СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ
СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

УДК 004.942 ISSN 1995-5499
DOI: https://doi.org/10.17308/sait.2020.3/3038
Поступила в редакцию 18.09.2020
Подписана в печать 30.09.2020

АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ АППАРАТА СЕТЕЙ ПЕТРИ

© 2020 Т. В. Азарнова✉[1], А. А. Белошицкий[2]

[1]Воронежский государственный университет
Университетская пл., 1, 394018 Воронеж, Российская Федерация
[2]Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина
ул. Старых Большевиков, 54 «А», 394064 Воронеж, Российская Федерация

Аннотация. Календарное планирование, реализуемое на основе специальных календарных моделей, является одной из основных фаз управления проектами, оно позволяет: определять сроки выполнения работ, осуществлять бюджетирование проекта, оптимизировать ресурсное обеспечение, идентифицировать риски, меры по их упреждению и повышению качества выполнения работ. В рамках данной статьи рассматриваются проекты взаимосвязанных работ, представленные календарными сетевыми моделями. Предложены механизмы исследования календарных сетевых моделей в условиях, когда некоторые параметры выполнения работ являются стохастическими. Разработанные в рамках исследования механизмы строятся на основе применения аппарата раскрашенных сетей Петри с предикативными переходами и специфическими маркерами, представленными в виде функций случайных переменных, к анализу критических путей календарных графов. Применение инструментов сетей Петри позволяет построить модели, описывающие динамику выполнения работ проекта, и имитировать выполнение работ календарного плана проекта при определенных ограничениях или правилах распределения ресурсов между ними. Предполагается, что ресурсы, выделяемые на выполнение работ являются случайными величинами, время и качество выполнения работ являются функциями от данных случайных величин. По каждому ресурсу каждой работы задаются возможные диапазоны значений, которые при определенных предположениях о законе распределения, позволяют получить характеристики ресурсов и зависящих от них функций, как случайных величин. По результатам имитационного моделирования оцениваются временные параметры событий и работ проекта, оценивается возможность выполнения проекта в директивные сроки. В работе исследуются два варианта распределения ресурсов проекта. В соответствии с первой моделью не учитывается конкуренция между работами за распределение ресурсов, в соответствии со второй моделью, ресурсы распределяются динамично из единого цента, и с учетом случайного характера выполнения работ, может возникать дефицит ресурсов.

Ключевые слова: календарное планирование, сетевые графы, сети Петри, распределение ресурсов работ проекта.

✉ Азарнова Татьяна Васильевна
e-mail: ivdas92@mail

ВВЕДЕНИЕ

Календарное планирование — высокоэффективным инструментом управления проектами. Календарный план формирует точное представление о порядке выполнения работ, их продолжительности, используемых на каждом этапе материальных и производственных ресурсах. [1] В общем виде задача календарного планирования ставится следующим образом. Пусть известна последовательность выполнения комплекса работ, характеристики каждой работы, взаимосвязи и ограничения на их выполнение; директивные сроки начала и/или окончания работ по комплексу в целом и/или по отдельным объектам; потребность работ в ресурсах в целом и распределенно по периодам выполнения; возможность использования конкретных ресурсов на различных объектах; производительность имеющихся трудовых и технических ресурсов. Требуется составить календарный план, удовлетворяющий всем требованиям и оптимальный относительно определенного критерия эффективности.

Существуют различные модели календарного планирования, каждая из них обладают как достоинствами, так и недостатками. Среди данных методов можно выделить диаграммы Ганта и сетевые модели (графы). Остановимся более подробно на сетевых моделях, поскольку они будут объектами исследования данной статьи. Сетевая модель представляет собой взвешенный ориентированный граф, вершины которого соответствуют событиям, а дуги работам проекта, для которого составляется календарный план. Событие заключается в окончании одной или нескольких работ проекта, для которых вершина-событие является конечной. Пример сетевого графика приведен на рис. 1. Данный сетевой график изображает проект, содержащий 21 работу и 13 событий, связанных с окончания одной или нескольких из данных работ.

Для исследования временных характеристик проектов, представленных сетевыми моделями наиболее часто используется метод критического пути, основной задачей которого является нахождение критического пути в графе. Под критическим путем сетевого графа подразумевается путь от исходного события начала работ до завершающего события окончания всех работ, имеющий наибольшую продолжительность из всех полных путей (полный путь – это любой путь от начального до завершающего события). Работы, лежащие на критическом пути, называются критическими. Оценка общей продолжительности критического пути определяется наименьшей общей продолжительностью работ по проекту. Сокращение данной оценки возможно только за счет уменьшения длительности работ критического пути. Следовательно, любая задержка выполнения работ, лежащих на критическом пути, повлечет увеличение длительности всего проекта.

