О ВЗАИМОСВЯЗЯХ ПОВЕДЕНЧЕСКИХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЕЙ ВРЕМЕННЫХ СЕТЕЙ ПЕТРИ

Д. И. Бушин, И. Б. Вирбицкайте

Институт систем информатики им. А. П. Ершова,
630090, Новосибирск, Россия

УДК 519.7

Для временных сетей Петри определяется и исследуется семейство поведенческих эквивалентностей в семантиках интерливинг — частичный порядок и линейное время — ветвистое время. Изучаемые эквивалентности основаны на понятии временного процесса, т. е. временного расширения причинной сети за счет глобальных моментов времени, поставленных в соответствие срабатываниям переходов. Устанавливаются взаимосвязи эквивалентностей и строится иерархия классов эквивалентных временных сетей Петри.

Ключевые слова: временные сети Петри, временные процессы, поведенческие эквивалентости, семантики интерливинга, шага и частичного порядка, трассовая и бисимуляционная эквивалентности.

The intention of the paper is to introduce and investigate a family of behavioral equivalences of “interleaving/partial order” and “linear time/branching time” spectra, in the context of time Petri nets. The definitions of the equivalences under consideration heavily rely on the notion of processes of time Petri nets — timed extensions of causal nets by adding global time moments to transition firings. We establish the interrelations between the equivalences and construct a hierarchy of equivalent time Petri nets.

Key words: time Petri nets, time processes, behavioral equivalences, interleaving, step and partial order semantics, trace and bisimulation equivalences.

Введение. Поведенческие эквивалентности обычно используются при спецификации и верификации систем с целью сравнения их поведения, а также упрощения их структуры. В теории параллельных систем и процессов известно большое разнообразие поведенческих эквивалентностей, взаимосвязи между которыми хорошо изучены (см., например, [1, 2]). Можно выделить два критерия классификации семантик, относительно которых определяются и исследуются модели и эквивалентности параллельных недетерминированных систем. Первый критерий — степень точности, с которой учитываются точки недетерминированного выбора альтернативных действий системы. На основе этого критерия был сформирован так называемый спектр семантик линейное время — ветвистое время. Типичным представителем семантики линейного времени является трассовая эквивалентность. При трассовом подходе сравниваются поведения систем, представленные в виде множеств последовательностей действий, выполняемых системами, — языков систем. При таком подходе не учитывается

Работа выполнена при финансовой поддержке DFG-РФФИ (грант № 436 RUS 113/1002/01, код проекта 09-01-91334).

информация о недетерминированном выборе. Представителем семантики ветвистого времени является бисимуляционная эквивалентность, строго учитывающая точки выбора дальнейших альтернативных выполнений системы. Две системы считаются бисимуляционно-эквивалентными, если внешний наблюдатель не может обнаружить различий в поведении систем с учетом точек недетерминированного выбора. На основе второго критерия классификации семантик построен так называемый спектр интерливинг — частичный порядок. Семантики различаются по степени, с которой учитывается отношение причинной зависимости между действиями системы, представленное частичным порядком, причем отсутствие частичного порядка означает, что действия параллельны. В интерливинговой семантике выполнение системы моделируется в виде последовательности выполняемых действий, не отражающей явно их причинную зависимость. В литературе было предпринято много попыток выйти за рамки интерливингового подхода, чтобы позволить внешнему наблюдателю с помощью эквивалентностей различать системы, учитывая параллелизм, используемый при их вычислениях. В результате появилось большое количество эквивалентностей, основанных на моделировании причинной зависимости с помощью частичных порядков (см., например, [3]).

Известно, что анализ поведения параллельных систем реального времени (коммуникационных протоколов, систем управления производством, распределенных операционных систем и т. д.) — сложная задача, которую невозможно решить без использования формальных методов и средств. С этой целью в последнее десятилетие разработаны различные модели, учитывающие временные характеристики функционирования систем: временные автоматы, временные сети Петри, временные структуры событий и т. д. Понятие времени было введено также в поведенческие эквивалентности. Иерархия взаимосвязей временных эквивалентностей в семантиках интерливинг — частичный порядок и линейное время — ветвистое время в контексте локальных структур событий с непрерывным временем построена в работе [4]. В [5] получены теоретико-категорийные бисимуляции, которые совпадают с временными расширениями эквивалентностей с частичным порядком в контексте временных первичных структур событий. Заметим, что временные сети Петри являются обобщением временных структур событий.

В данной работе определяется и исследуется семейство поведенческих эквивалентностей в семантиках интерливинг — частичный порядок и линейное время — ветвистое время в контексте временных сетей Петри. Изучаемые эквивалентности основаны на понятии временного процесса [6], т. е. временного расширения причинной сети (семантической модели, включающей переходы, связанные отношениями причинной зависимости и параллелизма) за счет глобальных моментов времени, поставленных в соответствие срабатываниям переходов. При этом рассматриваются только корректные по времени процессы, т. е. процессы, временная функция которых удовлетворяет специально разработанным свойствам корректности. Устанавливаются взаимосвязи эквивалентностей и строится иерархия классов эквивалентных временных сетей Петри.

1. Временные сети Петри. В данном пункте рассматриваются базовые определения, связанные со структурой и поведением временной сети Петри [7–9].

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел. Определим множество $\mathbf{Interv} = \{[d_1, d_2 \subset \mathbb{R} \mid d_1 \le d_2 \ \& \ d_1, d_2 \in \mathbb{N}\}$. Пусть Act — множество действий.

Определение 1. Временная сеть Петри (ВСП) — это набор $TN = (N = (P, T, F, M_0, L), D)$, где $N = (P, T, F, M_0, L)$ — (помеченная) базовая сеть Петри (СП) с конечным множеством P мест, конечным множеством T переходов ($P \cap T = \emptyset$), отношением инцидентности $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$, начальной разметкой $M_0 \subseteq P$, помечающей функцией $L : T \to Act$, ставящий в соответствие каждому переходу $t \in T$ действие $L(t) \in Act$, и $D : T \longrightarrow \mathbf{Interv}$ — статическая временная функция, ставящая в соответствие каждому переходу $t \in T$ временной интервал $D(t) \in \mathbf{Interv}$.

