УДК 004

Кулагин Владимир Петрович,
профессор кафедры аппаратного, программного
и математического обеспечения вычислительных систем,
доктор технических наук
Института кибербезопасности и цифровых технологий
РТУ МИРЭА
kulagin@mirea.ru

Муравьев Николай Дмитриевич,
аспирант 2 курса направления подготовки
«Информатика и вычислительная техника»
Института кибербезопасности и цифровых технологий
РТУ МИРЭА

АЛГОРИТМ РАЗБИЕНИЯ СЕТЕЙ ПЕТРИ НА ОСНОВЕ МАТРИЧНОГО МЕТОДА

Аннотация. *В данном материале изложен алгоритм, позволяющий исходную сеть Петри методом декомпозиции разбивать на элементарные фрагменты. Представленный алгоритм основан на преобразовании матрицы инцидентности сети Петри к виду матрицы инцидентности примитивной системы. Разбиение сети предназначено для дальнейшего анализа сети Петри, например, решение задачи достижимости некоторой заданной разметки.*

Ключевые слова: *сеть Петри, метод декомпозиции, алгоритм разбиения, матричный метод.*

Введение. Сеть Петри – это двудольный ориентированный граф с двумя типами вершин (позициями и переходами, изображаемыми соответственно кружками и палочками), дугами, соединяющими позиции с переходами, и начальной маркировкой, которая представляется вектором [1]. Формально сеть Петри (СП) определяется как четверка $<\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{\mu^0}>$, где $\boldsymbol{P}$ – конечной множество позиций, $\boldsymbol{T}$ – конечное множество переходов, $\boldsymbol{E}$ – конечное множество ориентированных ребер, $\boldsymbol{\mu^0}$ – начальная маркировка сети.

Сети Петри являются важнейшим инструментом в моделировании асинхронных и параллельных процессов. Они были введены Карлом Петри в 1962 году и изложены в диссертации “Kommunikation mit Automaten”. Одной из важнейших задач в сетях Петри является задача достижимости. Она помогает понять достижимо ли некоторое заданное состояние S из начального состояния S_0. Одним из путей в решении задачи достижимости является построение дерева достижимых разметок, которое помогает не только проанализировать порядок срабатывания переходов или получить множество допустимых состояний, но и классифицировать сети по динамическим ограничениям, то есть определить является ли сеть k-ограниченной, безопасной, консервативной, живой или устойчивой.

В данном материале описывается подход к разбиению сети Петри на элементарные фрагменты, как один из этапов в решении задачи достижимости с использованием тензорной методологии.

Разбиение сети Петри

Задача разбиения сети Петри состоит в декомпозиции заданной сети Петри с начальной разметкой на элементарные фрагменты. Элементарный фрагмент сети Петри определяется условиями 1, 2, 3.

Условие 1. $|T| = 1$, мощность конечного множества переходов равна 1.

Условие 2. $\forall t \in T: pre(t) = 1 \land post(t) = 1$, то есть любой переход имеет ровно одно входное место и одно выходное место.

Условие 3. $\mu_N^0(p) = \mu_{N_{pr}}^0(p)$, начальная разметка в примитивной системе эквивалентна разметке исходной заданной сети.

В свою очередь примитивная система, а именно матрица инцидентности D^{pr}, состоящая из элементарных фрагментов, отвечает следующим характеристикам:

- каждая строка матрицы содержит только одну 1 или только одну -1;
- каждый столбец матрицы содержит одну 1 и одну -1;
- сумма всех элементов матрицы равна 0.

Матрица инцидентности, отвечающая вышеуказанным характеристикам представлена на рис. 1.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рисунок 1. Матрица инцидентности примитивной системы

Чтобы СП имела возможность разбиения на элементарные фрагменты она должна отвечать ряду необходимых, но недостаточных требований:

- $|P| = 2|T|$, количество позиций в сети в два раза больше количества переходов;
- $\forall t \in T: pre(t) \geq 1 \land post(t) \geq 1$, каждый переход должен содержать минимум одну входную и одну выходную позицию.