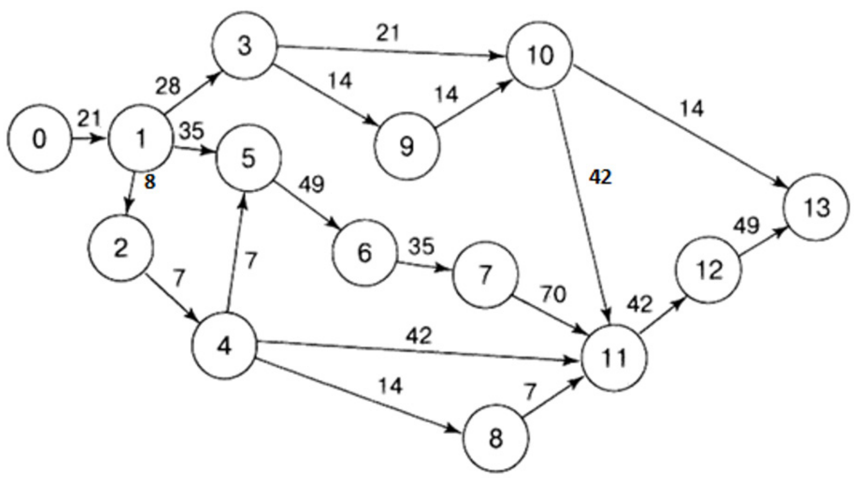

Рис.1. Пример сетевой модели (графа)
[Fig. 1. An example of a network model (graph)

Для каждой работы вводится понятие резерва времени, по которым понимается разность между моментами (время измеряется с начала выполнения проекта в определенных единицах измерения) позднего и раннего окончания (начала) работ. Наличие резерва времени у работы позволяет задержать данную работу в пределах резерва и это не повлияет срок завершения всего проекта. Работы, находящиеся на критическом пути, имеют нулевые резервы времени. В некоторых работах критическим называется полный путь, имеющий минимальный суммарный (по всем работам данного пути) резерв времени.

Приведем алгоритм нахождения критического пути в сетевом графе.

1. Для каждого события i $(i = 1,\ldots,m)$ вычислить ранний срок его свершения по следующей формуле: $\gamma_p(i) = \max\limits_{j \in \Gamma^{-1}(i)} (\gamma_p(j) + \gamma(j,i))$, где $\gamma(j,i)$ — время выполнения работы (j,i).

2. Для конечного события считается, что поздний срок его завершения $\gamma_n(m)$ равен раннему сроку или установленному директивному сроку. Для каждого события кроме конечного вычислить поздний срок свершения события по следующей формуле:

$$\gamma_n(i) = \min_{j \in \Gamma(i)} (\gamma_n(j) - \gamma(i,j));$$

3. Для каждой работы (j,i) вычислить ранние и поздние сроки начала и окончания работ:

$$\gamma_{рн}(i,j) = \gamma_p(i);$$

$$\gamma_{ро}(i,j) = \gamma_p(i) + \gamma(i,j);$$

$$\gamma_{по}(i,j) = \gamma\ (j)$$

$$\gamma_{пн}(i,j) = \gamma_n(j) - \gamma(i,j);$$

4. Для каждого события вычислить резерв времени по формуле:

$$R(i) = \gamma_n(i) - \gamma_p(i);$$

5. Для каждой работы вычислить полный резерв времени по формуле:

$$R_n(i,j) = \gamma_n(j) - \gamma_p(i) - \gamma(i,j);$$

6. Определить критический путь выполнения работ.

Для сетевого графа, приведенного на рис. 1, значение критическое время выполнения работ, лежащих на критическом пути равно 301, а сам критический путь состоит из работ (0,1), (1,5), (5,6), (6,7), (7,11), (11,12), (12,13). Резерв времени для всех работ критического пути равен 0. Нахождение критического пути позволяет управлять ресурсами проекта. В частности, возможно направленное перемещение ресурсов с работ, не лежащих на критическом пути, на работы, лежащие на критическом пути, для повышения производительности последних и сокращении времени реализации проекта.

В работах [2–4] исследуются алгоритмы критического пути при различных типах задания информации (шкалы отношений, интервальные шкалы, нечеткие и лингвистические шкалы) о работах, детерминированных и стохастических временных параметрах выполнения проектов.

Дополнительные возможности для исследования сетевых графов открывает аппарат Сетей Петри [6]. В частности, с помощью сетей Петри можно моделировать стохастические характеристики работ и событий, моделировать ситуации наличия циклов в выполнении работ, учитывать качество выполнения работ, моделировать перераспределение ресурсов между работами. В данной статье будем рассматривать раскрашенные сети Петри с временными ресурсами позиций и предикативными переходами.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕТЕВЫХ ГРАФОВ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ НА ЯЗЫКЕ РАСКРАШЕННЫХ СЕТЕЙ ПЕТРИ

Сеть Петри это наглядная формализованная модель для описания поведения параллельных систем с асинхронными взаимодействиями [6]. Она в компактной форме отражает структуру взаимоотношений элементов системы и динамику изменения ее состояний при заданных начальных условиях. Графически сеть Петри представляет собой двудольный ориентированный граф, вершинами которого являются позиции и переходы, причем каждая дуга графа ведет от позиции к переходу или от перехода к позиции. Позиции изображаются кружками, а переходы двумя параллельными линиями.