Для элемента $x \in P \cup T$ определим множество $x = \{y \mid y\ F\ x\}$ его входных элементов и множество $x^\bullet = \{y \mid x\ F\ y\}$ его выходных элементов. Будем считать, что для каждого перехода $t \in T$ выполнены неравенства $|^\bullet\ t\ |> 0$ и $|\ t^\bullet\ |> 0$. Если $D(t) = [d_1, d_2]$, то через $Eft(t) = d_1$ и $Lft(t) = d_2$ будем обозначать соответственно раннее и позднее времена срабатывания перехода t.

Разметка M ВСП TN определяется как произвольное подмножество $M \subseteq P$ мест. Переход $t \in T$ готов сработать при разметке M (обозначается $M \stackrel{t}{\longrightarrow}$), если $^\bullet t \subseteq M$. Пусть $En(M)$ — множество всех переходов, готовых сработать при разметке M.

Состояние ВСП TN — это пара $S = (M, I)$, где M — разметка; $I : En(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ — динамическая временная функция переходов из $En(M)$. Начальное состояние — это пара $S_0 = (M_0, I_0)$, где $I_0(t) = 0$ для всех t из $E_n(M_0)$. Переход t готов сработать в состоянии $S = (M, I)$ в относительный момент времени θ, если выполнены следующие условия:

1) $t \in En(M)$;
2) $(M \backslash ^\bullet t) \cap t^\bullet = \emptyset$;
3) $Eft(t) \leq I(t) + \theta$;
4) $\forall t' \in En(M) \diamond I(t') + \theta \leq Lft(t')$.

Будем считать, что переход t находится в контакте в состоянии S, если для него выполнены условия 1, 3, 4, но не выполнено условие 2. Пусть $Contact(S)$ обозначает множество всех переходов, находящихся в контакте в состоянии S.

Если переход t готов сработать в состоянии $S = (M, I)$ в относительный момент времени θ, то его срабатывание меняет состояние S на новое состояние $S' = (M', I')$ (обозначается $S \stackrel{(t,\theta)}{\rightarrow} S'$) по следующему правилу:

— $\widehat{M} = M \backslash ^\bullet t$;
— $M' = \widehat{M} \cup t^\bullet$;
— $\forall t' \in T \diamond I'(t') = \begin{cases} I(t) + \theta, & t \in En(\widehat{M}), \\ 0, & t' \in En(M') \backslash En(\widehat{M}), \\ \text{не определено}, & \text{иначе}. \end{cases}$

Последовательность $S_0 \stackrel{(t_1,\theta_1)}{\rightarrow} S_1, \ldots, S_{n-1} \stackrel{(t_1,\theta_n)}{\rightarrow} S_n$ $(n \geq 0)$ называется последовательностью срабатываний ВСП TN. Состояние S ВСП TN называется достижимым, если существует последовательность срабатываний, приводящая в состояние S. Пусть $RS(TN)$ обозначает множество достижимых состояний ВСП TN.

Будем говорить, что ВСП TN является:

— свободной от контактов, если для каждого $S \in RS(TN)$ верно равенство $Contact(S) = \emptyset$;

— прогрессирующей по времени, если для любого множества переходов $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, таких что $t_i^\bullet \cap ^\bullet t_{i+1} \neq \emptyset$ и $t_n^\bullet \cap ^\bullet t_1 \neq \emptyset$ для каждого $1 \leq i < n$, верно неравенство $\sum\limits_{1 \leq i \leq n} Eft(t_i) > 0$.

В дальнейшем будем рассматривать только свободные от контактов и прогрессирующие по времени ВСП.

2. Временные процессы ВСП. Введем понятие сети. Тройка (B, E, G) называется сетью, если $B \neq \emptyset$ — множество условий, $E \neq \emptyset$ — множество событий ($E \cap B = \emptyset$), $G \subseteq (B \cup$

$E) \times (E \cup B)$ — отношение инцидентности, такое что $\{x \mid (x,y) \in G\} \cup \{y \mid (x,y) \in G\} = E \cup B$. Для произвольного элемента $x \in B \cup E$ через ${}^\bullet x = \{y \mid (y,x) \in G\}$ и $x^\bullet = \{y \mid (x,y) \in G\}$ будем обозначать множества его входных и выходных элементов соответственно.

Рассмотрим понятие (помеченной) С-сети. Пара $C = (N, l)$ называется (помеченной) С-сетью, если $N = (B, E, G)$ — сеть, такая что:

1) $\preceq = G^*$ — частичный порядок (антисимметричность исключает циклы);

2) $\forall x \in (B \cup E) \ \diamond \downarrow x = \{y \in (B \cup E) \mid y \preceq x\}$ — конечное множество;

3) $\forall b \in B \ \diamond \ |{}^\bullet b| \leq 1 \ \wedge \ |b^\bullet| \leq 1$,

и $l : E \to Act$ — функция пометки, ставящая в соответствие каждому событию $e \in E$ действие $l(e) \in Act$. Множества входных и выходных условий С-сети C будем обозначать соответственно ${}^\bullet C = \{b \in B \mid {}^\bullet b = \emptyset\}$ и $C^\bullet = \{b \in B \mid b^\bullet = \emptyset\}$. Компоненты С-сети C будем записывать с нижним индексом C. Для произвольного левозамкнутого относительно $\preceq_C$ подмножества событий $E' \subseteq E_C$ определим множество $Cut(E') = (E'^\bullet \bigcup {}^\bullet C) \setminus {}^\bullet E'$.

