

## МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ТЕНЗОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

## METHODS FOR CONSTRUCTING TENSOR TRANSFORMATION FOR NETWORK MODELS OF COMPLEX SYSTEMS

**Кулагин Владимир Петрович / Vladimir P. Kulagin,**

*доктор технических наук, профессор, руководитель научно-исследовательской  
лаборатории космических исследований, технологий и процессов,*

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
(Московский институт электроники и математики) / Doctor of Technical Sciences,  
professor, Head of the research laboratory of space research, technologies and processes,  
National Research University Higher School of Economics (HSE),  
vkulagin@hse.ru*

### Аннотация

В статье рассматриваются методы построения тензоров преобразования (ТП), применяемых при анализе и синтезе сетевых моделей сложных систем, представленных в различных системах координат. Рассмотрен общий метод построения ТП, а также метод построения ТП для сетевых моделей, представленных множеством автоматически-синхронизационных сетей и в виде примитивной системы. Показано, что сложность предложенных методов построения ТП линейна и определяется простейшей процедурой построения двоичной матрицы.

### Abstract

The methods of constructing tensors transform (TT) used in the analysis and synthesis of network models of complex systems, presented in different coordinate systems are described in the article. The general method of construction of the TT, as well as a method of building TT for network models, decomposed into many of the automate synchronization networks, and primitive system is presented. It is shown that the complexity of the proposed methods for constructing the TT does not depend on the dimensionality of network models and defined a simple procedure for constructing a binary matrix.

**Ключевые слова:** сложные системы, тензоры преобразования, сети Петри, сетевые модели.

**Keywords:** complex systems, ten-

sors transformation, Petri nets, network model.

### Введение

Исследование, расчет и проектирование сложных систем давно является одной из основных проблем современной науки. Под сложными системами понимают производственные, технологические, информационные, телекоммуникационные, вычислительные, биологические и другие системы. Многообразие объектов, которые называют сложными системами, столь велико, что трудно найти между ними что-то общее, кроме их сложности. Накопленный опыт разработки таких систем показывает, что сложилось мнение об индивидуальности каждой сложной системы, необходимости разрабатывать специально для нее теорию, методы расчета и проектирования. Это снижает эффективность разработок и не позволяет использовать уже полученные результаты при разработке новых систем.

В современном мире особое значение среди сложных систем занимают информационные системы (ИС) – системы, предназначенные для обработки и представления информации и включающие в себя соответствующие организационные ресурсы (человеческие, технические, программные, коммуникационные и т.д.) [1]. Информационная система предназначена для своевременного обеспечения конкретных людей надлежащей

информацией для удовлетворения конкретных информационных потребностей в рамках определенной области интересов. Разноплановость составляющих компонент ИС, а также способы их организации и взаимодействия, с одной стороны, определяют гибкость ИС, позволяющей настраиваться под конкретного пользователя (или группы пользователей) и решать актуальные именно для него задачи, а, с другой стороны, представляют существенные трудности при проектировании.

Изучение свойств сложных систем и развитие методов их конструирования проводится с помощью различных математических моделей и методов в зависимости от класса систем, степени детализации их структуры, а также от характера исследуемых проблем. Чтобы успешно решать задачи анализа и синтеза сложных систем, необходимо дальнейшее развитие и совершенствование математических методов их исследования. В настоящее время описаны методы, позволяющие получать множество альтернативных вариантов сложных систем [2]. Однако  $NP$ -сложность решаемых задач не позволяет широко использовать данные методы на практике ( $NP$  – «недетерминированный полиномиальный»). В информатике и теории алгоритмов вычислительная сложность алгоритма – это функция, определяющая зависимость объема работы (выполняется некоторым алгоритмом) от размера входных данных. В частности, теория сложности вычислений определяет  $NP$ -полные задачи, которые недетерминированная машина Тьюринга может решить за полиномиальное время. Кроме того, поиск наилучшего варианта структуры сложной системы сопряжен с необходимостью количественной и качественной оценки каждой структуры-кандидата, а это, в свою очередь, требует наличия соответствующих метрик и математических методов.

Другим важным вопросом при проектировании сложных систем является представление имеющихся данных и параллельных процессов в виде специ-

альных формальных объектов, удобных для проведения над ними вычислительных и имитационных экспериментов. С большой долей достоверности можно отметить, что большинство современных сложных систем характеризуются такими свойствами как параллелизм, недетерминированность, многоуровневость представления, сочетание синхронных и асинхронных процессов, однородность и др. Поэтому выбор формализованного языка, в наибольшей степени учитывающего особенности современных систем, является основной задачей начального этапа проектирования. В последние годы наблюдается растущий интерес к использованию аппарата сетей Петри (СП). Преимущества СП при описании сложных систем очевидны и широко описаны в литературе [3-8].

Для того, чтобы получить единый подход к исследованию сложных систем любой структуры и различной природы, используются тензорные методы исследования [9-13]. Тензорное исчисление возникло в математике для решения проблем, методологически аналогичных тем, которые решаются при анализе сложных систем. Понятие тензора связано с преобразованием систем координат и является закономерным развитием представлений о пространстве. В работе [14] представлены основы тензорного подхода к исследованию моделей, построенных в терминах сетей Петри (СП-модели), показаны алгоритмы декомпозиции СП-моделей сложных систем и синтеза новых структур. Данные построения выполняются с помощью тензоров преобразования (ТП), которые получаются путем решения систем тензорных уравнений. Исследование сложных систем сопряжено с анализом структур высокой размерности, а также с учетом  $NP$ -сложности решаемых задач. Поэтому использование тензорной методологии при анализе сложных систем, синтез и последующая оценка возможных альтернативных структур-кандидатов требует наличия таких методов и алгоритмов построения ТП, которые отличаются простотой и

требуют минимальных временных затрат.

Целью данной статьи является рассмотрение методов построения ТП и создание соответствующих эффективных алгоритмов при решении задач анализа и синтеза СП-моделей сложных систем.

### 1. Общий метод построения тензоров преобразования

Пусть  $d^-$  и  $d^+$  векторы, описывающие множество входных и множество выходных позиций перехода  $t$  сети Петри  $N$ , то есть  $d_i^- > 0$ , если  $p_i \in pre(t)$  и  $d_j^+ > 0$ , если  $p_j \in post(t)$ , где функции  $pre(x)$  и  $post(x)$  определяют, соответственно, множества входных и выходных вершин для вершины  $x$ . Элементы векторов  $d^-$  и  $d^+$  принимают положительные целочисленные значения. Вектор  $d = d^+ - d^-$  описывает связи перехода  $t$  с позициями СП  $N$ :  $d_i > 0$ , если  $p_i \in post(t)$ ;  $d_i < 0$ ,

$p_i \in pre(t)$ ;  $d_i = 0$ ,  $p_i \notin ((post(t) \cup pre(t)))$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $n = |P|$ ;  $P$  – множество позиций СП  $N$ .

