Aufgabe 1

a) $f(x) = x^8 + x^2 + 10x - 15$
Offenbar ist f beliebig oft differenzierbar mit $f'(x) = 8x^7+2x+10, f''(x) = 56x^6 + 2$.
Wegen $f''(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ ist f' streng monoton wachsend und hat daher höchstens eine Nullstelle.
Wegen $f'(-1) = 0$ ist also $x = -1$ die einzige Nullstelle von f', und wegen $f''(-1) > 0$ ist $x = -1$ das einzige lokale Extremum (Satz 12.7), nämlich lokales Minimum (Satz 12.8).

b) $g(x) = e^{-x^2}$
Offenbar ist g beliebig oft differenzierbar mit $g'(x) = -2xe^{-x^2}$. Offenbar ist $x = 0$ die einzige Nullstelle von g'.Wegen $g'(x) > 0$ für $x < 0$ und $g'(x) < 0$ für $x > 0$ ist g auf $(-\infty, 0)$ streng monoton wachsend und auf $(0, \infty)$ streng monoton fallend. Also ist bei $x = 0$ das einzige lokale Extremum, nämlich ein lokales Maximum.

Aufgabe 2

$f(x) = \sin(x) - e^{-x}$
f ist beliebig oft differenzierbar mit $f'(x) = \cos(x) + e^{-x} > 0 \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Also ist f streng monoton wachsend in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ und hat daher dort höchstens eine Nullstelle. Ferner ist f stetig mit $f(0) = \sin 0 - e^{-0} = -1 < 0$ und $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} - e^{-\frac{\pi}{2}} > 0$. Also hat f nach dem ZWS mindestens eine Nullstelle in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; insgesamt also genau eine.

Aufgabe 3

a) Nach dem Satz von Weierstraß (Satz 11.11) gibt es $\xi_1, \xi_2 \in [x_1, x_2]$ mit $f(\xi) \leq f(x)(\xi) \forall x \in [x_1, x_2]$. Gilt $\xi_1, \xi_2 \in \{x_1, x_2\}$, so gilt $0 = f(\xi_1) \leq f(x) \leq f(\xi_2) = 0$, also $f(x) = 0 \forall x \in [x_1, x_2]$.
In diesem Fall ist f konstant , und jedes $x \in (x_1, x_2)$ ist lokales Maximum und Minimum.
Andernfalls gilt $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ oder $\xi_2 \in (x_1, x_2)$, d.h. ξ_1 ist lokales Minimum oder ξ_2 ist lokales Maximum im Inneren von $[x_1, x_2]$.

b) Angenommen, f hat mindestens $n + 2$ Nullstellen $x_1 < ... < x_{n+2}$. Nach dem Satz von Rolle (Satz 12.8) existiert zu jedem $k \in \{1, ..., n + 1\}$ ein $\xi_k \in \{x_k, x_{k+1}\}$ mit $f'(\xi_k) = 0$ Also hat f' mindestens $n + 1$ Nullstellen, ein Widerspruch.

c) Die Funktion $f := 2^x - x^2 = e^{x \ln 2} - x^2$ ist beliebig oft differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f'(x) =& \ln 2 e^{x \ln 2} - 2x \\ f''(x) =& (\ln 2)^2 e^{x \ln 2} - 2 \\ f'''(x) =& (\ln 2)^3 e^{x \ln 2} > 0 \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Nach (b) hat f'' höchstens eine f' höchstens zwei und f höchstens drei Nullstellen. Also hat $2^x = x^2$ höchstens 3 Lösungen.
Ferner gilt $f(2) = 2^2 - 2^2 = 0$ und $f(4) = 2^4 - 4^2 = 0$, sowie $f(0) = 2^0 - 0^2 = 1 > 0$ und $f(-1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$.
Also sind $x = 2$ und $x = 4$ zwei Lösungen, und nach dem ZWS liegt zwischen -1 und 0 die dritte.

Aufgabe 4

$f(x) = \ln(1+x) + 2\sin(x) - x(3 - \frac{x}{2})$, $x > -1$. Offenbar ist f beliebig oft differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f(0) =& 0 \\ f'(x) =& \frac{1}{1+x} + 2\cos(x) - 3 + x && \Rightarrow f'(0) = 0 \\ f''(x) =& \frac{1}{(1+x)^2} - 2\sin(x) + 1 && \Rightarrow f''(0) = 0, \\ f'''(x) =& \frac{2}{(1+x)^3} - 2\cos(x) && \Rightarrow f'''(0) = 0, \\ f''''(x) =& \frac{6}{(1+x)^4} + 2\sin(x) && \Rightarrow f''''(0) = -6 < 0. \end{aligned}$$

Da f'''' stetig ist gibt es ein $\delta > 0$ mit $f''''(x) = 0 \forall x \in [-\delta, \delta]$. Für jedes solche x gibt es nach dem Satz von Taylor ein $\xi \in [-\delta, \delta]$ mit
$f(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^k(0)}{k!} x^k + \frac{f''''(\xi)}{4!} x^4 = \frac{f''''(\xi)}{24} x^4 \leq 0$, d.h. f hat bei $x = 0$ ein lokales Maximum.