УДК 519.179.2:004.94

А.О. Аристов

КВАЗИКЛЕТОЧНЫЕ СЕТИ. СИНТЕЗ И ЦИРКУЛЯЦИЯ

Рассмотрен новый тип дискретных структур не имеющих сигнатуру — квазиклеточные сети. Они обладают свойствами графов, клеточных автоматов, сетей Петри. Квазиклеточные сети позволяют моделировать во времени на макро- мезо- и микроскопическом уровне системы, для которых характерна циркуляция потоков.
Ключевые слова: квазиклеточная сеть, дискретная структура, поток, циркуляция, моделирование.

В настоящее время в различных отраслях науки широко используются дискретные структуры. Среди распространённых дискретных структур широко используются графовые модели, в частности алгоритмы поиска путей в графе [1,2], потоков в сетях [2], сети Петри [3] и др. Графы представляют собой двусортные множества, включающие в себя носитель и сигнатуру [1].

Рассмотрим разновидность дискретных структур, не имеющих сигнатуру.

Пусть имеем граф $G = < V, U >$ являющийся сетью (рис. 1). Считаем, что каждая вершина $V_i \in (V_1, V_2, \ldots, V_n)$ имеет координаты (x_i, y_i), т. е. $x_i \in (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y_i \in (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Выделим вокруг каждой вершины круглую область, радиуса R.

Имеем рёбра $U_i \in (U_1, U_2, \ldots, U_u)$. Каждое ребро можно представить в виде (V_{ia}, V_{ib}). Тогда длина ребра:

$$L_i = \sqrt{(x_{ib} - x_{ia})^2 + (y_{ib} - y_{ia})^2}\ . \quad (1)$$

Для ребра (V_{ia}, V_{ib}) (рис. 2) обозначим

$$\Delta x_i = x_{ib} - x_{ia}\ , \quad (2)$$

$$\Delta y_i = y_{ib} - y_{ia}\ . \quad (3)$$

Подставляя выражения (2) и (3) в (1) получим:

$$L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}\ . \quad (4)$$

Возьмём на каждом ребре (V_{ia}, V_{ib}) точки с шагом $2R$. Вокруг каждой точки выделим область, радиуса R, определяемую неравенством:

$$(x' - x_c)^2 + (y' - y_c)^2 \le R^2\ ,$$

где x', y' — координаты произвольной точки в заданной области, x_c, y_c - координаты центра каждой области, лежащие на ребре (V_{ia}, V_{ib}). Рассмотрим разбиение ребра графа. Количество областей для разбиения $n = round(\frac{L}{2 \cdot R})$, где R — радиус области вокруг точки, лежащей на ребре, L — длина ребра, *round(...)* — округление до ближайшего целого.

Обозначим $dx' = \frac{dx}{n}$, $dy' = \frac{dy}{n}$, тогда для любой области p на ребре (V_{ia}, V_{ib}) справедливо:

$$x_p = x_{ia} + p \cdot dx' \quad (5)$$

$$y_p = y_{ia} + p \cdot dy' \quad (6)$$

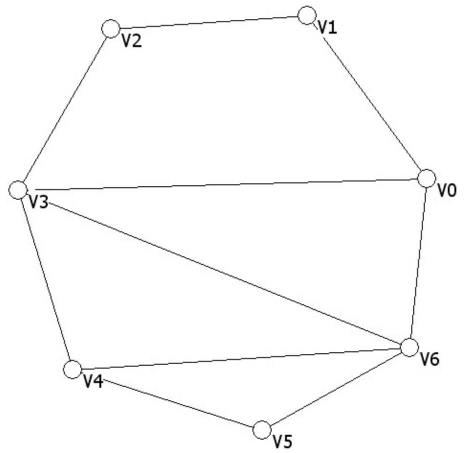

Рис. 1. Исходный граф

Фактически области, центры которых лежат на рёбрах расположены по касательным друг к другу, т. е. фактически на ребре найдётся пара областей *p* и *p+1*, для которой система уравнений:

$$\begin{cases} (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 = R^2 \\ (x - x_{p+1})^2 + (y - y_{p+1})^2 = R^2 \end{cases} \quad (7)$$

будет иметь как минимум одно решение при *p=1,2,3, …, n-1*.

