

УДК 512.8

## ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ В КЛАССЕ ОКРЕСТНОСТНЫХ СИСТЕМ

© А.М. Шмырин, И.А. Седых

**Ключевые слова:** окрестностные системы; сети Петри; нейронные сети; нейронные сети Петри. Рассмотрены окрестностные модели сетей Петри, нейронных сетей как частные случаи обобщенной окрестностной модели. Показано, что введенные ранее нейронные сети Петри являются динамическими недетерминированными окрестностными моделями.

## ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] введены и исследованы окрестностные модели, развивающие общие подходы теории систем и являющиеся обобщением для традиционных дискретных моделей, таких как конечные автоматы, клеточные автоматы, сети Петри и т. д.

В [4] показано, что дискретные модели, в частности сети Петри и нейронные сети, являются разновидностью окрестностных систем с некоторыми вариациями.

В [5–6] дано понятие нейронной сети Петри, расширяющей моделирующие возможности применения аппарата сетей Петри. Покажем, что нейронная сеть Петри также является разновидностью окрестностных систем.

## 1. ОБОБЩЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОКРЕСТНОСТНОЙ МОДЕЛИ

В [4] введено обобщенное определение окрестностной модели. Окрестностная модель в общем случае описывается набором  $NS_G = (N, X, V, Y, Z, G, F, X[0])$ , где:

1)  $N = (A, O_x, O_v, O_y)$  – структура окрестностной модели,  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  – множество узлов,  $O_x$  – окрестности связей узлов по состояниям,  $O_v$  – окрестности связей узлов по управлениям,  $O_y$  – окрестности связей узлов по выходным воздействиям. Для каждого узла  $a_i \in A$  определена своя окрестность по состояниям  $O_x[a_i] \subseteq A$ , управлениям  $O_v[a_i] \subseteq A$  и выходам  $O_y[a_i] \subseteq A$ ;  $O_x = \bigcup_{i=1}^n O_x[a_i]$ ,  $O_v = \bigcup_{i=1}^n O_v[a_i]$ ;  $O_y = \bigcup_{i=1}^n O_y[a_i]$ ;

2)  $X \in R^n$  – вектор состояний окрестностной модели в текущий момент времени;

3)  $V \in R^m$  – вектор управлений окрестностной модели в текущий момент времени;

4)  $Y \in R^l$  – вектор выходов окрестностной модели в текущий момент времени;

5)  $Z \in R_+^n$  – вектор временных задержек в узлах, где  $R_+$  – множество неотрицательных действительных чисел;

6)  $G: X_{O_x} \times V_{O_v} \rightarrow X$  – функция пересчета состояний окрестностной модели (в общем случае недетерминированная), где  $X_{O_x}$  – множество состояний узлов, входящих в окрестность  $O_x$ ;  $V_{O_v}$  – множество управлений узлов, входящих в окрестность  $O_v$ ;

7)  $F: X_{O_x} \times V_{O_v} \rightarrow Y$  – функция пересчета выходов окрестностной модели (в общем случае недетерминированная);

8)  $X[0]$  – начальное состояние модели.

В частных случаях для различных дискретных моделей отдельные составляющие окрестностной модели могут отсутствовать.

Функции  $G$  и  $F$  могут быть произвольными, линейными или нелинейными. В линейном случае функцию пересчета состояний и функцию пересчета выходов окрестностной модели можно представить в виде системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} W_x[t+1] \cdot X[t+1] = W_x[t] \cdot X[t] + W_v[t] \cdot V[t] \\ W_y[t+1] \cdot Y[t+1] = W_x[t] \cdot X[t] + W_v[t] \cdot V[t] \end{cases} \quad (1)$$

В случае, когда функции  $G$  и  $F$  являются нелинейными, модель (1) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} X[t+1] = G(X[t], V[t]) \\ Y[t+1] = F(X[t], V[t]) \end{cases} \quad (2)$$

## 2. СЕТЬ ПЕТРИ КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ОКРЕСТНОСТНОЙ МОДЕЛИ

В [2] было показано, что сеть Петри является динамической недетерминированной окрестностной моде-

