

УДК 621.39+004.7

Верификация вычислительных решеток с особыми краевыми условиями бесконечными сетями Петри

Зайцев Д.А.

Международный гуманитарный университет, Украина

e-mail: zsoftua@yahoo.com

получена 19 ноября 2012

Ключевые слова: вычислительная решетка, бесконечная сеть Петри, инвариант, ограниченность, консервативность, живость

Представлена методика верификации вычислительных решеток с помощью нахождения инвариантов бесконечных сетей Петри. Построены модели структур квадратных решеток в форме параметрических сетей Петри для таких краевых условий, как соединение краев и усеченные устройства. По параметрическим сетям Петри построены бесконечные системы линейных алгебраических уравнений для вычисления r -инвариантов и получены их параметрические решения. R -инвариантные сети Петри являются структурно консервативными и ограниченными, что, вместе с живостью, является свойствами моделей идеальных систем. Исследование живости модели на основе анализа сифонов и ловушек может быть выполнено с помощью r -инвариантов модифицированных сетей.

1. Введение

Вычисления на решетках [1] позволяют существенно расширить множество задач, решаемых за приемлемое время, что в некоторых случаях является отправной точкой для развития новых технологий. Стоимость вычислений на суперкомпьютерах слишком высока, что делает высокой стоимость ошибок, как в протоколах, так и в их аппаратной и программной реализации. Сети Петри [2]–[4] являются перспективным инструментарием для верификации вычислительных решеток и кластеров.

Верификация в широком смысле подразумевает проверку выполнимости произвольных формул, заданных в исчислении предикатов либо некоторой специальной логике, на множестве состояний системы. Для моделей систем, представленных в форме сетей Петри, сформулированы основные идеальные свойства [5, 6]: живость, ограниченность, консервативность, которые известны в литературе под аббревиатурой LBS. Верификация систем, модели которых представлены в форме сетей Петри, как правило, сводится к нахождению указанных свойств; в случае отсутствия некоторых свойств разрабатываются соответствующие методы модификации модели (и

спецификаций системы). Например, наличие тупиков является основной причиной отсутствия живости, и соответствующие методы носят название форсирования живости [7]. Известным инструментом LBS анализа являются инварианты переходов и позиций сетей Петри [2]-[4].

Так как требуется получение результатов в форме, применимой к решеткам любого размера, бесконечные сети Петри с регулярной структурой вовлечены в процесс верификации [8]-[11]; прогресс в исследованиях индицируется размерностью и формой изученных структур: линейные [8], древовидные [9], квадратные [10] и гиперкуб [11]. В работах [10, 11] в качестве единственного типа краевых условий, за исключением открытых границ, использовано устройство-заглушка, которое может рассматриваться как примитивная модель некоторого терминального устройства (компьютера).

Реальные вычисления на решетках тесно связаны с численными методами решения дифференциальных и интегральных уравнений, а также их систем на поверхности и в пространстве. Следовательно, требуется дальнейшее изучение реалистичных краевых условий решеток. Настоящая работа фокусируется на двух дополнительных типах краевых условий: соединении краев и усеченных устройствах, которые изучаются на моделях квадратных решеток.

Целью работы является развитие методики анализа бесконечных сетей Петри с регулярной структурой для верификации вычислительных решеток на примере построения инвариантов позиций в параметрической форме. Аналогичным образом по двойственному параметрическому описанию модели [12] могут быть получены инварианты переходов. Инварианты позиций модифицированных сетей используются при построении сифонов и ловушек сетей Петри [13] для дальнейшего нахождения тупиков и форсирования живости [7].

2. Обзор методов анализа плоских решеток бесконечными сетями Петри

Вычислительные решетки представляют собою распределенные вычисления, перенесенные на следующий эволюционный уровень с целью создания простого и мощного самоуправляемого виртуального компьютера из набора связанных гетерогенных устройств, разделяющих различные комбинации ресурсов [1]; как правило, решетка характеризуется регулярными соединениями устройств, физическими либо виртуальными, образующими определенную структуру.

Сеть Петри [2, 4] – это двудольный ориентированный граф, на котором введен динамический процесс. Одну долю вершин составляют позиции, изображаемые окружностями, вторую долю – переходы, изображаемые прямоугольниками; в общем случае дуги сети могут быть кратными. Динамические элементы – фишки, изображаемые точками, – находятся внутри позиций и перемещаются в сети в результате срабатывания переходов.

Сеть ограничена, если количество фишек в каждой ее позиции не превышает некоторой заданной константы; сеть (слабо) консервативна, если ее (взвешенная) сумма фишек остается постоянной; сеть жива, если в любом допустимом состоянии

для любого ее перехода разрешена последовательность срабатывания, содержащая этот переход.

Для сети Петри без петель однозначным представлением ее графа является матрица инцидентности C . Целый неотрицательный вектор \bar{x} (\bar{y}), являющийся решением уравнения $\bar{x} \cdot C = 0$ ($C \cdot \bar{y} = 0$), называют инвариантом позиций (переходов) сети Петри либо р- (t-) инвариантом соответственно. Сеть Петри называют инвариантной, если существует соответствующий вектор со всеми натуральными компонентами.

Достаточно полным и кратким обзором классических результатов теории конечных сетей Петри являются [2, 4]; методы вычисления инвариантов описаны в [3]; инструментарий для графического ввода сетей Петри и анализа их основных свойств представлен в системе Tina [14].

В [9]–[11] построена модель типового устройства в форме сети Петри для композиции деревьев и решеток; основное внимание уделено коммуникационным аспектам работы устройства. Количество портов устройства np рассматривается в качестве параметра, что позволяет получить параметрическое описание устройства (1). Устройство работает в полнодуплексном режиме с обязательной буферизацией пакетов.

$$\left(\left((to_u : pb_u, pol_u \rightarrow po_u, pbl), (ti_{u,v} : pi_u, pbl \rightarrow pb_v, pil_u), v = \overline{1, np}, v \neq u \right), u = \overline{1, np} \right) \quad (1)$$

В описании перехода перечисляются его входные позиции перед символом стрелки " \rightarrow ", затем – выходные позиции; в случае кратных дуг, кратность указывается после имени позиции через символ " $*$ " (в настоящей работе кратные дуги не используются). Позиции модели имеют следующее назначение: pi_u – буфер входного канала порта u , pil_u – размер буфера входного канала порта u , po_u – буфер выходного канала порта u , pol_u – размер буфера выходного канала порта u , pb_u – секция внутреннего буфера для хранения пакетов направленных в порт u , pbl – размер внутреннего буфера. Размеры буферов измеряются в количестве пакетов; как правило, буферы каналов портов имеют размер, равный единице. Переходы модели выполняют следующие действия: to_u – переместить пакет из внутреннего буфера в выходной буфер порта u , $ti_{u,v}$ – направить пакет из входного буфера порта u в секцию внутреннего буфера порта v ; запрещено направление пакетов в порт прибытия. Контактные позиции pi_u , pil_u , po_u , pol_u служат для композиции решетки; пара верхних индексов (i, j) специфицирует положение устройства $R^{i,j}$, а также его элементов, в решетке.