Уравнение изменения разметки СП при срабатывании перехода  $t$  можно записать следующим образом:

$$\mu' = \mu + D \times f(\sigma), \quad (1)$$

где  $\mu$  – старый вектор разметки СП,  $\mu'$  – новый вектор разметки СП,  $f(\sigma)$  – степень последовательности срабатывания переходов, представляющая собой вектор, каждый элемент которого указывает на количество срабатываний соответствующего перехода СП;  $D$  – матрица инцидентности, составленная из векторов  $d$ , построенных для каждого перехода, то есть

$$D = O^T - I, \text{ где } I: P \times T \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\} \text{ и } O: T \times P \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$$

Уравнение (1) в индексной форме имеет следующий вид:

$$\mu^\gamma = \mu_0^\gamma + D_{\beta\gamma}^\gamma \times f(\sigma)^\beta, \quad (2)$$

где индексы  $\gamma$  и  $\beta$  изменяются от 1 до  $n$  и от 1 до  $m$  соответственно;  $n=|P|$  и  $m=|T|$ .

Если предположить, что  $N$  и  $N'$  проекции некоторой СП в различных системах координат, описываемых матрицами инцидентности  $D_{\beta\gamma}^\gamma$  и  $D_{\beta'\gamma'}^{\gamma'}$ , то переход от одной системы координат к другой определяется тензорами преобразования  $C_{\beta\gamma}^{\beta'\gamma'}$  и  $E_{\beta\gamma}^{\beta'\gamma'}$ , то есть:

$$D_{\beta'}^{\gamma'} = C_{\beta\gamma}^{\beta'\gamma'} \times D_{\beta}^\gamma \quad (3)$$

$$D_{\beta}^\gamma = E_{\beta\gamma}^{\beta'\gamma'} \times D_{\beta'}^{\gamma'} \quad (4)$$

Учитывая инвариантность (неизменность) начальной разметки при переходе от одной системы координат к другой, можно записать, что:

$$\mu_{\alpha'}^{\gamma'} = C_{\beta\gamma}^{\beta'\gamma'} \times \mu_{\alpha}^\gamma \quad (5)$$

$$\mu_{\alpha}^\gamma = E_{\beta\gamma}^{\beta'\gamma'} \times \mu_{\alpha'}^{\gamma'} \quad (6)$$

На основе приведенных уравнений можно составить систему, из которой определяется ТП  $C_{\beta\gamma}^{\beta'\gamma'}$ :

$$\begin{cases} D_{\beta'}^{\gamma'} = C_{\beta\gamma}^{\beta'\gamma'} \times D_{\beta}^\gamma \\ \mu_{\alpha'}^{\gamma'} = C_{\beta\gamma}^{\beta'\gamma'} \times \mu_{\alpha}^\gamma \\ \mu_{\alpha'}^{\gamma'} = \mu_{\alpha}^\gamma = \mu_0 \end{cases}$$

Или в более простом виде:

$$\begin{cases} D_{\beta'}^{\gamma'} = C_{\beta\gamma}^{\beta'\gamma'} \times D_{\beta}^\gamma \\ \mu_0 = C_{\beta\gamma}^{\beta'\gamma'} \times \mu_0 \end{cases} \quad (7)$$

Аналогично для нахождения ТП  $E_{\beta\gamma}^{\beta'\gamma'}$  необходимо решить систему уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} D_{\beta}^\gamma = E_{\beta\gamma}^{\beta'\gamma'} \times D_{\beta'}^{\gamma'} \\ \mu_0 = E_{\beta\gamma}^{\beta'\gamma'} \times \mu_0 \end{cases} \quad (8)$$

Рассмотрим процедуру нахождения

ния тензоров  $C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma}$  и  $E_{\beta\gamma}^{\beta'\gamma'}$  на примере. Пусть даны СП N и N' (рис. 1), которые представляют одну и ту же СП-модель, но выраженную в различных системах координат. Можно считать, что N' – исходная СП, а N – примитивная система (СП N представляет собой СП N', но вы-

раженную в другой системе координат). На рисунке 2 представлены матрицы инцидентности СП N и N', а также вектор начальной разметки  $\mu_0$  (для удобства представления информации на рисунках пустые клетки матриц соответствуют нулевым значениям).

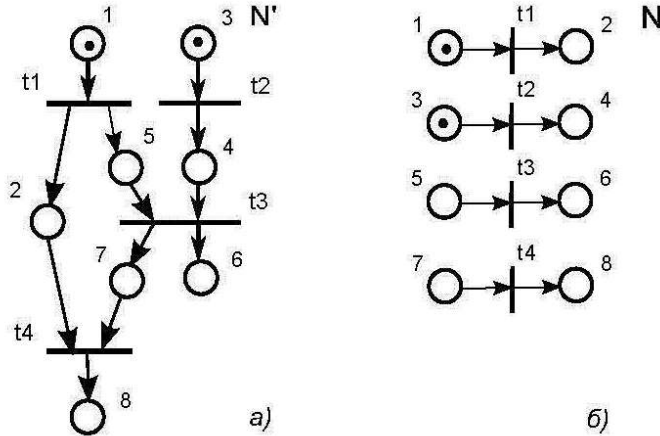


Рис. 1. СП-модель N в исходной (а) и в выбранной (б) системах координат

Построим тензор  $C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma}$ . Для этого раскроем систему (7) для рассматриваемого

примера. Получим следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} -c_{11} + c_{12} = -1 \\ -c_{13} + c_{14} = 0 \\ -c_{15} + c_{16} = 0 \\ -c_{17} + c_{18} = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\begin{cases} -c_{21} + c_{22} = -1 \\ -c_{23} + c_{24} = 0 \\ -c_{25} + c_{26} = 0 \\ -c_{27} + c_{28} = -1 \end{cases} \quad (7.2)$$

$$\begin{cases} -c_{31} + c_{32} = 0 \\ -c_{33} + c_{34} = -1 \\ -c_{35} + c_{36} = 0 \\ -c_{37} + c_{38} = 0 \end{cases} \quad (7.3)$$

$$\begin{cases} -c_{41} + c_{42} = 0 \\ -c_{43} + c_{44} = 1 \\ -c_{45} + c_{46} = -1 \\ -c_{47} + c_{48} = 0 \end{cases} \quad (7.4)$$

$$\begin{cases} -c_{51} + c_{52} = 1 \\ -c_{53} + c_{54} = 0 \\ -c_{55} + c_{56} = -1 \\ -c_{57} + c_{58} = 0 \end{cases} \quad (7.5)$$

$$\begin{cases} -c_{61} + c_{62} = 0 \\ -c_{63} + c_{64} = 0 \\ -c_{65} + c_{66} = 1 \\ -c_{67} + c_{68} = 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

$$\begin{cases} -c_{71} + c_{72} = 0 \\ -c_{73} + c_{74} = 0 \\ -c_{75} + c_{76} = 1 \\ -c_{77} + c_{78} = -1 \end{cases} \quad (7.7)$$

$$\begin{cases} -c_{81} + c_{82} = 0 \\ -c_{83} + c_{84} = 0 \\ -c_{85} + c_{86} = 0 \\ -c_{87} + c_{88} = 1 \end{cases} \quad (7.8)$$

$$\begin{cases} c_{11} + c_{13} = 1 \\ c_{21} + c_{23} = 0 \\ c_{31} + c_{33} = 1 \\ c_{41} + c_{43} = 0 \\ c_{51} + c_{53} = 0 \\ c_{61} + c_{63} = 0 \\ c_{71} + c_{73} = 0 \\ c_{81} + c_{83} = 0 \end{cases} \quad (7.9)$$

