

УДК 004.032.26 : 519.87

Д.В. Маришаков, Д.В. Фатхи, Д.В. Фатхи

МОДЕЛЬ СЕТИ ХОПФИЛДА НА ОСНОВЕ КЛАССИЧЕСКОЙ СЕТИ ПЕТРИ

Введение. Современные искусственные нейронные сети (ИНС) находят успешное применение для распознавания образов, обработки изображений, аппроксимации и т.д. При этом в качестве основного строительного блока, как правило, используется многослойный персептрон. Однако в практике отмечается, что наиболее удобными устройствами в таких областях, как нелинейное прогнозирование и моделирование, адаптивное выравнивание каналов связи, обработка речевых сигналов, управление предприятием являются рекуррентные ИНС [1]. Благодаря эффектам обратных связей такие сети могут гораздо лучше проявлять себя в традиционных областях применения обычных нейронных сетей прямого распространения, а также значительно ослабить требования к объему используемой памяти.

Наибольшее распространение среди рекуррентных ИНС получили релаксационные сети с обратными связями, так называемые сети Хопфилда [2]. Сеть Хопфилда является автоассоциативной сетью, работающей по принципу памяти, позволяющей хранить ранее записанные образцы. Особенностью работы такого рода сети является её параллельная реализация и преимущественно асинхронный режим работы. Параллельная реализация обеспечивает высокую скорость решения задачи посредством параллельных вычислений. Асинхронный режим работы предусматривает изменение состояния соседних нейронов с учетом предыдущего состояния остальных нейронов сети.

Из недостатков сети Хопфилда, как и любого другого устройства с обратными связями, выделяют проблему устойчивости сети. При этом отмечается, что асинхронный режим работы обязательно должен привести к одному из устойчивых состояний сети.

Программная реализация сети Хопфилда лишает её основных свойств, приводя к последовательному алгоритму и синхронному режиму работы. Сохранить особенности сети возможно лишь при её аппаратной реализации.

Один из способов аппаратного исполнения ИНС основан на использовании программируемых логических интегральных схем (ПЛИС) [3] – матричных структур, обеспечивающих параллельную обработку информации и обладающих высокой степенью интеграции, масштабируемостью, развитыми средствами проектирования.

Перед аппаратной реализацией ИНС исследуются её свойства с использованием средств моделирования. Это и оценка динамических свойств, и диагностический анализ структуры ИНС, а также поведение нейронов.

Существующие на сегодняшний день модели ИНС, получаемые на основе графов, формальных языков, конечных или вероятностных автоматов, не способны в полной мере отражать динамику работы нейросетевых компонентов ИНС и упомянутые выше свойства параллельности архитектуры и асинхронности работы.

Одним из средств для моделирования асинхронных, параллельных и распределенных процессов являются сети Петри [4]. С их помощью можно наглядно представить динамику функционирования систем и составляющих их компонентов. При этом классическая сеть Петри, благодаря строгости своего математического аппарата и возможности матричного анализа, наиболее подходит для анализа сети.

В данной работе предлагается исследовать перспективы применения аппарата классической сети Петри при моделировании структур нейронных сетей Хопфилда.

Статика нейронной сети Хопфилда. Под *нейронной сетью Хопфилда* понимают полносвязную однослойную ИНС с обратными связями [5]. Структура такой сети представлена на рис. 1.

Состояние искусственных нейронов сети характеризует в каждый момент времени точку фазового пространства, и процесс динамического преобразования может быть интерпретирован как движение изображающей точки этого пространства к положению равновесия. Состояние сети в положении устойчивого равновесия характеризует информацию, которая хранится в сети [6]. Это интерпретируется как операция ассоциативного распознавания или вспоминания информации.