Устройства с 3, 4 и 6 портами (рис. 1) являются узлами в композиции треугольных, прямоугольных и шестиугольных решеток (рис. 2). Также они могут быть использованы в композиции древовидных структур [9].

Композиция выполняется посредством совмещения (слияния) контактных позиций соседних узлов, которые соответствуют входным и выходным каналам портов, расположенных на сторонах многоугольников (рис. 2б). Результирующая сеть Петри представлена в параметрической форме с параметром, задающим размер решетки.

В работах [8]–[11] представлены три группы методов анализа решеток:

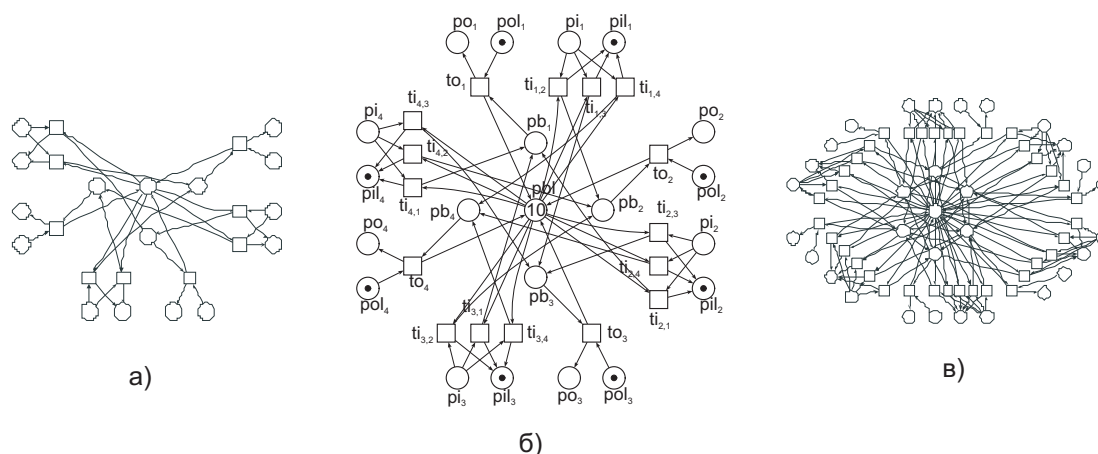


Рис. 1. Модели устройств: а) треугольное, б) квадратное, в) шестиугольное

- посредством решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений для поиска p - и t -инвариантов сетей Петри;
- посредством явного построения циклических последовательностей запуска переходов;
- посредством вспомогательных графов передач пакетов и возможных блокировок устройств.

Решение бесконечных систем линейных алгебраических уравнений дает p - и t -инварианты модели решетки в параметрической форме, что позволяет затем доказать инвариантность модели для решеток произвольного размера.

Поскольку модели решеток получены в результате композиции моделей узлов (1) посредством наложения позиций, каждый из переходов сети Петри имеет ровно две входные и две выходные позиции. Таким образом, сеть является структурно консервативной, что используется для проверки полученных параметрических решений инвариантов позиций.

Представленная методика может быть применена для вычисления инвариантов переходов по двойственному параметрическому описанию сети [12], а также для поиска тупиков [13]. В методах поиска тупиков [7] используются сифоны и ловушки сети Петри. Базисное множество сифонов [2] получают как множество суппортов инвариантов позиций модифицированной сети Петри [13], в которой количества входных и выходных позиций переходов могут не совпадать.

Явное построение циклических последовательностей запуска переходов позволяет доказать t -инвариантность (согласованность) без решения бесконечных систем уравнений; циклы также представлены в параметрической форме.

Графы передач и возможных блокировок устройств раскрывают тупики трех видов: цикл блокировок, изоляция, цепь блокировок с концом на ранее блокированном устройстве. Было показано, что тупики могут быть вызваны злонамеренным трафиком, что ведет к существенному падению производительности сети (решетки).

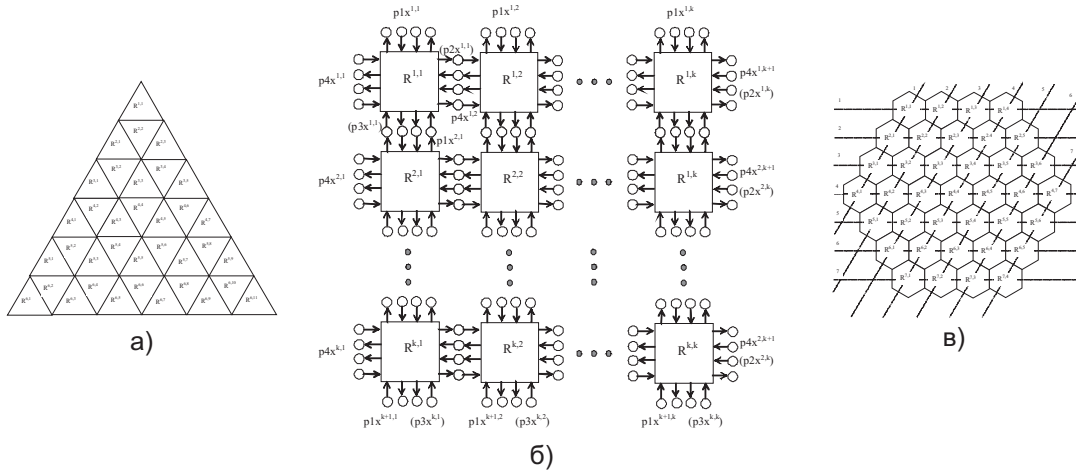


Рис. 2. Композиция структур решеток: а) треугольная, б) квадратная, в) шестиугольная

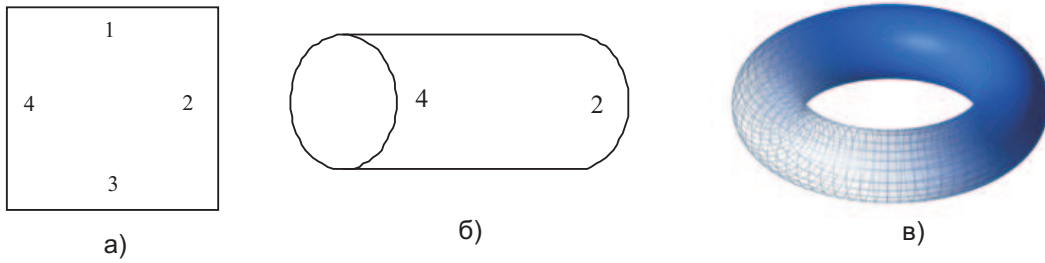


Рис. 3. Тор как результат соединения противоположных краев квадратной решетки: а) открытая сеть; б) соединение краев 1, 3; в) соединение краев 2, 4

3. Соединение (противоположных) краев решетки

Соединение краев решетки дает достаточно интересные структуры, приводящие к получению различных поверхностей. В квадратной решетке соединение противоположных краев приводит к получению поверхности тора (рис. 3). Заметим, что тор широко используется в приложениях, в частности, в ускорителях частиц, системах управляемой термоядерной реакции.