Очевидно, что данные системы уравнений имеют множество решений. Одно из возможных решений для тензора

$C_{\beta\gamma'}^{\beta\gamma'}$  приведено на рисунке 3а. Полученный тензор преобразует примитивную систему N в исходную СП N'.

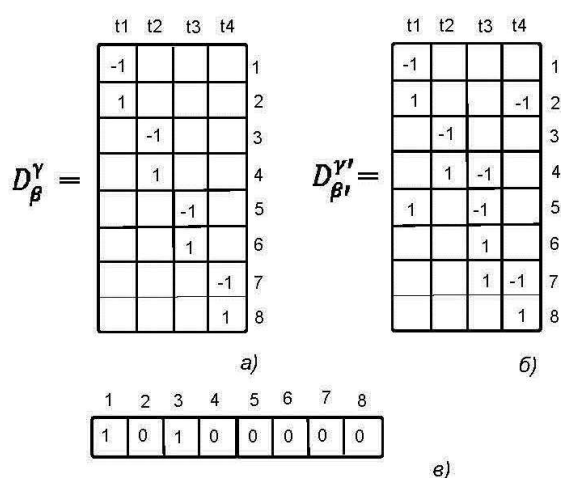


Рис. 2. Матрицы инцидентности, соответствующие СП-моделям N (a) и N' (б), и вектор начальной разметки  $\mu_0$

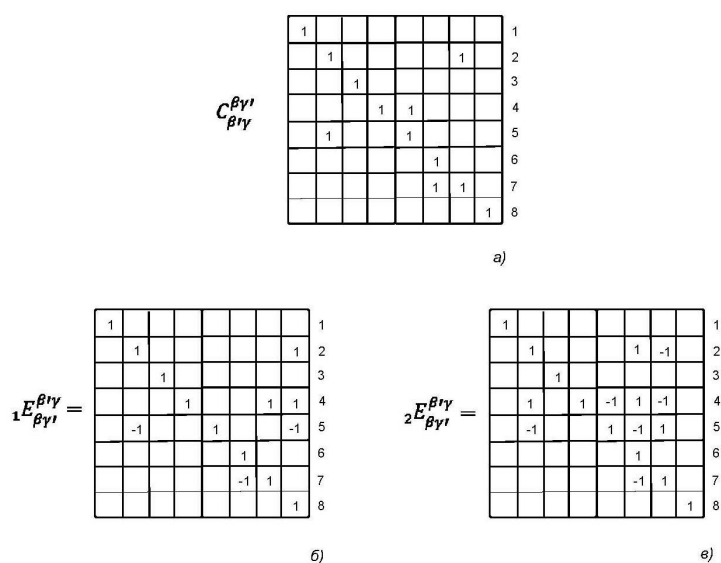


Рис. 3. Возможные значения тензоров преобразования  $C_{\beta\gamma'}^{\beta\gamma'}$  и  $E_{\beta\gamma'}^{\beta\gamma'}$

Для построения ТП  $E_{\beta\gamma'}^{\beta\gamma}$  раскроем систему (8).

$$\begin{cases} -e_{11} + e_{12} + e_{15} = -1 \\ -e_{13} + e_{14} = -1 \\ -e_{14} - e_{15} + e_{16} + e_{17} = 0 \\ -e_{12} + e_{17} + e_{18} = 0 \end{cases} \quad (8.1)$$

$$\begin{cases} -e_{21} + e_{22} + e_{25} = 1 \\ -e_{23} + e_{24} = 0 \\ -e_{24} - e_{25} + e_{26} + e_{27} = 0 \\ -e_{22} + e_{27} + e_{28} = 0 \end{cases} \quad (8.2)$$

$$\begin{cases} -e_{31} + e_{32} + e_{35} = 0 \\ -e_{33} + e_{34} = -1 \\ -e_{34} - e_{35} + e_{36} + e_{37} = 0 \\ -e_{32} + e_{37} + e_{38} = 0 \end{cases} \quad (8.3)$$

$$\begin{cases} -e_{41} + e_{42} + e_{45} = 0 \\ -e_{43} + e_{44} = 1 \\ -e_{44} - e_{45} + e_{46} + e_{47} = 0 \\ -e_{42} + e_{47} + e_{48} = 0 \end{cases} \quad (8.4)$$

$$\begin{cases} -e_{51} + e_{52} + e_{55} = 0 \\ -e_{53} + e_{54} = 0 \\ -e_{54} - e_{55} + e_{56} + e_{57} = -1 \\ -e_{52} + e_{57} + e_{58} = 0 \end{cases} \quad (8.5)$$

$$\begin{cases} -e_{61} + e_{62} + e_{65} = 0 \\ -e_{63} + e_{64} = 0 \\ -e_{64} - e_{65} + e_{66} + e_{67} = 1 \\ -e_{62} + e_{67} + e_{68} = 0 \end{cases} \quad (8.6)$$

$$\begin{cases} -e_{71} + e_{72} + e_{75} = 0 \\ -e_{73} + e_{74} = 0 \\ -e_{74} - e_{75} + e_{76} + e_{77} = 0 \\ -e_{72} + e_{77} + e_{78} = -1 \end{cases} \quad (8.7)$$

$$\begin{cases} -e_{81} + e_{82} + e_{85} = 0 \\ -e_{83} + e_{84} = 0 \\ -e_{84} - e_{85} + e_{86} + e_{87} = 0 \\ -e_{82} + e_{87} + e_{88} = 1 \end{cases} \quad (8.8)$$

$$\begin{cases} e_{11} + e_{13} = 1 \\ e_{21} + e_{23} = 0 \\ e_{31} + e_{33} = 1 \\ e_{41} + e_{43} = 0 \\ e_{51} + e_{53} = 0 \\ e_{61} + e_{63} = 0 \\ e_{71} + e_{73} = 0 \\ e_{81} + e_{83} = 0 \end{cases} \quad (8.9)$$

Два из множества возможных решений систем (8.1)-(8.9) приведены на рисунке 3 б, в.