Пусть $C = (B, E, G, l)$ и $C' = (B', E', G', l')$ — С-сети. Отображение $\beta : B \cup E \to B' \cup E'$ — изоморфизм между C и C' (обозначается $\beta : C \simeq C'$), если выполнены следующие условия:

1) β — биективное отображение, такое что $\beta(B) = B' \ \wedge \ \beta(E) = E'$;

2) $\forall x, y \in B \cup E \ \diamond \ G(x,y) = G'(\beta(x), \beta(y))$;

3) $\forall e \in E \ \diamond \ l(e) = l'(\beta(e))$.

С-сети C и C' изоморфны (обозначается $C \simeq C'$), если существует изоморфизм $\beta : C \simeq C'$.

Введем понятие процесса ВСП TN.

Определение 2. Пусть $TN = (N = (P, T, F, M_0, L), D)$ — ВСП. Тогда $\rho = (C = (B, E, G, l), \varphi)$ — процесс ВСП TN, если $\varphi : B \cup E \to P \cup T$ — гомоморфизм, удовлетворяющий следующим свойствам:

1) $\varphi(B) \subseteq P$ и $\varphi(E) \subseteq T$;

2) $\forall e \in E \ \diamond \ \varphi({}^\bullet e) = {}^\bullet \varphi(e) \ \wedge \ \varphi(e^\bullet) = \varphi(e)^\bullet$;

3) $\forall e \in E \ \diamond \ l(e) = L(\varphi(e))$.

Пусть $\rho = (C, \varphi)$ и $\rho' = (C', \varphi')$ — процессы ВСП TN и TN' соответственно. Отображение $\beta : B_C \cup E_C \longrightarrow B_{C'} \cup E_{C'}$ — изоморфизм между ρ и ρ' (обозначается $\beta : \rho \simeq \rho'$), если $\beta : C \simeq C'$ и $\forall x \in B_C \cup E_C \ \diamond \ \varphi(x) = \varphi'(\beta(x))$. Процессы ρ и ρ' изоморфны (обозначается $\rho \simeq \rho'$), если существует изоморфизм $\beta : \rho \simeq \rho'$.

Процесс $\rho_0 = (C_0, \varphi_0)$ ВСП TN называется начальным, если $M_0 = \varphi_0({}^\bullet C_0)$ и $E_{C_0} = \emptyset$. Будем говорить, что в ВСП TN процесс $\rho = (C, \varphi)$ допустим после процесса $\rho' = (C', \varphi')$, если $\varphi({}^\bullet C) = \varphi(C'^\bullet)$. Для ВСП TN множество всех ее процессов, допустимых после процесса ρ, обозначим через $\mathcal{P}(\mathcal{TN}, \rho)$, а множество всех ее процессов, допустимых после начального процесса, — через $\mathcal{P}(\mathcal{TN})$.

Пусть $\rho = (C, \varphi), \rho' = (C', \varphi') \in \mathcal{P}(\mathcal{TN})$ и $\widehat{\rho} = (\widehat{C}, \widehat{\varphi}) \in \mathcal{P}(\mathcal{TN}, \rho)$. Тогда процесс ρ — префикс процесса ρ', если $E_C \subseteq E_{C'}$ — левозамкнутое множество относительно $\preceq_{C'}$ и $\varphi = \varphi'|_{E_C}$. Процесс $\widehat{\rho}$ — суффикс процесса ρ', если $E_{\widehat{C}} = E_{C'} \setminus E_C$ и $\widehat{\varphi} = \varphi'|_{\widehat{E}}$. Тогда ρ' — расширение ρ на процесс $\widehat{\rho}$, а $\widehat{\rho}$ — расширяющий процесс для ρ (обозначается $\rho \xrightarrow{\widehat{\rho}} \rho'$). Будем записывать $\rho \longrightarrow \rho'$, если существует процесс $\widehat{\rho}$, такой что $\rho \xrightarrow{\widehat{\rho}} \rho'$.

Приведем определение временного процесса ВСП TN.

Определение 3. Временной процесс ВСП TN — это пара $\pi = (\rho, \tau)$, где $\rho = (C, \varphi)$ — процесс ВСП TN и $\tau : E \to \mathbb{R}$ — временная функция, ставящая в соответствие каждому событию $e \in E$ глобальное время $\tau(e) \in \mathbb{R}$ его выполнения. Длительность временного процесса π равна $time(\pi) = \max\{\tau_\pi(e) \mid e \in E_\pi\}$.

Пусть $\pi = (\rho = (C, \varphi), \tau)$ и $\pi' = (\rho' = (C', \varphi'), \tau')$ — временные процессы ВСП TN и TN' соответственно. Отображение $\beta : B_C \cup E_C \to B_{C'} \cup E_{C'}$ — изоморфизм между π и π' (обозначается $\beta : \pi \simeq \pi'$), если $\beta : \rho \simeq \rho'$ и $\forall x \in E_C \diamond \tau(x) = \tau'(\beta(x))$. Временные процессы π и π' изоморфны (обозначается $\pi \simeq \pi'$), если существует изоморфизм $\beta : \pi \simeq \pi'$.

Следствие 1. Для любых π и π', таких что $\pi \simeq \pi'$, верно $time(\pi) = time(\pi')$.

Каждому временному процессу $\pi = (C = (B, E, G, l), \varphi, \tau)$ ВСП TN поставим в соответствие временное помеченное частично упорядоченное мультимножество (ВПЧУММ) $\eta_\pi = (E, \prec^E = (\preceq \cap (E \times E)), l, \tau)$. Пусть $\eta = (E, \prec^E, l, \tau)$ и $\eta' = (E', \prec^{E'}, l', \tau')$ — ВПЧУММ для временных процессов π и π' соответственно. Отображение $\beta : E \to E'$ — гомоморфизм между η и η' (обозначается $\beta : \eta \sqsubseteq \eta'$), если:

1) β — биективное отображение;

2) $\forall e \in E \diamond l(e) = l(\beta(e))$;

3) $\forall e, \widetilde{e} \in E \diamond e \prec \widetilde{e} \Rightarrow \beta(e) \prec \beta(\widetilde{e})$;

4) $\forall e \in E \diamond \tau(e) = \tau'(\beta(e))$.