Классические сети Петри задаются в виде кортежа:

$$SP =< P, T, E, M_0 >;$$

где P – множество позиций (количество позиций обозначим N), T — множество переходов (количество переходов обозначим H), E — множество дуг, ведущих или от позиций к переходам или от переходов к позициям, $M_0 = (m_1^0, ..., m_N^0)$ — начальная маркировка, описывающая в простейшем случае количество меток или фишек в каждой позиции в начальный момент времени. Для каждого перехода t_j можно ввести множество входных и выходных позиций, которые обозначим соответственно $I^I(t_j)$ и $I^o(t_j)$. Аналогично для каждой позиции p_i можно ввести множество входных и выходных переходов $J^I(p_i)$ и $J^o(p_i)$.

Динамические изменения в сети Петри осуществляются за счет механизма смены маркировки (начиная с начальной маркировки) и механизма срабатывания переходов. Переход срабатывает в тот момент, когда он приходит в активное состояние. Условие активности перехода описывается требованиями на маркировку во всех входных позициях $I^I(t_j)$. Срабатывание перехода в разных концепциях сетей Петри осуществляется по разному. В некоторых концепциях срабатывание перехода заключается в перемещении одного маркера из каждой входной позиции в выходную, в некоторых концепциях в перемещении количества маркеров равных кратности входных дуг, ведущих от входной позиции к переходу. Таким образом, динамика сети Петри описывается переходами от одной допустимой маркировки к другой:

$$M^l = (m_1^l, ..., m_N^l) \rightarrow M^d = (m_1^d, ..., m_N^d).$$

Наряду с классическими сетями Петри рассматриваются также раскрашенные, предикативные, временные, стохастические сети Петри. При использовании раскрашенных сетей Петри маркеры задаются переменными (цветами), а кратности дуг являются функциями от этих переменных. Предикативные сети являются разновидностью раскрашенных сетей, в предикативных сетях каждому переходу ставится в соответствие предикат от значений цветов или функций приписанных дугам, истинность которого приводит к срабатыванию перехода. Временные сети также являются разновидностью раскрашенных сетей, в которых или позициям приписывается время пребывания в них маркера или переходам приписывается продолжительность срабатывания. В стохастических сетях каждый переход характеризуется вероятностью его срабатывания за определенное время.

В данной работе предложен алгоритм, который позволяет применить аппарат сетей Петри для анализа критического пути в случае недетерминированного задания ресурсного обеспечения работ проекта.

При изображении сети Петри для сетевых графов события изображаются в виде переходов, а работы в виде позиций сети Петри. Дополнительно используется позиция, характеризующая начало работ по проекту. В самом простейшем варианте позициям можно приписать некоторый временной ресурс, характеризующий время выполнения соответствующей работы. Переходы срабатывают только тогда, когда выполнены работы во всех позициях, от которых ведут дуги к данному переходу.

Простейшая сеть Петри для сетевого графа, приведенного на рис. 1, изображена на рис. 2.

В данной работе предлагается использовать более сложный вариант, вершинам сети Петри приписываются маркеры-переменные (цвета), среди которых присутствует специальный маркер-флажок активности (выполнения работы в данной позиции) и два специальных маркера, первый из которых указывает время прихода позиции в активное состояние — начальный временной маркер, второй — реальное время с начала выполнения проекта — маркер реального времени. Маркер-флажок активности, начальный временной маркер и маркер реального времени определенной позиции активизируют свои значения в момент срабатывания перехода, ведущего в данную позицию. При срабатывании перехода начальный временной маркер приравнивается маркеру реального времени. В процессе выполнения работы маркер ре-