## 2. Построение тензоров преобразования для линейных и примитивных систем

Для проведения анализа и синтеза сетевых моделей необходимы средства, позволяющие преобразовывать СП. С этой целью рассмотрим операции объединения и разделения вершин СП-моделей [15].

**Определение 1.** Объединением переходов  $t_i$  и  $t_j$  ( $t_i + t_j$ ) является переход  $t_{ij}$ , для которого справедливо:

$$pre(t_{ij}) = pre(t_i) \cup pre(t_j); post(t_{ij}) = post(t_i) \cup post(t_j)$$

**Определение 2.** Объединением позиций  $p_i$  и  $p_j$  ( $p_i + p_j$ ) является позиция  $p_{ij}$ ,

для которой справедливо:

$$pre(p_{ij}) = pre(p_i) \cup pre(p_j); post(p_{ij}) = post(p_i) \cup post(p_j); \mu(p_{ij}) = \max(\mu(p_i), \mu(p_j))$$

Делению подвергаются вершины, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$|pre(t)| + |post(t)| > 2 \text{ и } |pre(p)| > 1 \text{ или } |post(p)| > 1$$

Будем считать, что при выделении вершин, которые должны подвергаться делению, вес дуг не учитывается. Рассмотрим следующие варианты операций деления позиций и переходов, которые будут использоваться при анализе СП-моделей.

**Определение 3** (деление головной позиции). Если для позиции  $p_j$  выполняются условия:  $pre(p_j) = \emptyset$  и  $post(p_j) = \{t_{i1}, t_{i2},$

...,  $t_{in}$  }, то позиция  $p_j$  делится на  $n$  позиций ( $p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{jk}, \dots, p_{jn}$ ), для которых справедливо:

$$pre(p_{jk}) = \emptyset, \quad post(p_{jk}) = \{t_{ik}\}, \quad \mu(p_{jk}) = \mu(p_j), \quad \text{где } 1 \leq k \leq n.$$

*Определение 4 (деление хвостовой позиции).* Если для позиции  $p_j$  выполняются условия:

$$pre(p_j) = \{t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{in}\} \text{ и } post(p_j) = \emptyset, \text{ то позиция } p_j \text{ делится на } n \text{ позиций } (p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{jk}, \dots, p_{jn}), \text{ для которых справедливо:}$$

$$pre(p_{jk}) = \{t_{ik}\}, \quad post(p_{jk}) = \emptyset, \quad \mu(p_{jk}) = \mu(p_j), \quad \text{где } 1 \leq k \leq n.$$

*Определение 5 (деление позиции с одинаковым числом входных и выходных переходов).* Если для позиции  $p_j$  выполняются условия:  $pre(p_j) = \{t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{in}\}$  и  $post(p_j) = \{t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2n}\}$ , то данная позиция делится на  $n$  позиций ( $p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{jn}$ ), для которых справедливо:  $pre(p_{jk}) = \{t_{1k}\}$ ,  $post(p_{jk}) = \{t_{2k}\}$ , где  $1 \leq k \leq n$ .

*Определение 6.* Если для позиции  $p_j$  выполняются условия:

$$pre(p_j) = \{t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{1m}\}, \quad post(p_j) = \{t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2n}\} \text{ и}$$

а)  $n > m$ , то позиция  $p_j$  делится на позиции  $p_j'$  и  $p_j''$ , для которых справедливо:

$$pre(p_j') = \{t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{1m}\}, \quad post(p_j') = \{t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2m}\}, \quad \mu(p_j') = \mu(p_j), \\ pre(p_j'') = \emptyset, \quad post(p_j'') = \{t_{2(m+1)}, \dots, t_{2n}\}, \\ \mu(p_j'') = \mu(p_j);$$

б)  $n < m$ , то позиция  $p_j$  делится на позиции  $p_j'$  и  $p_j''$ , для которых справедливо:

$$pre(p_j') = \{t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{1n}\}, \quad post(p_j') = \{t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2n}\}, \quad \mu(p_j') = \mu(p_j), \\ pre(p_j'') = \{t_{1(n+1)}, \dots, t_{1m}\}, \quad post(p_j'') = \emptyset, \\ \mu(p_j'') = \mu(p_j)$$

Можно показать, что используя введенные операции, любую СП можно разложить на множество линейных либо линейно-циклических фрагментов (ЛФ), которые одновременно будут относиться

как к классу *автоматных сетей* (каждый переход сети имеет ровно одну входную и ровно одну выходную позицию), так и к классу *синхронизационных сетей* (каждая позиция имеет ровно один входной и ровно один выходной переход) [3]. Сети Петри, которые одновременно относятся к классу автоматных и к классу синхронизационных сетей, будем называть *автоматно-синхронизационными* сетями. Каждому ЛФ можно поставить в соответствие *примитивную систему* (СП-модель, состоящую из множества элементарных сетей [14]), содержащую такое же число переходов, что и ЛФ.

Опишем метод построения тензоров преобразования между ЛФ и примитивной системой.

*Анализ ЛФ, включающего 2 перехода.* ЛФ «длины» 2 и соответствующая примитивная система представлены на рисунке 4а. Матрицы, описывающие данные модели, и начальная разметка приведены на рисунке 4б. Из системы (7) находим тензор  $C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma}$ . На рисунке 4в приведены два возможных варианта данного тензора. Из системы (8) находим тензор  $E_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma}$ . Одно из возможных решений для данного тензора представлено на рисунке 5а.

*Анализ ЛФ, включающего 3 перехода.* ЛФ «длины» 3 и соответствующая примитивная система представлены на рисунке 5а. На рисунке 5б приведены матрицы, описывающие данные модели. На рисунке 5в, г приведены варианты тензоров  $C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma}$  и  $E_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma}$ , полученные на основе систем уравнений (7) и (8).

Можно заметить, что построенные тензоры  $C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma}$  и  $E_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma}$  имеют регулярную структуру, что позволяет сформулировать простые алгоритмы построения данных ТП для ЛФ любой «длины».