Отображение $\beta : E \to E'$ — изоморфизм между η и η' (обозначается $\beta : \eta \simeq \eta'$), если $\beta : \eta \sqsubseteq \eta'$ и $\beta^{-1} : \eta' \sqsubseteq \eta$. ВПЧУММ η и η' изоморфны (обозначается $\eta \simeq \eta'$), если существует изоморфизм $\beta : \eta \simeq \eta'$.

Утверждение 1. ВПЧУММ изоморфных временных процессов ВСП TN изоморфны.

Начальный временной процесс ВСП TN — это пара $\pi_0 = (\rho_0, \emptyset)$, где ρ_0 — начальный процесс ВСП TN. Будем говорить, что в ВСП TN временной процесс $\pi = (\rho, \tau)$ допусти́м после временного процесса $\pi' = (\rho', \tau')$, если процесс ρ допусти́м после ρ' и $\tau(e) \geq time(\pi')$ для всех $e \in E_C$. Для ВСП TN множество всех ее временных процессов, допустимых после временного процесса π, обозначим через $\mathcal{TP}(\mathcal{TN}, \pi)$, а множество всех ее временных процессов, допустимых после начального временного процесса, — через $\mathcal{TP}(\mathcal{TN})$.

Пусть $\pi = (\rho, \tau) \in \mathcal{TP}(TN, \pi')$. Если $B' \subseteq B_C$ и $t \in En(\varphi(B'))$, то глобальный момент времени, когда во всех входных местах перехода t появляются фишки, определяется следующим образом:

$$\mathbf{TOE}(B', t, \pi') = \max(\{\tau({}^\bullet b) \mid b \in B' \setminus {}^\bullet C \ \wedge \ \varphi(b) \in {}^\bullet t\} \cup \{time(\pi')\}).$$

Для $\pi = (\rho, \tau) \in \mathcal{TP}(TN, \pi')$ функция τ называется корректным таймированием, если для каждого $e \in E_C$ выполнены следующие условия:

— $\tau(e) \geq \mathbf{TOE}({}^\bullet e, \varphi(e), \pi') + Eft(\varphi(e))$;

— $\forall t \in En(\varphi(C_e)) \diamond \tau(e) \leq \mathbf{TOE}(C_e, t, \pi') + Lft(t)$, где $C_e = Cut(Earlier(e))$ и $Earlier(e) = \{e' \in E_C \mid \tau(e') < \tau(e)\}$.

Временной процесс $\pi = (\rho, \tau) \in \mathcal{TP}(TN, \pi')$ называется корректным, если τ — корректное таймирование. В дальнейшем будем рассматривать только корректные временные процессы.

Пусть $\pi = (\rho, \tau)$, $\pi' = (\rho', \tau') \in \mathcal{TP}(TN)$ и $\widehat{\pi} = (\widehat{\rho}, \widehat{\tau}) \in \mathcal{TP}(TN, \pi)$. Тогда временной процесс π' — расширение временного процесса π на временной процесс $\widehat{\pi}$, а $\widehat{\pi}$ — расширяющий временной процесс для π (обозначается $\pi \xrightarrow{\widehat{\pi}} \pi'$), если $\rho \xrightarrow{\widehat{\rho}} \rho'$ и $\tau = \tau'|_{E_C}$, $\widehat{\tau} = \tau'|_{E_{\widehat{C}}}$.

Следствие 2. Для любого временного процесса $\pi \in \mathcal{TP}(TN)$ верно, что $\pi_0 \xrightarrow{\pi} \pi$.

Пусть $\pi \in \mathcal{TP}(TN)$ и $\pi' \in \mathcal{TP}(TN')$ — временные процессы, такие что $\gamma : \pi \simeq \pi'$. Для временного процесса $\widetilde{\pi} = \{B, E, G, l, \varphi, \tau\}$, такого что $\widetilde{\pi} \longrightarrow \pi$ или $\pi^* \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \pi$, определим структуру $\gamma(\widetilde{\pi}) = (B^\gamma, E^\gamma, G^\gamma, l^\gamma, \varphi^\gamma, \tau^\gamma)$ следующим образом:

1) $B^\gamma = \gamma(B)$;

2) $E^\gamma = \gamma(E)$;

3) $G^\gamma = \{(\gamma(x), \gamma(y)) \mid (x, y) \in G\}$;
4) $\forall e \in E^\gamma \diamond l^\gamma(e) = l(\gamma^{-1}(e))$;
5) $\forall b \in B^\gamma \cup E^\gamma \diamond \varphi^\gamma(b) = \varphi(\gamma^{-1}(b))$;
6) $\forall e \in E^\gamma \diamond \tau^\gamma(e) = \tau(\gamma^{-1}(e))$.

Утверждение 2. Пусть $\pi \in \mathcal{TP}(TN)$ и $\pi' \in \mathcal{TP}(TN')$ — временные процессы, такие что $\gamma : \pi \simeq \pi'$ и $\widetilde{\pi} \xrightarrow{\widehat{\pi}} \pi$. Тогда $\gamma(\widetilde{\pi}) \in \mathcal{TP}(TN')$ и $\gamma(\widehat{\pi}) \in \mathcal{TP}(TN', \gamma(\widetilde{\pi}))$. Кроме того, временной процесс $\gamma(\pi)$ является временным процессом π' и временные процессы $\widetilde{\pi}$ и $\widehat{\pi}$ изоморфны временным процессам $\gamma(\widetilde{\pi})$ и $\gamma(\widehat{\pi})$.

Доказательство следует из построения $\gamma(\cdot)$ и определения изоморфизма между временными процессами.