Поскольку в общем случае $n = \dfrac{L}{2 \cdot R} \notin Z$, то система уравнений:

$$\begin{cases} (x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 = R^2 \\ (x - x_{ib})^2 + (y - y_{ib})^2 = R^2 \end{cases} \quad (8)$$

в общем случае имеет 2 решения.

Таким образом, получаем некоторое множество областей $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$, радиуса R, где каждый элемент взвешен соответственно элементами из множеств $X_p = (x_{p1}, x_{p2}, \ldots, x_{pn})$ и $Y_p = (y_{p1}, y_{p2}, \ldots, y_{pn})$. Для элементов множества Q справедливо, что система уравнений

$$\begin{cases} (x - x_{p1})^2 + (y - y_{p1})^2 = R^2 \\ (x - x_{p2})^2 + (y - y_{p2})^2 = R^2 \end{cases} \quad (9)$$

имеет хотя бы одно решение при $\forall (p1, p2)$.

Фактически, получаем некоторое множество областей заданного радиуса, между которыми возможно касание, либо пересечение. Фактически, наличие пересечения или касания определяется только множеством $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ и весами из множеств $X_p = (x_{p1}, x_{p2}, \ldots, x_{pn})$ и $Y_p = (y_{p1}, y_{p2}, \ldots, y_{pn})$, т. е. получаем некоторую дискретную структуру, не имеющую сигнатуры в явном виде. Фактически, в полученной дискретной структуре нет явного задания отношений между элементами множества $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$. Отношение задаётся условием наличия решений системы уравнений (9). Назовём предложенную дискретную структуру *квазиклеточной сетью* (рис. 3), а граф на основе которого она получена — *базовым графом квазиклеточной сети* (см. рис. 1).

Определение 1. Квазиклеточной сетью называется дискретная структура, включающая в себя множество $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ круглых областей в двухмерном пространстве, имеющих радиус R, каждая из которых взвешена соответственно

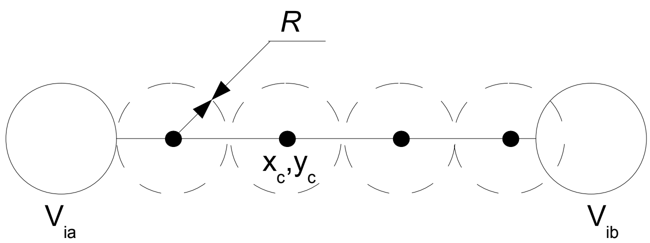

Рис. 2. Разбиение ребра исходного графа

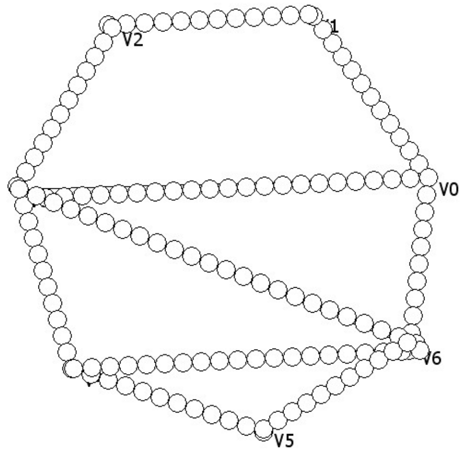

Рис. 3. Квазиклеточная сеть

элементами из множеств

$X_p = (x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pn})$,

$Y_p = (y_{p1}, y_{p2}, \dots, y_{pn})$, для которых справедливо, что система уравнений

$$\begin{cases}(x - x_{p1})^2 + (y - y_{p1})^2 = R^2 \\ (x - x_{p2})^2 + (y - y_{p2})^2 = R^2\end{cases} \qquad (10)$$

имеет хотя бы одно решение при $\forall(p1, p2)$.

Область, определяемую элементом множества $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ назовём *элементом квазиклеточной сети*, *областью* или *клеткой*.