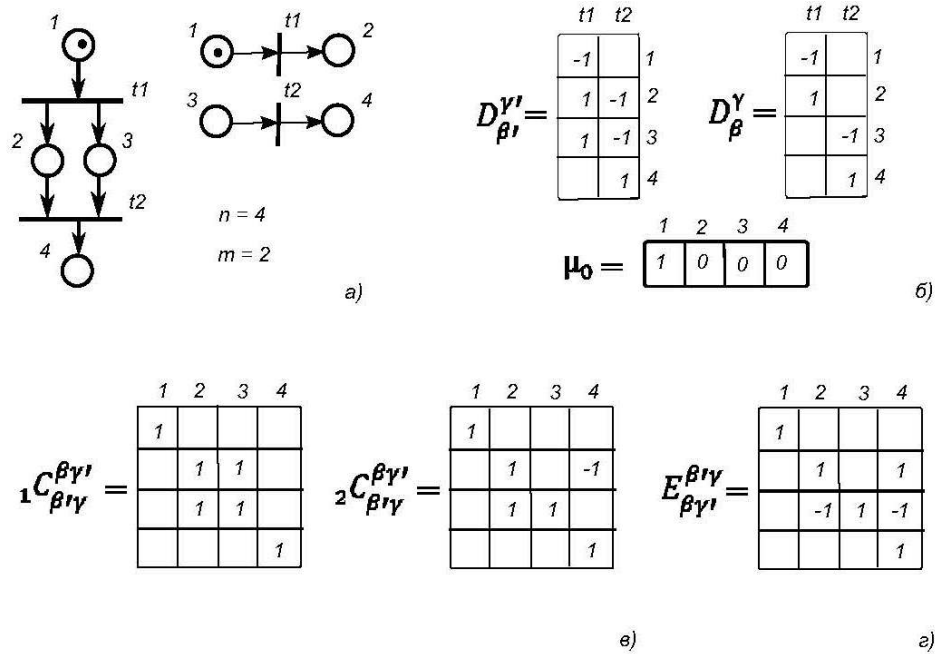


Рис. 4. Результаты анализа ЛБФ «длинной» 2:

- а) линейный базовый фрагмент и эквивалентная примитивная система;  
 б) соответствующие матрицы инцидентности и вектор начальной разметки;  
 в) возможные варианты тензоров преобразования  $C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'}$  и  $E_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'}$

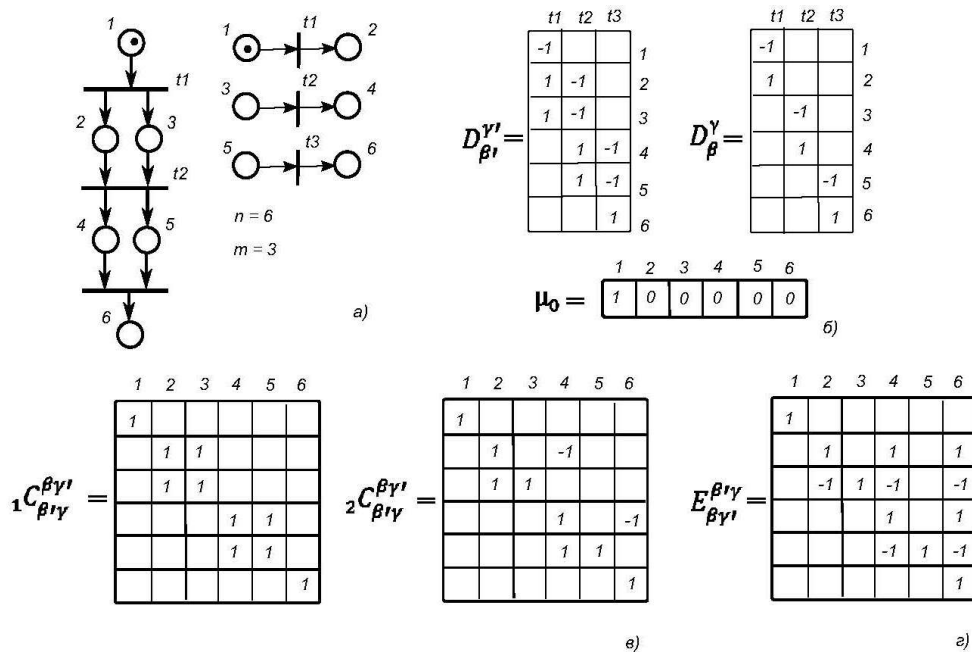


Рис. 5. Результаты анализа ЛБФ «длинной» 3:

- а) линейный базовый фрагмент и эквивалентная примитивная система;  
 б) соответствующие матрицы инцидентности и вектор начальной разметки;  
 в) возможные варианты тензоров преобразования  $C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'}$  и  $E_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'}$



Свойства тензоров преобразования. Рассмотрим систему (9), которая по-

лучена из систем (7) и (8):

$$\begin{cases} D_{\beta'}^{\gamma'} = C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'} \times D_{\beta}^{\gamma} \\ D_{\beta}^{\gamma} = E_{\beta\gamma'}^{\beta'\gamma} \times D_{\beta'}^{\gamma'} \\ \mu_0 = C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'} \times \mu_0 = E_{\beta\gamma'}^{\beta'\gamma} \times \mu_0 \end{cases} \quad (9)$$

Из данной системы следует, что:

$$D_{\beta}^{\gamma} = E_{\beta\gamma'}^{\beta'\gamma} \times C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'} \times D_{\beta'}^{\gamma'} = k_1 \times D_{\beta'}^{\gamma'},$$

а также, что:

$$D_{\beta'}^{\gamma'} = C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'} \times E_{\beta\gamma'}^{\beta'\gamma} \times D_{\beta}^{\gamma} = k_2 \times D_{\beta}^{\gamma}$$

$$\text{и } \mu_0 = k_1 \times \mu_0 = k_2 \times \mu_0.$$

Найдем возможные значения операторов  $k_1$  и  $k_2$  для примера, приведенного на рисунке 1. Для ТП  $C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'}$  и  $E_{\beta\gamma'}^{\beta'\gamma}$ , приведенных на рисунке 3 а, б, значения операторов  $k_1$  и  $k_2$  представлены на рисунке 6 а, б. Для ТП  $C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'}$  и  $E_{\beta\gamma'}^{\beta'\gamma}$  (рис. 3 а, в) значения операторов  $k_1$  и  $k_2$  приведены на рисунке 6 в. На основе полученных результатов можно сделать вывод о

том, что среди возможных значений тензоров  $C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'}$  и  $E_{\beta\gamma'}^{\beta'\gamma}$  можно найти такие, что  $C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'} \times E_{\beta\gamma'}^{\beta'\gamma} = E_{\beta\gamma'}^{\beta'\gamma} \times C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'} = I$ , где  $I$  – единичная матрица (матрица, на главной диагонали которой находятся единицы).

Для ТП, представленных на рисунке 4 в, г, можно отметить следующие свойства:

$${}_1C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'} \times E_{\beta\gamma'}^{\beta'\gamma} \neq I \quad (10)$$

$${}_2C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'} \times E_{\beta\gamma'}^{\beta'\gamma} = E_{\beta\gamma'}^{\beta'\gamma} \times {}_2C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'} = I \quad (11)$$

Для ТП, представленных на рисунке 5 в, г, также справедливы соотношения (10) и (11).