Первый нейрон сети вычисляет свое индуцированное локальное поле в момент времени k , определяемое выдаваемым сигналом $v_i(k)$, как взвешенную сумму своих входов с помощью весовых коэффициентов w_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$, а также входного сигнала x_i :

$$v_i(k) = \sum_{j=1, j \neq i}^n w_{ij} y_j + x_i. \quad (1)$$

Затем с помощью нелинейной функции активации φ вырабатываемый сигнал преобразуется в новое состояние и соответствует его выходу в следующий момент времени – $y_i(k+1)$. В векторной форме выход такой модели сети Хопфилда записывается в виде:

$$y(k+1) = \varphi(y(k), x(k)), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

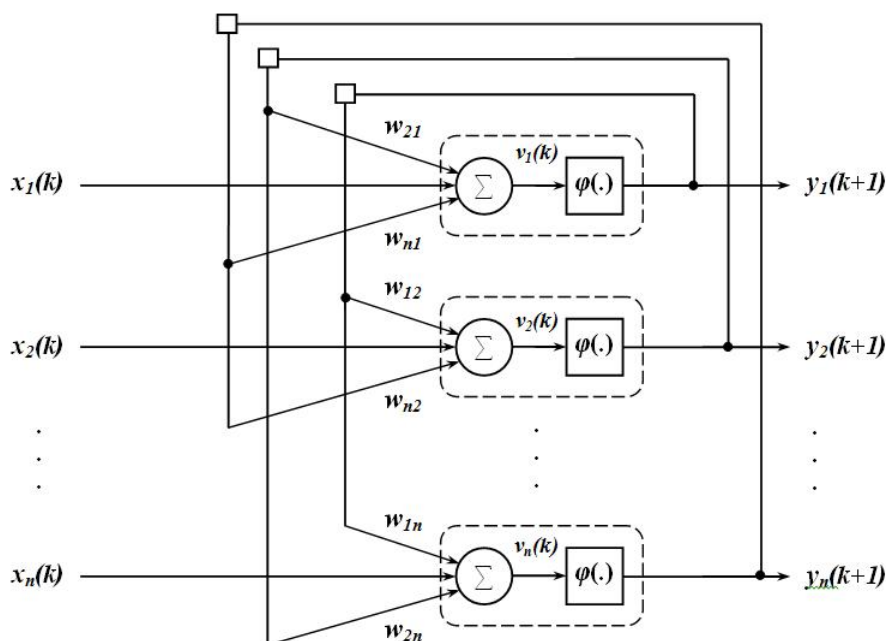


Рис. 1. Функциональная схема сети Хопфилда

Принимая в качестве нелинейной функции активации пороговую функцию, с порогом, равным b_i , выходной сигнал y_i будет определяться соотношениями вида:

$$y_i = \varphi(v_i) = \begin{cases} 1, & v_i \geq b_i, \\ 0, & v_i < b_i. \end{cases} \quad (3)$$

Далее вычисляется локальное поле для второго нейрона с учетом нового состояния первого, меняется состояние второго нейрона, и так далее – состояние каждого следующего нейрона вычисляется с учетом всех изменений состояний рассмотренных ранее нейронов.

Каждый нейрон сети связан синапсами со всеми остальными нейронами, кроме самого себя. В соответствии с этим матрица весовых коэффициентов составляется в виде симметричной матрицы с нулевыми элементами на главной диагонали, т.е. $w_{ij} = w_{ji}$ и $w_{ij} = 0$.

После задания весовых коэффициентов сеть может быть использована для получения запомненного вектора. Для этого выходам сети сначала придают значения начального вектора. Затем сеть меняет свои состояния согласно формуле (2) до тех пор, пока состояния k и $k+1$ не совпадут. Данный процесс называется *конвергенцией сети*. Полученное устойчивое состояние будет являться ответом сети на данный входной образ.

Модель сети Хопфилда на основе классической сети Петри. Формально классическая сеть Петри определяется пятеркой [4]:

$$PN = \{P, T, I, O, M\}, \quad (4)$$

где $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ – конечное непустое множество позиций;

$T = \{t_1, \dots, t_m\}$ – конечное непустое множество переходов;

I и O – матрицы инцидентности, причем:

$I: P \times T$ – отображение множества P на T ;

$O: T \times P$ – отображение множества T на P ;

M – функция маркировки $M(p): P \rightarrow Z$, где Z – множество целых чисел.