лю  $NS_{PN} = (N, X, V, W, X[0])$ , причем система (1) в случае сети Петри принимает вид:

$$\begin{aligned} & [W_x^1[t+1] \ W_x^2[t+1] \ \dots \ W_x^m[t+1]] \cdot D[t] \cdot X[t+1] = \\ & = [W_x^1[t] \ W_x^2[t] \ \dots \ W_x^m[t]] \cdot D[t] \cdot X[t] + \\ & + [W_v^1[t] \ W_v^2[t] \ \dots \ W_v^m[t]] \cdot D[t] \cdot V[t], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $W_x^k[t+1] \in R^{n \times n}$ ,  $W_x^k[t] \in R^{n \times n}$  – матрицы коэффициентов  $k$ -го слоя по состояниям в моменты времени  $t+1$  и  $t$ , соответственно;  $W_v^k[t] \in R^{n \times n}$  – матрица коэффициентов  $k$ -го слоя по входам в момент времени  $t$ ;  $X[t+1] \in R^n$ ,  $X[t] \in R^n$  – вектор состояний окрестностной системы в моменты времени  $t+1$  и  $t$ , соответственно;  $V[t] \in R^n$  – вектор входов в момент времени  $t$ ;  $D[t] \in R^m$  – случайный вектор, состоящий из нулей и одной единицы в позиции, соответствующей выбираемому слою  $k$ , по уравнениям которого происходит пересчет состояний узлов окрестностной модели в следующий момент времени  $t+1$ .

В формуле (3) умножение блочной матрицы  $[W^1[t] \ W^2[t] \ \dots \ W^m[t]]$  на вектор  $D[t] = [d_1[t] \ d_2[t] \ \dots \ d_m[t]]^T$  происходит по следующему правилу:  $[W^1[t] \ W^2[t] \ \dots \ W^m[t]] \cdot D[t] = \sum_{k=1}^m W^k[t] \cdot d_k[t]$ .

### 3. НЕЙРОННАЯ СЕТЬ КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ОКРЕСТНОСТНОЙ МОДЕЛИ

В [4] было показано, что нейронная сеть является окрестностной моделью  $NS_{NN} = (N, V, Y, F)$ , причем система (2) в случае нейронной сети принимает вид:

$$\sum_{\beta \in O_y[a_{ij}]} w_y[a_{ij}, \gamma] v[\gamma] = F_{ij} \left( \sum_{\beta \in O_v[a_{ij}]} w_v[a_{ij}, \beta] v[\beta] \right), \quad (4)$$

где  $O_v[a_{ij}]$  – окрестность узла  $a_{ij}$  по  $v$ ;  $O_y[a_{ij}]$  – окрестность узла  $a_{ij}$  по  $y$ , состоящая из одного узла  $a_{ij}$ ,  $a_{ij} \in A$ ;  $v[a_{ij}] \in R^m$  – вход в узле  $a_{ij}$  модели;  $y[a_{ij}] \in R^l$  – выход в узле  $a_{ij}$  модели;  $w_v[a_{ij}, \beta] \in R^{c \times m}$ ,  $w_y[a_{ij}, \gamma] \in R^{c \times l}$  – матрицы-параметры,  $\beta, \gamma \in A$ ;  $F_{ij}: V \rightarrow Y$  – некоторая функция.

Модель (4) в общем виде:

$$W_y \cdot Y = F(V). \quad (5)$$

### 4. ПОНЯТИЕ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ПЕТРИ

В [5–6] дано определение нейронной сети Петри. Внесем некоторые изменения и зададим нейронную сеть Петри набором  $NPN = (P, T, F, q, EP, g, h, C, m_0)$ , где:

1)  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  – непустое конечное множество позиций;

2)  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  – непустое конечное множество переходов (множества  $P$  и  $T$  не пересекаются:  $P \cap T = \emptyset$ );

3)  $F \subseteq (P \times T \cup T \times P)$  – отношение, соответствующее множеству дуг;

4)  $q \in R$  – величина, соответствующая времени жизни («потенциалу») метки в позиции;

5)  $EP = (ep_1 \ ep_2 \ \dots \ ep_m)^T$  – пороговый вектор, где  $ep_j \in N$  ( $j = 1, \dots, m$ ) – величина, равная минимальному суммарному потенциалу меток в каждой входной позиции перехода  $t_j$ , необходимому для его активизации;