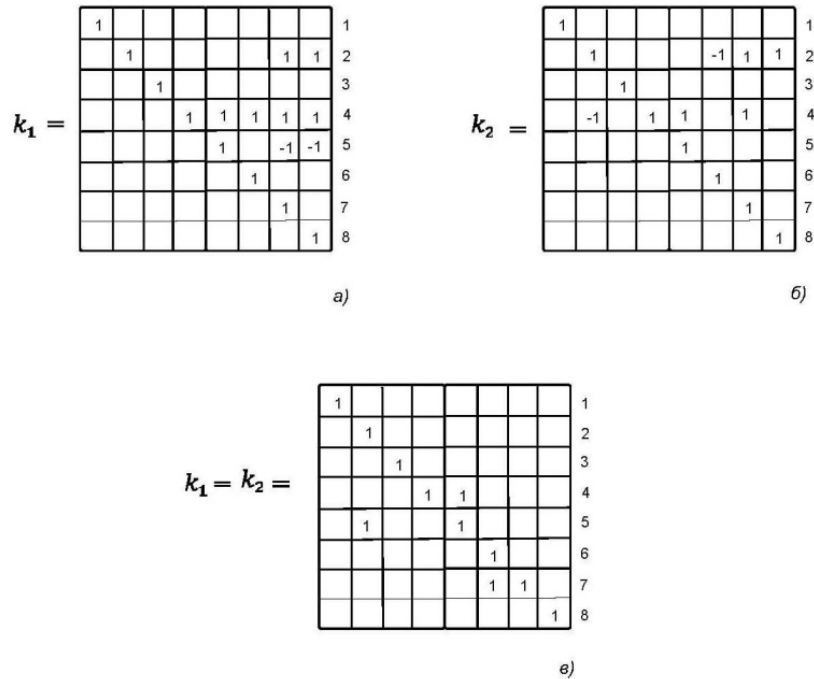


Рис. 6. Возможные значения операторов  $k_1$  и  $k_2$

### 3. Построение тензоров преобразования на основе частных тензоров

Предположим, что некоторая СП-модель  $N$  в результате применения операций деления была преобразована к другой структуре, состоящей из множества ЛФ  $N_L$ . Каждому ЛФ, входящему в  $N_L$ , поставим в соответствие частную примитивную систему, содержащую такое же число переходов, что и выбранный ЛФ. Множество полученных частных примитивных систем образует общую прими-

тивную систему  $N_{PR}$ , СОДЕРЖАЩУЮ ЧИСЛО ПЕРЕХОДОВ РАВНОЕ СУММЕ ЧИСЕЛ переходов частных примитивных систем.

Анализируя матрицу инцидентности  $D_{L\beta'}^{\gamma'}$ , которая описывает систему ЛФ  $N_L$ , можно заметить, что  $D_{L\beta'}^{\gamma'}$  может быть представлена суммой матриц инцидентности  $^{(i)}D_{L\beta'}^{\gamma'}$ , описывающих каждый отдельный ЛФ:

$$D_{L\beta'}^{\gamma'} = ^{(1)}D_{L\beta'}^{\gamma'} + ^{(2)}D_{L\beta'}^{\gamma'} + \dots + ^{(k)}D_{L\beta'}^{\gamma'}, \quad (12)$$

где  $k$  – число ЛФ.

Матрица инцидентности  $D_{PR\beta}^{\gamma}$ , описывающая примитивную систему,

также может быть представлена в виде суммы:

$$D_{PR\beta}^{\gamma} = ^{(1)}D_{PR\beta}^{\gamma} + ^{(2)}D_{PR\beta}^{\gamma} + \dots + ^{(k)}D_{PR\beta}^{\gamma}, \quad (13)$$

где  $^{(i)}D_{PR\beta}^{\gamma}$  ( $i = \overline{1, k}$ ) представляет собой матрицу инцидентности, которая описывает частную примитивную систему, соответствующую  $i$ -му ЛФ, опи-

сываемого матрицей  $^{(i)}D_{L\beta'}^{\gamma'}$ .

Подставим выражения (12) и (13) в выражение (3). Получим:

$$\begin{aligned} ^{(1)}D_{L\beta'}^{\gamma'} + ^{(2)}D_{L\beta'}^{\gamma'} + \dots + ^{(k)}D_{L\beta'}^{\gamma'} &= C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma'} \times \left( ^{(1)}D_{PR\beta}^{\gamma} + ^{(2)}D_{PR\beta}^{\gamma} + \dots + ^{(k)}D_{PR\beta}^{\gamma} \right) = \\ &= C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma'} \times ^{(1)}D_{PR\beta}^{\gamma} + C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma'} \times ^{(2)}D_{PR\beta}^{\gamma} + \dots + C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma'} \times ^{(k)}D_{PR\beta}^{\gamma} \end{aligned} \quad (14)$$

Обозначим через  $n_i$  число позиций в  $i$ -м ЛФ. Можно отметить, что в формировании элементов матрицы  $^{(1)}D_{L\beta'}^{\gamma'}$  (слагаемое  $C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma'} \times ^{(1)}D_{PR\beta}^{\gamma}$ ) участвуют лишь те элементы  $(c_{ij})$  ТП  $C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma'}$ , индексы которых удовлетворяют неравенствам:

$1 \leq i \leq n_1$  и  $1 \leq j \leq n_1$  (так как элементы матрицы  $^{(1)}D_{L\beta'}^{\gamma'}$ , индексы которых превышают  $n_1$ , равны нулю).

Обозначим часть ТП  $C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma'}$ , элементы которого участвуют в формировании матрицы  $^{(1)}D_{L\beta'}^{\gamma'}$ , через  $^{(1)}C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma'}$  и назовем его частным ТП. Аналогично, для получения элементов  $^{(2)}D_{L\beta'}^{\gamma'}$  (слагаемое  $C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma'} \times ^{(2)}D_{PR\beta}^{\gamma}$ ) будут задей-

ствованы лишь те элементы  $(c_{ij})$  ТП  $C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma'}$ , индексы которых удовлетворяют неравенствам:  $n_1 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2$  и  $n_1 + 1 \leq j \leq n_1 + n_2$  (так как для остальных значений индексов элементы матрицы  $^{(2)}D_{PR\beta}^{\gamma}$  также имеют нулевое значение).

Обозначим данную часть ТП  $C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma'}$  через  $^{(2)}C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma'}$ .

Обобщая, можно заключить, что для получения элементов  $^{(l)}D_{L\beta'}^{\gamma'}$  (слагаемое  $C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma'} \times ^{(l)}D_{PR\beta}^{\gamma}$ ) будут использованы лишь те элементы  $(c_{ij})$  ТП  $C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma'}$  ( $^{(l)}C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma'}$ ), индексы которых удовлетворяют неравенствам:

Используя введенные обозначения, ТП  $C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma}$  можно представить в виде суммы:

СУММЫ:

$$+ {}^{(l)}C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'} + \dots + {}^{(k)}C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'}, \quad (15)$$

следующей системой уравнений:

(16)

щим образом:

(17)

систему, но и дает возможность объединить результаты исследования отдельных частей сложных СП-структур в единое целое.

