

# Результаты вычислительного эксперимента по применению матричного подхода в стохастических сетях Петри

Д. С. Звягин

преподаватель кафедры информационной безопасности Воронежский институт МВД России  
E-mail: danil\_exp@mail.ru

**Аннотация.** В данной статье подробно рассматривается пример применения матричного подхода в стохастической сети Петри с четырьмя позициями и переходами. В ходе подробных вычислительных действий определяется вектор запуска переходов, значения которого позволят определить, какие переходы должны сработать для достижимости рассматриваемой стохастической сети Петри. Для точности эксперимента проводятся десятки вычислений данного вектора, значения которого сводятся в таблицу. Описанный в данной статье пример использования матричного подхода позволяет проанализировать стохастическую сеть, не рассматривая нарисованный граф, и решить проблему достижимости посредством определения необходимых переходов. Применив данный метод анализа к рассматриваемой стохастической сети, предлагается в дальнейшем использование матричной теории сетей Петри и при рассмотрении процесса производства почерковедческой экспертизы.

**Ключевые слова:** стохастическая сеть Петри, матричный подход, достижимость.

**Введение.** Сеть Петри – математический объект, позволяющий структурировать динамический процесс в виде двудольного ориентированного графа, состоящий из позиций и переходов, соединенных между собой дугами. Стохастическая сеть Петри – это форма сетей Петри, при которой в позициях фишки располагаются с какой-то вероятностью [1–3].

В связи с тем что наличие фишек в позициях рассматривается в виде каких-то вероятностей, в сумме равной 1, то и выбор срабатывающих переходов носит вероятностный характер.

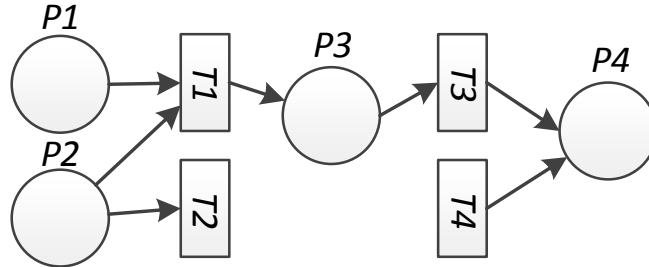
Значение вероятности нахождения фишки в выходной позиции вычисляется при помощи вектора диагональной свертки.

В ходе детального изучения процессов, рассмотренных при помощи языка сетей Петри, необходим анализ, который позволит решить ряд проблем, связанный с достижимостью, безопасностью, а также последовательностью срабатывания переходов. Дерево достижимости и матричный подход – основные методы анализа динамических процессов, смоделированных при помощи аппарата сетей Петри [4].

**Постановка задачи.** Имея начальную и конечную маркировки стохастической сети Петри, необходимо определить активные переходы. Иными слова-

ми, решить задачу достижимости стохастической сети Петри. В данном случае необходимо воспользоваться матричным подходом.

**Решение.** Рассмотрим стохастическую сеть Петри  $M_s = \{C, \mu^s\}$ , где  $C = \{P, T, I, O\}$ ,  $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ ,  $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$  (см. рисунок).



Пример стохастической сети Петри

Начальная маркировка сети:  $\mu^s = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 1 & 1 \\ 0,8 & 0,8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Конечная маркировка сети определяется путем вычисления вектора диагональной свертки матрицы Грама:

Переход  $t_1$  разрешен, так как  $\mu_1^s(p_1) \wedge \mu_1^s(p_2) > 0$ .

После срабатывания данного перехода получаем следующую маркировку входных позиций:

$$\bar{\mu}^s(p_1) = \sum_{\alpha=0}^1 \mu_{\alpha}^s(p_1) = 1,$$

$$\bar{\mu}^s(p_2) = \sum_{\alpha=0}^1 \mu_{\alpha}^s(p_2) = 1.$$

Маркировка выходной позиции  $\bar{\mu}^s(p_3)$  перехода  $t_1$  равна вектору диагональной свертки вектора  $\bar{\mu}^s(p_3)$  и вектора

$$r^T = \parallel r_0 \quad r_1 \quad \dots \quad r_k \parallel,$$

где

$$k = \#(p_3, O(t_1)) = 1;$$

$$r_k = r_1 = \left[ \sum_{\alpha=1}^1 \mu_{\alpha}^s(p_1) \right] \times \left[ \sum_{\alpha=1}^1 \mu_{\alpha}^s(p_2) \right] = 0,8 \times 0,8 = 0,64;$$

$$r_0 = 1 - r_k = 1 - 0,64 = 0,36.$$

Окончательно:  $r^T = \begin{bmatrix} 0,36 \\ 0,64 \end{bmatrix}$ . Определим матрицу Грама векторов  $\mu^s(p_3)$  и  $r$ .

$$G(\mu^s(p_3), r) = 1 \times \begin{bmatrix} 0,36 \\ 0,64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,36 \\ 0,64 \end{bmatrix}.$$

Вектор диагональной свертки  $di(G(\mu^s(p_3), r))$  в данном случае будет соответствовать матрице Грама, описанной выше.

Таким образом, маркировка позиции  $p_3$  после срабатывания перехода  $t_1$ :

$$\bar{\mu}^s(p_3) = di(G(\mu^s(p_3), r)) = \begin{bmatrix} 0,36 \\ 0,64 \end{bmatrix}.$$

Рассматривая далее, получаем, что переход  $t_3$  разрешен, и после его срабатывания имеем:  $\bar{\mu}^s(p_3) = 1, \bar{\mu}^s(p_4) = \begin{bmatrix} 0,36 \\ 0,64 \end{bmatrix}$ .