Пусть $\pi = (\rho, \tau)$, $\pi' = (\rho', \tau') \in \mathcal{TP}(TN)$. Временной процесс π' называется расширением временного процесса π на:

— действие, произошедшее в относительный момент времени θ (обозначается $\pi \xrightarrow{(a,\theta)} \pi'$), если существует расширяющий временной процесс $\widehat{\pi}$ для π, такой что $\widehat{E} = \{e\}$, $\widehat{\tau}(e) = time(\pi) + \theta$ и $\widehat{l}(e) = a$;

— мультимножество A действий, произошедших в относительный момент времени θ (обозначается $\pi \xrightarrow{(A,\theta)} \pi'$), если существует расширяющий временной процесс $\widehat{\pi}$ для π, такой что $\widehat{\preceq} \cap (\widehat{E} \times \widehat{E}) = \emptyset$, $\widehat{l}(\widehat{E}) = A$ и $\widehat{\tau}(e) = time(\pi) + \theta$ для всех $e \in \widehat{E}$.

Утверждение 3. Пусть $\pi \in \mathcal{TP}(TN)$ и $\pi' \in \mathcal{TP}(TN')$ — временные процессы, такие что $\gamma : \pi \simeq \pi'$. Если $\pi_0 \xrightarrow{(A_1,\theta_1)} \pi_1 \cdots \pi_{n-1} \xrightarrow{(A_n,\theta_n)} \pi_n = \pi$ в TN, то $\gamma(\pi_0) \xrightarrow{(A_1,\theta_1)} \gamma(\pi_1) \cdots \gamma(\pi_{n-1}) \xrightarrow{(A_n,\theta_n)} \gamma(\pi_n) = \pi'$ в TN'.

Доказательство. Случай $n = 0$ очевиден. Рассмотрим случай $\pi_{i-1} \xrightarrow{(A_i,\theta_i)} \pi_i$ $(1 \le i \le n)$ в TN. Тогда $\pi_{i-1} \xrightarrow{\widehat{\pi}_i} \pi_i$, где $\preceq_{\widehat{\pi}_i} \cap (E_{\widehat{\pi}_i} \times E_{\widehat{\pi}_i}) = \emptyset$; $l_{\widehat{\pi}_i}(E_{\widehat{\pi}_i}) = A_i$; $\forall e \in E_{\widehat{\pi}_i} \diamond \tau_{\widehat{\pi}_i}(e) = time(\widehat{\pi}_{i-1}) + \theta_i$. Из утверждения 2 следует, что $\gamma(\pi_{i-1}), \gamma(\pi_i) \in \mathcal{TP}(TN')$, $\gamma(\widehat{\pi}_i) \in \mathcal{TP}(TN', \gamma(\widehat{\pi}_{i-1}))$ и π_{i-1}, π_i, $\widehat{\pi}_i$ изоморфны $\gamma(\pi_{i-1})$, $\gamma(\pi_i)$, $\gamma(\widehat{\pi}_i)$ соответственно. Кроме того, в силу свойств изоморфизма $(C_{\gamma(\pi_{i-1})}, \varphi_{\gamma(\pi_{i-1})})$ является префиксом, а $(C_{\gamma(\widehat{\pi}_i)}, \varphi_{\gamma(\widehat{\pi}_i)})$ — суффиксом для $(C_{\gamma(\pi_i)}, \varphi_{\gamma(\pi_i)})$ и $\tau_{\gamma(\pi_{i-1})} = \tau_{\gamma(\pi_i)}|_{E_{\gamma(\pi_{i-1})}}$, $\tau_{\gamma(\widehat{\pi}_i)} = \tau_{\gamma(\pi_i)}|_{E_{\gamma(\widehat{\pi}_i)}}$. Таким образом, $\gamma(\pi_{i-1}) \xrightarrow{\gamma(\widehat{\pi}_i)} \gamma(\pi_i)$. С использованием следствия 1 получаем $\gamma(\pi_{i-1}) \xrightarrow{(A_i,\theta_i)} \gamma(\pi_i)$.

3. Эквивалентности ВСП и их взаимосвязи. В данном пункте рассматриваются понятия поведенческих эквивалентностей ВСП и исследуются их взаимосвязи.

3.1. *Трассовые эквивалентности.* Введем вспомогательные понятия и обозначения для ВСП TN.

Слово $\omega = (a_1, \theta_1) \cdots (a_n, \theta_n)$ из алфавита $Act \times \mathbb{R}$ называется временным интерливинговым следом ВСП TN, если в ней существует последовательность вида $\pi_0 \xrightarrow{(a_1,\theta_1)} \pi_1 \cdots \pi_{n-1} \xrightarrow{(a_n,\theta_n)} \pi_n$. Множество всех временных интерливинговых следов ВСП TN обозначим через $L_i(TN)$.

Слово $\Omega = (A_1, \theta_1) \cdots (A_n, \theta_n)$ из алфавита $\mathbb{N}_f^{Act} \times \mathbb{R}$ называется временным шаговым следом ВСП TN, если в ней существует последовательность вида $\pi_0 \xrightarrow{(A_1,\theta_1)} \pi_1 \cdots \pi_{n-1} \xrightarrow{(A_n,\theta_n)} \pi_n$. Множество всех временных шаговых следов TN обозначим через $L_s(TN)$.

Класс изоморфизма временного процесса $\pi = (\rho, \tau) \in \mathcal{TP}(TN)$ называется временным процессным следом ВСП TN. Множество всех временных процессных следов ВСП TN обозначим через $L_{pr}(TN)$.

Следствие 3. Для любой ВСП TN верно вложение $L_i(TN) \subseteq L_s(TN)$.

Определим трассовую эквивалентность на ВСП в интерливинговой, шаговой и частично упорядоченной семантиках.

Определение 4. Пусть $* \in \{i, s, pr\}$. Тогда ВСП TN и TN' называются *-трассово-эквивалентными (обозначается $TN \equiv_* TN'$), если $L_*(TN) = L_*(TN')$.

3.2. *Бисимуляционные эквивалентности.* Рассмотрим понятия интерливинговой, шаговой и частично упорядоченной бисимуляций на ВСП.