6)  $g: P \rightarrow R$  – функция для определения суммарного потенциала меток в каждой позиции в определенный момент времени;

7)  $C = \{a, b\}$  – множество цветов меток, где  $a$  – метки с положительным (возбуждающим) потенциалом,  $b$  – метки с отрицательным (тормозящим) потенциалом;

8)  $h: T \times P \rightarrow C$  – функция раскраски выходных дуг переходов;

9)  $m_0 = (m_1^0 \ m_2^0 \ \dots \ m_n^0)^T$  – вектор начальной маркировки сети Петри, при этом  $m_i^0 \in R^n$  ( $i = 1, \dots, n$ ) – множество потенциалов меток в позиции  $p_i$  до начала функционирования нейронной сети Петри.

Нейронная сеть Петри функционирует в условном модельном времени  $t = 0, 1, 2, \dots$ .

Каждой метке в сети соответствует потенциал  $q$  (время жизни). При появлении метки в позиции ей присваивается потенциал  $q$ . По истечении каждой единицы модельного времени величина  $q$  уменьшается на единицу. Это уменьшение демонстрирует ослабление потенциала после начального стимулирования нейрона [5].

В процессе функционирования сети для каждой нейронной позиции  $p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) в текущий момент модельного времени  $t$  вычисляется значение функции суммарного потенциала  $g[i, t]$ .

Функцию  $g$  можно задать, например, следующей формулой [6]:

$$g[i, t] = \sum_{d=0}^{q-1} \frac{q-d}{q} K[i, t-d] - \sum_{d=0}^{q-1} \frac{q-d}{q} J[i, t-d], \quad (6)$$

где  $K[i, t]$  – количество меток цвета  $a$  в позиции  $p_i$  в момент модельного времени  $t$ ;  $J[i, t]$  – количество

меток цвета  $b$  в позиции  $p_i$  в момент модельного времени  $t$ .

Для активизации перехода  $t_j$  ( $j=1, \dots, m$ ) необходимо, чтобы потенциал всех его входных позиций  $p_i$  достиг определенной пороговой величины  $ep_j$ . Переход  $t_j$  ( $j=1, \dots, m$ ) является активным в момент модельного времени  $t$ , если  $\forall p_i$  ( $i=1, \dots, n$ ):  $\{p_i, t_j\} \subseteq F$   $g[i, t] \geq ep_j$ .

Если в какой-либо момент времени активно несколько переходов, то срабатывает только один из них, выбранный случайным образом. Активный переход срабатывает немедленно.

В результате срабатывания перехода во всех его выходных позициях появляется метка. Каждая метка при этом приобретает потенциал, соответствующий цвету выходной дуги перехода. Только те метки, потенциалы которых учтены в функции  $g[i, t]$ , удаляются из входных позиций перехода. Остальные метки остаются в позициях до тех пор, пока их потенциал не станет равным нулю либо до следующего срабатывания перехода [5–6].

##### 5. НЕЙРОННАЯ СЕТЬ ПЕТРИ КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ОКРЕСТНОСТНОЙ МОДЕЛИ

Покажем, что нейронная сеть Петри является динамической недетерминированной окрестностной моделью.

Поставим в соответствие позициям нейронной сети Петри  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  узлы окрестностной модели  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .

Окрестностная модель нейронной сети Петри функционирует в условном времени, единица которого равна такту системы. В текущий момент времени  $t$  состояние окрестностной модели  $X[t] = [x[1, t], x[2, t], \dots, x[n, t]]^T$ , где  $x[i, t]$  – множество окрашенных потенциалов меток в узле  $a_i$  ( $i=1, \dots, n$ ). Для удобства рассмотрения потенциал метки кратен такту системы.