В итоге конечная маркировка сети выглядит в виде:

$$\mu^{s*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0,36 \\ 0 & 0 & 0 & 0,64 \end{pmatrix}.$$

Имея следующее матричное уравнения для матрицы запуска переходов  $x$ :

$$\mu^{s*} = \mu^s + x \times D,$$

где  $\mu^{s*}$  – конечная маркировка сети,  $\mu^s$  – начальная маркировка сети,  $x$  – вектор запуска переходов,  $D$  – составная матрица изменения, равная:

$$D = D^+ - D^-,$$

где  $D^+$  – матрица выходных функций,  $D^-$  – матрица входных функций,

можно определить вектор запуска переходов:

$$x = (\mu^{s*} - \mu^s) \times D^{-1},$$

где  $D^{-1}$  – обратная составная матрица изменения.

Рассматривая пример, описанный выше, получаем:

$$D^- = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$D = D^+ - D^- = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ откуда } D^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$x = (\mu^{s*} - \mu^s) \times D^{-1} = \begin{pmatrix} -0,8 & 0 & -0,8 & 0,16 \\ 0,8 & 0 & 0,8 & -0,16 \end{pmatrix}.$$

Получаем вектор запуска переходов в виде матрицы, состоящей из двух строк и четырех столбцов. Столбцы в данной матрице – это переходы слева направо, соответствующие  $t_1, t_2, t_3, t_4$ .

Рассматривая вектор  $x$ , необходимо определить максимальные значения второй строки данной матрицы. Столбцы, соответствующие данным значениям, будут являться активными переходами, необходимыми для решения достижимости рассматриваемой стохастической сети Петри. В данном случае максимальным значением является 0,8, соответствующее переходам  $t_1$  и  $t_3$ .

Для достоверности вышеописанного вычисляем дополнительно десять иных значений вектора запуска переходов с различными входными данными сети (см. таблицу).

**Значения вектора запуска переходов исходя из определенных начальных маркировок сети**

№	$\mu^s$	$\mu^{s*}$	$x$
1	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 1 & 1 \\ 0,7 & 0,8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0,44 \\ 0 & 0 & 0 & 0,56 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,7 & -0,1 & -0,7 & 0,14 \\ 0,7 & 0,1 & 0,7 & -0,14 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 1 & 1 \\ 0,7 & 0,7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0,51 \\ 0 & 0 & 0 & 0,49 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,7 & 0 & -0,7 & 0,21 \\ 0,7 & 0 & 0,7 & -0,21 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 1 & 1 \\ 0,9 & 0,9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0,19 \\ 0 & 0 & 0 & 0,81 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,9 & 0 & -0,9 & 0,09 \\ 0,9 & 0 & 0,9 & -0,09 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 1 & 1 \\ 0,6 & 0,6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0,64 \\ 0 & 0 & 0 & 0,36 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,6 & 0 & -0,6 & 0,24 \\ 0,6 & 0 & 0,6 & -0,24 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 1 & 1 \\ 0,9 & 0,8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0,28 \\ 0 & 0 & 0 & 0,72 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,9 & 0,1 & -0,9 & 0,18 \\ 0,9 & -0,1 & 0,9 & -0,18 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 1 & 1 \\ 0,7 & 0,9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0,37 \\ 0 & 0 & 0 & 0,63 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,7 & -0,2 & -0,7 & 0,07 \\ 0,7 & 0,2 & 0,7 & -0,07 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 1 & 1 \\ 0,6 & 0,9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0,46 \\ 0 & 0 & 0 & 0,54 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,6 & -0,3 & -0,6 & 0,06 \\ 0,6 & 0,3 & 0,6 & -0,06 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 1 & 1 \\ 0,8 & 0,6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0,52 \\ 0 & 0 & 0 & 0,48 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,8 & 0,2 & -0,8 & 0,32 \\ 0,8 & -0,2 & 0,8 & -0,32 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 1 & 1 \\ 0,7 & 0,6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0,58 \\ 0 & 0 & 0 & 0,42 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,7 & 0,1 & -0,7 & 0,28 \\ 0,7 & -0,1 & 0,7 & -0,28 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 0,15 & 0,35 & 1 & 1 \\ 0,85 & 0,65 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0,4475 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5525 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,85 & 0,2 & -0,85 & 0,297 \\ 0,85 & -0,2 & 0,85 & -0,297 \end{pmatrix}$

**Выводы.** Полученные результаты исследования показывают, что матричный метод анализа применим не только к сетям Петри, но и к стохастическим сетям, имеющим равное количество переходов и позиций. В дальнейшем необходимо рассмотреть применение матричного подхода для стохастических сетей Петри с большим количеством позиций, а также при наличии альтернативных путей.

### **Библиографический список**

1. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. М. : Мир, 1984. 264 с.
2. Лескин А. А., Мальцев П. А., Спиридонов А. М. Сети Петри в моделировании и управлении. Л. : Наука, 1989. 133 с.
3. Звягин Д. С. Моделирование процесса производства судебной почерковедческой экспертизы с использованием стохастических сетей Петри // Вестник Воронежского института МВД России. 2020. № 2. С. 154–163.
4. Звягин Д. С. Алгоритм построения дерева достижимости для стохастических сетей Петри // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2020. Т. 16. № 2. С. 34–41.
5. Пьянков О. В., Звягин Д. С. Моделирование процесса производства судебной почерковедческой экспертизы при помощи сетей Петри // Вестник Воронежского института МВД России. 2020. № 1. С. 57–64.