Параметрическое описание решетки представлено выражениями (2) и обозначено КРСК_k (квадратная решетка, соединение краев); при построении (2) использовано параметрическое описание устройства (1) при $np = 4$. Композиция решетки использует только имена левых и верхних портов (4 и 1 соответственно), поэтому контактные позиции с номерами портов 2 и 3 не присутствуют в (2). Например, переходы третьего порта вместо очевидного $to_3^{i,j} : pol_3^{i,j}, pb_3^{i,j} \rightarrow po_3^{i,j}, pbl^{i,j}$ описаны как $to_3^{i,j} : pil_1^{i+1,j}, pb_3^{i,j} \rightarrow pi_1^{i+1,j}, pbl^{i,j}$.

Описания для портов правой и нижней границ ($i = k, j = k$) размещены внизу (2) и соответствующие переходы используют контактные позиции противоположной границы ($i = 1, j = 1$ соответственно). Таким образом, первые восемь

строк (2) представляют собою описание открытой решетки размера $k - 1$, а последние четыре строки описывают замыкание нижнего края на верхний (для порта 3) и правого края на левый (для порта 2). Например, на правой границе вместо $to_2^{i,j} : pil_4^{i,j+1}, pb_2^{i,j} \rightarrow pi_4^{i,j+1}, pbl^{i,j}$ использовано описание $to_2^{i,k} : pil_4^{i,1}, pb_2^{i,k} \rightarrow pi_4^{i,1}, pbl^{i,k}$. В (2) все входные переходы $ti_{u,v}^{i,j}$ одного порта u сгруппированы в единственную строку с помощью внутреннего параметра $v = \overline{1, 4}$.

$$\left(\left(\begin{array}{l} (to_1^{i,j} : pol_1^{i,j}, pb_1^{i,j} \rightarrow po_1^{i,j}, pbl^{i,j}), \\ (ti_{1,v}^{i,j} : pi_1^{i,j}, pbl^{i,j} \rightarrow pil_1^{i,j}, pb_v^{i,j}), v = \overline{1, 4}, v \neq 1, \\ (to_3^{i,j} : pil_1^{i+1,j}, pb_3^{i,j} \rightarrow pi_1^{i+1,j}, pbl^{i,j}), i \neq k, \\ (ti_{3,v}^{i,j} : po_1^{i+1,j}, pbl^{i,j} \rightarrow pol_1^{i+1,j}, pb_v^{i,j}), i \neq k, v = \overline{1, 4}, v \neq 3, \\ (to_4^{i,j} : pol_4^{i,j}, pb_4^{i,j} \rightarrow po_4^{i,j}, pbl^{i,j}), \\ (ti_{4,v}^{i,j} : pi_4^{i,j}, pbl^{i,j} \rightarrow pil_4^{i,j}, pb_v^{i,j}), v = \overline{1, 4}, v \neq 4, \\ (to_2^{i,j} : pil_4^{i,j+1}, pb_2^{i,j} \rightarrow pi_4^{i,j+1}, pbl^{i,j}), j \neq k, \\ (ti_{2,v}^{i,j} : po_4^{i,j+1}, pbl^{i,j} \rightarrow pol_4^{i,j+1}, pb_v^{i,j}), j \neq k, v = \overline{1, 4}, v \neq 2, \\ (to_3^{k,j} : pil_1^{1,j}, pb_3^{k,j} \rightarrow pi_1^{1,j}, pbl^{k,j}), \\ (ti_{3,v}^{k,j} : po_1^{1,j}, pbl^{k,j} \rightarrow pol_1^{1,j}, pb_v^{k,j}), v = \overline{1, 4}, v \neq 3, \\ (to_2^{i,k} : pil_4^{i,1}, pb_2^{i,k} \rightarrow pi_4^{i,1}, pbl^{i,k}), \\ (ti_{2,v}^{i,k} : po_4^{i,1}, pbl^{i,k} \rightarrow pol_4^{i,1}, pb_v^{i,k}), v = \overline{1, 4}, v \neq 2 \end{array} \right) \right), i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k} \quad (2)$$

Бесконечная система (3) для вычисления р-инвариантов [9]–[11] выводится непосредственно из (2). Неизвестные традиционно обозначены как x с суффиксом, соответствующим именам позиций. Уравнения соответствуют переходам и представляют собою баланс входящих и исходящих дуг (позиций). Например, по параметрическому описанию $(to_3^{i,j} : pil_1^{i+1,j}, pb_3^{i,j} \rightarrow pi_1^{i+1,j}, pbl^{i,j}), i \neq k$ получаем параметрическое уравнение $(-xpi_1^{i+1,j} - xpb_3^{i,j} + xpi_1^{i+1,j} + xpb_3^{i,j} = 0), i \neq k$.

$$\left(\left(\begin{array}{l} -xpol_1^{i,j} - xpb_1^{i,j} + xpo_1^{i,j} + xpb_1^{i,j} = 0 \\ -xpi_1^{i,j} - xpb_1^{i,j} + xpi_1^{i,j} + xpb_v^{i,j} = 0, v = \overline{1, 4}, v \neq 1, \\ -xpi_1^{i+1,j} - xpb_3^{i,j} + xpi_1^{i+1,j} + xpb_3^{i,j} = 0, i \neq k, \\ -xpo_1^{i+1,j} - xpb_1^{i,j} + xpo_1^{i+1,j} + xpb_v^{i,j} = 0, i \neq k, v = \overline{1, 4}, v \neq 3, \\ -xpol_4^{i,j} - xpb_4^{i,j} + xpo_4^{i,j} + xpb_4^{i,j} = 0, \\ -xpi_4^{i,j} - xpb_4^{i,j} + xpi_4^{i,j} + xpb_v^{i,j} = 0, v = \overline{1, 4}, v \neq 4, \\ -xpi_4^{i,j+1} - xpb_2^{i,j} + xpi_4^{i,j+1} + xpb_2^{i,j} = 0, j \neq k, \\ -xpo_4^{i,j+1} - xpb_1^{i,j} + xpo_4^{i,j+1} + xpb_v^{i,j} = 0, j \neq k, v = \overline{1, 4}, v \neq 2, \\ -xpi_1^{1,j} - xpb_3^{k,j} + xpi_1^{1,j} + xpb_3^{k,j} = 0, \\ -xpo_1^{1,j} - xpb_3^{k,j} + xpo_1^{1,j} + xpb_v^{k,j} = 0, v = \overline{1, 4}, v \neq 3, \\ -xpi_4^{i,1} - xpb_2^{i,k} + xpi_4^{i,1} + xpb_2^{i,k} = 0, \\ -xpo_4^{i,1} - xpb_1^{i,k} + xpo_4^{i,1} + xpb_v^{i,k} = 0, v = \overline{1, 4}, v \neq 2 \end{array} \right) \right), i, j = \overline{1, k} \quad (3)$$

Построение системы для вычисления t-инвариантов является более сложным, так как параметрическое описание (2) перечисляет переходы с инцидентными им

позициями. Требуется альтернативное описание решетки, которое перечисляет позиции с инцидентными им переходами [12].