Аналогичные рассуждения можно провести относительно ТП  $E_{\beta\gamma'}^{\beta\gamma}$  и получить, что:

(18)

систему ЛФ добавлены эквивалентные позиции. На рисунке 7 *г* представлены матрицы инцидентности  $D_{\beta}^{\gamma}$  и  $D_{\beta'}^{\gamma'}$ , соответствующие примитивной системе  $N_{PR}$  и системе ЛФ  $N_L$ . Можно заметить, что данные матрицы имеют структуру, соответствующую выражениям (12) и (13).

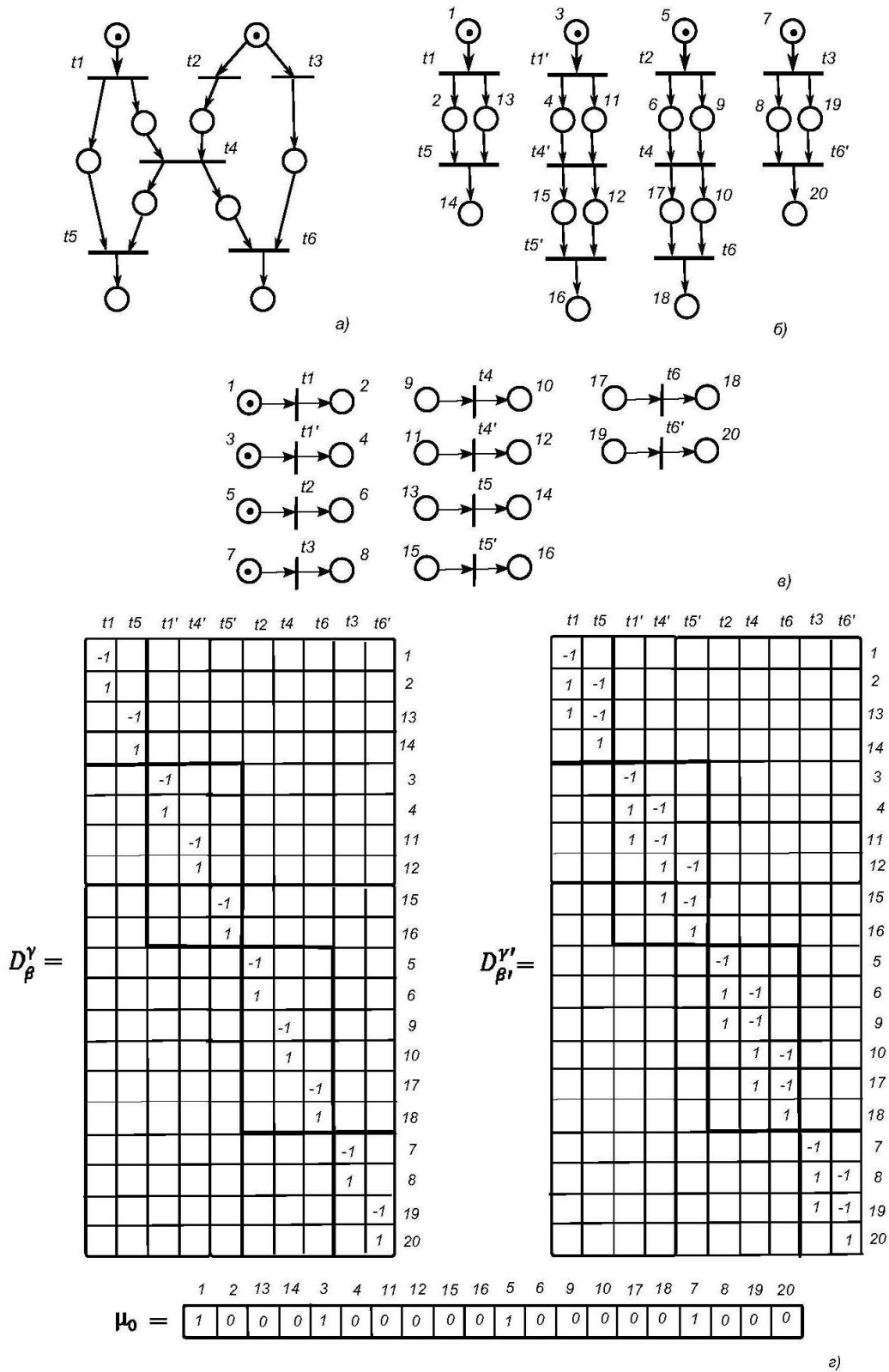


Рис. 7. Исходная СП-модель (а), результаты декомпозиции в виде системы ЛФ (б), примитивная система (в), матрицы инцидентности и вектор начальной разметки (г)

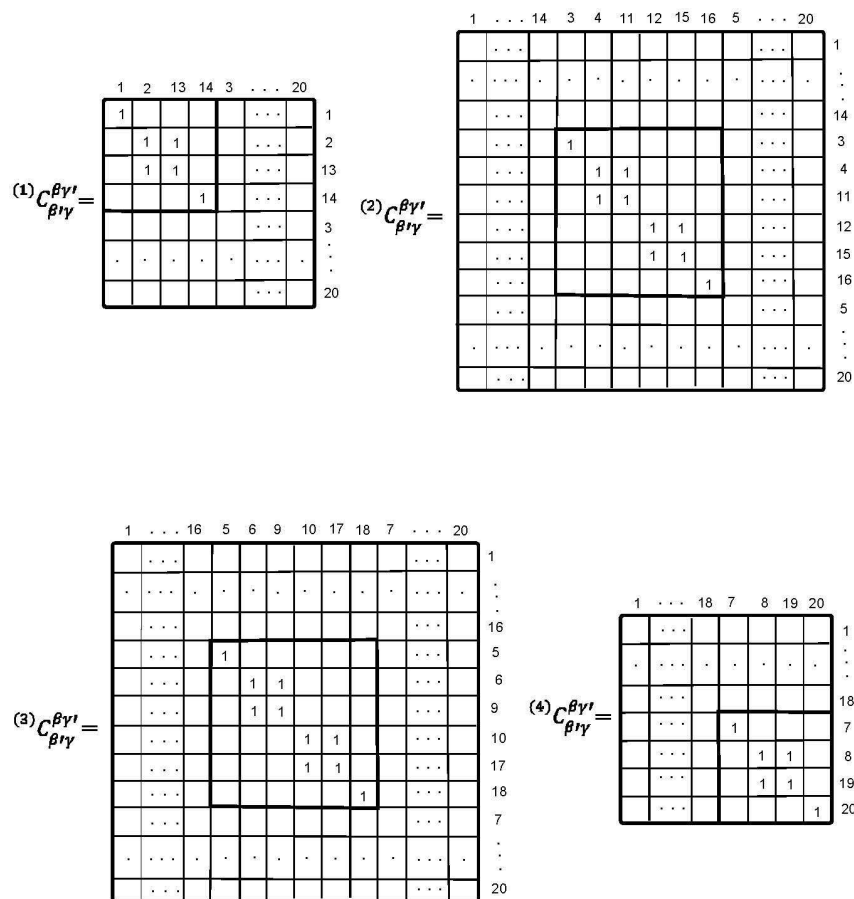


Рис. 8. Частные тензоры преобразования

Используя выражение (17), построим тензор преобразования  $C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'}$

