13 Weitere Themen der Analysis

Themen:

- Analysis im Komplexen
- Rekursionen

13.1 Komplexe Wurzeln

Wir bestimmen die komplexen Wurzeln, also die Lösungen der Gleichung

$$z^n = \alpha \text{ für } \alpha \in \mathbb{C}.$$

13.1 Komplexe Wurzeln

Wir bestimmen die komplexen Wurzeln, also die Lösungen der Gleichung

$$z^n = \alpha \text{ für } \alpha \in \mathbb{C}.$$

Für $r = |\alpha| \neq 0$ und $\phi = \arg \alpha$ ist

$$\alpha = r(\cos \phi + i \sin \phi)$$

Wir bestimmen die komplexen Wurzeln, also die Lösungen der Gleichung

$$z^n = \alpha \text{ für } \alpha \in \mathbb{C}.$$

Für $r = |\alpha| \neq 0$ und $\phi = \arg \alpha$ ist

$$\alpha = r(\cos \phi + i \sin \phi)$$

Bei der komplexen Multiplikation werden die Beträge multipliziert und die Argumente addiert, also gibt es n Lösungen

$$x_k = \sqrt[n]{r}\Big(\cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k\pi}{n}\Big), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Komplexe Einheitswurzeln

Die Lösungen von $z^n = 1$ werden *komplexe Einheitswurzeln* genannt,

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Komplexe Einheitswurzeln

Die Lösungen von $z^n = 1$ werden *komplexe Einheitswurzeln* genannt,

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Sie liegen auf dem komplexen Einheitskreis und bilden dort ein reguläres n-Eck.

Komplexe Wurzeln

Da man im Komplexen kein klares Verfahren hat, um die Wurzel eindeutig zu machen, ist man im Gegensatz zum Reellen übereingekommen, alle Lösungen von $z^n = \alpha$ als komplexe Wurzeln $\sqrt[n]{\alpha}$ zu bezeichnen.

Beispiel

Wir bestimmen alle Lösungen der Gleichung $z^6 - iz^3 = 1$.

Beispiel

Wir bestimmen alle Lösungen der Gleichung $z^6 - iz^3 = 1$.

Mit $w = z^3$ folgt $w^2 - iw = 1$ und

$$(w - \frac{i}{2})^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; w_\pm = \frac{i}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Beispiel

Wir bestimmen alle Lösungen der Gleichung $z^6 - iz^3 = 1$.

Mit $w = z^3$ folgt $w^2 - iw = 1$ und

$$(w - \frac{i}{2})^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow w_\pm = \frac{i}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Es gilt $w_\pm = \cos\phi_\pm + i\sin\phi_\pm$ mit $\phi_+ = \pi/6$ und $\phi_- = 5\pi/6$.

Beispiel

Wir bestimmen alle Lösungen der Gleichung $z^6 - iz^3 = 1$.

Mit $w = z^3$ folgt $w^2 - iw = 1$ und

$$(w - \frac{i}{2})^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; w_\pm = \frac{i}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Es gilt $w_\pm = \cos\phi_\pm + i\sin\phi_\pm$ mit $\phi_+ = \pi/6$ und $\phi_- = 5\pi/6$.

Damit bekommen wir die 6 Lösungen

$$\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}\right),\ \cos\left(\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}\right),$$

mit $k = 1, 2, 3$.

13.2 Polynome und Partialbruchzerlegung

Für komplexe Zahlen $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ heißt

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$$

(komplexes) Polynom.

13.2 Polynome und Partialbruchzerlegung

Für komplexe Zahlen $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ heißt

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$$

(komplexes) Polynom.

Ist $a_n \neq 0$, so heißt $\operatorname{grad} p = n$ der *Grad* von p.

Euklidischer Algorithmus

Zunächst untersuchen wir die Division mit Rest, die auch als *Euklidischer Algorithmus* bezeichnet wird.

Zunächst untersuchen wir die Division mit Rest, die auch als *Euklidischer Algorithmus* bezeichnet wird.

Satz Sei p ein Polynom vom Grad m und q ein Polynom vom Grad n mit $m \geq n$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome s und r mit $\operatorname{grad} s = m - n$ und $\operatorname{grad} r < n$ mit

$$p = qs + r.$$

Beispiel

Sei
$$p(z) = iz^5 + z^3 - z^2 + 1, \quad q(z) = z^2 - 1.$$

Beispiel

Sei

$$p(z) = iz^5 + z^3 - z^2 + 1, \quad q(z) = z^2 - 1.$$

Wir bringen zuerst den höchsten Koeffizienten von p zum Verschwinden,

$$p(z) - iz^3 q(z) = (1 - i)z^3 - z^2 + 1.$$

Beispiel

Sei

$$p(z) = iz^5 + z^3 - z^2 + 1, \quad q(z) = z^2 - 1.$$

Wir bringen zuerst den höchsten Koeffizienten von p zum Verschwinden,

$$p(z) - iz^3 q(z) = (1 - i)z^3 - z^2 + 1.$$

Analog

$$p(z) - iz^3 q(z) - (1 - i)zq(z) = -z^2 + (1 - i)z + 1.$$

Daher

$$s(z) = iz^3 + (1 + i)z - 1, \quad r(z) = (1 + i)z$$

Lemma (a) Sei p ein Polynom vom Grad n. Für jedes $\xi \in \mathbb{C}$ gibt es eindeutig bestimmte komplexe Zahlen $b_n, \ldots, b_0$, $b_n \neq 0$, mit

$$p(z) = b_n(z-\xi)^n + b_{n-1}(z-\xi)^{n-1} + \ldots + b_1(z-\xi) + b_0.$$

Lemma (a) Sei p ein Polynom vom Grad n. Für jedes $\xi \in \mathbb{C}$ gibt es eindeutig bestimmte komplexe Zahlen $b_n, \ldots, b_0$, $b_n \neq 0$, mit

$$p(z) = b_n(z-\xi)^n + b_{n-1}(z-\xi)^{n-1} + \ldots + b_1(z-\xi) + b_0.$$

In diesem Fall bezeichnen wir ξ als Entwicklungspunkt des Polynoms p.

Lemma (a) Sei p ein Polynom vom Grad n. Für jedes $\xi \in \mathbb{C}$ gibt es eindeutig bestimmte komplexe Zahlen $b_n, \dots, b_0$, $b_n \neq 0$, mit

$$p(z) = b_n(z-\xi)^n + b_{n-1}(z-\xi)^{n-1} + \ldots + b_1(z-\xi) + b_0.$$

In diesem Fall bezeichnen wir ξ als Entwicklungspunkt des Polynoms p.

(b) Besitzt das Polynom p vom Grade n eine Nullstelle $\xi \in \mathbb{C}$, so gibt es ein eindeutiges Polynom q vom Grad $n-1$ mit

$$p(z) = (z-\xi)q(z).$$

Beweis (a)

(a) Für jedes $\xi \in \mathbb{C}$ gibt es eindeutig bestimmte komplexe Zahlen $b_n, \ldots, b_0$, $b_n \neq 0$, mit

$$p(z) = b_n(z-\xi)^n + b_{n-1}(z-\xi)^{n-1} + \ldots + b_1(z-\xi) + b_0.$$

Beweis (a)

(a) Für jedes $\xi \in \mathbb{C}$ gibt es eindeutig bestimmte komplexe Zahlen $b_n, \ldots, b_0$, $b_n \neq 0$, mit

$$p(z) = b_n(z-\xi)^n + b_{n-1}(z-\xi)^{n-1} + \ldots + b_1(z-\xi) + b_0.$$

Multiplizieren dies mit der binomischen Formel aus und vergleichen die Koeffizienten mit $\sum a_i x^i$,

$$b_k = \sum_{i=k}^{n} a_i \binom{i}{k} \xi^{i-k}, \quad \text{insbesondere } b_0 = p(\xi),\ b_n = a_n.$$

Beweis (b)

(b) Besitzt p vom Grade n eine Nullstelle $\xi \in \mathbb{C}$, so gibt es ein eindeutiges Polynom q vom Grad $n-1$ mit

$$p(z) = (z - \xi)q(z).$$

Beweis (b)

(b) Besitzt p vom Grade n eine Nullstelle $\xi \in \mathbb{C}$, so gibt es ein eindeutiges Polynom q vom Grad $n-1$ mit

$$p(z) = (z-\xi)q(z).$$

Ist ξ eine Nullstelle, so folgt $b_0 = 0$ in der Darstellung aus (a). Wir können $z-\xi$ ausklammern.

