УДК 519.6

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СЕТЕЙ ПЕТРИ

© 2009 г. П.В. Желтов

Рассмотрены различные формы представления сетей Петри: графовая, матричная и аналитическая. Получены алгоритмы перехода от формальной записи к аналитическому представлению и от аналитической записи к матричной форме представления.

Ключевые слова: сети Петри, графовая форма, матричное представление, аналитическое представление, матрица инцидентности, алгоритм перехода.

Введение

Формально сеть Петри задается как пятерка

$$C = \left(P, T, H, M^{(0)}\right),$$

где $P = \left\{ p_i \,\middle|\, i = \overline{1, n_p} \right\}$ – конечное множество позиций сети;

$T = \left\{ t_j \,\middle|\, j = \overline{1, n_t} \right\}$ – конечное множество переходов, где n_t – количество переходов сети;

$\Phi : P \times T \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ – прямая функция инцидентности;

$\mathrm{H} : T \times P \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ – обратная функция инцидентности.

Эти функции определяются следующим образом: если из позиции p_i в переход t_j ведет дуга кратности n, то $\Phi\left(p_i, t_j\right) = n$, и наоборот, если из перехода t_j в позицию p_i ведет дуга кратности m, то $\mathrm{H}\left(t_j, p_i\right) = m$;

$M^{(0)} : P \to \{1, 2, \ldots\}$ – начальная маркировка сети, задающая начальное размещение меток по позициям сети [1, 2].

Существуют различные математические формы представления сетей Петри [2].

Графовая форма представления сети Петри – это двудольный ориентированный граф с двумя типами вершин: позициями и переходами. Ориентированные дуги соединяют либо позицию и переход, либо переход и позицию и имеют некоторую кратность.

Графически кратные дуги изображаются как единичные и помечаются целым положительным числом, обозначающим кратность. Позиции изображаются кружками, переходы черточками или прямоугольниками. Позиции обладают неограниченной или ограниченной емкостью.

Маркировка (состояние) отражает количество меток, находящихся в позициях сети, и ее можно записать в виде вектора длины n_p, где n_p – число позиций, т.е. $M = \left(\mu_1,\ \mu_2, \ldots,\ \mu_{n_p}\right)$.

Графовая форма наглядна, удобна для сопоставления с моделируемым процессом.

Матричное представление сети Петри – это две матрицы инцидентности D^- и D^+, элементами которых являются числа дуг, связывающих позиции и переходы между собой. Каждая матрица имеет n_t строк (по одной на переход) и n_p столбцов (по одному на позицию), и элемент матрицы D^- определяет входы в переходы – указывает кратность дуг, ведущих из позиций в этот переход (так формируются строки этой матрицы), а матрица D^+ определяет выходы из перехода.

Это представление эквивалентно представлению (P, T, F, W, M) из работы [1], где F – функция инцидентности; W – функция кратности дуг; M – начальная разметка сети, причем $F : P \times T \cup T \times P \to \{0,1\}$, $W : F \to N \setminus \{0\}$; N – множество натуральных чисел.

Матричная форма представления удобна для формального и машинного анализа, хотя и занимает много машинной памяти.

Подстановочное представление – это множество выражений вида $\theta_j : S'_j \to S''_j,\ j = \overline{1, n_t}$. Каждая подстановка θ_j выражает входные и выходные условия перехода t_j следующим образом:

$$S'_j = \left\{ \left(x_i \ge b_{ij}, p_i\right) : p_i \in I\left(t_j\right) \right\};$$

$$S''_j = \left\{ \alpha : p_j \in I\left(t_j\right) \right\} \cup \left\{ \beta : p'_i \in O\left(t_j\right) \right\}.$$

где $\alpha = \left(x_i - b_{ij}, p_i\right)$, $\beta = \left(y_i + f_{ij}, p'_i\right)$.