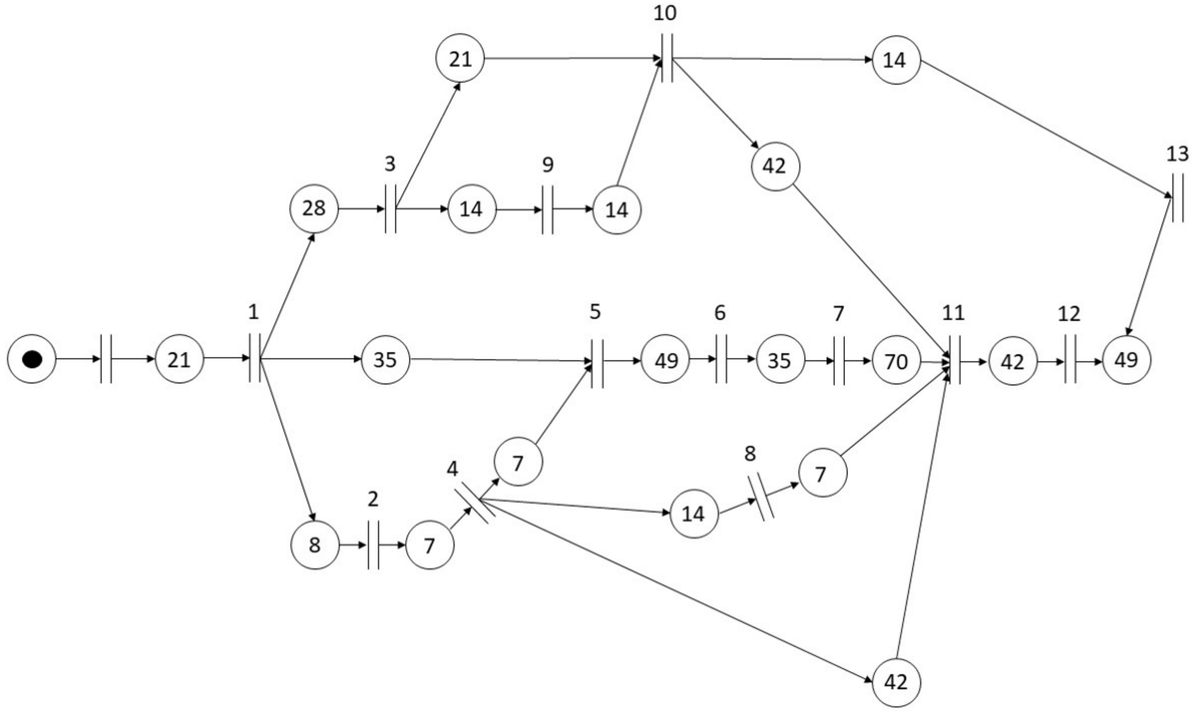

Рис. 2. Один из вариантов сети Петри для сетевого графа, изображенного на рис. 1
[Fig. 2. One of the variants of the Petri net for the net graph shown in Fig. 1]

ального времени увеличивается в режиме реального времени, отсчитываемого с начала выполнения проекта. В рамках нашего исследования будем считать, что остальные маркеры являются некоторыми функциями от количества каждого типа ресурсов, выделяемых на выполнение данной работы $r_1,...,r_L$. Предположим, что в процессе первоначального планирования распределения ресурсов по работам, каждый ресурс r рассматривается как случайная величина, распределенная по нормальному закону с плотностью распределения:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Для позиций задаются интервалы по каждому типу ресурсов $r_1,...,r_L$:

$$((r_1^0-\Delta r_1, r_1^0+\Delta r_1),...,(r_L^0-\Delta r_L, r_L^0+\Delta r_L))$$

где $r_1^0,...,r_L^0$ — средние значения анализируемых величин. Эти интервалы характеризуют диапазон, в пределах которого планируется выделение ресурсов на выполнение работы.

В качестве обязательных маркеров каждой позиции возьмём две функции: время выполнения работы $T(r_1,...,r_L)$ и качество выполнения работы $K(r_1,...,r_L)$, которые являются функциями от L случайных ресурсов $r_1,...,r_L$. Остановимся несколько на способах построения данных функций. Функцию $T(r_1,...,r_L)$ можно строить или на основе определенных нормативных документов (в частности, в строительстве) или на основе ретроспективной базы, используя методы статистического анализа данных для построения регрессионных моделей или методы машинного обучения. Относительно типа функций, которые описывают время выполнения работ можно сформулировать два утверждения

Утверждение 1. Если в производственной системе в процессе выполнения работ отсутствует синергетический эффект, то функция зависимости времени выполнения работы от количества используемых ресурсов имеет выпуклый характер в том случае, когда увеличение количества ресурсов в n раз приводит к сокращению продолжительности выполнения в такое же количество раз.

Утверждение 2. В производственных системах, функция зависимости времени выполнения работы от количества используемых ресурсов имеет вогнутый характер для случая, когда первые разности возрастают по мере увеличения количества распределяемого ресурса и выпуклый характер — когда убывают.

Данными утверждениями можно пользоваться при выборе типа функции, аппроксимирующей зависимость времени выполнения работ от количества используемых ресурсов.

Более подробно остановимся на способах построения функции качества выполнения работ $K(r_1,...,r_L)$. Качество выполнения работ и принципы его оценки достаточно хорошо изложены стандартах ИСО. В качестве основного определения качества используется следующее определение: «Качество — это степень, с которой совокупность собственных отличительных свойств (характеристик) выполняет требования (потребности или ожидания) заинтересованных сторон, которые установлены, обычно предполагаются или являются обязательными». В соответствии с данным определением, качество выполнения работ можно рассматривать как некоторую функцию со значениями из отрезка [0,1]. В процессе построения функции качества в работе решаются две задачи: определения качества по каждому отдельному ресурсу и определения качества по совокупности ресурсов и при необходимости по группе работ.

В настоящее время существует значительное количество методик, в которых для вычисления оценки качества определенного ресурса используются аналитические формулы, при построении которых предполагается, что оценка качества зависит от соотношения имеющегося ресурса с базовым, идеальным, ожидаемым количеством

$$K_j = \varphi\left(r_j, r_j^{\text{баз}}\right), K_j = \varphi\left(r_j, r_j^{\text{ожид}}\right).$$

Наиболее часто при оценке качества отдельных ресурсов используются следующие виды зависимостей

$$K_j = \frac{r_j}{r_j^{\text{баз}}},$$

$$K_j = \frac{r_j - r_j^{\text{мин}}}{r_j^{\text{баз}} - r_j^{\text{мин}}},$$

$$K_j = e^{-(r^0)^{m_j}},$$

где $0 < m_j \le M$ — положительная константа, $r^0 = \dfrac{2r_j - \left(r_j^{\text{макс}} + r_j^{\text{макс}}\right)}{r_j^{\text{макс}} - r_j^{\text{макс}}}$ — линейная функция от r_j.

