ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
2014, том 57, №6

МАТЕМАТИКА

УДК 517.951

Академик АН Республики Таджикистан М.Илолов

АБСТРАКТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Центр инновационного развития науки и новых технологий АН Республики Таджикистан

Установлено, что при помощи нелинейных полугрупп абстрактные дифференциальные уравнения с импульсным воздействием могут быть сведены к разрывным динамическим системам. Примерами разрывных динамических систем являются открытые системы с импульсами, гибридные динамические системы, сети Петри и пр.

Ключевые слова: *разрывные динамические системы – нелинейные полугруппы – система с импульсным воздействием.*

1. Различные сложные явления и процессы допускают математическую формализацию в виде абстрактных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в случае бесконечного фазового пространства. Системы с запаздыванием, гистерезисные системы и системы с распределенными параметрами могут быть примерами таких абстрактных уравнений. Обыкновенные дифференциальные уравнения с импульсным воздействием и системы таких уравнений всесторонне изучены в монографии [1], где приведена классификация таких систем в зависимости от характера воздействий. Существуют три класса (типа) таких систем: 1) системы, подвергающиеся импульсному воздействию в фиксированные моменты времени; 2) системы, подвергающиеся импульсному воздействию в момент попадания изображающей точки P_t на заданные поверхности $t = \tau_i(x)$ расширенного фазового пространства; 3) разрывные динамические системы.

В случае абстрактных уравнений нельзя исходить из данной классификации и, следовательно, нужно по-иному ввести понятие решения.

В данной работе рассматриваются полулинейные эволюционные уравнения с импульсным воздействием в банаховом пространстве. Здесь в отличие от работ [2,3] предлагается рассматривать начальную задачу для абстрактных уравнений в виде некоторой разрывной динамической системы. Существенную роль играют наборы нелинейных полугрупп, впервые введённые в рассмотрение в работах [4,5]. Разрывные динамические системы возникают при моделировании различных эволюционных процессов, таких как гибридные динамические процессы, дискретные событийные процессы, системы с переключениями, механические системы с импульсным воздействием и пр.

2. Пусть X – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, $T \subset R$ – открытое подмножество R. Будем считать, что абстрактная функция $u : T \to X$ непрерывна и дифференцируема в сильном

Адрес для корреспонденции: *Илолов Мамадшо. 734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр.Рудаки, 33, Центр инновационного развития науки и новых технологий АН РТ. E-mail: ilolov.mamadsho@gmail.com.*

смысле. Через $C^k(T,X)$ обозначим класс X-значных k-раз непрерывно дифференцируемых на множестве T функций. Через $Z(X)$ обозначим пространство всех линейных ограниченных операторов действующих из X в X.

Рассмотрим абстрактную разрывную динамическую систему $(APDC)$ вида

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + A_k u(t) = f_k(u(t)),\ \tau_k \le t < \tau_{k+1}, \\ u(t) + B_k u(t^-) = g_k(u(t^-)),\ t = \tau_{k+1},\ k \in N, \end{cases} \tag{1}$$

где A_k – набор секториальных операторов в X, $f_k : X$ – нелинейные отображения, удовлетворяющие условию типа Липшица, $B_k \in Z(X),\ g_k : X \to X$ – непрерывные нелинейные отображения, и

$$u(t^-) = \lim_{\theta \to 0+} u(t-\theta).$$

Рассмотрим связанное с системой (1) семейство начальных задач

$$\frac{du(t)}{dt} + A_k u(t) = f_k(u(t)),\ u(\tau_k) = u_k,\ t \ge \tau_k,\ k \in N. \tag{2}$$

На первом этапе анализа $APDC$ (1) нас будут интересовать условия существования по крайней мере одного непрерывного решения задачи (2).

С учётом результатов, изложенных в монографии [6], предположим, что операторы A_k в (2) являются секториальными в пространстве X с углом $\omega_{A_k} < \dfrac{\pi}{2}$. Это означает, что для всех $k \in N$ выполнены следующие два условия:

$$\begin{gathered} \sigma(A_k) \subset \sum\nolimits_{\omega_k} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg\lambda| < \omega_k\},\ \omega_{A_R} < \omega_k < \frac{\pi}{2} \\ \left\| (\lambda - A_k)^{-1} \right\| \le \frac{M_{\omega_k}}{|\lambda|},\ \lambda \notin \sum\nolimits_{\omega_k},\ \omega_{A_R} < \omega_k < \frac{\pi}{2} \end{gathered} \tag{3}$$

Определение 1. Функция $u(t)$ называется сильным решением уравнения (1), если выполнены условия:

1) $u \in C\left([0,\tau_k) \cup \left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (\tau_k, \tau_{k+1}) \right); X \right)$ и $\lim\limits_{t \to \tau_k - 0} u(t) = u(\tau_k)$;