Фактически, каждый элемент квазиклеточной сети — это вектор, задающий область пространства в виде $Q_p = (x_p, y_p)$. Радиус R является топологической характеристикой квазиклеточной сети, т. е.:

$$R = const \text{ при } \forall Q_p. \qquad (11)$$

Расширим каждый вектор элементом S_p, характеризующим состояние каждой клетки $Q_p = (x_p, y_p, S_p)$:

$$S_p \in (S_1, S_2, \dots, S_M) \qquad (12)$$

$$S_p = (p_1, p_2, \dots, p_L) \qquad (13)$$

где $p_1, p_2, \dots, p_L$ - фазовые переменные.

Рассмотрим квазиклеточную сеть:

$$\begin{cases}Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \\ \quad Q_p = (x_p, y_p, S) \\ \qquad S \in (0,1)\end{cases} \qquad (14)$$

Пусть есть две клетки, $Q_u = (x_u, y_u, S_u)$ и $Q_v = (x_v, y_v, S_v)$, для которых система уравнений:

$$\begin{cases}(x - x_u)^2 + (y - y_u)^2 = R^2 \\ (x - x_v)^2 + (y - y_v)^2 = R^2\end{cases} \qquad (15)$$

имеет по крайней мере 1 решение, т. е. фактически круговые области Q_u и Q_v касаются друг друга, либо пересекаются.

Рассматривая систему уравнений (15) с точки зрения геометрии (см. рис. 2), имеем две окружности, которые имеют точки пересечения, т. е. расстояние между их центрами не превышает их диаметр:

$$(x_u - x_v)^2 + (y_u - y_v)^2 \le (2 \cdot R)^2. \qquad (16)$$

Рассмотрим изменение состояния клетки во времени. Обозначим состояние в выбранный момент времени $S_p(t)$. Если считать, что время изменяется дискретно, то состояния клеток квазиклеточной сети наблюдаются через равные промежутки времени θ, где $\theta \to 0$. Рассмотри изменения состояния элементов квазиклеточной сети вида:

$$S_v(t) = S_u(t + \theta). \qquad (17)$$

Фактически, предполагается, что состояние одной клетки передаётся соседней клетке.

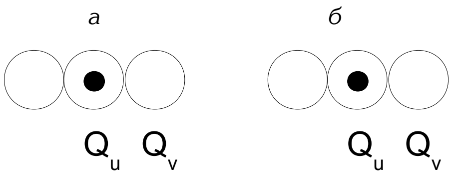

Рис. 4. Переход фишки. Представлено состояние: *а* — в момент времени *t*, *б* — в момент времени *t*+0

Если в качестве состояния рассматривать некоторую величину S, принимающую значение из множества *(0,1)*, т.е. $S \in (0,1)$, то можно интерпретировать состояние клетки как наличие в ней некоторого элемента, сравнимого с фишкой в сетях Петри [3]. Тогда изменения состояния, описанные выше, можно интерпретировать как передачу фишки между соседними клетками (рис. 4). Однако, сравнивая подобную ситуацию с сетями Петри, можно заметить, что фишка переходит в соседнюю клетку только в определённые моменты времени. Таким образом, можно считать, что фишка «циркулирует» по сети.

Определение 2. *Циркуляцией в квазиклеточной сети* называются изменения состояний клеток, вида

$$\begin{cases} S_v(t+\theta) = S_u(t) \\ S_u(t+\theta) = 0 \end{cases} \tag{18}$$

при $\forall(v,u)$, где для $Q_u = (x_u, y_u, S_u)$ и $Q_v = (x_v, y_v, S_v)$ справедливо

$$(x_u - x_v)^2 + (y_u - y_v)^2 \le (2 \cdot R)^2 . \tag{19}$$

Переход фишки из Q_u и Q_v обозначим как $Q_u \to Q_v$, где $u \ne v$.