Зададим структуру окрестностной модели нейронной сети Петри  $N = (A, O_x, O_v)$ . Все множество связей между узлами  $A$  разобьем на  $m$  совокупностей окрестностей (слоев)  $O[1], O[2], \dots, O[m]$ . В каждый  $k$ -й слой ( $k=1, \dots, m$ ) входят все узлы окрестностной модели  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  и часть связей между ними, соответствующая  $k$ -му переходу нейронной сети Петри. Так, узел  $a_j$  принадлежит окрестности узла  $a_i$  в  $k$ -м слое ( $k=1, \dots, m$ ) или  $a_j \in O[k]_{a_i}$ , если  $\{p_i, t_k\} \subseteq F$  и  $\{t_k, p_j\} \subseteq F$  ( $i=1, \dots, n, j=1, \dots, n$ ), причем окрестности по состояниям и входным воздействиям в окрестностной модели нейронной сети Петри совпадают, т. е.  $a_j \in O[k]_{a_i} \Leftrightarrow (x[j] \in O[k]_{x[i]} \text{ и } v[j] \in O[k]_{v[i]})$ .

Матрица смежности  $k$ -го слоя ( $k=1, \dots, m$ ) формируется с учетом раскраски дуг:  $s_{ij}^k = h(t_k, p_j)$  (раскраска выходной дуги перехода), если  $a_j \in O[k]_{a_i}$ , ( $i=1, \dots, n, j=1, \dots, n, k=1, \dots, m$ ).

На каждый узел  $a_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) окрестностной модели нейронной сети Петри в каждый момент времени  $t$  воздействует управляющий сигнал  $v[i, t]$ , определяющий величину изменения состояния  $x[i, t]$  этого узла.

Слой  $k$  ( $k=1, \dots, m$ ) в момент времени  $t$  является активным, если выполняется следующее условие:

$$g([i, t]) \geq ep_k \quad \forall i \neq j : s_{ij}^k \neq 0, \quad (i=1, \dots, n, j=1, \dots, n). \quad (7)$$

Обозначим  $O_t$  множество всех слоев, активных в текущий момент времени  $t$ .

Состояние узлов  $a_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) окрестностной модели нейронной сети Петри пересчитывается по формулам (8)–(9).

Пересчет состояния в узле  $a_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) в момент  $t$  активизации  $k$ -го слоя ( $k=1, \dots, m$ ):

$$x'[j, t] = H_j^k(X[t], V[t]) = \begin{cases} x[j, t] \cup v^k[j, t], & \exists i \neq j : a_j \in O[k]_{a_i} \\ x[j, t] \setminus v^k[j, t], & \exists i \neq j : a_i \in O[k]_{a_j}, \end{cases} \quad (8)$$

где  $v^k[j, t]$  – множество окрашенных потенциалов меток, появляющихся или исчезающих в узле  $a_j$  после активизации  $k$ -го слоя.

Пересчет потенциалов меток в узле  $a_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) в момент  $t+1$  после активизации  $k$ -го слоя ( $k=1, \dots, m$ ):

$$x[j, t+1] = L_j^k(X'[t]) = \begin{cases} \text{sign}(\eta) \cdot (\text{abs}(\eta) - 1) & \forall \eta \in x'[j, t] : \eta \neq q, \\ \eta, & \text{иначе} \end{cases} \quad (9)$$

где  $\eta$  – элементы множества окрашенных потенциалов меток в узле  $a_j$  ( $j=1, \dots, n$ ).

Для каждого  $k$ -го слоя окрестностной модели нейронной сети Петри система уравнений (8)–(9) будет иметь вид:

$$X[t+1] = L^k(H^k(X[t], V[t])) = G^k(X[t], V[t]). \quad (10)$$

В каждый момент времени  $t = \{0, 1, 2, \dots, q, \dots\}$  на основании текущего состояния узлов модели  $X[t]$  формируется случайный вектор  $D[t] \in R^m$ , состоящий из нулей и одной единицы в позиции, соответствующей выбираемому активному слою  $k$ . То есть  $d_k[t] = 1$ , ( $k = 1, \dots, m$ ), если  $O[k] \in O_t$  и слой  $k$  выбран для активизации в текущий момент времени  $t$  случайным образом из множества активных слоев  $O_t$ ; иначе  $d_k[t] = 0$ .