Полученное параметрическое решение системы (3) для r -инвариантов сети (2) имеет вид (4). Каждое решение перечисляет имена позиций ненулевых компонентов и их значения; так как все ненулевые компоненты решения (4) равны единице, их значения не указаны.

Заметим, что (4) содержит 7 параметрических решений; решения 1-4 перечисляют контактные позиции верхнего (номер 1) и левого (номер 4) портов. Решение 5 перечисляет внутренние позиции устройств. В отличие от решений 1-5, которые задают множества строк с фиксированным числом ненулевых (единичных) компонентов, каждое из решений 6, 7 задает единственную строку с множеством ненулевых (единичных) компонентов.

$$\left(\begin{array}{l} (pi_1^{i,j}, pil_1^{i,j}), i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k}; \\ (po_1^{i,j}, pol_1^{i,j}), i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k}; \\ (pi_4^{i,j}, pil_4^{i,j}), i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k}; \\ (po_4^{i,j}, pol_4^{i,j}), i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k}; \\ (pb_1^{i,j}, pb_2^{i,j}, pb_3^{i,j}, pb_4^{i,j}, pbl^{i,j}), i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k}; \\ ((pil_1^{i,j}, pol_1^{i,j}, pil_4^{i,j}, pol_4^{i,j}, pbl^{i,j}), i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k};) \\ ((pi_1^{i,j}, po_1^{i,j}, pi_4^{i,j}, po_4^{i,j}, (pb_u^{i,j}), u = \overline{1, 4};)) i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k};) \end{array} \right) \quad (4)$$

Теорема 1. Параметрическая матрица (4) задает решения системы (3), являющиеся r -инвариантами сети (2).

Доказательство. Подставим каждое параметрическое решение (4) в каждое параметрическое уравнение (3) и получим верное равенство. Например, подставим первое из решений (4) в каждое уравнение (3).

Вектор, обозначенный как $(pi_1^{i,j}, pil_1^{i,j})$, содержит единицы в компонентах $pi_1^{i,j}$, $pil_1^{i,j}$ и нули в остальных компонентах. Переменные $pi_1^{i,j}$, $pil_1^{i,j}$ присутствуют только в уравнениях 2, 3, 7:

$$\begin{aligned} -xpi_1^{i,j} - xpb_l^{i,j} + xpil_1^{i,j} + xpb_v^{i,j} &= 0, \\ -xpil_1^{i+1,j} - xpb_3^{i,j} + xpi_1^{i+1,j} + xpb_l^{i,j} &= 0, \\ -xpil_4^{i,j+1} - xpb_2^{i,j} + xpi_4^{i,j+1} + xpb_l^{i,j} &= 0. \end{aligned}$$

Для них получим $-1 - 0 + 1 + 0 = 0$ и далее $0 = 0$. Для остальных уравнений (3) сразу получим $0 = 0$, потому что $pi_1^{i,j}, pil_1^{i,j}$ не присутствуют в этих уравнениях, а значения остальных переменных равны нулю. Аналогичным образом проверим все 7×12 комбинаций. \square

Следствие 1. Сеть Петри $KPCK_k$ является r -инвариантной сетью при любом натуральном k .

Доказательство. Имеется r -инвариант со всеми натуральными компонентами, например, сумма решений 6 и 7

$$\begin{aligned} &((pil_1^{i,j}, pol_1^{i,j}, pil_4^{i,j}, pol_4^{i,j}, pbl^{i,j}), i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k};) \\ &((pi_1^{i,j}, po_1^{i,j}, pi_4^{i,j}, po_4^{i,j}, (pb_u^{i,j}), u = \overline{1, 4};)) i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k};) \end{aligned}$$

перечисляет все позиции модели; контактные позиции с индексами $k + 1$ отсутствуют, так как они совмещены с позициями, имеющими единичный индекс. Кроме

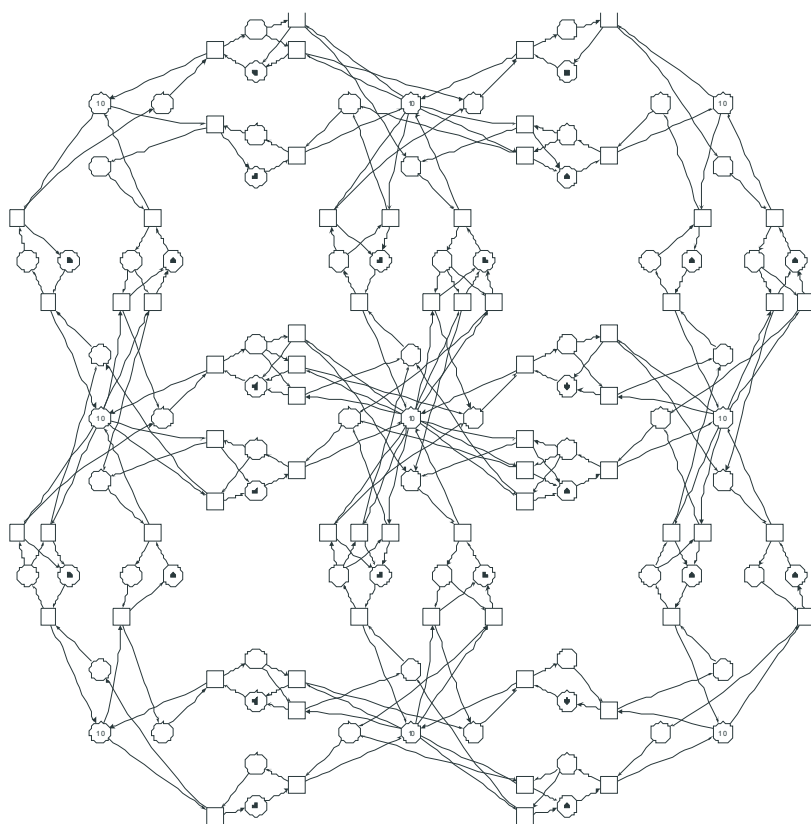


Рис. 4. Пример модели квадратной решетки размера 3 с усеченными устройствами на границах (КРУУ₃)

того, так как все компоненты построенного инварианта равны единице, сеть является строго консервативной и сохраняет общую сумму фишек. \square

Пример инварианта для решетки размера 4, сгенерированного по параметрическому описанию (4), приведен в Приложении; он совпадает с инвариантом, построенным с помощью моделирующей системы Tina [14], что подтверждает правильность полученных результатов.