Предлагается модель сети Хопфилда, выполненная в соответствии с требованиями классической сети Петри (рис. 2).

Набор входных сигналов сети Хопфилда $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ размещается во множестве входных позиций $P_x = \{p_{x1}, \dots, p_{xn}\}$, $P_x \in P$. Набор подаваемых на обратные связи сигналов располагается во множестве позиций $P_{act} = \{p_{act1}, \dots, p_{actn}\}$, $P_{act} \in P$. Выходное значение модели сети сохраняется в позиции $p_{out} \in P$.

Множество весовых коэффициентов $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ задаются в модели отношениями между переходами $T_{act} = \{t_{act1}, \dots, t_{actn}\}$, $T_{act} \in T$ и позициями $P_w = \{(p_{w11}, \dots, p_{w1s})_1, \dots, (p_{wn1}, \dots, p_{wnz})_n\}$, $P_w \in P$, где s, z – целочисленная величина, соответствующая величине веса. Иными словами, W опре-

деляется как $W \equiv O(t_{w1}, \dots, t_{wn})$. Наличие маркера в любой позиции множества P_{act} будет активировать переход, который удовлетворяет значению $I(t_{acti}) = p_{acti}$, $i = \overline{1, n}$. Количество позиций, связанных с выходом каждого перехода t_{acti} , за вычетом выходной позиции, соответствует значению веса для данного входа. При этом изменение веса достигается увеличением или уменьшением данного числа позиций.

Количество позиций p_{wi} может быть найдено суммированием выходных дуг из переходов $t_{act} \in T_{act}$, за вычетом выходной позиции:

$$p_{wi} = \sum_{i=1}^n O(t_{acti}) - 1. \quad (5)$$

Пороговую функцию активации реализует множество переходов $T_b = \{(t_{b11}, \dots, t_{b1j}, \dots, t_{b1r})_1, \dots, (t_{bn1}, \dots, t_{bnj}, \dots, t_{bnr})_n\}$, $T_b \in T$. Каждый переход из множества $T_b \in T$ имеет b -позиций в своем $I(t_b)$ входном наборе. Количество переходов t_{br} определяется формулой комбинаторики [7] и зависит от количества входных позиций p_w и значения порога b :

$$t_{br} = C(p_w, b) = \frac{p_w!}{(p_w - b)!b!}, \quad (6)$$

где p_w – количество позиций множества P_w ; b – значение порога.