При оценке качества ресурсов и в целом качества выполнения работ можно использовать подход Руссмана И. Б. [7, 8], основанный вычислении трудности достижения целей. Идея оценки трудности достижения цели возникла из интуитивных соображений о том, что при прочих равных условиях получить результат определенного качества тем труднее, чем ниже качество ресурсов и чем выше требования к ним.

Прежде чем вводить трудность достижения целей, введем величину $0 < \mu_j < 1$ — оценку качества j-го ресурса. С точки зрения достижения целей не все значения качеств ресурсов являются достижимыми, поэтому вводится понятие требования к качеству j-го ресурса — ε_j, удовлетворяющее условиям: $0 < \varepsilon_j < 1,\ \varepsilon_j < \mu_j$.

Трудность достижения цели $d_j = d_j(\mu_j, \varepsilon_j) = d\left(\mu, \varepsilon\right)$ как функция качества ресурсов и требований к ним должна обладать следующими свойствами [8]:

а) трудность достижения результата максимальна при минимальном качестве ресурса $d\left(\mu, \varepsilon\right) = 1,$ при $\varepsilon = \mu.$

б) трудность достижения результата минимальна при предельно высоком качестве ресурса $d\left(\mu, \varepsilon\right) = 0,$ при $\mu = 1, \mu > \varepsilon.$

в) $d\left(\mu, \varepsilon\right) = 0,$ при $\mu > 0, \varepsilon = 0.$

В качестве функции, удовлетворяющей данным свойствам можно использовать функцию вида [8]:

$$d = \frac{\varepsilon\left(1-\mu\right)}{\left(\mu - \varepsilon\right)},\ d\left(0,0\right) = 0,\ d\left(1,1\right) = 1.$$

Поскольку при выполнении любой работы используется несколько ресурсов, то оценка качества должна быть интегральной функцией от частных трудностей d_j по каждому ресурсу. В рамках данного исследования будет использоваться функция:

$$D = 1 - \prod_{j=1}^{L}(1 - d_j).$$

Различная важность ресурсов может быть учтена при помощи введения в формулу коэффициентов важности:

$$D = 1 - \prod_{j=1}^{L} (1 - d_j)^{\beta_j}.$$

Трудность достижения результата понимается как некая мера некачественности или оценка риска использования ресурсов низкого качества, поэтому качество выполнения работы можно оценивать как: $K = 1 - d$.

В дальнейшем нам понадобиться оценка качества группы работ. Для ее определения введем в рассмотрение операции над трудностями:

1) операция обобщенного сложения:

$$d_1 + d_2 = d_1 + d_2 - d_1 \cdot d_2.$$

2) операция обобщенного умножения на неотрицательное число λ:

$$\lambda \otimes d = 1 - \left(1 - d\right)^{\lambda}.$$

3) операция обобщенного возведения в степень:

$$d^{\lambda} = 1 - e^{-\left(\ln \frac{1}{1-d}\right)^{\lambda}}.$$

Используя введенные операции можно построить функции качества группы работ:

$$\Phi\left(D_1, ..., D_G\right) = \max\left(\frac{1}{\lambda_1} \otimes D_1, ..., \frac{1}{\lambda_G} \otimes D_G\right)$$

$$\Phi\left(D_1, ..., D_G\right) = \lambda_1 D_1 \oplus ... \oplus \lambda_G D_G;$$

$$\Phi\left(D_1, ..., D_G\right) = D_0 \otimes D_1^{\lambda_1} \otimes ... \otimes D_G^{\lambda_G};$$

$$\Phi\left(D_1, ..., D_G\right) = $$

$$= \left(\lambda_1 \otimes D_1^{-\alpha} \oplus ... \oplus \lambda_G \otimes D_G^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Таким образом, при известных ресурсах, выделенных для выполнения работы, расположенной в определенной позиции можно вычислить маркеры времени $T(r_1, ..., r_L)$ и качества $K(r_1, ..., r_L)$. Будем предполагать, что данные функции $F(r_1, ..., r_L)$ зависящие от ресурсов $r_1, ..., r_L$ распределены по нор-мальному закону. Необходимо определить параметры соответствующего закона распределения, исходя из характеристик величин $r_1, ..., r_L$. Если заданы интервалы изменения величин $r_1, ..., r_L$:

$$((r_1^0 - \Delta r_1, r_1^0 + \Delta r_1), ..., (r_L^0 - \Delta r_L, r_L^0 + \Delta r_L)),$$

где $r_1^0, ..., r_L^0$ — средние значения анализируемых величин, тогда для получения диапазона изменения функции $F(r_1, ..., r_L)$ можно воспользоваться оценкой:

$$\Delta F \le \sum_{l=1}^{L} \left| \frac{\partial F\left(r_1^0, ..., r_L^0\right)}{\partial r_l} \right| \Delta r_L.$$

После нахождения диапазона изменения величины $F(r_1, ..., r_L)$:

$$\left(F\left(r_1^0, ..., r_L^0\right) - \Delta F, F\left(r_1^0, ..., r_L^0\right) + \Delta F\right),$$

можно воспользоваться правилом трех сигм и в качестве среднего квадратичного отклонения величины $F(r_1, ..., r_L)$ принять величину $\sigma_F = \frac{\Delta F}{3}$. Соответственно в качестве математического ожидания величины $F(r_1, ..., r_L)$ принимается $F(r_1^0, ..., r_L^0)$. При условии, что анализируемая величина $F(r_1, ..., r_L)$ распределена по нормальному закону, можно определить верхнюю F_u и нижнюю F_L границы изменения величины $F(r_1, ..., r_L)$ при определенном уровне значимости α.