4. Усеченные устройства на краях

Концепция усеченного устройства состоит в удалении всех висячих портов на краях решетки, включая их контактные позиции, инцидентные им переходы и соответствующие секции внутреннего буфера, а также переходы входных каналов других портов, связанные с удаляемой секцией. Таким образом, при удалении порта u текущего устройства удаляются все переходы и позиции, содержащие индекс u в качестве как первого, так и второго нижнего индекса. Пример квадратной решетки размера 3 показан на рис. 4, где только центральное устройство совпадает с рис. 1б, а граничные устройства усечены: по два порта удалены для угловых устройств и по одному порту для устройств, расположенных на сторонах.

Имеется восемь типов усеченных устройств $R^{i,j}$ в зависимости от их положения: левое ($j = 1, i \neq 1, i \neq k$) – без портов 4; левое-верхнее ($i = 1, j = 1$) – без портов 4, 1; верхнее ($i = 1, j \neq 1, j \neq k$) – без портов 1; правое-верхнее ($i = 1, j = k$) – без портов 1, 2; правое ($j = k, i \neq 1, i \neq k$) – без портов 2; правое-нижнее ($i = k, j = k$) – без портов 2, 3; нижнее ($i = k, j \neq 1, j \neq k$) – без портов 3; левое-нижнее ($i = k, j = 1$) – без портов 3, 4.

Для композиции квадратной решетки (5) использовано параметрическое описание устройства (1) при $np = 4$; полученная модель в форме сети Петри обозначена как КРУУ_k (квадратная решетка, усеченное устройство). Порты на границах усечены, включая все их позиции и переходы, посредством дополнительных ограничений для индексов определенных портов: $i \neq 1$ для порта 1, $i \neq k$ для порта 3, $j \neq 1$ для порта 4, $j \neq k$ для порта 2. Кроме того, некоторые из входных переходов $ti_{u,v}^{i,j}$ усечены для v , совпадающих с номерами отсутствующих портов; соответствующие переходы присутствуют при: $i > 1$ для $v = 1$, $j < k$ для $v = 2$, $i < k$ для $v = 3$, $j > 1$ для $v = 4$.

$$\left(\left(\begin{array}{l} (to_1^{i,j} : pol_1^{i,j}, pbl_1^{i,j} \rightarrow po_1^{i,j}, pbl^{i,j}), i \neq 1; \\ (ti_{1,2}^{i,j} : pi_1^{i,j}, pbl^{i,j} \rightarrow pil_1^{i,j}, pb_2^{i,j}), i \neq 1, j < k; \\ (ti_{1,3}^{i,j} : pi_1^{i,j}, pbl^{i,j} \rightarrow pil_1^{i,j}, pb_3^{i,j}), i \neq 1, i < k; \\ (ti_{1,4}^{i,j} : pi_1^{i,j}, pbl^{i,j} \rightarrow pil_1^{i,j}, pb_4^{i,j}), i \neq 1, j > 1; \\ (to_3^{i,j} : pil_1^{i+1,j}, pb_3^{i,j} \rightarrow pi_1^{i+1,j}, pbl^{i,j}), i \neq k; \\ (ti_{3,1}^{i,j} : po_1^{i+1,j}, pbl^{i,j} \rightarrow pol_1^{i+1,j}, pb_1^{i,j}), i \neq k, i > 1; \\ (ti_{3,2}^{i,j} : po_1^{i+1,j}, pbl^{i,j} \rightarrow pol_1^{i+1,j}, pb_2^{i,j}), i \neq k, j < k; \\ (ti_{3,4}^{i,j} : po_1^{i+1,j}, pbl^{i,j} \rightarrow pol_1^{i+1,j}, pb_4^{i,j}), i \neq k, j > 1; \\ (to_4^{i,j} : pol_4^{i,j}, pb_4^{i,j} \rightarrow po_4^{i,j}, pbl^{i,j}), j \neq 1; \\ (ti_{4,1}^{i,j} : pi_4^{i,j}, pbl^{i,j} \rightarrow pil_4^{i,j}, pb_1^{i,j}), j \neq 1, i > 1; \\ (ti_{4,2}^{i,j} : pi_4^{i,j}, pbl^{i,j} \rightarrow pil_4^{i,j}, pb_2^{i,j}), j \neq 1, j < k; \\ (ti_{4,3}^{i,j} : pi_4^{i,j}, pbl^{i,j} \rightarrow pil_4^{i,j}, pb_3^{i,j}), j \neq 1, i < k; \\ (to_2^{i,j} : pil_4^{i,j+1}, pb_2^{i,j} \rightarrow pi_4^{i,j+1}, pbl^{i,j}), j \neq k; \\ (ti_{2,1}^{i,j} : po_4^{i,j+1}, pbl^{i,j} \rightarrow pol_4^{i,j+1}, pb_1^{i,j}), j \neq k, i > 1; \\ (ti_{2,3}^{i,j} : po_4^{i,j+1}, pbl^{i,j} \rightarrow pol_4^{i,j+1}, pb_3^{i,j}), j \neq k, i < k; \\ (ti_{2,4}^{i,j} : po_4^{i,j+1}, pbl^{i,j} \rightarrow pol_4^{i,j+1}, pb_4^{i,j}), j \neq k, j > 1; \end{array} \right) \right), i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k} \quad (5)$$

Полученное параметрическое решение для р-инвариантов модели (5) имеет вид (6). Заметим, что (6) содержит 15 решений, 11 из которых параметрические. Решения 4–8 содержат определенные индексы углов решетки и не имеют параметров. Решения 9–12 перечисляют позиции граничных устройств для верхней, правой, левой и нижней границ (за исключением углов) соответственно. Решение 13 перечисляет позиции внутренних устройств. В отличие от решений 1–13, которые задают множества строк с фиксированным числом ненулевых (единичных) компонентов, каждое из решений 14, 15 задает единственную строку с множеством ненулевых (единичных) компонентов.