2) $u \in C^1\left([0,\infty) \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{\tau_k\}; X \right)$ и $\dfrac{du}{dt} + A_k u = f_k u,\ \lim\limits_{t \to \tau_k - 0} \left\{ \dfrac{du(t)}{dt} + A_k u(t) \right\} = f_k(u(\tau_k))$;

3) при $t = \tau_k$ выполняются равенства $u(t+0) - u(t) + B_k u = g_k$.

$$\left\| (\lambda - A_k)^{-1} \right\| \le \frac{M_{\omega_k}}{|\lambda|},\ \lambda \notin \sum \omega,\ \omega_{A_k} < \omega_k < \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Нелинейные операторы f_k в (2) определены в $D\left(A_k^n\right)$ и принимают значения из X, где $0<\eta<1$. Существует второй показатель β такой, что $0\le\beta<\eta$ и операторы f_k удовлетворяют условию Липшица вида

$$\begin{gathered}\| f_k(u)-f_k(v)\|_X \le \varphi_k\left(\left\|A_k^\beta u\right\|+\left\|A_k^\beta v\right\|\right)\times \\ \times\left[\left\|A_k^\eta(u-v)\right\|+\left(\left\|A_k^\eta u\right\|+\left\|A_k^\eta v\right\|\right)\left\|A^\beta(u-v)\right\|\right],\ u,v\in D\left(A_k^\eta\right),\end{gathered} \tag{5}$$

при $\beta>0$.

При $\beta=0$ функция f_k удовлетворяет другие неравенства

$$\begin{gathered}\| f_k(u)-f_k(v)\|_X \le \varphi_k\left(\|u\|+\|v\|\right)\times \\ \times\left[\left\|A_k^\eta(u-v)\right\|+\left(\left\|A_k^\eta u\right\|+\left\|A_k^\eta v\right\|\right)\|u-v\|\right],\ u,v\in D\left(A_k^\eta\right),\end{gathered} \tag{6}$$

где φ_k – некоторое семейство возрастающих непрерывных функций.

Введём пространства начальных значений $D\left(A_k^\beta\ \cdot\right)=D\left(A_k^\beta\right)$ как банахово пространство с нормой графика $\left\|A_k^\beta\ \cdot\right\|$. Очевидно, что когда $\beta=0$ имеем $D_{0K}=X$. Из (3),(4), неравенств (5),(6) и теоремы 4.1 [6, стр.178] в случае $\beta>0$ и теоремы 4.4 [6, стр.188] в случае $\beta=0$ следует существование единственного локального решения уравнений семейства (2) в функциональном пространстве

$$u\in C\left(\left[\tau_k,T_{u_k}\right];X\right)\cap C^1\left(\left(\tau_k,T_{u_k}\right];X\right),\ A_k u\in C\left(\left(\tau_k,T_{u_k}\right];X\right), \tag{7}$$

где T_{u_k} – положительное число, зависящее только от $\|u_k\|$.

3. В данном пункте исследуем основную систему (1).

Нам понадобятся следующие понятия.

Предположим, что Y есть подмножество банахова пространства X. Y будет метрическим пространством с расстоянием $d(u,v)=\|u-v\|$, индуцированной нормой $\|\cdot\|_X$.

Определение 2. Семейство однопараметрических нелинейных операторов $S(t):Y\to Y,\ t\in R^+$ называется нелинейной полугруппой на Y, если

1) $S(o)(u)=u$ для $u\in Y$;

2) $S(t+s)(u)=S(t)S(s)(u)$ для $t,s\in R^+,\ u\in X$;

3) $S(t)x$ непрерывна из R^+xY в Y.

Нелинейная полугруппа генерируется нелинейным оператором.

Определение 3. Нелинейный оператор A (возможно многозначный) порождает нелинейную полугруппу $S(t)$ на Y, если

$$S(t)u = \lim_{n\to\infty}\left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n}(u)$$

для всех $u \in Y$. Инфинитезимальный оператор A_s нелинейной полугруппы $S(t)$ определяется равенством

$$A_s(u) = \lim_{t\to 0+}\frac{S(t)u - u}{t},\ u \in D(A_s)$$

для всех u, для которых предел существует.

Оператор A и инфинитезимальный оператор A_s, вообще говоря, разные операторы.

Определение 4. Нелинейная полугруппа $S(t)$ называется полугруппой квазисжатия, если имеется число $\lambda \in R$ такое, что

$$\|S(t)u - S(t)\upsilon\| \le e^{\lambda t}\|u - \upsilon\| \tag{8}$$

для всех $t \in R^+$ и для всех $u, \upsilon \in Y$.

Если в (8) $\lambda \le 0$, то $S(t)$ называется полугруппой сжатия.