Аналитическое представление сетей Петри

Фрагментом сети L_j назовем подсеть, включающую переход $t_j \in T$ и все позиции – как входные, так и выходные, вместе с дугами, соединяющими эти позиции с переходом t_j. Тот факт, что переход t_j связан с какой-либо позицией p_i дугой кратности n, будет записываться с помощью знака «умножение» следующим образом: $p_i^n t_j$, если p_i – входная позиция для перехода t_j; и $t_j p_i^n$, если p_i – выходная позиция для t_j. Так как в общем случае переходу t_j инцидентно несколько вершин, то любой фрагмент можно представить в виде:

$$L_j = \prod_{i \in \{i(j)\}} p_i^{s_{ij}} t_j \prod_{k \in \{k(j)\}} p_k^{r_{kj}} = I_j t_j O_j,$$

где $I_j = \prod_{i \in \{i(j)\}} p_i^{s_{ij}}$ – произведение входных позиций перехода t_j; $O_j = \prod_{k \in \{k(j)\}} p_k^{r_{kj}}$ – произведение выходных позиций перехода t_j; $i(j)$, $k(j)$ определяются элементами матриц D^- и D^+.

Сеть Петри в целом представима в виде суммы отдельных фрагментов с помощью знака сложения «+»:

$$L = L_1 + L_2 + ... + L_{n_i} = \sum_{j=1}^{n_t} L_j \quad \text{или}$$

$$L = \sum_{j=1}^{n_t} \prod_{i \in \{i(j)\}} p_i^{s_{ij}} t_j \prod_{k \in \{k(j)\}} p_k^{r_{kj}} = \sum_{j=1}^{n_t} \left(I_j t_j O_j\right).$$

Такое представление сети обладает очевидными преимуществами – наглядностью представления сети, позволяющей сразу узнать, какие позиции являются входными и выходными для данного перехода, компактностью и целостностью представления сети. Если к тому же указать маркировку каждой позиции в виде:

$$L = \sum_{j=1}^{n_t} \prod_{i \in \{i(j)\}} p_i^{s_{ij}} (\mu_i) t_j \prod_{i \in \{k(j)\}} p_k^{r_{kj}} (\mu_k),$$

то такое представление будет содержать полнейшую информацию о сети.

Приведенные здесь операции сложения и умножения выполняют лишь связывающую роль и обладают следующими свойствами:

1) $L_1 + L_2 = L_2 + L_1$;
2) $(L_1 + L_2) + L_3 = L_1 + (L_2 + L_3)$;
3) $ItO \neq OtI$,

но внутри произведений I и O позиции можно представлять:

4) $p_i p_k t_j = p_k p_i t_j$;
5) $p_i t_j + p_i t_k = p_i (t_j + t_k)$;
6) $(p_i + p_k) t_j = p_i t_j + p_k t_j = p_i p_k t_j$.

Правила срабатывания переходов

Динамику сетей Петри определяют правила срабатывания переходов. Для формирования этих правил требуется определить множество входных и выходных позиций перехода. Индексы этих позиций в аналитической записи сети Петри i и k зависят от номера перехода, т.е. $i = i(j)$, $k = k(j)$.

При вычислении этих индексов применяется специальное число λ, обладающее свойствами:

$\lambda + \lambda + \ldots + \lambda = 0$;
$\lambda + 1 = 1 + 1 = 2$;
$\lambda + \lambda + \ldots + \lambda + 1 = n + 1$ (здесь $n \in N$);
$\lambda / \lambda = \lambda$;
$\lambda + 1 + \lambda + \ldots + \lambda = 1 + 1 + 0 + \ldots + 0 = 2$.

Найти индексы i и k можно по следующим формулам:

$$i(j) = \sum_{n=1}^{r} \frac{s_{nj}}{s_{nj}}, \quad k(j) = \sum_{n=1}^{r} \frac{r_{nj}}{r_{nj}},$$

где $j = \overline{1, n_t}$, $r = \overline{1, n_p}$ в зависимости от слагаемых: каждый раз сумма считается до появления слагаемого, равного единице. В первый раз – до появления первой единицы, далее сначала и до появления второй единицы и т.д. В последний раз сумма считается при $r = n_p$.