Таким образом, время выполнения работы и качество выполнения работы являются случайными величинами, которые генерируются по закону распределения, характеристики которого описаны выше.

На основании алгоритма нахождения критического пути для исходного сетевого графа определяется критический путь, резервы времени для каждого события и резервы времени для каждой работы. Причем в алгоритме кратчайшего пути при оценке ранних времен наступления событий предлагается использовать верхнюю границу F_u, а при оценке поздних времен наступления событий — нижнюю границ F_L. Такой подход можно проинтерпретировать следующим образом. Рассматривается худший вариант реализации ранних времен и максимальная скорость достижения поздних времен. Ранний и поздний срок наступления событий будут использоваться для построения предикативных переходов.

Динамика рассматриваемой сети Петри формируется по следующим правилам. Когда маркер активности приходит в определенную позицию, генерируется значение нормально распределенной случайной величины $T(r_1, ..., r_L)$ — времени выполнения работы и нормально распределенной величины $K(r_1,...,r_L)$ — качества выполнения работы и начальный временной маркер становится равным реальному времени срабатывания входного перехода и в дальнейшем не изменяется, а маркер реального времени также становится равным реальному времени срабатывания входного перехода и в дальнейшем увеличивается в режиме реального времени.

Когда от нескольких позиций $I^I(t_j)$ идут дуги к переходу t_j, то переход срабатывает в том случае, если выполняются следующие предикативные условия:

1. Начальные временные маркеры $\tau(p_i)$ и маркеры реального времени $v(p_i)$ всех позиций из множества $I^I(t_j)$ удовлетворяют условию:

$$v(p_i)-\tau(p_i)\geq T(r_1,...,r_L),\forall p_i\in I^I(t_j);$$

2. $\max\limits_{p_i\in I^I(t_j)} v\left(p_i\right)\leq\gamma_n(t_j)$

3. $K(r_1,...,r_L)\geq K(p_i),\forall p_i\in I^I(t_j)$

или $\Phi(D_1,...,D_G)\leq d$, где $K(p_i)$ — пороговое значение качества для позиции $p_i\in I^I(t_j)$, d — пороговое значение трудности достижения целей по группе работ для позиций $p_i\in I^I(t_j)$.

С помощью имитационных механизмов предложенных сетей Петри можно оценить вероятность срабатывания различных переходов, а, следовательно, вероятность наступления различных событий проекта. Если вероятность несрабатывания переходов по условиям 2 или 3 будет высокой, выше некоторого порога, то возможно перераспределение ресурсов между работами. Перераспределение заключается в установлении новых плановых интервалов выделения ресурса:

$$\left(\left(r_1^0-\Delta r_1,r_1^0+\Delta r_1\right),...,\left(r_L^0-\Delta r_L,r_L^0+\Delta r_L\right)\right).$$

Ресурсы могут перераспределяться с работ, не лежащих на критическом пути на работы, лежащие на критическом пути. В рамках исследования не ставится задача автоматического определения данных изменений.

Рассмотрим еще один вариант работы с ресурсами в сетях Петри. Предположим, что распределение ресурсов между проектами осуществляется с из единого центра. Ресурсы делятся две группы, ресурсы которые возвращаются в центр после каждого использования и ресурсы которые изначально выделяются на каждую работу в отдельности, например финансовые ресурсы, материалы и т. д. Ресурсы, которые выделяются для каждой работы считаются известными изначально и детерминированными. По ресурсам, которые возвращаются в центр известны нижние границы, при которых может начаться работа в каждой определенной позиции $\underline{r_{hi}}$ и известна оптимальная величина ресурса на выполнение данной работы $\overline{r_{hi}}$). Если в центре есть оптимальная величина ресурса, то именно оптимальная величина этого ресурса забирается на выполнение работы в данной позиции.

Ресурсы, которые возвращаются в центр, предлагается моделировать с помощью сетей Петри. В сеть Петри добавляются еще несколько позиций, каждая из которых отвечает за ресурс, возвращаемый в центр после использования на определенной работе. Каждая позиция исходной сети моделируется в виде подсети вида приведенного на рис. 3.