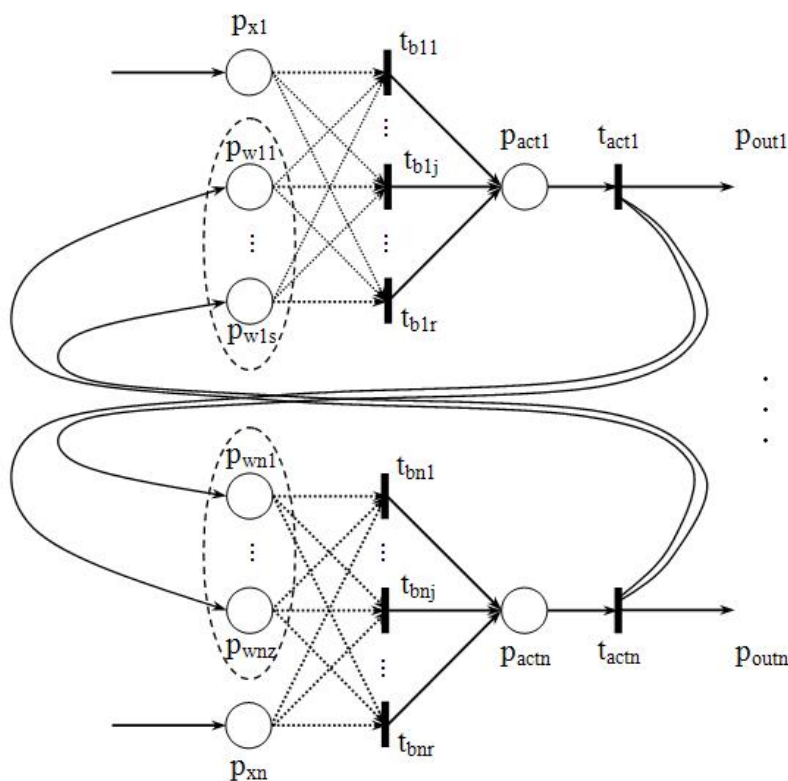


Рис. 2. Общая структура модели сети Хопфилда на сети Петри

Начальные бинарные значения, представленные маркерами, придаются выходам сети и заносятся во множество позиций $P_{act} \in P$. Веса, как указано выше, представлены количеством позиций на выходе множества $O(t_{act})$. При этом по умолчанию принимается вес, равный 1.

Так как каждый переход множества $T_b \in T$ связан с позициями p_w возможными комбинациями, то любое вхождение b -маркеров в позициях p_w вызовет срабатывание по крайней мере одного перехода $T_b \in T$. Учитывая, что каждый переход множества $T_b \in T$ имеет только одну выходную позицию $O(p_{act})$, то при срабатывании любого из переходов $T_b \in T$ выходная позиция p_{act} получит маркер, представляющий собой выходной сигнал нейрона.

Поясним логику работы модели на примере конкретной нейронной сети Хопфилда, имеющей следующие параметры: $X = 2$, $w_1 = \{0, 2\}$, $w_2 = \{2, 0\}$, $b_1 = 3$, $b_2 = 3$. Входные и соответствующие им ожидаемые выходные значения сети представим в таблице истинности.

Таблица входных и выходных значений сети Хопфилда

p_{x1}	p_{x2}	p_{out1}	p_{out2}
0	0	0	0
1	0	1	0
0	1	0	1
1	1	1	1

Количество позиций p_w и переходов t_b для каждого нейрона рассчитаем по формулам (5, 6). Получим $p_{x1} = p_{x2} = 2$, $t_{b1} = t_{b2} = 1$.

Для получения запомненного выходного вектора по данному входному вектору придадим выходам сети значение этого начального вектора. Затем начинается процесс конвергенции сети, при котором она последовательно меняет свои состояния, согласно формуле (2), до получения своего устойчивого состояния. Полученное состояние и является ответом сети на данный входной образ.

Процесс конвергенции сети представлен на рис. 3.