Определение 5. Пусть $* \in \{i, s, pr\}$ и π_0, π_0' — начальные временные процессы ВСП TN, TN' соответственно. Отношение $R \subseteq \mathcal{TP}(TN) \times \mathcal{TP}(TN')$ — *-бисимуляция между TN и TN' (обозначается $R : TN \leftrightarrows_* TN'$), если:

1) $(\pi_0, \pi_0') \in R$;

2) $\forall (\pi, \pi') \in R \ \diamond \ \pi \xrightarrow{\widehat{\pi}} \widetilde{\pi}$:

— $|\widehat{E}| = 1$, если $* = i$,

— $\preceq_{\widehat{C}} \cap (\widehat{E} \times \widehat{E}) = \emptyset$, если $* = s$,

$\Longrightarrow\ \exists \widetilde{\pi}' \ \diamond\ \pi' \xrightarrow{\widehat{\pi}'} \widetilde{\pi}'$, $(\widetilde{\pi}, \widetilde{\pi}') \in R$ и:

— $\eta_{\widehat{\pi}} \simeq \eta_{\widehat{\pi}'}$, если $* \in \{i, s\}$;

— $\widehat{\pi} \simeq \widehat{\pi}'$, если $* = pr$;

3) определение аналогично п. 2, однако TN и TN' меняются местами.

ВСП TN и TN' называются *-бисимуляционно-эквивалентными (обозначается $TN \leftrightarrows_* TN'$), если существует *-бисимуляция между ними.

3.3. *Взаимосвязи эквивалентностей.* В данном пункте приведен основной результат работы.

Теорема. *Пусть* $\leftrightarrow, \rightleftharpoons \in \{\equiv, \leftrightarrows\}$ *и* $*, ** \in \{i, s, pr\}$. *Для любых ВСП* TN *и* TN' *верно*

$$TN \leftrightarrow_* TN' \ \Rightarrow\ TN \rightleftharpoons_{**} TN'$$

тогда и только тогда, когда в графе, представленном на рис. 1,а, существует дуга от $\leftrightarrow_*$ к $\rightleftharpoons_{**}$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Проверим истинность импликаций на рис. 1,*a*.

Связь 1 ($\leftrightarrows_s \to \leftrightarrows_i$) является следствием определения 5 и того факта, что изоморфизм ВПЧУММ с пустым отношением причинной зависимости обусловливает изоморфизм одноэлементных ВПЧУММ.

Связь 2 ($\leftrightarrows_{pr} \to \leftrightarrows_s$) является следствием определения 5 и утверждения 1.

Связь 3 ($\equiv_s \to \equiv_i$) устанавливается с помощью следствия 3.

Связь 4 ($\equiv_{pr} \to \equiv_s$) устанавливается следующим образом. Пусть $W = (A_1, \theta_1) \cdots (A_n, \theta_n) \in L_s(TN)$, т. е. в TN существует последовательность $\pi_0 \xrightarrow{(A_1,\theta_1)} \pi_1 \cdots \pi_{n-1} \xrightarrow{(A_n,\theta_n)} \pi_n = \pi$. Согласно условию теоремы найдется временной процесс $\pi' \in \mathcal{TP}(TN')$, такой что $\gamma : \pi \simeq \pi'$. Тогда из утверждения 3 получаем последовательность $\gamma(\pi_0) \xrightarrow{(A_1,\theta_1)} \gamma(\pi_1) \cdots \gamma(\pi_{n-1}) \xrightarrow{(A_n,\theta_n)} \gamma(\pi_n)$ в TN'. Значит, $W \in L_s(TN')$ и, следовательно, $L_s(TN) \subseteq L_s(TN')$. Обратное включение языков проверяется аналогично. Таким образом, $TN \equiv_s TN'$.

Связь 5 ($\leftrightarrows_i \to \equiv_i$) устанавливается следующим образом. Пусть R — i-бисимуляция между TN и TN'. Также предположим, что $\pi_0 \xrightarrow{(a_1,\theta_1)} \pi_1 \cdots \pi_{n-1} \xrightarrow{(a_n,\theta_n)} \pi_n$ в TN. Тогда для всех $i = 0, ..., n$ верно, что $(\pi_i, \pi_i') \in R$ для некоторых $\pi_i' \in \mathcal{TP}(TN')$, таких что $\pi_i \xrightarrow{\widehat{\pi}_i} \pi_{i+1}$ $(i \neq n)$ и $\eta_{\widehat{\pi}_i} \simeq \eta_{\widehat{\pi}_i'}$. Значит, в TN' существует последовательность $\pi_0' \xrightarrow{(a_1,\theta_1)} \pi_1' \cdots \pi_{n-1}' \xrightarrow{(a_n,\theta_n)} \pi_n'$. В силу симметричности i-бисимуляции $TN \equiv_i TN'$.