Переход t_{j1} — это переход, который приводит в активное состояние позицию p_i. Позиция p_{i1} — это позиция, которая дублирует позицию p_i внутри подсети. Из позиции p_{i1} маркер активности мгновенно переходит к переходу t_{j2}. Позиции $p_{r_1},p_{r_2},...,p_{r_k}$ соответствуют позициям, осуществляющим управление перераспределяемыми ресурсами (общие для всех работ). Данный переход приходит в активное состояние, если становятся выполнены условия по всем ресурсам для позиции p_{r_1}. Количество каждого ресурса, необходимого для выполнения данной работы должно быть больше или равно некоторому минимальному количеству ресурсов $\underline{r_{hi}}$ необходимых для начала работы. При этом кратность дуг, ведущих от ресурсных потенциалов к анализируемому потенциалу t_{j2} равна $\min\left(r_h,\overline{r_{hi}}\right)$. Рассматриваемый переход приходит в активное состояние, если истинное значение принимает предикат:

$$r_h\geq\underline{r_{hi}},\ \forall h.$$

Кратность выходящих дуг из перехода t_{j2}, ведущих к ресурсным позициям совпадает с

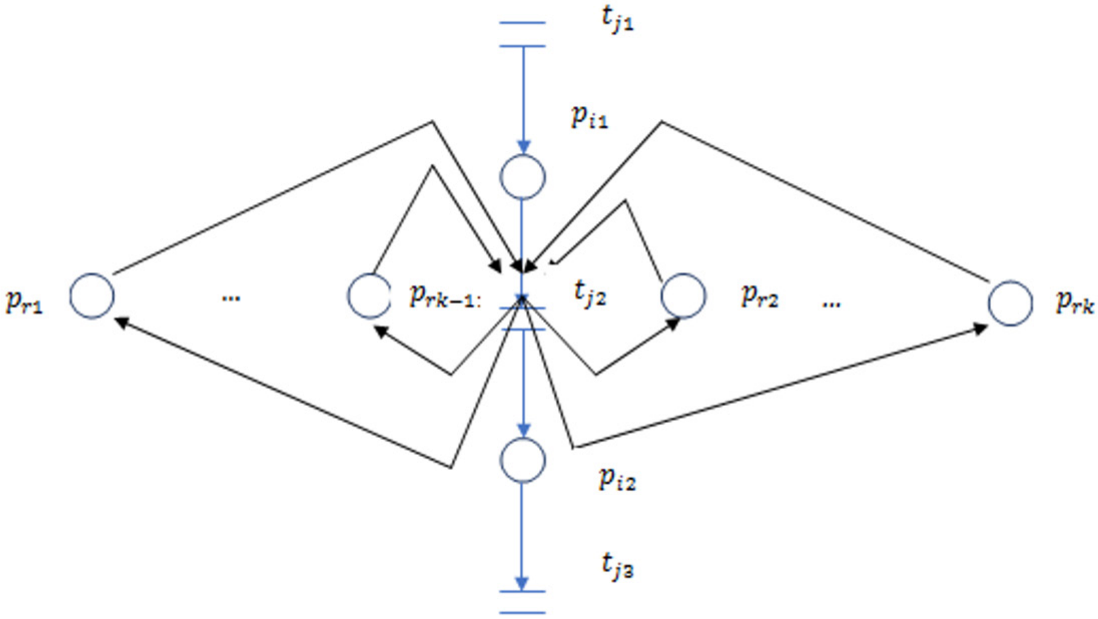

Рис.3. Представление позиции как подсети сети Петри
[Fig. 3. Representing a position as a subnet of a Petri net]

кратностью входящих дуг, весь ресурс, который был задействован при выполнении работы в позиции p_i возвращается назад. В позицию p_{i2} приходит маркер активности, маркер $T(r_1,...,r_L)$ — времени выполнения работы и маркер $K(r_1,...,r_L)$ качества выполнения работы. Процедура дальнейшего развития событий аналогична описанной выше процедуре для случая сети Петри со стохастическим распределением ресурсов. Имитационное моделирование по сети Петри с ресурсными позициями направлено в основном на оценку количества перераспределяемых ресурсов. При нахождении критического пути в данном случае для определения ранних скоков свершения событий используются оценки времени выполнения работ при минимальном количестве всех ресурсов, а для оценки поздних сроков — оценки времени выполнения работ при оптимальном количестве ресурсов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной работы предложено несколько вариантов сетей Петри для исследования задач календарного планирования. Применяются раскрашенные сети Петри с кратными дугами и предикативными переходами. Инструменты сетей Петри позволяют имитировать динамику поведение системы выполнения работ проекта при определенных процедурах или правилах распределения ресурсов системы, предназначенных для выполнения работ. Распределение ресурсов оказывает непосредственное влияние на время и качество выполнения работ, которые в свою очередь определяют возможность соблюдения директивных сроков проекта.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ищенко Н. И.* Информационно-аналитические модели проектов: сетевое планирование и управление (СПУ) (Начальный курс). – Москва, 2014.

2. *Chanas, S.* Critical path analysis in the network with fuzzy activity times / S. Chanas, P. Zielinski // Fuzzy Sets and Systems. – 2001. – 123. – P. 195–204.

3. *Fernandez, A. A.* Understanding simulation solutions to resource constrained project sched-

uling problems with stochastic task durations / A. A. Fernandez, R. L. Armacost, J. J. Pet-Edwards // Engineering Management Journal. – 1998, December. – 10 (4). – P. 5–1.