Reeller Fall

- Das Lemma bleibt für reelle Polynome sinngemäß richtig.

Reeller Fall

- Das Lemma bleibt für reelle Polynome sinngemäß richtig.
- Das Polynom q in $p(z) = (z - \xi)q(z)$ ist reell, wenn die Nullstelle ξ reell ist.

Reeller Fall

- Das Lemma bleibt für reelle Polynome sinngemäß richtig.
- Das Polynom q in $p(z) = (z - \xi)q(z)$ ist reell, wenn die Nullstelle ξ reell ist.
- Für reelle Polynome gilt $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$. Ist ξ Nullstelle des reellen Polynoms p, so ist auch $\overline{\xi}$ Nullstelle.

Reeller Fall

- Das Lemma bleibt für reelle Polynome sinngemäß richtig.
- Das Polynom q in $p(z) = (z - \xi)q(z)$ ist reell, wenn die Nullstelle ξ reell ist.
- Für reelle Polynome gilt $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$. Ist ξ Nullstelle des reellen Polynoms p, so ist auch $\overline{\xi}$ Nullstelle.
- Es gilt daher

$$p(z) = (z - \xi)(z - \overline{\xi})q(z) = r(z)q(z),$$

wobei $r(z) = z^2 - 2\mathrm{Re}\,\xi z + |\xi|^2$ ein reelles quadratisches Polynom ist.

Fundamentalsatz der Algebra

Satz Jedes nichtkonstante Polynom besitzt mindestens eine Nullstelle.

Satz Jedes nichtkonstante Polynom besitzt mindestens eine Nullstelle.

Wenden wir den Fundamentalsatz und das letzte Lemma sukzessive an, so hat jedes Polynom vom Grad n genau n Nullstellen und genügt der Darstellung

$$p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0 = a_n (z - \xi_1) \ldots (z - \xi_n).$$

Dabei können die Nullstellen ξ_i auch mehrfach auftreten.

Partialbruchzerlegung

Ist $r(z) = q(z)/p(z)$ eine rationale Funktion, so können wir wegen des Euklidischen Algorithmus

$$m = \operatorname{grad} q < n = \operatorname{grad} p$$

annehmen.

Partialbruchzerlegung

Ist $r(z) = q(z)/p(z)$ eine rationale Funktion, so können wir wegen des Euklidischen Algorithmus

$$m = \operatorname{grad} q < n = \operatorname{grad} p$$

annehmen.

Durch Kürzen des Bruches können wir ferner den höchsten Koeffizienten von p zu 1 normieren.

Partialbruchzerlegung

Ist $r(z) = q(z)/p(z)$ eine rationale Funktion, so können wir wegen des Euklidischen Algorithmus

$$m = \operatorname{grad} q < n = \operatorname{grad} p$$

annehmen.

Durch Kürzen des Bruches können wir ferner den höchsten Koeffizienten von p zu 1 normieren.

Nach dem Fundamentalsatz hat p die Darstellung

$$p(z) = (z - \xi_1)^{l_1}(z - \xi_2)^{l_2} \ldots (z - \xi_k)^{l_k}$$

mit den Nullstellen $\xi_1, \ldots \xi_k$ und $\sum l_k = n$.

Partialbruchzerlegung

Satz Jede rationale Funktion $r(z) = q(z)/p(z)$ mit $m = \operatorname{grad} q < n = \operatorname{grad} p$ lässt sich eindeutig als Summe von Partialbrüchen schreiben,

$$\frac{q(z)}{p(z)} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{a_{i1}}{z-\xi_i} + \frac{a_{i2}}{(z-\xi_i)^2} + \ldots + \frac{a_{il_i}}{(z-\xi_i)^{l_i}} \right) .$$

Beweis – Existenz

Vollständige Induktion über den Nennergrad n :

Beweis – Existenz

Vollständige Induktion über den Nennergrad n :

Für $n = 1$ ist q konstant und daher nichts zu beweisen.

Beweis – Existenz

Vollständige Induktion über den Nennergrad n :

Für $n = 1$ ist q konstant und daher nichts zu beweisen.

Es gibt die behauptete Partialbruchzerlegung für Polynome mit $n = \mathrm{grad}\, p > \mathrm{grad}\, q$ (=IV).

Vollständige Induktion über den Nennergrad n :

Für $n = 1$ ist q konstant und daher nichts zu beweisen.

Es gibt die behauptete Partialbruchzerlegung für Polynome mit $n = \operatorname{grad} p > \operatorname{grad} q$ (=IV).

Sei also jetzt $r(z) = q(z)/p(z)$ mit $\operatorname{grad} p = n + 1 > \operatorname{grad} q$. Ist ξ eine l-fache Nullstelle von p, so

$$p(z) = (z - \xi)^l s(z) \quad \text{mit } s(\xi) \neq 0.$$

Vollständige Induktion über den Nennergrad n :

Für $n = 1$ ist q konstant und daher nichts zu beweisen.

Es gibt die behauptete Partialbruchzerlegung für Polynome mit $n = \operatorname{grad} p > \operatorname{grad} q$ (=IV).

Sei also jetzt $r(z) = q(z)/p(z)$ mit $\operatorname{grad} p = n + 1 > \operatorname{grad} q$. Ist ξ eine l-fache Nullstelle von p, so

$$p(z) = (z - \xi)^l s(z) \quad \text{mit } s(\xi) \neq 0.$$

Es gilt

$$\frac{q(z)}{s(z)} - \frac{q(\xi)}{s(\xi)} = \frac{q(z)s(\xi) - s(z)q(\xi)}{s(z)s(\xi)} = \frac{(z-\xi)t(z)}{s(z)} \quad \text{mit } \operatorname{grad} t \leq n-1,$$

weil ξ Nullstelle von $q(z)s(\xi) - s(z)q(\xi)$ ist.

Beweis – Existenz

$$p(z) = (z-\xi)^l s(z) \quad \text{mit } s(\xi) \neq 0.$$

$$\frac{q(z)}{s(z)} - \frac{q(\xi)}{s(\xi)} = \frac{q(z)s(\xi) - s(z)q(\xi)}{s(z)s(\xi)} = \frac{(z-\xi)t(z)}{s(z)} \quad \text{mit } \operatorname{grad} t \leq n-1.$$

Beweis – Existenz

$$p(z) = (z-\xi)^l s(z) \quad \text{mit } s(\xi) \neq 0.$$

$$\frac{q(z)}{s(z)} - \frac{q(\xi)}{s(\xi)} = \frac{q(z)s(\xi) - s(z)q(\xi)}{s(z)s(\xi)} = \frac{(z-\xi)t(z)}{s(z)} \quad \text{mit } \operatorname{grad} t \leq n-1.$$

Wir haben also

$$\frac{q(z)}{(z-\xi)^l s(z)} - \frac{q(\xi)}{(z-\xi)^l s(\xi)} = \frac{t(z)}{(z-\xi)^{l-1} s(z)}.$$

Beweis – Existenz

$$p(z) = (z-\xi)^l s(z) \quad \text{mit } s(\xi) \neq 0.$$

$$\frac{q(z)}{s(z)} - \frac{q(\xi)}{s(\xi)} = \frac{q(z)s(\xi) - s(z)q(\xi)}{s(z)s(\xi)} = \frac{(z-\xi)t(z)}{s(z)} \quad \text{mit } \operatorname{grad} t \leq n-1.$$

Wir haben also

$$\frac{q(z)}{(z-\xi)^l s(z)} - \frac{q(\xi)}{(z-\xi)^l s(\xi)} = \frac{t(z)}{(z-\xi)^{l-1} s(z)}.$$

Wegen $\operatorname{grad}((z-\xi)^{l-1}s(z)) = n > \operatorname{grad} t(z)$ können wir auf der rechten Seite die Induktionsvoraussetzung anwenden.