Таким образом, уравнение окрестностной модели нейронной сети Петри  $NS_{NPN}$  будет иметь вид:

$$X[t+1] = [G^1(X[t], V[t]) \ G^2(X[t], V[t]) \dots \times G^m(X[t], V[t])] \cdot D[t] \quad (11)$$

или

$$X[t+1] = G(X[t], V[t]), \quad (12)$$

где  $G(X[t], V[t]) = [G^1(X[t], V[t]) G^2(X[t], V[t]) \dots \dots G^m(X[t], V[t])] \cdot D[t]$

В формуле (11) умножение матрицы  $[G^1(X[t], V[t]) \times G^2(X[t], V[t]) \dots G^m(X[t], V[t])]$  на вектор  $D[t] = [d_1[t] \ d_2[t] \ \dots \ d_m[t]]^T$  происходит по следующему правилу:

$$[G^1(X[t], V[t]) \ G^2(X[t], V[t]) \dots G^m(X[t], V[t])] \times D[t] = \sum_{k=1}^m W^k[t] \cdot d_k[t].$$

Следовательно, нейронная сеть Петри в виде окрестностной модели задается набором  $NS_{NPN} = (N, X, V, G, X[0])$ .

Таким образом, в работе показано, что нейронная сеть Петри также является разновидностью окрестностных систем, в частности динамической недетерминированной окрестностной моделью.

## 6. ПРИМЕР ОКРЕСТНОСТНОЙ МОДЕЛИ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ПЕТРИ

Рассмотрим окрестностную модель нейронной сети Петри, структура которой представлена на рис. 1.

Данной сети Петри соответствуют три совокупности элементарных окрестностей (слоя) (рис. 2).

Пусть начальное состояние окрестностной модели нейронной сети Петри на рис. 2 равно  $X[0] = [\{3, 3, 3, 3\}, \{\}, \{\}, \{\}]^T$ . В текущий момент времени активны 1 и 2 слои, т. к.  $g[1, 0] = 4 \geq ep_1 = 1$  и  $g[2, 0] = 4 \geq ep_2 = 2$ . Случайным образом для срабатывания выбирается один из активных слоев, например, слой 1.

Состояние окрестностной модели в момент времени  $t=1$  равно  $X[1] = [\{2, 2, 2\}, \{3\}, \{3\}, \{\}]$ , при этом слои 1 и 2 остаются активными, т. к.  $g[1, 1] = 5 \frac{2}{3} \geq ep_1 = 1$  и  $g[2, 1] = 5 \frac{2}{3} \geq ep_2 = 2$ . После срабатывания слоя 2  $X[2] = [\{1, 1\}, \{2\}, \{2, -3\}, \{\}]$ .

Приведем пример процесса функционирования окрестностной модели на рис. 2 в табл. 1.

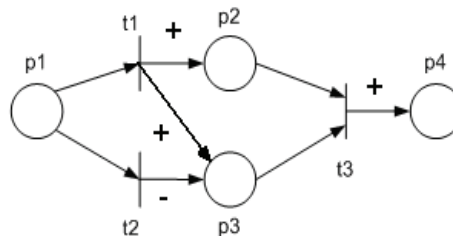


Рис. 1. Пример нейронной сети Петри

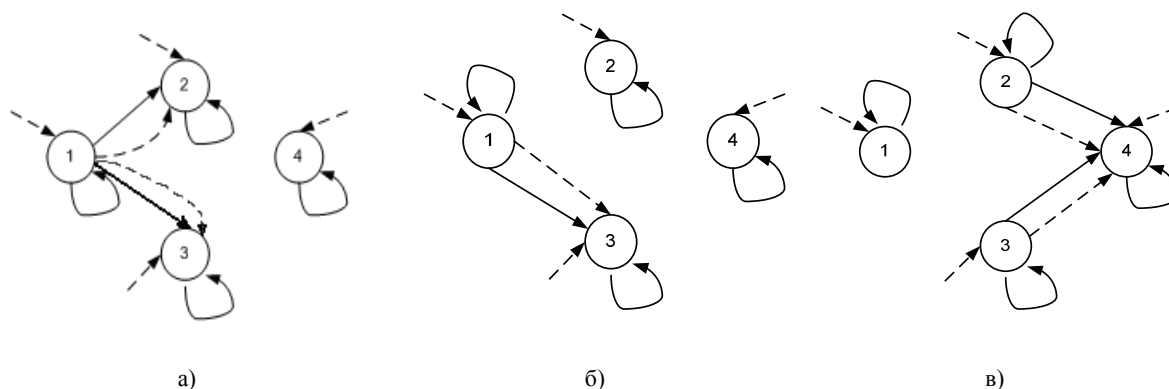


Рис. 2. Пример окрестностной модели нейронной сети Петри на рис. 1: а) 1 слой; б) 2 слой; в) 3 слой

