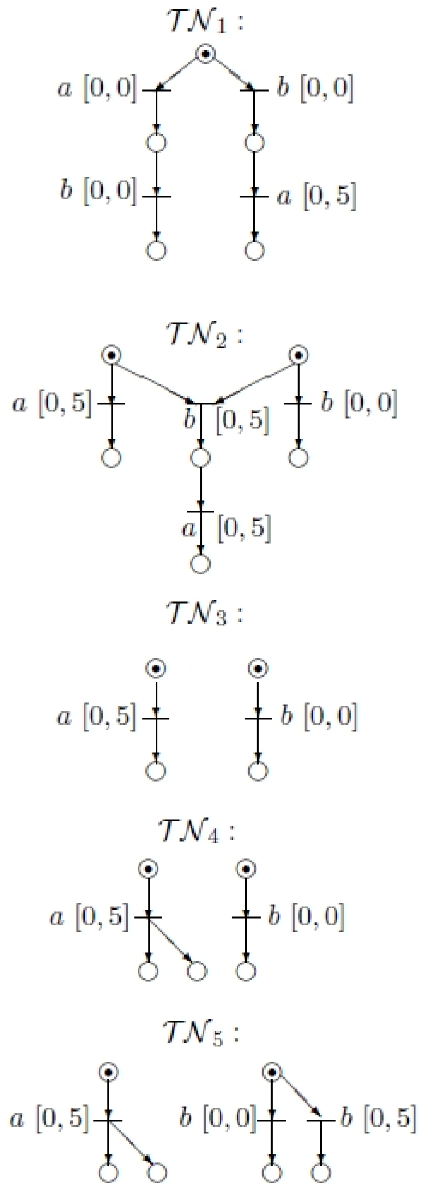

Рис. 5.

одной дополнительной стрелки такой, что не существует направленного пути из первой эквивалентности во вторую. Для этого рассмотрим ВСП, изображенные на рис. 5.

Во-первых, ВСП $\mathcal{TN}_1$ и $\mathcal{TN}_2$ $\equiv_{i\text{–}pr}$–эквивалентны, однако не являются $\equiv_{s\text{–}pr}$–эквивалентными, поскольку, например, существует временной C-процесс ВСП $\mathcal{TN}_2$ относительно ее начального состояния, содержащий два параллельных события (с их входными и выходными условиями), которые помечены действиями a и b и моментом времени 0, но это неверно для ВСП $\mathcal{TN}_1$.

Во-вторых, ВСП $\mathcal{TN}_2$ и $\mathcal{TN}_3$ $\equiv_{s\text{–}pr}$–эквивалентны, однако не являются $\equiv_{pom\text{–}pr}$–эквивалентными, потому что, например, существует временной C-процесс ВСП $\mathcal{TN}_2$ относительно ее начального состояния, содержащий два события (с их входными и выходными условиями), которые помечены действиями b и a и соответственно моментами времени 0 и 5, при этом действие b причинно предшествует действию a, но это не так в ВСП $\mathcal{TN}_3$.

В-третьих, ВСП $\mathcal{TN}_3$ и $\mathcal{TN}_4$ $\equiv_{les\text{–}pr}$–эквивалентны, однако не являются $\equiv_{c\text{–}pr}$–эквивалентными, так как, например, временные C-процессы ВСП $\mathcal{TN}_3$ и $\mathcal{TN}_4$ относительно их начальных состояний, содержащие по событию (с его входными и выходными условиями), которое помечено действием a и моментом времени 0, не изоморфны.

Наконец, ВСП $\mathcal{TN}_4$ и $\mathcal{TN}_5$ $\equiv_{c\text{–}pr}$–эквивалентны, однако не являются $\equiv_{les\text{–}pr}$–эквивалентными, потому что легко видеть, что, например, ВСС, соответствующая временному O-процессу ВСП $\mathcal{TN}_5$ относительно ее начального состояния, содержему два конфликтных события (с их входными и выходными условиями), которые помечены действием b и моментом времени 0, не имеет изоморфных себе ВСС, соответствующих временным O-процессам ВСП $\mathcal{TN}_4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *van Glabbeek R.J.* Handbook of Process Algebras, chapter The linear time — branching time spectrum I: The Semantics of Concrete, Sequential Processes. Elsevier. 2001. P. 3–99.