Beweis – Existenz

$$p(z) = (z-\xi)^l s(z) \quad \text{mit } s(\xi) \neq 0.$$

$$\frac{q(z)}{s(z)} - \frac{q(\xi)}{s(\xi)} = \frac{q(z)s(\xi) - s(z)q(\xi)}{s(z)s(\xi)} = \frac{(z-\xi)t(z)}{s(z)} \quad \text{mit } \operatorname{grad} t \leq n-1.$$

Wir haben also

$$\frac{q(z)}{(z-\xi)^l s(z)} - \frac{q(\xi)}{(z-\xi)^l s(\xi)} = \frac{t(z)}{(z-\xi)^{l-1} s(z)}.$$

Wegen $\operatorname{grad}((z-\xi)^{l-1}s(z)) = n > \operatorname{grad} t(z)$ können wir auf der rechten Seite die Induktionsvoraussetzung anwenden.

Beachte für die praktische Durchführung: Der Koeffizient in der höchsten Potenz $1/(z-\xi)^l$ ist $q(\xi)/s(\xi)$.

Beweis – Eindeutigkeit

Annahme: Es gibt zwei Partialbruchzerlegungen mit Koeffizienten a_{ij} und b_{ij}.

Beweis – Eindeutigkeit

Annahme: Es gibt zwei Partialbruchzerlegungen mit Koeffizienten a_{ij} und b_{ij}.

Wir bilden die Differenz dieser Zerlegungen und erhalten eine Zerlegung der Nullfunktion mit Koeffizienten $a_{ij} - b_{ij}$. Diese multiplizieren wir mit $(z - \xi_j)^{l_j}$.

Beweis – Eindeutigkeit

Annahme: Es gibt zwei Partialbruchzerlegungen mit Koeffizienten a_{ij} und b_{ij}.

Wir bilden die Differenz dieser Zerlegungen und erhalten eine Zerlegung der Nullfunktion mit Koeffizienten $a_{ij} - b_{ij}$. Diese multiplizieren wir mit $(z - \xi_j)^{l_j}$.

Der Grenzwert $z \to \xi_j$ liefert dann $a_{il_j} = b_{il_j}$.

Annahme: Es gibt zwei Partialbruchzerlegungen mit Koeffizienten a_{ij} und b_{ij}.

Wir bilden die Differenz dieser Zerlegungen und erhalten eine Zerlegung der Nullfunktion mit Koeffizienten $a_{ij} - b_{ij}$. Diese multiplizieren wir mit $(z - \xi_j)^{l_j}$.

Der Grenzwert $z \to \xi_j$ liefert dann $a_{il_j} = b_{il_j}$.

Durch Multiplikation mit $(z - \xi_j)^{l_j - 1}$ läßt sich dieses Argument für die nächstniedrigere Potenz wiederholen.

Praktische Durchführung

Man setzt die Partialbruchzerlegung wie im Satz angegeben an.

Praktische Durchführung

Man setzt die Partialbruchzerlegung wie im Satz angegeben an.

Indem man die rechte Seite auf den Hauptnenner bringt, lassen sich die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung durch Koeffizientenvergleich bestimmen.

Praktische Durchführung

Man setzt die Partialbruchzerlegung wie im Satz angegeben an.

Indem man die rechte Seite auf den Hauptnenner bringt, lassen sich die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung durch Koeffizientenvergleich bestimmen.

Alternativ können wir einzelne Werte für z in den Ansatz einsetzen, was zu einem linearen Gleichungssystem für die gesuchten Koeffizienten führt.

Praktische Durchführung

Man setzt die Partialbruchzerlegung wie im Satz angegeben an.

Indem man die rechte Seite auf den Hauptnenner bringt, lassen sich die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung durch Koeffizientenvergleich bestimmen.

Alternativ können wir einzelne Werte für z in den Ansatz einsetzen, was zu einem linearen Gleichungssystem für die gesuchten Koeffizienten führt.

Dieses in jedem Fall mühsame Verfahren kann man sich etwas erleichtern, indem man beachtet, daß der höchste Koeffizient der Zerlegung durch $q(\xi)/s(\xi)$ gegeben ist. Dies gilt wegen

$$\frac{q(z)}{(z-\xi)^l s(z)} - \frac{q(\xi)}{(z-\xi)^l s(\xi)} = \frac{t(z)}{(z-\xi)^{l-1} s(z)}.$$

Beispiel

Für $r(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)^2}$ setzen wir an

$$r(z) = \frac{a}{z} + \frac{b_2}{(z-1)^2} + \frac{b_1}{z-1}.$$

Beispiel

Für $r(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)^2}$ setzen wir an

$$r(z) = \frac{a}{z} + \frac{b_2}{(z-1)^2} + \frac{b_1}{z-1}.$$

Die höchsten Koeffizienten erhalten wir aus der letzten Gleichung der vorigen Folie oder direkt durch folgende Überlegung.

Beispiel

Für $r(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)^2}$ setzen wir an

$$r(z) = \frac{a}{z} + \frac{b_2}{(z-1)^2} + \frac{b_1}{z-1}.$$

Die höchsten Koeffizienten erhalten wir aus der letzten Gleichung der vorigen Folie oder direkt durch folgende Überlegung.

Um a zu bestimmen, multiplizieren wir obige Gleichung mit z und führen den Grenzübergang $z \to 0$ durch.

Beispiel

Für $r(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)^2}$ setzen wir an

$$r(z) = \frac{a}{z} + \frac{b_2}{(z-1)^2} + \frac{b_1}{z-1}.$$

Die höchsten Koeffizienten erhalten wir aus der letzten Gleichung der vorigen Folie oder direkt durch folgende Überlegung.

Um a zu bestimmen, multiplizieren wir obige Gleichung mit z und führen den Grenzübergang $z \to 0$ durch.

Damit hängt die Berechnung von a nicht von den anderen Unbekannten ab und wir erhalten

$$a = \lim_{z \to 0} z r(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z+1}{(z-1)^2} = 1.$$

Beispiel

Für $r(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)^2}$ setzen wir an

$$r(z) = \frac{a}{z} + \frac{b_2}{(z-1)^2} + \frac{b_1}{z-1}.$$

Die höchsten Koeffizienten erhalten wir aus der letzten Gleichung der vorigen Folie oder direkt durch folgende Überlegung.

Um a zu bestimmen, multiplizieren wir obige Gleichung mit z und führen den Grenzübergang $z \to 0$ durch.