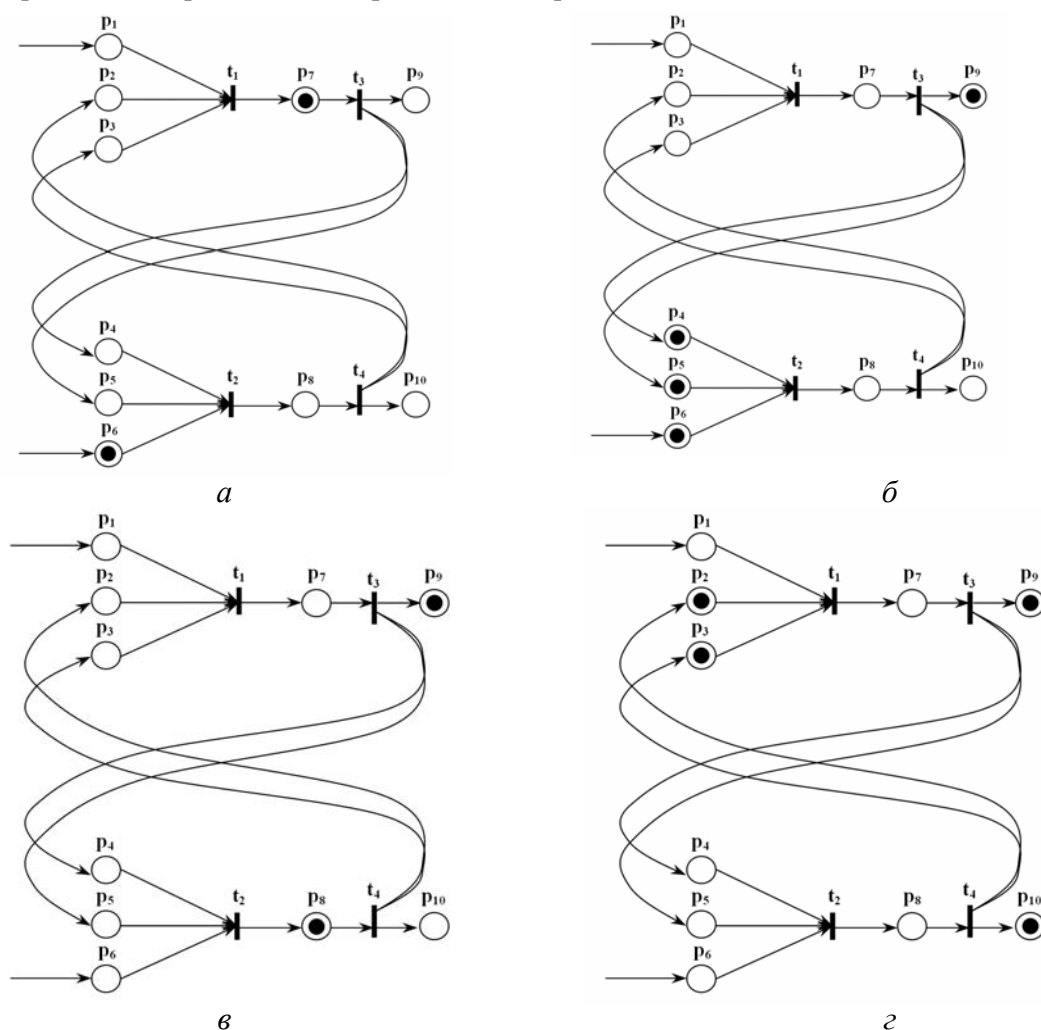


Рис. 3. Процесс конвергенции сетевой модели сети Хопфилда

Входное множество представлено начальной маркировкой $M_0 = \{0,0,0,0,0,1,1,0,0,0\}$ (рис. 3, а). Множество W представлено отношениями между переходами t_3 , t_4 и позициями p_4 , p_5 , p_2 , p_3 .

Подаваемый на выход первого нейрона сигнал активирует переход t_3 . При срабатывании перехода t_3 маркер из позиции p_7 удаляется, размещая новые маркеры во всех позициях $O(t_3) = \{p_4, p_5, p_9\}$. Наличие на входе второго нейрона в трех позициях маркеров соответствует результату функционирования нейрона, имеющего значение 3 в сумматоре (рис. 3, б).

Взаимосвязи входных позиций с пороговыми переходами всегда подбираются так, что срабатывание лишь одного перехода достаточно для записи маркера в выходную позицию p_{act} . Таким образом, выполняется уравнение (3). В данном примере условие кратности перехода t_2 соблюдается и маркер заносится в позицию p_8 (рис. 3, в).

При срабатывании перехода t_4 маркер удаляется из позиции p_8 , размещая новые маркеры в позициях p_2, p_3, p_{10} (рис. 3, з). Таким образом сеть предоставляет выходной образ, соответствующий таблице истинности. На этом процесс конвергенции сети завершается.

В дальнейшем, подавая на вход модели остальные значения входных векторов, можно получить любое из устойчивых состояний сети, за исключением текущего её состояния. Продемонстрируем это посредством анализа деревьев достижимости сетевой модели.

Деревья достижимости при начальных маркировках, полученных в ходе конвергенции сети, представлены на рис. 4.