4. *Hulett, D.* Project schedule risk analysis: Monte Carlo Simulation or PERT? – 2000.

5. *Иванченко А. И.* Оценка качества контроля в задачах управления организационными системами / А. И. Иванченко, И. Б. Руссман // Стандарты и качество. – 2003.– № 9. – С. 88–90.

6. *Питерсон, Дж.* Теория сетей Петри и моделирование систем. – М. : Мир, 1984. – 264 с.

7. *Руссман, И. Б.* О проблеме оценки качества / И. Б. Руссман, М. А. Бермант // Экономика и математические методы. – 1978. – Т. XIV, вып. 4.

8. *Руссман, И. Б.* Непрерывный контроль процесса достижения цели. / И. Б. Руссман, А. А. Гайдай // Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН. Управление большими системами. Выпуск 7. – Москва, 2004. – С. 106–113.

Азарнова Татьяна Васильевна – д-р тех. наук, проф., заведующий кафедрой математических методов исследования операций Воронежского государственного университета, author ID 6504085644, V-3166-2019.
E-mail: ivdas92@mail
https://orcid.org/0000-0001-6342-9355

Белошицкий Андрей Александрович – офицер ВС РФ, старший помощник оперативного дежурного пункта управления Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»
E-mail: aquarius_vrn@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-7811-6423

DOI: https://doi.org/10.17308/sait.2020.3/3038 ISSN 1995-5499
Received 18.09.2020
Accepted 30.09.2020

ANALYSIS OF PETRI NET BASED SCHEDULING MODELS

© 2020 T. V. Azarnova✉[1], A. A. Beloshitsky[2]

[1]Voronezh State University
1, Universitetskaya Square, 394018 Voronezh, Russian Federation
[2]Zhukovsky and Gagarin Air Force Military Academic Centre
54 «A», Old Bolsheviks Street, 394064 Voronezh, Russian Federation

Annotation. Scheduling based on specialised scheduling models is one of the main stages of project management. It allows setting deadlines, budgeting, optimising resource allocation, identifying risks, implementing proactive risk management, and improving quality performance. This article discusses interrelated projects represented by scheduling network models. It also proposes mechanisms to study scheduling network models when some parameters of work are stochastic. The mechanisms developed within the study involve the analysis of critical paths of scheduling graphs with the help of coloured Petri nets with predicate transitions and specific markings represented by functions of random variables. Petri nets tools allow building models to describe project dynamics and to simulate the execution of jobs within the project schedule un-

✉ Azarnova Tatyana V.
e-mail: ivdas92@mail

der certain restrictions or resource allocation rules. The resources allocated for jobs are assumed to be random variables, while time and the quality are functions of these random variables. Each job resource has sets value ranges, which, under certain assumptions about the distribution law, allow obtaining characteristics of the resources and their functions as random variables. The results of the simulation modelling are used to estimate time parameters of the project events and jobs and the possibility of completing the project within the deadline. The paper examines two ways to distribute project resources. The first model does not take into account the competition between jobs for the resources. According to the second model, the resources are distributed dynamically from a single centre. As a result, the random nature of job execution can cause a shortage of resources.
Keywords: scheduling, network graphs, Petri nets, resource allocation between project jobs.

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

REFERENCES

1. *Ishchenko N. I.* Information and analytical models of projects: network planning and management (SPM) (Initial course). Moscow, 2014.

2. *Chanas S. and P. Zielinski.* Critical path analysis in the network with fuzzy activity times. Fuzzy Sets and Systems. 2001. 123. P. 195–204.

3. *Fernandez A. A., Armacost R. L. and Pet-Edwards J. J.* Understanding simulation solutions to resource constrained project scheduling problems with stochastic task durations. Engineering Management Journal. 1998, December. 10 (4). P. 5–1.

4. *Hulett D.* Project schedule risk analysis: Monte Carlo Simulation or PERT? 2000.

5. *Ivanchenko A. I., Russman I. B.* Assessment of the quality of control in the tasks of managing organizational systems. Standards and quality. 2003. No 9. P. 88–90.

6. *Peterson J.* The theory of Petri nets and system modeling. Moscow : Mir, 1984. 264 p.

7. *Russman I. B., Bermant M. A.* On the problem of quality assessment. Economics and Mathematical Methods. T. XIV, No. 4. 1978.

8. *Russman I. B., Gaidai A. A.* Continuous monitoring of the process of achieving the goal. Institute for Management Problems. V. A. Trapeznikov RAS. Management of large systems. Issue 7. Moscow, 2004. P. 106–113.

Azarnova Tatyana V. — DSc in Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Mathematical Methods of Operations Research, Voronezh State University, author's ID 6504085644, V-3166-2019.
E-mail: ivdas92 @ mail
https://orcid.org/0000-0001-6342-9355

Beloshitskiy Andrey A. — officer of the Armed Forces of the Russian Federation, senior assistant of the operational control centre of the Air Force Military Educational and Scientific Centre “Zhukovsky and Gagarin Air Force Military Academic Centre”
E-mail: aquarius_vrn@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-7811-6423