Damit hängt die Berechnung von a nicht von den anderen Unbekannten ab und wir erhalten

$$a = \lim_{z \to 0} z r(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z+1}{(z-1)^2} = 1.$$

Analog

$$b_2 = \lim_{z \to 1} (z-1)^2 r(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z+1}{z} = 2.$$

Beispiel

Für $r(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)^2}$ setzen wir an

$$r(z) = \frac{a}{z} + \frac{b_2}{(z-1)^2} + \frac{b_1}{z-1}.$$

$$a = \lim_{z\to 0} zr(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z+1}{(z-1)^2} = 1.$$

$$b_2 = \lim_{z\to 1} (z-1)^2 r(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z+1}{z} = 2.$$

Beispiel

Für $r(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)^2}$ setzen wir an

$$r(z) = \frac{a}{z} + \frac{b_2}{(z-1)^2} + \frac{b_1}{z-1}.$$

$$a = \lim_{z \to 0} z r(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z+1}{(z-1)^2} = 1.$$

$$b_2 = \lim_{z \to 1} (z-1)^2 r(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z+1}{z} = 2.$$

Da dieses Verfahren für den letzten Koeffizienten versagt, bestimmen wir ihn durch Einsetzen eines beliebigen z. Für $z = 2$ ist

$$b_1 = r(2) - \frac{a}{2} - b_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 2 = -1.$$

Beispiel

Für $r(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)^2}$ setzen wir an

$$r(z) = \frac{a}{z} + \frac{b_2}{(z-1)^2} + \frac{b_1}{z-1}.$$

$$a = \lim_{z\to 0} z r(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z+1}{(z-1)^2} = 1.$$

$$b_2 = \lim_{z\to 1} (z-1)^2 r(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z+1}{z} = 2.$$

Da dieses Verfahren für den letzten Koeffizienten versagt, bestimmen wir ihn durch Einsetzen eines beliebigen z. Für $z = 2$ ist

$$b_1 = r(2) - \frac{a}{2} - b_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 2 = -1.$$

Daher

$$\frac{z+1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1}.$$

Reeller Fall

Sind p, q reelle Polynome mit $n = \operatorname{grad} p > m = \operatorname{grad} q$, so kann man komplex konjugierte Nullstellen von p zu einem reellen quadratischen Polynom zusammenfassen.

Reeller Fall

Sind p, q reelle Polynome mit $n = \operatorname{grad} p > m = \operatorname{grad} q$, so kann man komplex konjugierte Nullstellen von p zu einem reellen quadratischen Polynom zusammenfassen.

Sind $\xi_1, \ldots \xi_k$ die reellen Nullstellen von p, so gilt

$$\frac{q(z)}{p(z)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l_i} \frac{a_{ij}}{(z - \xi_i)^j} + \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{b_{ij} z + c_{ij}}{(z^2 + \alpha_i z + \beta_i)^j}.$$

Reeller Fall

Sind p, q reelle Polynome mit $n = \operatorname{grad} p > m = \operatorname{grad} q$, so kann man komplex konjugierte Nullstellen von p zu einem reellen quadratischen Polynom zusammenfassen.

Sind $\xi_1, \ldots \xi_k$ die reellen Nullstellen von p, so gilt

$$\frac{q(z)}{p(z)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l_i} \frac{a_{ij}}{(z-\xi_i)^j} + \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{b_{ij} z + c_{ij}}{(z^2 + \alpha_i z + \beta_i)^j}.$$

In dieser Darstellung sind alle Größen reell. Die Polynome $z^2 + \alpha_i z + \beta_i$ bestimmt man aus $(z-\xi)(z-\overline{\xi})$.

Reeller Fall

Sind p, q reelle Polynome mit $n = \operatorname{grad} p > m = \operatorname{grad} q$, so kann man komplex konjugierte Nullstellen von p zu einem reellen quadratischen Polynom zusammenfassen.

Sind $\xi_1, \ldots \xi_k$ die reellen Nullstellen von p, so gilt

$$\frac{q(z)}{p(z)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l_i} \frac{a_{ij}}{(z - \xi_i)^j} + \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{b_{ij} z + c_{ij}}{(z^2 + \alpha_i z + \beta_i)^j}.$$

In dieser Darstellung sind alle Größen reell. Die Polynome $z^2 + \alpha_i z + \beta_i$ bestimmt man aus $(z - \xi)(z - \bar{\xi})$.

Am einfachsten bestimmt man die reelle Partialbruchzerlegung, indem man erst die komplexe berechnet und dann die komplex konjugierten Terme zusammenfaßt.

Beispiel

Für $r(z) = \dfrac{z^3}{(z^2+1)^2}$ setzen wir an

$$r(z) = \frac{a_2}{(z-i)^2} + \frac{a_1}{z-i} + \frac{b_2}{(z+i)^2} + \frac{b_1}{z+i}.$$

Beispiel

Für $r(z) = \dfrac{z^3}{(z^2+1)^2}$ setzen wir an

$$r(z) = \frac{a_2}{(z-i)^2} + \frac{a_1}{z-i} + \frac{b_2}{(z+i)^2} + \frac{b_1}{z+i}.$$

Die höchsten Koeffizienten bestimmen wir mit

$$a_2 = \lim_{z\to i}(z-i)^2 r(z) = \frac{i}{4}, \quad b_2 = \lim_{z\to -i}(z+i)^2 r(z) = -\frac{i}{4}.$$

Beispiel

Für $r(z) = \dfrac{z^3}{(z^2+1)^2}$ setzen wir an

$$r(z) = \frac{a_2}{(z-i)^2} + \frac{a_1}{z-i} + \frac{b_2}{(z+i)^2} + \frac{b_1}{z+i}.$$

Die höchsten Koeffizienten bestimmen wir mit

$$a_2 = \lim_{z \to i} (z-i)^2 r(z) = \frac{i}{4}, \quad b_2 = \lim_{z \to -i} (z+i)^2 r(z) = -\frac{i}{4}.$$

Setze $z = 0$ und $z = 2i$ in obige Formel ein und erhalte das LGS

$$-a_1 + b_1 = 0, \quad 3a_1 + b_1 = 2,$$

mit Lösung $a_1 = b_1 = 1/2$.

Beispiel

Für $r(z) = \dfrac{z^3}{(z^2+1)^2}$ setzen wir an

$$r(z) = \frac{a_2}{(z-i)^2} + \frac{a_1}{z-i} + \frac{b_2}{(z+i)^2} + \frac{b_1}{z+i}.$$

Die höchsten Koeffizienten bestimmen wir mit

$$a_2 = \lim_{z\to i}(z-i)^2 r(z) = \frac{i}{4}, \quad b_2 = \lim_{z\to -i}(z+i)^2 r(z) = -\frac{i}{4}.$$

Setze $z=0$ und $z=2i$ in obige Formel ein und erhalte das LGS

$$-a_1 + b_1 = 0, \quad 3a_1 + b_1 = 2,$$

mit Lösung $a_1 = b_1 = 1/2$.

Die komplexe Partialbruchzerlegung lautet dann

$$r(z) = \frac{i}{4(z-i)^2} - \frac{i}{4(z+i)^2} + \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{2(z+i)}.$$

Beispiel

Für $r(z) = \dfrac{z^3}{(z^2+1)^2}$ setzen wir an

$$r(z) = \frac{a_2}{(z-i)^2} + \frac{a_1}{z-i} + \frac{b_2}{(z+i)^2} + \frac{b_1}{z+i}.$$

Die komplexe Partialbruchzerlegung lautet

$$r(z) = \frac{i}{4(z-i)^2} - \frac{i}{4(z+i)^2} + \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{2(z+i)}.$$

Beispiel

Für $r(z) = \frac{z^3}{(z^2+1)^2}$ setzen wir an

$$r(z) = \frac{a_2}{(z-i)^2} + \frac{a_1}{z-i} + \frac{b_2}{(z+i)^2} + \frac{b_1}{z+i}.$$

Die komplexe Partialbruchzerlegung lautet

$$r(z) = \frac{i}{4(z-i)^2} - \frac{i}{4(z+i)^2} + \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{2(z+i)}.$$

Für die reelle Zerlegung addiere die komplex konjugierten Summanden gleicher Ordnung

$$r(x) = -\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1}.$$

13.3 Konvergenz komplexer Zahlenfolgen

Der Kreis um $a \in \mathbb{C}$ mit Radius ε

$$B_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\} \subset \mathbb{C}$$

heißt ε-*Umgebung* von a.

13.3 Konvergenz komplexer Zahlenfolgen

Der Kreis um $a \in \mathbb{C}$ mit Radius ε

$$B_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\} \subset \mathbb{C}$$

heißt ε-*Umgebung* von a.