$$\left(\begin{array}{l}
 (pi_1^{i,j}, pil_1^{i,j}), i = \overline{2, k}, j = \overline{1, k}; \\
 (po_1^{i,j}, pol_1^{i,j}), i = \overline{2, k}, j = \overline{1, k}; \\
 (pi_4^{i,j}, pil_4^{i,j}), i = \overline{1, k}, j = \overline{2, k}; \\
 (po_4^{i,j}, pol_4^{i,j}), i = \overline{1, k}, j = \overline{2, k}; \\
 (pb_2^{1,1}, pb_3^{1,1}, pbl^{1,1}) \\
 (pb_3^{1,k}, pb_4^{1,k}, pbl^{1,k}) \\
 (pb_1^{k,1}, pb_2^{k,1}, pbl^{k,1}) \\
 (pb_1^{k,k}, pb_4^{k,k}, pbl^{k,k}) \\
 (pb_1^{i,1}, pb_2^{i,1}, pb_3^{i,1}, pbl^{i,1}), i = \overline{2, k-1}; \\
 (pb_1^{i,k}, pb_3^{i,k}, pb_4^{i,k}, pbl^{i,k}), i = \overline{2, k-1}; \\
 (pb_1^{1,j}, pb_2^{1,j}, pb_3^{1,j}, pbl^{1,j}), j = \overline{2, k-1}; \\
 (pb_1^{k,j}, pb_3^{k,j}, pb_4^{k,j}, pbl^{k,j}), j = \overline{2, k-1}; \\
 (pb_1^{i,j}, pb_2^{i,j}, pb_3^{i,j}, pb_4^{i,j}, pbl^{i,j}), i = \overline{2, k-1}, j = \overline{2, k-1}; \\
 ((pi_1^{i,j}, pol_1^{i,j}), i = \overline{2, k}, j = \overline{1, k}; (pil_4^{i,j}, pol_4^{i,j}), i = \overline{1, k}, j = \overline{2, k}; \\
 (pbl^{i,j}), i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k};) \\
 ((pi_1^{i,j}, po_1^{i,j}), i = \overline{2, k}, j = \overline{1, k}; (pi_4^{i,j}, po_4^{i,j}), i = \overline{1, k}, j = \overline{2, k}; \\
 (pb_1^{i,j}), i = \overline{2, k}, j = \overline{1, k}; (pb_2^{i,j}), i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k-1}; \\
 (pb_3^{i,j}), i = \overline{1, k-1}, j = \overline{1, k}; (pb_4^{i,j}), i = \overline{1, k}, j = \overline{2, k};)
 \end{array} \right) \quad (6)$$

Теорема 2. Параметрическая матрица (6) задает p -инварианты сети (5).

Следствие 2. Сеть Петри $KPYU_k$ является p -инвариантной сетью при любом натуральном k .

Техника доказательства аналогична использованной для теоремы 1 и следствия 1: для теоремы 2 – подстановка каждого параметрического решения в каждое параметрическое уравнение; для следствия 2 – построение инварианта со всеми натуральными компонентами, например суммы решений 14 и 15.

5. Выводы

Получено параметрическое описание инвариантов позиций моделей квадратных решеток в форме сетей Петри для краевых условий соединения краев и усеченного устройства. Представленная методика построения инвариантов может быть применена для получения параметрического описания инвариантов переходов [12], композиционного поиска сифонов и ловушек в целях нахождения тупиков и форсирования живости модели [13]. Таким образом, обеспечена возможность LBS анализа бесконечных сетей – основного инструмента верификации систем, модели которых представлены сетью Петри.

Методы [10, 11] получили дальнейшее развитие, что обеспечивает возможность их применения для анализа произвольных бесконечных сетей Петри с регулярной структурой, заданных параметрическим описанием.

Список литературы

1. Grid Computing: Towards a Global Interconnected Infrastructure / Ed. Preve N.P. Springer, 2011. 312 p.
2. Murata T. Petri Nets: Properties, Analysis and Applications // Proc. of the IEEE. 1989. Vol. 77, no. 4. P. 541–580.
3. Silva M., Colom J. M. On the Computation of Structural Synchronic Invariants in P/T Nets // Springer. LNCS. 1988. Vol. 340. P.387–417.
4. Ачасова С.М., Бандман О.Л. Корректность параллельных вычислительных процессов. М.: Наука, 1990. 253 с.
5. Berthelot G., Terrat R. Petri Nets Theory for the Correctness of Protocols // IEEE Trans. on Communications. 1982. Vol. 30, № 12. P. 2497–2505.
6. Diaz M. Modelling and Analysis of Communication and Cooperation Protocols Using Petri Net Based Model // Computer Networks. 1982, №6. P. 419–441.
7. Z. W. Li, M. C. Zhou Deadlock Resolution in Automated Manufacturing Systems. Springer, 2010. 234 p.
8. Zaitsev D.A., Zaitsev I.D. Verification of Ethernet protocols via parametric composition of Petri net // INCOM'2006: 12th IFAC/IFIP/IFORS/IEEE/IMS Symposium Information Control Problems in Manufacturing, May 17–19 2006, Saint-Etienne, France. P. 261–267.
9. Шмелева Т.Р. Верификация протоколов коммутируемой Ethernet бесконечными сетями Петри // Труды ДУИКТ: Особливий випуск. Київ, 2007. С. 96–102.
10. Shmeleva T.R., Zaitsev D.A., Zaitsev I.D. Analysis of Square Communication Grids via Infinite Petri Nets // Збірник Наукових праць ОНАЗ ім. О.С. Попова. 2009, № 1. С. 27–35.
11. Зайцев Д.А., Шмелева Т.Р. Верификация коммуникационных структур гиперкуба параметрическими сетями Петри // Кибернетика и системный анализ. 2010. №1. С. 119–128.
12. Shmeleva T.R. Proving Consistency of Petri Net Grid Models // Book of Abstracts of the International Scientific Conference on Computer Algebra and Information Technology, August 20-26, 2012. Odessa, Ukraine, 2012. P. 83–86.
13. Зайцев Д.А., Лі Ж.В., Літвін Д.О., Хоу І.Ф. Обчислення сифонів сітей Петрі через композицію кланів // Науковий вісник Міжнародного гуманітарного університету: серія ІТтаУП. 2012. Вип. 4. С. 32–44.
14. Berthomieu B., Ribet O.-P., Vernadat F. The tool TINA - construction of abstract state space for Petri nets and Time Petri nets // International Journal of Production Research. 2004. Vol. 42, №14. P. 2741–2756 (<http://www.laas.fr/tina>).

Приложение. Р-инварианты модели решетки размера 4 с соединением противоположных краев

По $(pi_1^{i,j}, pil_1^{i,j})$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, k}$ построены векторы: $(pi_1^{1,1}, pil_1^{1,1})$, $(pi_1^{1,2}, pil_1^{1,2})$, $(pi_1^{1,3}, pil_1^{1,3})$, $(pi_1^{1,4}, pil_1^{1,4})$, $(pi_1^{2,1}, pil_1^{2,1})$, $(pi_1^{2,2}, pil_1^{2,2})$, $(pi_1^{2,3}, pil_1^{2,3})$, $(pi_1^{2,4}, pil_1^{2,4})$, $(pi_1^{3,1}, pil_1^{3,1})$, $(pi_1^{3,2}, pil_1^{3,2})$, $(pi_1^{3,3}, pil_1^{3,3})$, $(pi_1^{3,4}, pil_1^{3,4})$, $(pi_1^{4,1}, pil_1^{4,1})$, $(pi_1^{4,2}, pil_1^{4,2})$, $(pi_1^{4,3}, pil_1^{4,3})$, $(pi_1^{4,4}, pil_1^{4,4})$.