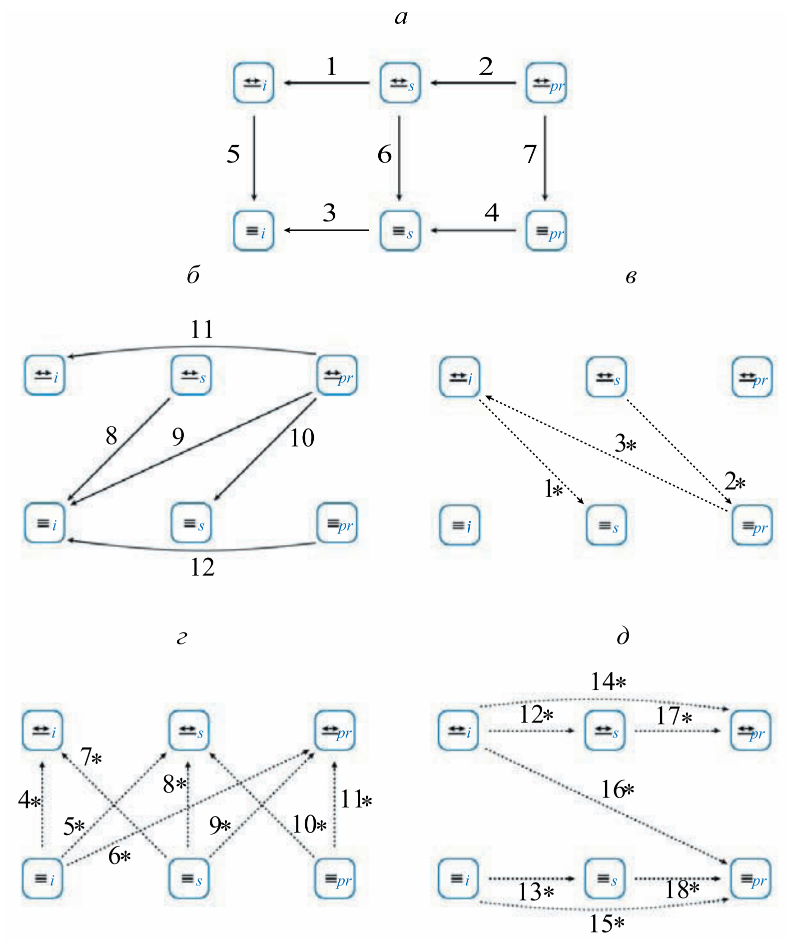

Рис. 1. Иерархия классов эквивалентных НВСП:
а — связи между эквивалентностями; *б* — взаимосвязи, возникшие вследствие связи эквивалентностей на рис. 1,*а*; *в* — случай 4 доказательства теоремы; *г* — случай 5 доказательства теоремы; *д* — случай 6 доказательства теоремы

Связь 6 ($\Leftrightarrow_s \rightarrow \equiv_s$) доказывается аналогично связи 5, но с использованием временных шаговых следов.

Связь 7 ($\Leftrightarrow_{pr} \rightarrow \equiv_{pr}$) следует из определений 4, 5 и следствия 2.

Заметим, что связи 8–12, показанные на рис. 1,*б*, следуют из связей (1–7).

($\Rightarrow$) Докажем, что в графе на рис. 1,*а* от одной эквивалентности к другой нельзя провести дополнительную дугу, такую что в этом графе не существует пути от первой эквивалентности ко второй.

Случай 1. На рис. 2,*а* показаны ВСП TN_1 и TN_2, которые являются i-бисимуляционно-эквивалентными, но не s-трассово-эквивалентными, так как только в TN_2 действия a и b могут произойти параллельно в глобальный момент времени 0. Следовательно, связь 1* (см. рис. 1,*в*) отсутствует.

Случай 2. На рис. 2,*а* приведены ВСП TN_2 и TN_3, которые являются s-бисимуляционно-эквивалентными, но не pr-трассово-эквивалентными, поскольку только в TN_3 действие a может причинно зависеть от действия b. Тогда связь 2* (см. рис. 1,*в*) отсутствует.