Eine Folge (z_n), $z_n \in \mathbb{C}$, *konvergiert gegen* $\xi \in \mathbb{C}$, wenn in jeder ε-Umgebung von ξ fast alle Folgenglieder liegen.

Kriterium für Konvergenz

Satz Mit $z_n = x_n + iy_n$ und $\xi = a + ib$ gilt $z_n \to \xi$ genau dann, wenn $x_n \to a$ und $y_n \to b$ in $\mathbb{R}$.

Kriterium für Konvergenz

Satz Mit $z_n = x_n + iy_n$ und $\xi = a + ib$ gilt $z_n \to \xi$ genau dann, wenn $x_n \to a$ und $y_n \to b$ in $\mathbb{R}$.

Beweis Für $z = x + iy$ gilt wegen $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$|x|, |y| \leq |z| \leq |x| + |y|.$$

Kriterium für Konvergenz

Satz Mit $z_n = x_n + iy_n$ und $\xi = a + ib$ gilt $z_n \to \xi$ genau dann, wenn $x_n \to a$ und $y_n \to b$ in $\mathbb{R}$.

Beweis Für $z = x + iy$ gilt wegen $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$|x|, |y| \leq |z| \leq |x| + |y|.$$

$z_n \to \xi$ ist äquivalent zu

$$|z_n - \xi| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Kriterium für Konvergenz

Satz Mit $z_n = x_n + iy_n$ und $\xi = a + ib$ gilt $z_n \to \xi$ genau dann, wenn $x_n \to a$ und $y_n \to b$ in $\mathbb{R}$.

Beweis Für $z = x + iy$ gilt wegen $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$|x|, |y| \leq |z| \leq |x| + |y|.$$

$z_n \to \xi$ ist äquivalent zu

$$|z_n - \xi| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Mit obiger Abschätzung folgt daraus auch $|x_n - a|, |y_n - b| < \varepsilon$ und damit $x_n \to a$ und $y_n \to b$.

Kriterium für Konvergenz

Satz Mit $z_n = x_n + iy_n$ und $\xi = a + ib$ gilt $z_n \to \xi$ genau dann, wenn $x_n \to a$ und $y_n \to b$ in $\mathbb{R}$.

Beweis Für $z = x + iy$ gilt wegen $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$|x|, |y| \leq |z| \leq |x| + |y|.$$

$z_n \to \xi$ ist äquivalent zu

$$|z_n - \xi| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Mit obiger Abschätzung folgt daraus auch $|x_n - a|, |y_n - b| < \varepsilon$ und damit $x_n \to a$ und $y_n \to b$.

Gilt umgekehrt $x_n \to a$ und $y_n \to b$, so folgt wieder aus obiger Abschätzung für genügend große n

$$|z_n - \xi| < 2\varepsilon \;\Rightarrow\; z_n \to \xi.$$

Reihen komlexer Zahlen

$\sum_n z_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_n |z_n|$ konvergiert.

$\sum_n z_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_n |z_n|$ konvergiert.

Nach dem letzten Satz ist dies äquivalent dazu, dass die beiden reellen Reihen $\sum \mathrm{Re}\, z_n$ und $\sum \mathrm{Im}\, z_n$ absolut konvergent sind.

Reihen komlexer Zahlen

$\sum_n z_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_n |z_n|$ konvergiert.

Nach dem letzten Satz ist dies äquivalent dazu, dass die beiden reellen Reihen $\sum \operatorname{Re} z_n$ und $\sum \operatorname{Im} z_n$ absolut konvergent sind.

Majoranten-, Wurzel- und Quotientenkriterium bleiben für die absolute Konvergenz komplexer Reihen gültig.

13.4 Stetigkeit

Sei $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$. f heißt *stetig* in $\xi \in D$, wenn:

$$\text{Für alle Folgen } (z_n) \text{ mit } z_n \in D,\ z_n \to \xi \text{ gilt } f(z_n) \to \xi.$$

13.4 Stetigkeit

Sei $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$. f heißt *stetig* in $\xi \in D$, wenn:

$$\text{Für alle Folgen } (z_n) \text{ mit } z_n \in D,\ z_n \to \xi \text{ gilt } f(z_n) \to \xi.$$

f heißt *stetig in D*, wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.

13.4 Stetigkeit

Sei $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$. f heißt *stetig* in $\xi \in D$, wenn:

$$\text{Für alle Folgen } (z_n) \text{ mit } z_n \in D,\ z_n \to \xi \text{ gilt } f(z_n) \to \xi.$$

f heißt *stetig in* D, wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.

Wie im Reellen ist auch das ε, δ-Kriterium äquivalent zur Stetigkeit:

$$f \text{ stetig in } \xi \in D \;\Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in D\ |z - \xi| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(\xi)| < \varepsilon$$

Stetigkeit gleichmäßig konvergenter Reihen

Die aus dem Reellen bekannten Sätze über die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen bleiben mit gleichem Beweis richtig.

Stetigkeit gleichmäßig konvergenter Reihen

Die aus dem Reellen bekannten Sätze über die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen bleiben mit gleichem Beweis richtig.

Satz Die Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ seien stetig für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die aus dem Reellen bekannten Sätze über die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen bleiben mit gleichem Beweis richtig.

Satz Die Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ seien stetig für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wenn

- $|f_n(z)| \leq a_n$ für alle $z \in D$,
- die Reihe $\sum a_n$ konvergent ist,

Stetigkeit gleichmäßig konvergenter Reihen

Die aus dem Reellen bekannten Sätze über die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen bleiben mit gleichem Beweis richtig.

Satz Die Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ seien stetig für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wenn

- $|f_n(z)| \leq a_n$ für alle $z \in D$,
- die Reihe $\sum a_n$ konvergent ist,

dann konvergiert die Reihe $\sum f_n(z)$ gleichmäßig absolut gegen eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{C}$.

13.5 Potenzreihen

Die Konvergenz einer komplexen Potenzreihe

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C}$$

lässt sich wie im Reellen untersuchen.

13.5 Potenzreihen

Die Konvergenz einer komplexen Potenzreihe

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C}$$

lässt sich wie im Reellen untersuchen.

Mit

$$L = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$$

ist wieder $R = 1/L$ der Konvergenzradius.

13.5 Potenzreihen

Die Konvergenz einer komplexen Potenzreihe

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C}$$

lässt sich wie im Reellen untersuchen.

Mit

$$L = \limsup_{n} \sqrt[n]{|a_n|}$$

ist wieder $R = 1/L$ der Konvergenzradius.

Insbesondere haben wir Konvergenz gegen eine stetige Grenzfunktion im Bereich

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}.$$

Jede reelle Potenzreihe $f(x) = \sum a_n x^n$ lässt sich auf die komplexe Zahlenebene mit gleichem Konvergenzradius fortsetzen, indem man einfach $x \in \mathbb{C}$ einsetzt.

Jede reelle Potenzreihe $f(x) = \sum a_n x^n$ lässt sich auf die komplexe Zahlenebene mit gleichem Konvergenzradius fortsetzen, indem man einfach $x \in \mathbb{C}$ einsetzt.

Auf diese Weise bekommen wir die komplexe Exponentialfunktion sowie den komplexen Sinus und Cosinus

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Eigenschaften

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Indem wir iz in die Exponentialfunktion einsetzen, erhalten wir durch Koeffizientenvergleich die *Eulersche Gleichung*

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

Eigenschaften

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Indem wir iz in die Exponentialfunktion einsetzen, erhalten wir durch Koeffizientenvergleich die *Eulersche Gleichung*

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

cos ist gerade. sin ist ungerade. Daher

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Eigenschaften

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Indem wir iz in die Exponentialfunktion einsetzen, erhalten wir durch Koeffizientenvergleich die *Eulersche Gleichung*

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

cos ist gerade. sin ist ungerade. Daher

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Die Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion

$$e^{z+w} = e^z e^w \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C},$$

folgt mit gleichem Beweis wie im Reellen. Hieraus erhalten wir $e^z e^{-z} = 1$, insbesondere $e^z \neq 0$.