путем построения частных тензоров. Для нашего примера:

$$C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'} = {}^{(1)}C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'} + {}^{(2)}C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'} + {}^{(3)}C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'} + {}^{(4)}C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'}$$

Возможные значения данных частных тензоров преобразования представлены на рисунке 8 (выделены квадратом). На рисунке 9 представлен общий тензор преобразования  $C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'}$ . Подставляя полученный ТП в систему тензорных уравнений (7), можно убедиться в правильности проведенных построений.

### Заключение

В данной статье предложены методы построения ТП, позволяющие проводить преобразования системы координат и представлять исследуемые СП-модели с различных точек зрения. Из-

вестно, что от выбора системы координат существенно зависит сложность методов и алгоритмов анализа сложных объектов. В статье описан общий метод построения ТП, основанный на общепринятых методах решения систем линейных уравнений. Кроме этого, показан метод построения ТП, основанный на предварительном построении частных ТП и объединении полученных результатов. Анализ частных ТП позволяет сделать вывод, что тензоры преобразования примитивной системы в систему ЛФ любой размерности могут быть построены без решения самой системы тензорных уравнений. В основе данного алгоритма лежит про-

стейшая процедура построения частных ТП для *автоматно-синхронизационных* сетей (к которым относятся линейные и линейно-циклические фрагменты) и соответствующих примитивных сетей лю-

*бой размерности*. Данный алгоритм характеризуется линейной сложностью и требует минимальных затрат машинного времени.

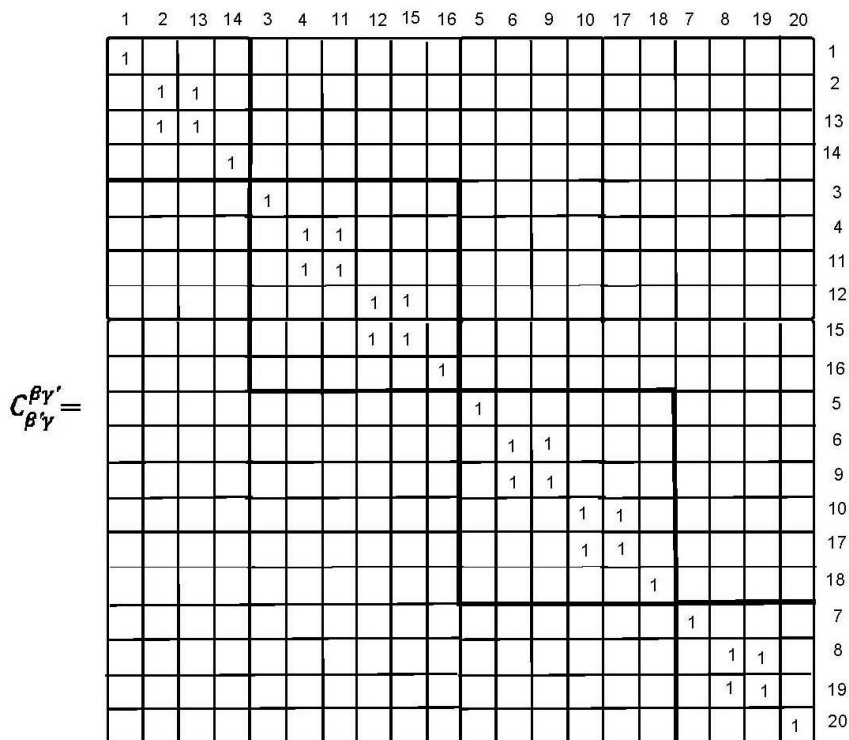


Рис. 9. Общий тензор преобразования

Предполагается, что дальнейшим развитием описанных в данной статье результатов будет построение быстродействующих алгоритмов синтеза СП-моделей сложных систем на основе объединения вершин примитивной системы

и преобразования полученных структур в исходную систему координат.

*Поддержка.* Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (номер проекта 15-11-10010).

### Литература

1. Когаловский М.Р. Перспективные технологии информационных систем – М.: ДМК Пресс, 2003. – 288 с.
2. Анкундинов Г.И. Синтез структуры сложных объектов. Логико-комбинаторный подход – Л. ЛГУ, 1986. – 258 с.
3. Котов В.Е. Сети Петри – М.: Наука, 1984.
4. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем – М.: Мир, 1984.
5. Кулагин В.П. Проблемы анализа и синтеза структур параллельных вычислительных систем // Информационные технологии. – 1997. – № 1. – С.2-8.
6. 32nd International Conference on Application and Theory of Petri Nets and Concurrency, 2011 / [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.jaist.ac.jp/acsd-petrinets2011/>.
7. 33nd International Conference on Application and Theory of Petri Nets and Concurrency (Petri Nets 2012), Hamburg, Germany, June 25–29, 2012 / [Электронный ресурс] –

Режим доступа: <http://www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/PetriNets/meetings/pn2012/>.

8. 34th International Conference on Application and Theory of Petri Nets and Concurrency (Petri Nets 2013), Milano, Italy, June 24-28, 2013 / [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.mc3.disco.unimib.it/petrinets2013/>.

9. Крон Г. Тензорный анализ сетей – М.: Сов. Радио, 1978. – 720 с.

10. Петров А.Е. Тензорная методология в теории систем – М.: Радио и связь, 1985. – 152 с.

11. Крон Г. Исследование сложных систем по частям (диакоптика) – М.: Наука, 1972. – 544 с.

12. Кулагин В.П. Исследование моделей вычислительных систем методом преобразования координат // Вычислительная техника в автоматизированных системах контроля и управления. Межвуз. сб. научн. тр. – Вып. 20. – Пенза: Пенз. политехн. ин-т. – 1990. – С. 4-7.

13. Кулагин В.П. Тензорные методы проектирования структур вычислительных систем // АВТ. – 1989. – № 2. – С.64-71.

14. Кулагин В.П. Тензорные методы исследования структур сетей Петри // Информационные технологии. – 2015. – № 2. – С. 83-94.

15. Кулагин В.П. Методы анализа сетевых моделей вычислительных систем // Автоматизация и современные технологии. – 1993. – № 1. – С.31-34.