2. *van Glabbeek R.J., Goltz U.* Refinement of actions and equivalence notions for concurrent systems // Acta Informatica. 2001. V. 37. P. 229–327.

3. *Pomello L., Rozenberg G., Simone C.* A Survey of Equivalence Notions for Net Based Systems // Lecture Notes in Computer Science. 1992. V. 609. P. 410–472.

4. *Tarasyuk I. V.* Equivalences for behavioural analysis of concurrent and distributed computing systems. 2007. “Geo” Publisher, Novosibirsk, 321 p. (in Russian).

5. *Nielsen M., Plotkin G.D., Winskel G.* Petri Nets, Event Structures and Domains, Part I // Theoretical Computer Science. 1981. V. 13. № 1. P. 85–108.

6. *Goltz U., Reisig W.* The Non-Sequential Behaviour of Petri Nets // Information and Control. 1983. V. 57. № 2/3. 1983. P. 125–147.

7. *Engelfriet J.* Branching processes of Petri nets // Acta Informatica. 1991. V. 28. № 6. P. 575–591.

8. *Nielsen M., Rozenberg G., Thiagarajan P.S.* Behavioural notions for elementary net systems // Distributed Computing. 1990. V. 4. № 1. P. 45–57.

9. *Hoogers P.W., Kleijn H.C.M., Thiagarajan P.S.* An event structure semantics for general Petri nets // Theoretical Computer Science. 1996. V. 153. P. 129–170.

10. *Baldan P., Corradini A., Montanari U.* Contextual Petri Nets, Asymmetric Event Structures, and Processes // Information and Computation. 2001. V. 171. № 1. P. 1–49.

11. *Baldan P., Busi N., Corradini A., Pinna G.M.* Domain and event structure semantics for Petri nets with read and inhibitor arcs // Theoretical Computer Science. 2004. V. 323. P. 129–189.

12. *Juhas G., Lorenz R., Mauser S.* Complete Process Semantics for Inhibitor Nets // Fundamenta Informaticae. 2008. V. 87. № 3–4. P. 331–365.

13. *Kleijn J., Koutny M.* Causality in Structured Occurrence Nets // Lecture Notes in Computer Science. 2011. V. 6875. P. 283–297.

14. *van Glabbeek R.J., Goltz U., Schicke J.-W.:* Abstract Processes of Place/Transition Systems // Information Processing Letters. 2011. V. 111. № 13. 2011. P. 626–633.

15. *van Glabbeek R.J., Goltz U., Schicke J.-W.:* On causal semantics of Petri nets // Lecture Notes in Computer Science. 2011. V. 6901. P. 43–59.

16. *Valero V., de Frutos D., Cuartero F.* Timed processes of timed Petri nets. Lecture Notes in Computer Science. 1995. V. 935. P. 490–509.

17. *Aura T., Lilius J.* Time Processes for Time Petri Nets. Lecture Notes in Computer Science. 1997. V. 1248. P. 136–155.

18. *Chatain T., Jard C.* Time supervision of concurrent systems using symbolic unfoldings of time Petri nets. Lecture Notes in Computer Science. 2005. V. 3829. P. 196–210.

19. *Bihler, E., Vogler W.* Timed Petri Nets: Efficiency of asynchronous systems. Lecture Notes in Computer Science. 2004. V. 3185. P. 25–58.

20. *Rozenburg G., Engelfriet J.* Elementary Net Systems // Lecture Notes in Computer Science. 1998. V. 1491. P. 12–121.

21. *Winkowski J.* Algebras of Processes of Timed Petri Nets. Lecture Notes in Computer Science. 1994. V. 480. P. 309–321.