Anwendung auf Polarkoordinaten

Wir setzen in

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

ein reelles y ein

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Anwendung auf Polarkoordinaten

Wir setzen in

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

ein reelles y ein

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

- Der Realteil bestimmt den Absolutbetrag von e^z,

Anwendung auf Polarkoordinaten

Wir setzen in

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

ein reelles y ein

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

- Der Realteil bestimmt den Absolutbetrag von e^z,
- der Imaginärteil bestimmt die Richtung von e^z.

Anwendung auf Polarkoordinaten

Wir setzen in

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

ein reelles y ein

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

- Der Realteil bestimmt den Absolutbetrag von e^z,
- der Imaginärteil bestimmt die Richtung von e^z.

Aus der letzten Gleichung erhalten wir eine elegante Version der Polardarstellung komplexer Zahlen

$$z = re^{i\phi}, \quad \text{mit } r = |z| \text{ und } \phi = \arg z.$$

Anwendung auf Polarkoordinaten

Wir setzen in

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

ein reelles y ein

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

- Der Realteil bestimmt den Absolutbetrag von e^z,
- der Imaginärteil bestimmt die Richtung von e^z.

Aus der letzten Gleichung erhalten wir eine elegante Version der Polardarstellung komplexer Zahlen

$$z = re^{i\phi}, \quad \text{mit } r = |z| \text{ und } \phi = \arg z.$$

Komplexe Multiplikation und Division:

$$zw = rse^{i(\phi+\psi)}, \quad \frac{z}{w} = \frac{r}{s}e^{i(\phi-\psi)}.$$

Anwendung auf Polarkoordinaten

Wir setzen in

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

ein reelles y ein

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

- Der Realteil bestimmt den Absolutbetrag von e^z,
- der Imaginärteil bestimmt die Richtung von e^z.

Aus der letzten Gleichung erhalten wir eine elegante Version der Polardarstellung komplexer Zahlen

$$z = re^{i\phi}, \quad \text{mit } r = |z| \text{ und } \phi = \arg z.$$

Komplexe Multiplikation und Division:

$$zw = rse^{i(\phi+\psi)}, \quad \frac{z}{w} = \frac{r}{s}e^{i(\phi-\psi)}.$$

Für reelle ϕ gilt

$$|e^{i\phi}| = 1, \quad e^{i\phi} = e^{i(\phi+2k\pi)} \text{ für } k \in \mathbb{Z}, \quad \overline{e^{i\phi}} = e^{-i\phi} = (e^{i\phi})^{-1}.$$

Additionstheoreme

Die Additionstheoreme für Cosinus und Sinus erhält man aus

$$\cos(x+y) + i\sin(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$$

Additionstheoreme

Die Additionstheoreme für Cosinus und Sinus erhält man aus

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + i\sin(x+y) &= e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} \\ &= \cos x\cos y - \sin x\sin y + i(\sin x\sin y - \cos x\cos y),\end{aligned}$$

indem man hier Real- und Imaginärteile betrachtet.

Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra

- $K_r(\xi)$ = Kreislinie um ξ mit Radius r,

- $K_r(\xi)$ = Kreislinie um ξ mit Radius r,
- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ = beliebige stetige Funktion, die keine Nullstelle in $K_r(\xi)$ besitzt,

Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra

- $K_r(\xi)$ = Kreislinie um ξ mit Radius r,
- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ = beliebige stetige Funktion, die keine Nullstelle in $K_r(\xi)$ besitzt,
- $d(K_r(\xi), f)$ = *Drehungszahl* von f in $K_r(\xi)$.

- $K_r(\xi) =$ Kreislinie um ξ mit Radius r,
- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} =$ beliebige stetige Funktion, die keine Nullstelle in $K_r(\xi)$ besitzt,
- $d(K_r(\xi), f) =$ *Drehungszahl* von f in $K_r(\xi)$.

Wir durchlaufen mit $f(z)$ den Kreis im Gegenuhrzeigersinn und beobachten, wie oft sich $f(z)$ um den Nullpunkt dreht.

- $K_r(\xi)$ = Kreislinie um ξ mit Radius r,
- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ = beliebige stetige Funktion, die keine Nullstelle in $K_r(\xi)$ besitzt,
- $d(K_r(\xi), f)$ = *Drehungszahl* von f in $K_r(\xi)$.

Wir durchlaufen mit $f(z)$ den Kreis im Gegenuhrzeigersinn und beobachten, wie oft sich $f(z)$ um den Nullpunkt dreht.

Beispielsweise umrundet $f(z) = z$ den Nullpunkt einmal, wenn wir den Kreis $K_1(0)$ entlanglaufen, also $d(K_1(0), z) = 1$.

- $K_r(\xi)$ = Kreislinie um ξ mit Radius r,
- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ = beliebige stetige Funktion, die keine Nullstelle in $K_r(\xi)$ besitzt,
- $d(K_r(\xi), f)$ = *Drehungszahl* von f in $K_r(\xi)$.

Wir durchlaufen mit $f(z)$ den Kreis im Gegenuhrzeigersinn und beobachten, wie oft sich $f(z)$ um den Nullpunkt dreht.

Beispielsweise umrundet $f(z) = z$ den Nullpunkt einmal, wenn wir den Kreis $K_1(0)$ entlanglaufen, also $d(K_1(0), z) = 1$.

Aus der Darstellung

$$z^n = |z|^n e^{in\phi}, \quad \phi = \arg z,$$

erhalten wir $d(K_r(0), z^n) = n$ für alle $r > 0$.

Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra – Störungslemma

Die Drehungszahl hängt stetig von f ab: Kleine Störungen von f verändern die Drehungszahl nicht:

Die Drehungszahl hängt stetig von f ab: Kleine Störungen von f verändern die Drehungszahl nicht:

Lemma Ist $|f(z)| \geq a > 0$ und $|g(z)| \leq a/2$ auf $K_r(\xi)$, so gilt

$$d(K_r(\xi), f) = d(K_r(\xi), f + g).$$

Ist

$$p(z) = z^n + q(z) \quad \text{mit } q(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$$

ein komplexes Polynom, so folgt mit

$$M = |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_0|$$

für $|z| = R \geq 1$ die Abschätzung

$$|q(z)| \leq MR^{n-1}.$$

Ist

$$p(z) = z^n + q(z) \quad \text{mit } q(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$$

ein komplexes Polynom, so folgt mit

$$M = |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_0|$$

für $|z| = R \geq 1$ die Abschätzung

$$|q(z)| \leq MR^{n-1}.$$

Wegen $|z^n| = R^n$ gilt nach dem Lemma für genügend großes R

$$d(K_R, p) = d(K_R, z^n) = n.$$

Ist $\xi \in \mathbb{C}$ ein Punkt mit $a = |p(\xi)| > 0$, so gibt es wegen der Stetigkeit von p ein $\delta > 0$ mit

$$|p(z) - p(\xi| < a/2$$

für alle z mit $|z - \xi| < \delta$.

Ist $\xi \in \mathbb{C}$ ein Punkt mit $a = |p(\xi)| > 0$, so gibt es wegen der Stetigkeit von p ein $\delta > 0$ mit

$$|p(z) - p(\xi| < a/2$$

für alle z mit $|z - \xi| < \delta$.

Daraus folgt aus dem Lemma

$$d(K_{\delta/2}(\xi), p) = d(K_{\delta/2}(\xi), p(\xi)) = 0.$$

Ist $\xi \in \mathbb{C}$ ein Punkt mit $a = |p(\xi)| > 0$, so gibt es wegen der Stetigkeit von p ein $\delta > 0$ mit

$$|p(z) - p(\xi| < a/2$$

für alle z mit $|z - \xi| < \delta$.