Таблица 1

Пример процесса функционирования окрестной модели

Модельное время $t$	Текущее состояние $X[t]$	Номера активных слоев	Номер срабатывающего слоя
0	$X[0] = [\{3, 3, 3, 3\}, \{\}, \{\}, \{\}]^T$	1, 2	1
1	$X[1] = [\{2, 2, 2\}, \{3\}, \{3\}, \{\}]^T$	1, 2	2
2	$X[2] = [\{1, 1\}, \{2\}, \{2, -3\}, \{\}]^T$	1, 2	1
3	$X[3] = [\{\}, \{1, 3\}, \{1, -2, 3\}, \{\}]^T$	3	3
4	$X[4] = [\{\}, \{2\}, \{-1, 2\}, \{3\}]^T$	—	—
5	$X[5] = [\{\}, \{\}, \{\}, \{2\}]^T$	3	3
6	$X[6] = [\{\}, \{\}, \{\}, \{1, 3\}]^T$	—	—
7	$X[7] = [\{\}, \{\}, \{\}, \{2\}]^T$	—	—
8	$X[8] = [\{\}, \{\}, \{\}, \{\}]^T$	—	—
9	$X[9] = [\{\}, \{\}, \{\}, \{\}]^T$	—	—

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе обобщены результаты предыдущих исследований [1–4]. Рассмотрены окрестностные модели сетей Петри  $NS_{PN} = (N, X, V, W, X[0])$ , нейронных сетей как частные случаи обобщенной окрестностной модели  $NS_G = (N, X, V, Y, Z, G, F, X[0])$ .

Кроме того, в работе показано, что введенные в [5–6] нейронные сети Петри также являются разновидностью окрестностных систем, в частности динамическими недетерминированными окрестностными моделями  $NS_{NPN} = (N, X, V, G, X[0])$ . Приведен пример функционирования окрестностной модели нейронной сети Петри.

Следовательно, в работе дополнена введенная ранее в [1–4] классификация дискретных моделей в классе окрестностных систем.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Блюмин С.Л., Шмырин А.М. Окрестностные системы. Липецк: Липецкий эколого-гуманитарный институт, 2005. 132 с.

2. Блюмин С.Л., Шмырин А.М., Шмырина О.А. Билинейные окрестностные системы. Липецк: ЛГТУ, 2006. 130 с.
3. Блюмин С.Л., Шмырин А.М., Седых И.А., Филоненко В.Ю. Окрестностное моделирование сетей Петри. Липецк: ЛЭГИ, 2010. 124 с.
4. Шмырин А.М., Седых И.А., Корниенко Н.А., Шмырина Т.А. Обобщение дискретных моделей окрестностными системами // Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения: материалы конференции с международным участием (УКИ 10). М.: ИПУ РАН, 2010. С. 207–208.
5. Крюкова Д.Ю., Суконников А.А. Разработка системы моделирования сложных систем на базе нейронных сетей Петри // Актуальные проблемы управления и экономики: история и современность: материалы научной конференции (г. Вологда, 31 марта – 1 апреля 2006 г.). Вологда: Легия, 2006. С. 144–148.
6. Суконников А.А., Крюкова Д.Ю. Нейроподобные сети Петри при моделировании социальных процессов // Программные продукты и системы. 2011. № 2 (94). С. 25–30.

Поступила в редакцию 15 апреля 2012 г.

Shmyrin A.M., Sedykh I.A. DISCRETE MODELS IN CLASS OF NEIGHBOURHOOD SYSTEMS

Neighborhood models of Petri networks, neural networks as special cases of the generalized neighborhood model are considered. It is shown that introduced earlier neural Petri networks are dynamic non-determined neighborhood models

*Key words:* neighborhood systems; networks of Petri; neural networks; neural networks of Petri.