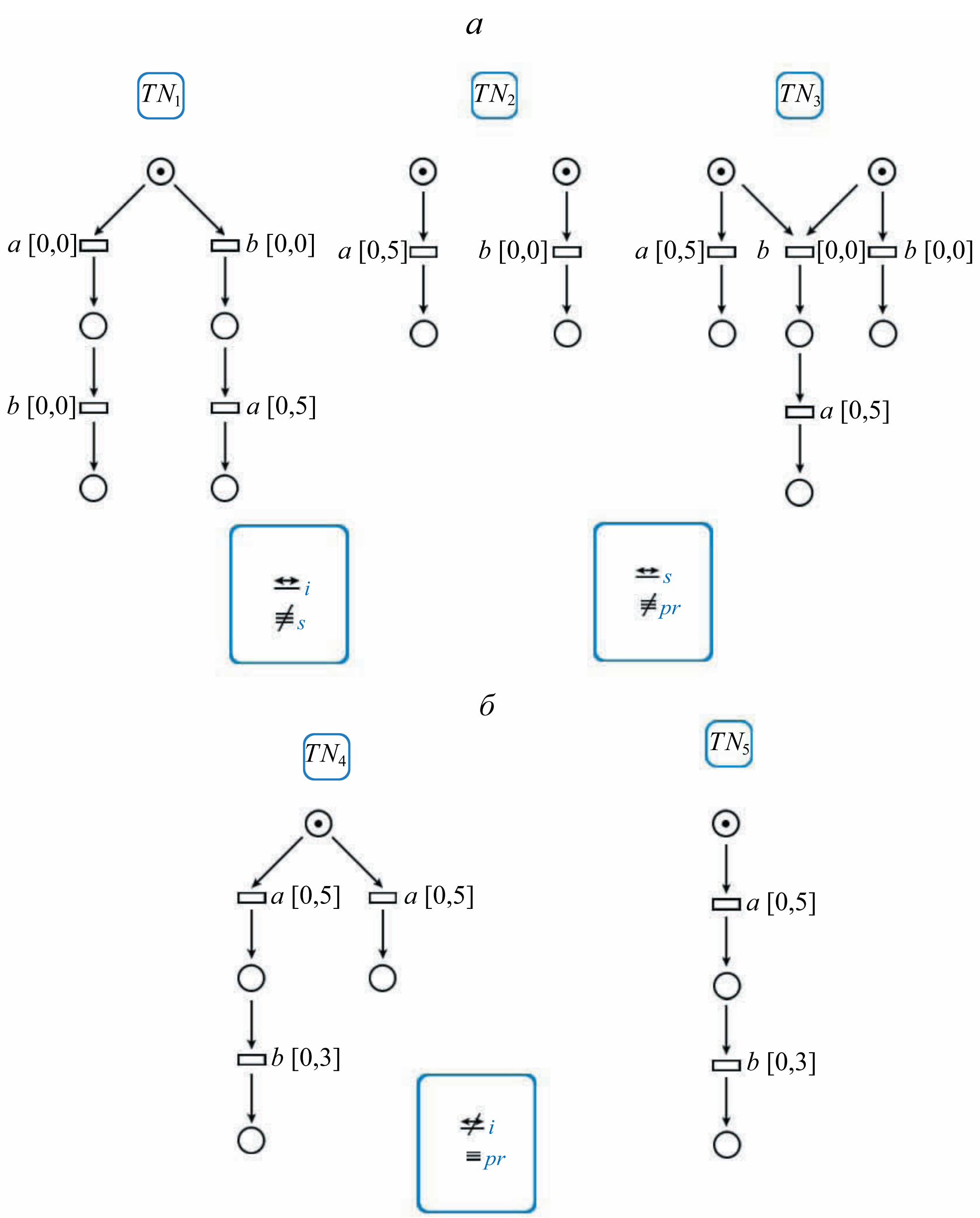

Рис. 2. Примеры эквивалентностных ВСП:
а — i-бисимуляционно- и не s-трассово-эквивалентные ВСП, а также s-бисимуляционно- и не pr-трассово-эквивалентные ВСП; *б* — не i-бисимуляционно- и pr-трассово-эквивалентные ВСП

Случай 3. На рис. 2,*б* приведены ВСП TN_4 и TN_5, которые являются pr-трассово-эквивалентными, но не i-бисимуляционно-эквивалентными, так как только в TN_4 может произойти действие a, например в глобальный момент времени 1, так что действие b не может произойти ни в какой глобальный момент времени. Следовательно, связь 3* (см. рис. 1,*в*) отсутствует.

Случай 4. Вновь рассмотрим ВСП TN_4 и TN_5, показанные на рис. 2,*б*. Отсутствие дуг $4*-11*$ (см. рис. 1,*г*) следует из импликаций $TN_4 \not\leftrightarrows_i TN_5 \Rightarrow TN_4 \not\leftrightarrows_s TN_5 \Rightarrow TN_4 \not\leftrightarrows_{pr} TN_5$ и $TN_4 \equiv_{pr} TN_5 \Rightarrow TN_4 \equiv_s TN_5 \Rightarrow TN_4 \equiv_i TN_5$.

Случай 5. Рассмотрим ВСП TN_1 и TN_2, приведенные на рис. 2,*а*. Отсутствие дуг 12∗−16∗ (см. рис. 1,*д*) следует из импликаций $TN_1 \not\equiv_s TN_2 \Rightarrow TN_1 \not\leftrightarrows_s TN_2 \Rightarrow TN_1 \not\leftrightarrows_{pr} TN_2$, $TN_1 \leftrightarrows_i TN_2 \Rightarrow TN_1 \equiv_i TN_2$ и $TN_1 \not\equiv_s TN_2 \Rightarrow TN_1 \not\equiv_{pr} TN_2$.

Случай 6. Рассмотрим ВСП TN_2 и TN_3, представленные на рис. 2,*а*. Отсутствие дуг $17* -18*$ (см. рис. 1,*д*) следует из импликаций $TN_2 \not\equiv_{pr} TN_3 \Rightarrow TN_2 \not\Leftrightarrow_{pr} TN_3$ и $TN_2 \Leftrightarrow_s TN_3 \Rightarrow TN_2 \equiv_s TN_3$.

Как известно, количество дуг полного направленного графа с $N = 6$ вершинами равно $N \times (N - 1) = 30$. Таким образом, рассмотрены все возможные случаи.

Заключение. Для временных сетей Петри введены понятия трассовой и бисимуляционной эквивалентностей в интерливинговой, шаговой и частично-упорядоченных семантиках, а также показано, что трассовые эквивалентности слабее бисимуляционных, а использование частично-упорядоченной семантики позволяет с большой точностью сравнивать поведение временных сетей Петри с шаговой и интерливинговой семантиками. В дальнейшем предполагается определить и исследовать данные эквивалентности для временных сетей Петри, переходы которых помечены как “видимыми”, так и “невидимыми” действиями. Последние позволяют абстрагироваться от несущественных деталей поведения изучаемой модели.

Список литературы

1. Pomello L., Rozenberg G., Simone C. A survey of equivalence notions for net based systems // Lecture Notes Comput. Sci. 1992. V. 609. P. 410–450.

2. Тарасюк И. В. Эквивалентности для поведенческого анализа параллельных и распределенных вычислительных систем. Новосибирск: Гео, 2007. 224 с.

3. Van Glabbeek R. J., Goltz U. Refinement of actions and equivalence notions for concurrent systems // Acta Inform. 2001. V. 37. P. 229–327.

4. Andreeva M. V., Virbitskaite I. B. Observational equivalences for timed stable event structures // Fund. Inform. 2006. V. 72. P. 1–19.

5. Virbitskaite I. B., Gribovskaya N. S. Open maps and observational equivalences for timed partial order models // Fund. Inform. 2004. V. 60. P. 383–399.

6. Aura T., Lilius J. Time processes for time Petri nets // Lecture Notes Comput. Sci. 1997. V. 1248. P. 136–155.

7. Merlin P., Faber D. J. Recoverability of communication protocols // IEEE Trans. Comm. 1976. V. COM-24(9). P. 183–195.

8. Вирбицкайте И. Б. Сети Петри: модификации и расширения: Учеб. пособие. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2005. 125 с.

9. Rosenberg G., Thiagarajan P. S. Petri nets: basic notions, structure, behaviour // Lecture Notes Comput. Sci. 1986. V. 224. P. 585–668.

Бушин Дмитрий Игоревич — асп. Института систем информатики СО РАН;
e-mail: dima.bushin@gmail.com;
Вирбицкайте Ирина Бонавентуровна — д-р физ.-мат. наук, проф.,
гл. науч. сотр. Института систем информатики СО РАН; e-mail: virb@iis.nsk.su

Дата поступления — 30.01.12 г.