Daraus folgt aus dem Lemma

$$d(K_{\delta/2}(\xi), p) = d(K_{\delta/2}(\xi), p(\xi)) = 0.$$

Wir betrachten eine stetige Deformation, die den Kreis $K_R(0)$ in $K_{\delta/2}(\xi)$ überführt

Ist $\xi \in \mathbb{C}$ ein Punkt mit $a = |p(\xi)| > 0$, so gibt es wegen der Stetigkeit von p ein $\delta > 0$ mit

$$|p(z) - p(\xi| < a/2$$

für alle z mit $|z - \xi| < \delta$.

Daraus folgt aus dem Lemma

$$d(K_{\delta/2}(\xi), p) = d(K_{\delta/2}(\xi), p(\xi)) = 0.$$

Wir betrachten eine stetige Deformation, die den Kreis $K_R(0)$ in $K_{\delta/2}(\xi)$ überführt

Die Drehungszahl hängt stetig von einer solchen Deformation ab, ist aber immer ganzzahlig.

Ist $\xi \in \mathbb{C}$ ein Punkt mit $a = |p(\xi)| > 0$, so gibt es wegen der Stetigkeit von p ein $\delta > 0$ mit

$$|p(z) - p(\xi| < a/2$$

für alle z mit $|z - \xi| < \delta$.

Daraus folgt aus dem Lemma

$$d(K_{\delta/2}(\xi), p) = d(K_{\delta/2}(\xi), p(\xi)) = 0.$$

Wir betrachten eine stetige Deformation, die den Kreis $K_R(0)$ in $K_{\delta/2}(\xi)$ überführt

Die Drehungszahl hängt stetig von einer solchen Deformation ab, ist aber immer ganzzahlig.

Da sie im Verlauf der Deformation von n auf 0 springt, kann sie nicht immer definiert sein.

Ist $\xi \in \mathbb{C}$ ein Punkt mit $a = |p(\xi)| > 0$, so gibt es wegen der Stetigkeit von p ein $\delta > 0$ mit

$$|p(z) - p(\xi| < a/2$$

für alle z mit $|z - \xi| < \delta$.

Daraus folgt aus dem Lemma

$$d(K_{\delta/2}(\xi), p) = d(K_{\delta/2}(\xi), p(\xi)) = 0.$$

Wir betrachten eine stetige Deformation, die den Kreis $K_R(0)$ in $K_{\delta/2}(\xi)$ überführt

Die Drehungszahl hängt stetig von einer solchen Deformation ab, ist aber immer ganzzahlig.

Da sie im Verlauf der Deformation von n auf 0 springt, kann sie nicht immer definiert sein.

Dies ist ist aber nur dann der Fall, wenn p eine Nullstelle besitzt.

13.6 Taylorreihen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

heißt *Potenzreihe mit Entwicklungspunkt a*.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

heißt *Potenzreihe mit Entwicklungspunkt a*.

Mit

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

ist die Reihe konvergent in

$$D = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < R = \frac{1}{L}\}.$$

13.6 Taylorreihen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

heißt *Potenzreihe mit Entwicklungspunkt* a.

Mit

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

ist die Reihe konvergent in

$$D = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < R = \frac{1}{L}\}.$$

f kann in D unendlich oft gliedweise differenziert werden, insbesondere gilt

$$f^{(n)}(a) = n! a_n,$$

also

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Taylorreihe = Potenzreihe

Satz Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ in einer Umgebung von a konvergent. Dann stimmt das Taylorpolynom $T_n(x;a)$ mit dem n-ten Abschnitt der Reihe überein,

$$T_n(x;a) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k.$$

Satz Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ in einer Umgebung von a konvergent. Dann stimmt das Taylorpolynom $T_n(x;a)$ mit dem n-ten Abschnitt der Reihe überein,

$$T_n(x;a) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k.$$

Ist umgekehrt f unendlich oft differenzierbar mit $R_n(x;a) \to 0$ gleichmäßig in Umgebung von a, so läßt sich in dieser Umgebung f als Reihe

$$\sum_n a_n(x-a)^n \text{ mit } a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

darstellen.

Beispiel

Bestimme die Zahl e mit

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{e^{\xi}}{6!} = 2.716\ldots + \frac{e^{\xi}}{6!}, \quad \xi \in (0,1).$$

Beispiel

Bestimme die Zahl e mit

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{e^\xi}{6!} = 2.716\ldots + \frac{e^\xi}{6!}, \quad \xi \in (0,1).$$

Wegen $e < 3$ gilt

$$\frac{e^\xi}{6!} \leq \frac{e^1}{6!} \leq \frac{3}{6!} = 0.00595\ldots,$$

also $|e - 2,716\ldots| \leq 0.006$, der genaue Wert ist $e = 2,718\ldots$

Potenzreihe des Logarithmus

Satz Für $|x| < 1$ besitzt der Logarithmus die Reihendarstellung

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Beweis

Mit $\ln'(1+x) = 1/(1+x)$ können wir die höheren Ableitungen leicht bestimmen

$$\ln^{(n)}(1+x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Beweis

Mit $\ln'(1+x) = 1/(1+x)$ können wir die höheren Ableitungen leicht bestimmen

$$\ln^{(n)}(1+x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Die angegebene Reihe errechnet sich damit aus $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.

Beweis

Mit $\ln'(1+x) = 1/(1+x)$ können wir die höheren Ableitungen leicht bestimmen

$$\ln^{(n)}(1+x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Die angegebene Reihe errechnet sich damit aus $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.

Nach dem Wurzel- oder Quotientenkriterium ist die Reihe in der Tat für $|x| < 1$ konvergent.

13.7 Differenzengleichungen

Am Beispiel der Fibonacci-Folge

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 3, \quad F_1 = F_2 = 1,$$

leiten wir ein allgemeines Verfahren für die explizite Bestimmung rekursiv definierter Folgen her.

13.7 Differenzengleichungen

Am Beispiel der Fibonacci-Folge

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 3, \quad F_1 = F_2 = 1,$$

leiten wir ein allgemeines Verfahren für die explizite Bestimmung rekursiv definierter Folgen her.

Die Folge soll für alle $n \in \mathbb{Z}$ definiert sein mit $F_n = 0$ für $n \leq 0$.

Fibonacci-Folge für $n \in \mathbb{Z}$

Ist $a(n)$ eine Aussage, die für alle $n \in \mathbb{Z}$ wahr oder falsch ist, so

$$[a(n)] = \begin{cases} 1 & \text{falls } a(n) \text{ wahr} \\ 0 & \text{falls } a(n) \text{ falsch} \end{cases} .$$

Fibonacci-Folge für $n \in \mathbb{Z}$

Ist $a(n)$ eine Aussage, die für alle $n \in \mathbb{Z}$ wahr oder falsch ist, so

$$[a(n)] = \begin{cases} 1 & \text{falls } a(n) \text{ wahr} \\ 0 & \text{falls } a(n) \text{ falsch} \end{cases} .$$

Schreibe die Fibonacci-Folge in der Form

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + [n = 1], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Mit $F_n = 0$ für $n \leq 0$ folgt dann $F_1 = 1$ und $F_2 = 1$.

Zugeordnete Potenzreihe

Ordne der Folge eine Potenzreihe zu

$$F(z) = \sum F_n z^n.$$

Zugeordnete Potenzreihe

Ordne der Folge eine Potenzreihe zu

$$F(z) = \sum F_n z^n.$$

Die Summe erstreckt sich über alle $n \in \mathbb{Z}$.

Zugeordnete Potenzreihe

Ordne der Folge eine Potenzreihe zu

$$F(z) = \sum F_n z^n.$$

Die Summe erstreckt sich über alle $n \in \mathbb{Z}$.