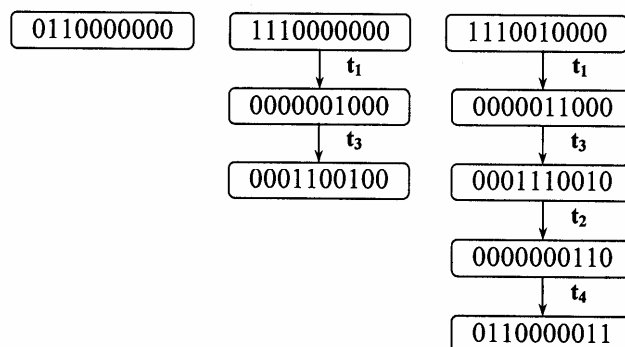


Рис. 4. Деревья достижимости сетевой модели сети Хопфилда

На рис. 4, а изображено дерево достижимости при подаче на вход модели вектора $\{0,0\}$. При этом на выходе модели остаются пустые позиции, что соответствует таблице. На рис. 4, б и в показаны деревья достижимости, полученные для входных векторов $\{1,0\}$ и $\{1,1\}$ соответственно. При этом следует заметить, что из каждой их результирующей маркировки возможно получение остальных сохраненных сетью образов.

Оценим состояния модели посредством исследования полученных деревьев достижимости.

Анализ модели. Из анализа дерева достижимости можно сделать вывод, что:

- полученная сеть небезопасна, так как число маркеров в позициях может быть больше одной;
- полученная сеть ограничена, так как число маркировок конечно;
- полученная сеть не является сохраняющей, так как взвешенная сумма маркеров непостоянна для достижимых маркировок;
- сеть является живой, так как присутствует цикл, включающий в себя все переходы сети, т.е. последовательность состояний сети имеет возвраты.

Кроме того, формула (6) дает возможность классифицировать состояния сетевой модели, в зависимости от значения порога, количества пороговых переходов t_{br} и весовых позиций множества $P_w \in P$, а именно:

- 1) нормальное состояние модели, если $0 < b < p_w$;
- 2) если $b = 0$, то модель неработоспособна – на выходе модели всегда будет присутствовать маркер (что соответствует постоянному значению 1), а во множестве позиций соседних нейронов будут накапливаться маркеры;
- 3) если $b \geq p_w$, то выходные позиции p_{out} недоступны – на выходе модели всегда будет пустая позиция (что соответствует постоянному значению 0);
- 4) если $b = p_w$, то множество $T_b \in T$ будет состоять из одного перехода;
- 5) если $b = 1$, то $T_b \in T$ состоит из p_w числа переходов, каждый из которых $I(t_w) = \{p_w\}$;
- 6) если $1 < b < p_w$, то число переходов в $T_b \in T$, определяется формулой (5).

Исходя из свойств сети Петри и по результатам анализа модели можно сделать выводы:

- в сетевой модели сети Хопфилда может быть одновременно активировано более одного перехода, однако срабатывание переходов не может произойти одновременно или в определенном порядке. По этой причине сети Петри считаются недетерминированными, т.е. теоретически не представляется возможным определить, какой из одновременно активированных переходов может сработать первым;
- областью определения классической простой сети Петри является множество натуральных чисел, поэтому модель на её основе не может обрабатывать отрицательные значения входов или весов, равно как и вещественные числа;
- для правильного функционирования модели состояния 2 и 3 из анализа состояний неприемлемы;
- отсутствие возможности срабатывания любого перехода при функционировании моделируемого объекта говорит об избыточности в структуре модели, что также усложняет ее анализ и реализацию.

Выводы. В результате анализа модели был выявлен ряд её ограничений. Одним из ограничений является накопление маркеров в некоторых позициях, которое может быть разрешено периодической отчисткой позиций либо введением «времени жизни» маркеров [8].

Другое ограничение связано со сложностями учета в сети Петри отрицательных значений весовых коэффициентов в межсоединениях нейроэлементов, которое может быть преодолено путем введения в структуру модели дополнительного вычитающего слоя. При этом переходы вычитающего слоя назначаются для удаления маркеров из позиций множества $P_w \in P$, куда они были помещены в процессе обработки, выходная позиция данного слоя представляет собой позицию для сборки удаленных маркеров.