Стоит обратить внимание на ряд особенностей циркуляции в квазиклеточных сетях. Рассмотрим клетки Q_u, Q_v и Q_w, для которых:

$$\begin{cases} (x_u - x_v)^2 + (y_u - y_v)^2 \le (2 \cdot R)^2 \\ (x_v - x_w)^2 + (y_v - y_w)^2 \le (2 \cdot R)^2 \\ (x_u - x_w)^2 + (y_u - y_w)^2 > (2 \cdot R)^2 \end{cases} \tag{20}$$

Предположим, что $S_u(t) = 1; S_v(t) = 0; S_w(t) = 1$. Если осуществить переходы вида $Q_u \to Q_v$ и $Q_w \to Q_v$, то фактически Q_u и Q_w теряют фишки, а в результате осуществления этих переходов в клетках Q_u, Q_v и Q_w остаётся одна фишка, т. е. $S_u(t+\theta) = 0; S_v(t+\theta) = 1; S_w(t+\theta) = 0$. Циркуляцию такого вида назовём *циркуляцией с переменным количеством фишек*.

Другой вариант – *циркуляция с постоянным количеством фишек* предполагает, что количество фишек останется неизменным. При такой циркуляции выполнение переходов $Q_u \to Q_v$ и $Q_w \to Q_v$ недопустимо. Таким образом, переход невозможен в те клетки, где уже есть фишка. Тогда циркуляцией с постоянным количеством фишек в квазиклеточной сети называется изменения состояния для $Q_u = (x_u, y_u, S_u)$ и $Q_v = (x_v, y_v, S_v)$ справедливо:

$$\begin{cases} S_v(t+\theta) = S_u(t) \\ S_u(t+\theta) = 0 \\ (x_u - x_v)^2 + (y_u - y_v)^2 \le (2 \cdot R)^2 \\ S_v(t) \ne 1 \\ S_u(t) = 1 \end{cases} \tag{21}$$

при $\forall(v,u)$.

Итак, выше представлены возможности циркуляции в квазиклеточных сетях, описываемые правилами и условиями (18), (19), (21). При этом, стоит отметить, что на множестве $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ для $Q_u = (x_u, y_u, 1)$ условия (18), (19), (21) могут позво-