Чаще всего сети не всегда удовлетворяют заданным требованиям, особенно может не выполняться требование $|P| = 2|T|$. Для решения этой проблемы можно использовать подход, который позволяет добавлять эквивалентные позиции или переходы путем их деления. В случае деления позиции должна и сохраняться разметка, например, если делится позиция p_i на позиции p_i' и p_i'', тогда $\mu^0(p_i') = \mu^0(p_i'') = \mu^0(p_i)$.

Алгоритм разбиения сети Петри. В разделе 1 материала были рассмотрены основные условия и характеристики элементарных фрагментов и примитивной системы соответственно, а также необходимые условия, которые должны выполняться, чтобы сеть могла быть декомпозирована на элементарные составляющие.

В данном разделе описывается алгоритм декомпозиции, который использует в матрицы инцидентности как один из способов представления сети Петри. Использование матричного подхода обусловлено простотой реализации алгоритма и манипуляции над данными.

Алгоритм 1. **Декомпозиция СП на элементарные фрагменты**

Исходные данные: Матрица инцидентности сети Петри D размерностью $n \times m$, n – число позиций, m – число переходов.

Выходные данные: Матрица инцидентности примитивной системы сети Петри D^{pr} (соответствие строк позициям и столбцов переходам соответствует исходной матрице D).

1. Объявить правильную матрицу D^{ref} размерностью $n \times m$, элементы которой заполняются согласно правилу (1).

$$D^{ref}_{(i,j)} = \begin{cases} 1 & i = 2 * j + 1, \\ -1 & i = 2 * j, \\ 0 & otherwise. \end{cases} \quad (1)$$

2. Объявить массив $candidateRows$ размерностью n, каждый элемент которого инициализируется пустым массивом.

3. Для каждой строки $i = \{1 \dots n\}$ матрицы D найти строки $k = \{1 \dots n\}$ матрицы D^{ref}, которые удовлетворяют условию $D^{ref}_{(k,j)} \neq 0 \wedge D^{ref}_{(k,j)} = D_{(i,j)}$. Выбранные строки матрицы D^{ref} записать в массив $candidateRows[i]$.

4. Алгоритмом Куна для нахождения паросочетаний выбрать из каждого массива $candidateRows[i], i = \{1 \dots n\}$ по одному элементу, чтобы получился массив $sample$ размерностью n, состоящий из уникальных элементов. Если алгоритмом Куна выбирается k паросочетаний и $k < n$, тогда решения не существует и алгоритм завершается.

5. Определить матрицу D^{pr} размерностью $n \times m$ и заполнить значением 0.

6. Для каждого $i = \{1..n\}$ установить $D^{pr}_{(sample[i],*)} = D^{ref}_{(i,*)}$.

7. Конец алгоритма.

Заключение. В данном материале описан подход и алгоритм к разбиению заданной сети Петри матричным методом. В основе матричного метода лежит подход использования эталонной матрицы и перестановок строк. Следует отметить, что применение матричного метода и правильной (эталонной) матрицы делает возможным достаточно просто реализовывать данный алгоритм. Однако, как видно из алгоритма, не каждая сеть Петри поддаётся разбиению на элементарные фрагменты, даже, если она выполняет необходимые, но недостаточные условия. Применение описанного алгоритма открывает новые возможности к анализу сетей Петри путем их направленной декомпозиции на элементарные фрагменты.

Список источников и литературы

1. Мараховский В.Б., Розенблюм Л.Я., Яковлев А.В. Моделирование параллельных процессов. Сети Петри. Курс для системных архитекторов, программистов, системных аналитиков, проектировщиков сложных систем управления. – Спб.: Профессиональная литература, АйТи-Подготовка, 2014. 400 с.

2. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. М.: Мир, 1984. 264 с.

3. Кулагин В.П. Тензорные методы исследования структур сетей Петри // Информационные технологии. 2015. № 2(21). С. 83–94.

4. Кулагин В.П. Методы построения тензоров преобразования для сетевых моделей сложны систем // Информационные технологии. 2015. № 4 (28). С. 133–147.

5. Котов В.Е. Сети Петри. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 160 с.

6. Кулагин В.П., Дубинин В.Н. Структурный анализ сетей Петри // Информационные технологии. 2016. № 1(22). С. 3–13.