Несмотря на ряд недостатков, разработанная модель достаточно полно отражает процессы, реализуемые сетью Хопфилда, позволяет имитировать особенности нейросетевой технологии. Изменение входных весов или порогов осуществляется путем реорганизации сети Петри дугами, изменением количества и размещением позиций и переходов.

Анализ состояний модели показывает, что она может рассматриваться в вопросах диагностики и функционального контроля на этапах проектирования при аппаратном исполнении нейронных сетей Хопфилда на ПЛИС, так, состояния 2 и 3 из анализа модели могут рассматриваться при диагностическом анализе сети для выявления катастрофических отказов типа логических констант.

Данная модель использует дискретные значения весов, что значительно уменьшает требования к памяти при аппаратном исполнении, а также упрощает количество вычислительных операций для сети Хопфилда.

Для более широкого моделирования ИНС на сетях Петри необходимо использование их модификаций, связанных с добавлением функциональных переходов, включающих такие операции, как суммирование, умножение и т.д. ингибиторных дуг для синхронизации работы нейрона, раскраски маркеров или введение временных интервалов для определения последовательности срабатывания отдельных компонентов нейрона.

Библиографический список

- 1 **Хайкин, С.** Нейронные сети : полный курс, 2-е изд. : пер. с англ. / С. Хайкин. – М. : Изд. дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.
- 2 **Hopfield, J.J.** Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities / J.J. Hopfield // Proceedings of the National Academy of Science, USA. – 1982. – Vol. 79. – P. 2554–2558.
- 3 **Грибачев, В.П.** Элементная база аппаратных реализаций нейронных сетей / В.П. Грибачев // Компоненты и технологии. – 2006. – № 8. – С. 12–15.
- 4 **Питерсон, Дж.** Теория сетей Петри и моделирование систем / Дж. Питерсон. – М. : Мир, 1984. – 264 с.
- 5 **Уоссермен, Ф.** Нейрокомпьютерная техника : Теория и практика / Ф. Уоссермен. – М. : Мир, 1992. – 184 с.
- 6 **Терехов, В.А.** Нейросетевые системы управления / В.А. Терехов, Д.В. Ефимов, И.Ю. Тюкин. – М. : Высшая школа, 2002. – 183 с.
- 7 **Андерсон Дж.** Дискретная математика и комбинаторика : пер. с англ. / Дж. Андерсон. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2004. – 960 с.
- 8 **Chamas, N.** Timed Neural Petri Nets / N. Chamas, L. Anneberg, E. Yaprak // Proc. The 36th Midwest Symposium on Circuits and Systems – IEEE. – USA, Detroit, Michigan. – 1993, August. – P. 926–929.

Bibliography

- 1 **Haykin, S.** Neural networks : A comprehensive foundation, second edition / S. Haykin. – Moscow : Publishing House «Williams», 2006. – 1104 p.
- 2 **Hopfield, J.J.** Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities / J.J. Hopfield // Proceedings of the National Academy of Sciences, USA. – 1982. – Vol. 79. – P. 2554–2558.
- 3 **Gribachev, V.P.** Element base for hardware implementations of neural networks / V.P. Gribachev // Components and Technology. – 2006. – № 8. – P. 12–15.
- 4 **Peterson, J.** Petri Net Theory and the Modeling of Systems / J. Peterson. – Moscow : Mir, 1992. – 184 p.
- 5 **Wasserman, P.D.** Neural computing theory and practice. – Moscow : Mir, 1992. – 184 p.
- 6 **Terekhov, V.A.** Neural network control systems / V.A. Terekhov, D.V. Efimov, I.J. Tyukin. – Moscow : Higher School, 2002. – 183 p.
- 7 **Anderson, J.** Discrete mathematics and combinatorics / J. Anderson. – Moscow : Publishing House «Williams», 2004. – P. 960.
- 8 **Chamas, N.** Timed Neural Petri Nets / N. Chamas, L. Anneberg, E. Yaprak // Proc. The 36th Midwest Symposium on Circuits and Systems – IEEE. – USA, Detroit, Michigan. – 1993, August. – P. 926–929.