По $(po_1^{i,j}, pol_1^{i,j})$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, k}$ построены векторы: $(po_1^{1,1}, pol_1^{1,1})$, $(po_1^{1,2}, pol_1^{1,2})$, $(po_1^{1,3}, pol_1^{1,3})$, $(po_1^{1,4}, pol_1^{1,4})$, $(po_1^{2,1}, pol_1^{2,1})$, $(po_1^{2,2}, pol_1^{2,2})$, $(po_1^{2,3}, pol_1^{2,3})$, $(po_1^{2,4}, pol_1^{2,4})$, $(po_1^{3,1}, pol_1^{3,1})$, $(po_1^{3,2}, pol_1^{3,2})$, $(po_1^{3,3}, pol_1^{3,3})$, $(po_1^{3,4}, pol_1^{3,4})$, $(po_1^{4,1}, pol_1^{4,1})$, $(po_1^{4,2}, pol_1^{4,2})$, $(po_1^{4,3}, pol_1^{4,3})$, $(po_1^{4,4}, pol_1^{4,4})$.

По $(pi_4^{i,j}, pil_4^{i,j})$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, k}$ построены векторы: $(pi_4^{1,1}, pil_4^{1,1})$, $(pi_4^{1,2}, pil_4^{1,2})$, $(pi_4^{1,3}, pil_4^{1,3})$, $(pi_4^{1,4}, pil_4^{1,4})$, $(pi_4^{2,1}, pil_4^{2,1})$, $(pi_4^{2,2}, pil_4^{2,2})$, $(pi_4^{2,3}, pil_4^{2,3})$, $(pi_4^{2,4}, pil_4^{2,4})$, $(pi_4^{3,1}, pil_4^{3,1})$, $(pi_4^{3,2}, pil_4^{3,2})$, $(pi_4^{3,3}, pil_4^{3,3})$, $(pi_4^{3,4}, pil_4^{3,4})$, $(pi_4^{4,1}, pil_4^{4,1})$, $(pi_4^{4,2}, pil_4^{4,2})$, $(pi_4^{4,3}, pil_4^{4,3})$, $(pi_4^{4,4}, pil_4^{4,4})$.

По $(po_4^{i,j}, pol_4^{i,j})$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, k}$ построены векторы: $(po_4^{1,1}, pol_4^{1,1})$, $(po_4^{1,2}, pol_4^{1,2})$, $(po_4^{1,3}, pol_4^{1,3})$, $(po_4^{1,4}, pol_4^{1,4})$, $(po_4^{2,1}, pol_4^{2,1})$, $(po_4^{2,2}, pol_4^{2,2})$, $(po_4^{2,3}, pol_4^{2,3})$, $(po_4^{2,4}, pol_4^{2,4})$, $(po_4^{3,1}, pol_4^{3,1})$, $(po_4^{3,2}, pol_4^{3,2})$, $(po_4^{3,3}, pol_4^{3,3})$, $(po_4^{3,4}, pol_4^{3,4})$, $(po_4^{4,1}, pol_4^{4,1})$, $(po_4^{4,2}, pol_4^{4,2})$, $(po_4^{4,3}, pol_4^{4,3})$, $(po_4^{4,4}, pol_4^{4,4})$.

По $(pb_1^{i,j}, pb_2^{i,j}, pb_3^{i,j}, pb_4^{i,j}, pbl^{i,j})$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, k}$ построены векторы:

$(pb_1^{1,1}, pb_2^{1,1}, pb_3^{1,1}, pb_4^{1,1}, pbl^{1,1})$, $(pb_1^{1,2}, pb_2^{1,2}, pb_3^{1,2}, pb_4^{1,2}, pbl^{1,2})$,
 $(pb_1^{1,3}, pb_2^{1,3}, pb_3^{1,3}, pb_4^{1,3}, pbl^{1,3})$, $(pb_1^{1,4}, pb_2^{1,4}, pb_3^{1,4}, pb_4^{1,4}, pbl^{1,4})$,
 $(pb_1^{2,1}, pb_2^{2,1}, pb_3^{2,1}, pb_4^{2,1}, pbl^{2,1})$, $(pb_1^{2,2}, pb_2^{2,2}, pb_3^{2,2}, pb_4^{2,2}, pbl^{2,2})$,
 $(pb_1^{2,3}, pb_2^{2,3}, pb_3^{2,3}, pb_4^{2,3}, pbl^{2,3})$, $(pb_1^{2,4}, pb_2^{2,4}, pb_3^{2,4}, pb_4^{2,4}, pbl^{2,4})$,
 $(pb_1^{3,1}, pb_2^{3,1}, pb_3^{3,1}, pb_4^{3,1}, pbl^{3,1})$, $(pb_1^{3,2}, pb_2^{3,2}, pb_3^{3,2}, pb_4^{3,2}, pbl^{3,2})$,
 $(pb_1^{3,3}, pb_2^{3,3}, pb_3^{3,3}, pb_4^{3,3}, pbl^{3,3})$, $(pb_1^{3,4}, pb_2^{3,4}, pb_3^{3,4}, pb_4^{3,4}, pbl^{3,4})$,
 $(pb_1^{4,1}, pb_2^{4,1}, pb_3^{4,1}, pb_4^{4,1}, pbl^{4,1})$, $(pb_1^{4,2}, pb_2^{4,2}, pb_3^{4,2}, pb_4^{4,2}, pbl^{4,2})$,
 $(pb_1^{4,3}, pb_2^{4,3}, pb_3^{4,3}, pb_4^{4,3}, pbl^{4,3})$, $(pb_1^{4,4}, pb_2^{4,4}, pb_3^{4,4}, pb_4^{4,4}, pbl^{4,4})$.