Если $s_{nj} = 0$ или $r_{nj} = 0$, то заменяем эти нули специальным числом λ и подсчет суммы ведем с учетом свойств этого числа.

Получить аналитическую запись сети Петри из ее формального задания можно по следующему алгоритму.

Алгоритм перехода от формального задания сети Петри к аналитическому представлению

$L := 0$. //Формируем аналитическую запись сети

//Для каждого номера перехода сети $j = \overline{1, n_t}$ выполнять следующие //действия:

for j $:=1$ *to* n_t *do*

$$\begin{cases} I_j := 1; \; O_j := 1; \\ \{i(j)\} := \varnothing; \; \{k(j)\} := \varnothing. \end{cases}$$

for l $:=1$ *to* n_p *do*

$$if\ \Phi(p_l,t_j) <> 0\ then$$

$$\begin{cases} s_{lj} := \Phi(p_l,t_j); \\ I_j := I_j \cdot p_l^{s_{lj}}(\mu_l); \end{cases}$$

$$\{i(j)\} := \{i(j)\} \cup \{l\}$$

$$if\ \mathrm{H}(t_j,p_l) <> 0\ then$$

$$\begin{cases} r_{lj} := \mathrm{H}(t_j,p_l); \\ O_j := O_j p_l^{r_{lj}}(\mu_l); \end{cases}$$

$$\{k(j)\} := \{k(j)\} \cup \{l\}.$$

$L_j := I_j \cdot t_j \cdot O_j$ //Запись j-го фрагмента сети

$$L := L + L_j.$$

Если требуется от аналитической формы представления сети Петри перейти к матричной, можно использовать следующий алгоритм. Пусть дана аналитическая запись сети Петри:

$$L = \sum_{j=1}^{n_t} L_j \sum_{j=1}^{n_t} I_j t_j O_j = \sum_{j=1}^{n_t} \prod_{i \in \{i(j)\}} p_i^{s_{ij}}(\mu_i) t_j \prod_{k \in \{k(i)\}} p_k^{r_{kj}}(\mu_k).$$

Матрицу инцидентности для матричной формы представления сети будем искать в виде:

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n_p} \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ d_{n_t} & \dots & d_{n_t n_p} \end{pmatrix},$$

где $d_{ji} = r_{ij} - s_{ij}$, $i = \overline{1,n_p}$, $j = \overline{1,n_t}$.

Алгоритм перехода от аналитического представления сети Петри к матричному представлению

for j:=1 *to n_t do*

//Для каждого номера $j = \overline{1,n_t}$ выполнять следующие действия:

for i:=1 to n_p *do*.

//Для каждого номера $i = \overline{1,n_p}$ выполнять следующие действия:

$$d_{ji} := 0.$$

$$if\ p_i \in I_j\ then\ d_{ji} := d_{ji} - s_{ij}.$$

$$if\ p_i \in O_j\ then\ d_{ji} := d_{ji} + r_{ij}.$$

Результаты

Рассмотрены различные представления сетей Петри: формальное, графовое, матричное и подстановочное представления сетей Петри. Получено аналитическое представление сетей Петри. Разработаны алгоритмы перехода от матричного представления сетей Петри к аналитическому представлению и обратно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Котов В.Е.* Сети Петри / В.Е. Котов. М.: Наука, 1984. 160 с.
2. *Питерсон Дж.* Теория сетей Петри и моделирование систем / Пер. с англ. Дж. Питерсон. М.: Мир, 1984. 264 с.

Поступила в редколлегию 19.03.09

ANALYTICAL REPRESENTATION OF PETRI NETS

P.V. Zheltov

We consider here a number of different forms of Petri net representation, more specifically, the pictorial, matrix, and analytical forms. Also presented are the algorithms of transition from formal record to the analytical form, and from the analytical record to the matrix form of representation.

Key words and expressions: Petri nets; pictorial form; matrix representation; analytical representation; incidence matrix; algorithm of transition.

Желтов Павел Валерианович – канд. техн. наук, доцент кафедры «Компьютерные технологии». ЧГУ имени И.Н. Ульянова, tchouvachie @ yandex.ru