Возвращаясь к $APDC$ (1), зададим набор нелинейных полугрупп $\mathfrak{S} = \{S_k(t)\}$, определённых на подмножестве Y банахова пространства X. Зададим также набор непрерывных операторов $H = \{B_k, g_k\},\ B_k : Y \to Y$ и $g_k(\cdot) : Y \to Y$. В нашем распоряжении также дискретное, бесконечное и неограниченное множество чисел

$$E = \{0 = \tau_o, \tau_1, \tau_2, ..., 0 < \tau_1 < \tau_2 < ...\} \subset R^+.$$

Количество элементов в $\mathfrak{S}$ и H может быть конечное или бесконечное.

Рассмотрим теперь динамическую систему, для которой движение $u(\cdot, u_0)$ с начальным временем $t_0 = 0$ и начальным состоянием $u(0) = u_0 \in Y$ задаётся при помощи следующих соотношений

$$\begin{cases} u(t, u_0) = S_k(t - \tau_k)(u(\tau_k)),\ \tau_k \le t < t_{k+1}, \\ u(t) = g_k(u(t^-)) - B_k u(t^-),\ t = \tau_{k+1},\ k \in N, \end{cases} \tag{9}$$

где $N = \{0, 1, 2, ...\}$.

Определим теперь $APDC$ заданным набором нелинейных полугрупп $S_k(t)$:

$$APDC = \left\{\begin{matrix} u = u(\cdot, u_0) : u(t, u_0) = S_k(t - \tau_k)(u(\tau_k)),\ \tau_k \le t < t_{k+1}, \\ u(t) = g_k(u(t^-)) - B_k u(t^-),\ t = \tau_{k+1},\ u(0) = u_0 \in Y \end{matrix}\right\} \tag{10}$$

Заметим, что единственное движение $u(\cdot, u_0)$ с условием $u(0, u_0) = u_0$, определённое в (9),(10), существует для всех $t \ge 0$ и непрерывно на $[0, \infty) \setminus E$ и может потерпеть разрыв при $\tau_k \in E$.

Существование и единственность решения вытекает из условия квазисжатия нелинейной полугруппы (8).

Таким образом, $APDC$ определена посредством набора нелинейных полугрупп $\{S_k(t)\}$.

Предположим, что $u=0$ является внутренним элементом множества Y и что $S_k(t)(u)=0$ для всех $t\geq 0$, если $u=0$. Точно так же $g_k(u)=0$ для всех $k\in N$, если $u=0$.

Отсюда следует, что $u(t,u_0)=0$ для всех $t\geq t_0$, если $u=0$. Нулевое решение $u=0$ называется состоянием равновесия, а $u(t,0)\equiv 0, t\to 0$ – тривиальным движением для $APDC$.

Поступило 07.05 2014 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Издательское объединение «Вища школа», 1987, – 288 с.
2. Самойленко А.М., Илолов М. К теории эволюционных уравнений с импульсным воздействием. – ДАН СССР, 1991, т.316, №4, с.822-824.
3. Самойленко А.М., Илолов М. К теории неоднородных по времени эволюционных уравнений с импульсными воздействиями. – ДАН СССР, 1991, т.319, №1, с.63-67.
4. Michel Antony N., Sun Ye, Molchalov A.P. Stability Analysis of discontinuous dynamical systems determined by semigroups. – IEEE Transactions on Automatic Control, vol.50, №9, september 2005, pp.1277-1290.
5. Michel Antony N., Hou Ling. Stability of dynamical systems with discontinuous motions beyond classical Lyapunov stability results. – SICE Jornal of Control, Mesurement and syste integration, vol.1, №6, novemder 2008, pp.411-422.
6. Yagi Atsushi. Abstract parabolic evolution equations and their applications. – Springer, 2010, 581 p.

М.Илолов

МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ АБСТРАКТӢ БО ТАЪСИРОТИ ИМПУЛСӢ

Маркази рушди инновасионии илм ва технологияҳои нави
Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон

Нишон дода шудааст, ки бо ёрии нимгурӯҳҳои ғайрихаттӣ муодилаҳои абстрактии дифференсиалӣ бо таъсироти импулсӣ ба системаҳои канишноки динамикӣ оварда мешаванд. Ба системаҳои канишноки динамикӣ системаҳои кушод бо импулсҳо, системаҳои гибридии динамикӣ, шабакаҳои Петри ва ғайра мисол шуда метавонанд.

Калимаҳои калидӣ: *системаи канишноки динамикӣ – нимгурӯҳҳои ғайрихаттӣ – система бо таъсири импулсӣ.*

M.Ilolov

ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IMPULSE EFFECT

Center of innovative development of science and new technologies,

Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan

Found that using nonlinear semigroups abstract differential equations with impulse effect can be redused to discontinuous dynamical systems. Examples of discontinuous dynamical systems are open finite-dimensional systems with impulse effect, hybrid dynamical systems Petrenets, ets.

Key words: *discontinuous dynamical systems – nonlinear semigroups – system with impulse action.*