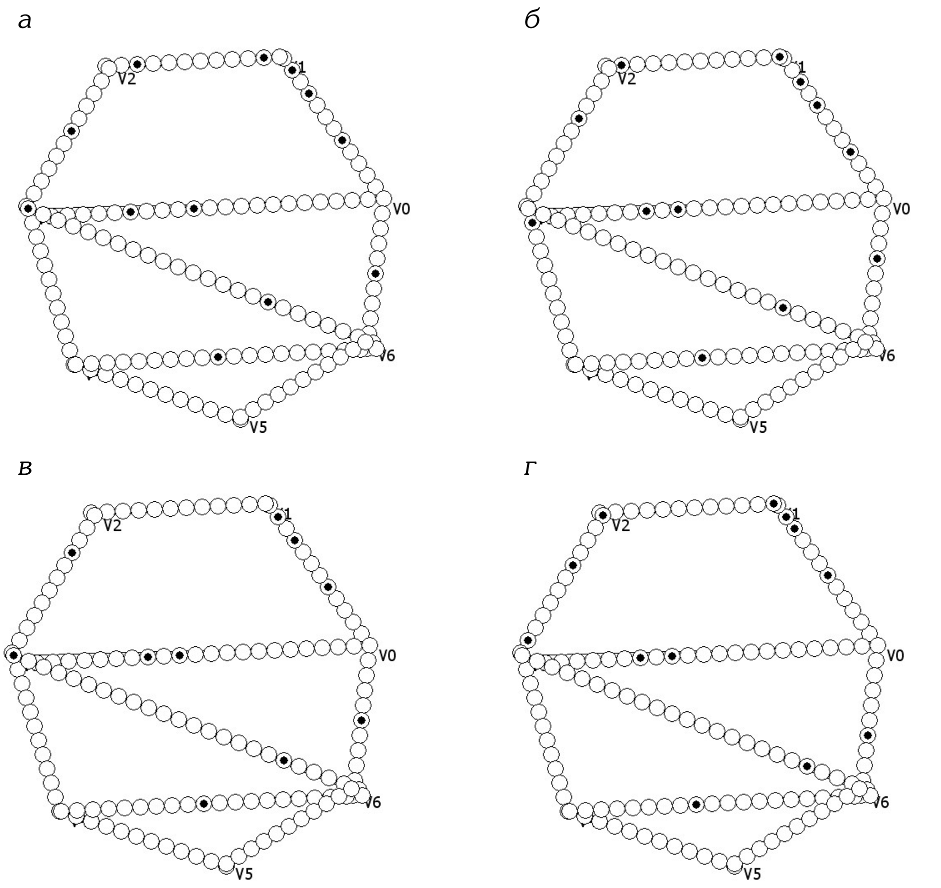

Рис. 5. Циркуляция в квазиклеточной сети. Показано состояние сети: а — в момент времени t, б — в момент времени t+0; в — в момент времени t+2θ, г — в момент времени t+3θ

лять выполнить различные переходы вида $Q_u \to Q_{v1}$, $Q_u \to Q_{v2}$ и т.д.. При этом, какой переход должен выполниться, определяется дополнительными условиями. В простейшем случае, из всех возможных переходов случайным образом выбирается один, который и будет выполнен:

$$p(Q_u \to Q_{v1}) = p(Q_u \to Q_{v2}) =$$

$$= \ldots = p(Q_u \to Q_{vm}) = \frac{1}{m}, \qquad (22)$$

где $Q_u \to Q_{v1}$, $Q_u \to Q_{v2}$, …, $Q_u \to Q_{vm}$ — разрешённые переходы, $p(Q_u \to Q_{v1})$, $p(Q_u \to Q_{v2})$, …, $p(Q_u \to Q_{vm})$ — вероятности осуществления переходов при циркуляции, m – количество допустимых переходов, удовлетворяющих (18) и (19) или (21).

Итак, выше была рассмотрена основная идея циркуляции, предполагающая возможность изменения состояния соседних клеток квазиклеточной сети. Стоит отметить, что каждый момент времени θ производятся возможные переходы на всём множестве $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$. Пример циркуляции в сети приведён на рис. 5.

Итак, выше были рассмотрены основные аспекты синтеза квазиклеточных сетей как особой разновидности дискретных структур, не имеющих сигнатуры. Стоит отметить несколько наиболее существенных особенностей квазиклеточных сетей:

- простота реализации на ЭВМ;
- отсутствие явно заданной сигнатуры;
- зависимость ряда свойств и переменных состояния от топологических параметров сети;
- большое количество предметных приложений (при проектировании и моделировании промышленных, транспортных, медико-биологических систем, вычислительных сетей, организационных процессов, потоков и т.д.;
- возможность моделирования на разных уровнях[4] в рамках одной дискретной структуры – на макроскопическом (величина потока на между клетками), микроскопическом (рассмотрение каждой фишки и её свойств) и мезоскопическом (фишка как состояние клетки в квазиклеточной сети).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горбатов В.А.* Фундаментальные основы дискретной математики — М.: Физматлит, 1999 — 544с.
2. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход — М.:Мир, 1978 — 432 с.
3. *Питерсон Дж.* Теория сетей Петри и моделирование систем. Пер. с англ. – М.:Мир, 1984 – 264 с. ил.
4. *Ахмадинуров М.М.* Обзор методов моделирования транспортной сети. Транспорт Урала 3/2009. С. 39—44. ГИАБ

КОРОТКО ОБ АВТОРЕ

Аристов Антон Олегович — доцент, batan-87@mail.ru,
Московский государственный горный университет, ud@msmu.ru

РУКОПИСИ, ДЕПОНИРОВАННЫЕ В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «ГОРНАЯ КНИГА»

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОДСИСТЕМЫ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ УГОЛЬНОГО МАССИВА

(№ 944/02-13 от 26.11.12, 08 с.)

Мельник Владимир Васильевич — доктор технических наук, заведующий кафедрой,
msmu-prpm@yandex.ru,
Сергеев Сергей Васильевич — аспирант,
rus642006@yandex.ru,
Московский государственный горный университет.

RESEARCH OF A SUBSYSTEM OF HYDRAULIC DESTRUCTION OF THE COAL MASSIF

Melnik Vladimir Vasilyevich, Sergeyev Sergey Vasilyevich