По $((pil_1^{i,j}, pol_1^{i,j}, pil_4^{i,j}, pol_4^{i,j}, pbl^{i,j}), i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k})$ построен вектор: $(pil_1^{1,1}, pol_1^{1,1}, pil_4^{1,1}, pol_4^{1,1}, pbl^{1,1}, pil_1^{1,2}, pol_1^{1,2}, pil_4^{1,2}, pol_4^{1,2}, pbl^{1,2}, pil_1^{1,3}, pol_1^{1,3}, pil_4^{1,3}, pol_4^{1,3}, pbl^{1,3}, pil_1^{1,4}, pol_1^{1,4}, pil_4^{1,4}, pol_4^{1,4}, pbl^{1,4}, pil_1^{2,1}, pol_1^{2,1}, pil_4^{2,1}, pol_4^{2,1}, pbl^{2,1}, pil_1^{2,2}, pol_1^{2,2}, pil_4^{2,2}, pol_4^{2,2}, pbl^{2,2}, pil_1^{2,3}, pol_1^{2,3}, pil_4^{2,3}, pol_4^{2,3}, pbl^{2,3}, pil_1^{2,4}, pol_1^{2,4}, pil_4^{2,4}, pol_4^{2,4}, pbl^{2,4}, pil_1^{3,1}, pol_1^{3,1}, pil_4^{3,1}, pol_4^{3,1}, pbl^{3,1}, pil_1^{3,2}, pol_1^{3,2}, pil_4^{3,2}, pol_4^{3,2}, pbl^{3,2}, pil_1^{3,3}, pol_1^{3,3}, pil_4^{3,3}, pol_4^{3,3}, pbl^{3,3}, pil_1^{3,4}, pol_1^{3,4}, pil_4^{3,4}, pol_4^{3,4}, pbl^{3,4}, pil_1^{4,1}, pol_1^{4,1}, pil_4^{4,1}, pol_4^{4,1}, pbl^{4,1}, pil_1^{4,2}, pol_1^{4,2}, pil_4^{4,2}, pol_4^{4,2}, pbl^{4,2}, pil_1^{4,3}, pol_1^{4,3}, pil_4^{4,3}, pol_4^{4,3}, pbl^{4,3}, pil_1^{4,4}, pol_1^{4,4}, pil_4^{4,4}, pol_4^{4,4}, pbl^{4,4})$.

По $((pi_1^{i,j}, po_1^{i,j}, pi_4^{i,j}, po_4^{i,j}, ((pb_u^{i,j}), u = \overline{1, 4})), i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k})$ построен вектор: $(pi_1^{1,1}, po_1^{1,1}, pi_4^{1,1}, po_4^{1,1}, pb_1^{1,1}, pb_2^{1,1}, pb_3^{1,1}, pb_4^{1,1}, pi_1^{1,2}, po_1^{1,2}, pi_4^{1,2}, po_4^{1,2}, pb_1^{1,2}, pb_2^{1,2}, pb_3^{1,2}, pb_4^{1,2}, pi_1^{1,3}, po_1^{1,3}, pi_4^{1,3}, po_4^{1,3}, pb_1^{1,3}, pb_2^{1,3}, pb_3^{1,3}, pb_4^{1,3}, pi_1^{1,4}, po_1^{1,4}, pi_4^{1,4}, po_4^{1,4}, pb_1^{1,4}, pb_2^{1,4}, pb_3^{1,4}, pb_4^{1,4}, pi_1^{2,1}, po_1^{2,1}, pi_4^{2,1}, po_4^{2,1}, pb_1^{2,1}, pb_2^{2,1}, pb_3^{2,1}, pb_4^{2,1}, pi_1^{2,2}, po_1^{2,2}, pi_4^{2,2}, po_4^{2,2}, pb_1^{2,2}, pb_2^{2,2}, pb_3^{2,2}, pb_4^{2,2}, pi_1^{2,3}, po_1^{2,3}, pi_4^{2,3}, po_4^{2,3}, pb_1^{2,3}, pb_2^{2,3}, pb_3^{2,3}, pb_4^{2,3}, pi_1^{2,4}, po_1^{2,4}, pi_4^{2,4}, po_4^{2,4}, pb_1^{2,4}, pb_2^{2,4}, pb_3^{2,4}, pb_4^{2,4}, pi_1^{3,1}, po_1^{3,1}, pi_4^{3,1}, po_4^{3,1}, pb_1^{3,1}, pb_2^{3,1}, pb_3^{3,1}, pb_4^{3,1}, pi_1^{3,2}, po_1^{3,2}, pi_4^{3,2}, po_4^{3,2}, pb_1^{3,2}, pb_2^{3,2}, pb_3^{3,2}, pb_4^{3,2}, pi_1^{3,3}, po_1^{3,3}, pi_4^{3,3}, po_4^{3,3}, pb_1^{3,3}, pb_2^{3,3}, pb_3^{3,3}, pb_4^{3,3}, pi_1^{3,4}, po_1^{3,4}, pi_4^{3,4}, po_4^{3,4}, pb_1^{3,4}, pb_2^{3,4}, pb_3^{3,4}, pb_4^{3,4}, pi_1^{4,1}, po_1^{4,1}, pi_4^{4,1}, po_4^{4,1}, pb_1^{4,1}, pb_2^{4,1}, pb_3^{4,1}, pb_4^{4,1}, pi_1^{4,2}, po_1^{4,2}, pi_4^{4,2}, po_4^{4,2}, pb_1^{4,2}, pb_2^{4,2}, pb_3^{4,2}, pb_4^{4,2}, pi_1^{4,3}, po_1^{4,3}, pi_4^{4,3}, po_4^{4,3}, pb_1^{4,3}, pb_2^{4,3}, pb_3^{4,3}, pb_4^{4,3}, pi_1^{4,4}, po_1^{4,4}, pi_4^{4,4}, po_4^{4,4}, pb_1^{4,4}, pb_2^{4,4}, pb_3^{4,4}, pb_4^{4,4})$.

$pi_4^{4,2}, po_4^{4,2}, pb_1^{4,2}, pb_2^{4,2}, pb_3^{4,2}, pb_4^{4,2}, pi_1^{4,3}, po_1^{4,3}, pi_4^{4,3}, po_4^{4,3}, pb_1^{4,3}, pb_2^{4,3}, pb_3^{4,3}, pb_4^{4,3}, pi_1^{4,4}, po_1^{4,4}, pi_4^{4,4}, po_4^{4,4}, pb_1^{4,4}, pb_2^{4,4}, pb_3^{4,4}, pb_4^{4,4}$).

Verification of Computing Grids with Special Edge Conditions by Infinite Petri Nets

Zaitsev D.A.

Keywords: computing grid, infinite Petri net, invariant, boundedness, safeness, liveness

A technique of the computing grid verification using invariants of infinite Petri nets was presented. Models of square grid structures in the form of parametric Petri nets for such edge conditions as connection of edges and truncated devices were constructed. Infinite systems of linear algebraic equations were composed on parametric Petri nets for calculating p-invariants; their parametric solutions were obtained. P-invariant Petri nets are structurally conservative and bounded that together with liveness are the properties of ideal systems. Liveness investigation based on siphons and traps can be implemented by using p-invariants of modified nets.

Сведения об авторе:

Зайцев Дмитрий Анатольевич,

Международный гуманитарный университет, г. Одесса, Украина,
доктор технических наук, профессор. Сайт: [http : //member.acm.org/~daze](http://member.acm.org/~daze),
[http : //daze.ho.ua](http://daze.ho.ua) . Основные научные результаты: универсальная сеть Петри;
анализ бесконечных сетей Петри с регулярной структурой; кланы систем
линейных алгебраических уравнений (функциональные подсети); композиционный
анализ сетей Петри; функциональная эквивалентность, передаточная функция и
эквивалентные преобразования временных сетей Петри; временные сети Петри с
многоканальными переходами, уравнение состояний, частичные инварианты;
синтез функций непрерывной (нечеткой) логики, заданных таблично.