Aus der Definitionsgleichung erhalten wir

$$F(z) = \sum F_{n-1} z^n + \sum F_{n-2} z^n + \sum [n = 1] z^n = zF(z) + z^2 F(z) + z.$$

Zugeordnete Potenzreihe

Ordne der Folge eine Potenzreihe zu

$$F(z) = \sum F_n z^n.$$

Die Summe erstreckt sich über alle $n \in \mathbb{Z}$.

Aus der Definitionsgleichung erhalten wir

$$F(z) = \sum F_{n-1} z^n + \sum F_{n-2} z^n + \sum [n = 1] z^n = zF(z) + z^2 F(z) + z.$$

Daher

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

Zugeordnete Potenzreihe

Ordne der Folge eine Potenzreihe zu

$$F(z) = \sum F_n z^n.$$

Die Summe erstreckt sich über alle $n \in \mathbb{Z}$.

Aus der Definitionsgleichung erhalten wir

$$F(z) = \sum F_{n-1} z^n + \sum F_{n-2} z^n + \sum [n = 1] z^n = zF(z) + z^2 F(z) + z.$$

Daher

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

Man beachte, dass all diese Operationen rein formal, also ohne Konvergenzbetrachtungen durchgeführt werden.

Zugeordnete Potenzreihe

Ordne der Folge eine Potenzreihe zu

$$F(z) = \sum F_n z^n.$$

Die Summe erstreckt sich über alle $n \in \mathbb{Z}$.

Aus der Definitionsgleichung erhalten wir

$$F(z) = \sum F_{n-1} z^n + \sum F_{n-2} z^n + \sum [n = 1] z^n = zF(z) + z^2 F(z) + z.$$

Daher

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

Man beachte, dass all diese Operationen rein formal, also ohne Konvergenzbetrachtungen durchgeführt werden.

Aber: Wegen $F^n \leq 2^n$ hat die Reihe $\sum F_n z^n$ einen positiven Konvergenzradius und ist die Taylorreihe der rationalen Funktion $z/(1 - z - z^2)$.

Für
$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$
wird eine Partialbruchzerlegung in etwas modifizierter Form durchgeführt.

Reflektiertes Polynom

Für

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

wird eine Partialbruchzerlegung in etwas modifizierter Form durchgeführt.

Lemma Das dem Polynom

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + 1, \quad a_n \neq 0,$$

zugeordnete *reflektierte Polynom*

$$p^R(z) = a_n + a_{n-1} z + \ldots + a_1 z^{n-1} + z^n$$

besitze die n Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Reflektiertes Polynom

Für

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

wird eine Partialbruchzerlegung in etwas modifizierter Form durchgeführt.

Lemma Das dem Polynom

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + 1, \quad a_n \neq 0,$$

zugeordnete *reflektierte Polynom*

$$p^R(z) = a_n + a_{n-1} z + \ldots + a_1 z^{n-1} + z^n$$

besitze die n Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Dann gilt

$$p(z) = (1 - \alpha_1 z)(1 - \alpha_2 z) \ldots (1 - \alpha_n z).$$

Beweis

Es gilt

$$p(z) = z^n p^R(\frac{1}{z}).$$

Beweis

Es gilt

$$p(z) = z^n p^R(\frac{1}{z}).$$

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir

$$p(z) = z^n(\frac{1}{z} - \alpha_1)\dots(\frac{1}{z} - \alpha_n) = (1 - \alpha_1 z)\dots(1 - \alpha_n z).$$

Partialbruchzerlegung

Wir bestimmen die Partialbruchzerlegung in der Form

$$\frac{z}{1-z-z^2} = \frac{a}{1-\phi z} + \frac{b}{1-\hat{\phi} z}.$$

Wir bestimmen die Partialbruchzerlegung in der Form

$$\frac{z}{1-z-z^2} = \frac{a}{1-\phi z} + \frac{b}{1-\hat{\phi} z}.$$

ϕ, $\hat{\phi}$ = Nullstellen des reflektierten Polynoms $p^R(z) = z^2 - z - 1$.

Partialbruchzerlegung

Wir bestimmen die Partialbruchzerlegung in der Form

$$\frac{z}{1-z-z^2} = \frac{a}{1-\phi z} + \frac{b}{1-\hat{\phi} z}.$$

ϕ, $\hat{\phi}$ = Nullstellen des reflektierten Polynoms $p^R(z) = z^2 - z - 1$.

Für diese erhalten wir

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{z}{1-z-z^2} = \frac{a}{1-\phi z} + \frac{b}{1-\hat{\phi} z}.$$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{z}{1-z-z^2} = \frac{a}{1-\phi z} + \frac{b}{1-\hat{\phi} z}.$$

Die Koeffizienten werden völlig analog zur üblichen Partialbruchzerlegung bestimmt. Wir multiplizieren mit $1-\phi z$ und werten an der Stelle $z = 1/\phi$ aus

$$a = \frac{z}{1-\hat{\phi} z}\Big|_{z=1/\phi} = \frac{1}{\phi-\hat{\phi}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{z}{1-z-z^2} = \frac{a}{1-\phi z} + \frac{b}{1-\hat{\phi} z}.$$

Die Koeffizienten werden völlig analog zur üblichen Partialbruchzerlegung bestimmt. Wir multiplizieren mit $1-\phi z$ und werten an der Stelle $z = 1/\phi$ aus

$$a = \frac{z}{1-\hat{\phi} z}\Big|_{z=1/\phi} = \frac{1}{\phi - \hat{\phi}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Für b erhalten wir analog $b = -1/\sqrt{5}$, insgesamt

$$\sum F_n z^n = \frac{z}{1-z-z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}(1-\phi z)} - \frac{1}{\sqrt{5}(1-\hat{\phi} z)}.$$

Partialbruchzerlegung

$$\sum F_n z^n = \frac{z}{1-z-z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}(1-\phi z)} - \frac{1}{\sqrt{5}(1-\hat{\phi} z)}.$$

Partialbruchzerlegung

$$\sum F_n z^n = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}(1 - \phi z)} - \frac{1}{\sqrt{5}(1 - \hat{\phi} z)}.$$

Aus der geometrischen Reihe folgt für $\alpha \neq 0$

$$\frac{1}{1 - \alpha z} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^n$$

und daher mit Koeffizientenvergleich

$$F_n = \frac{\phi^n - \hat{\phi}^n}{\sqrt{5}}.$$

Partialbruchzerlegung

$$\sum F_n z^n = \frac{z}{1-z-z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}(1-\phi z)} - \frac{1}{\sqrt{5}(1-\hat{\phi} z)}.$$

Aus der geometrischen Reihe folgt für $\alpha \neq 0$

$$\frac{1}{1-\alpha z} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^n$$

und daher mit Koeffizientenvergleich

$$F_n = \frac{\phi^n - \hat{\phi}^n}{\sqrt{5}}.$$

Dies ist die *Binetsche Darstellung* der Fibonacci-Zahlen, die aber bereits früher von L. Euler angegeben wurde.

Allgemeine Rekursionen

Ist (f_n) eine beliebige Folge, so nennen wir

$$f(z) = \sum f_n z^n$$

die *zugeordente Potenzreihe*.

Ist (f_n) eine beliebige Folge, so nennen wir

$$f(z) = \sum f_n z^n$$

die *zugeordente Potenzreihe*.

Eine elementare Funktion mit Reihendarstellung f heißt *erzeugende Funktion*.

Ist (f_n) eine beliebige Folge, so nennen wir

$$f(z) = \sum f_n z^n$$

die *zugeordente Potenzreihe*.

Eine elementare Funktion mit Reihendarstellung f heißt *erzeugende Funktion*.

Im Falle einfacher Rekursionsgleichungen wie der Fibonacci-Folge wird die erzeugende Funktion rational sein und wir können Partialbruchzerlegung verwenden.

Ist (f_n) eine beliebige Folge, so nennen wir

$$f(z) = \sum f_n z^n$$

die *zugeordente Potenzreihe*.

Eine elementare Funktion mit Reihendarstellung f heißt *erzeugende Funktion*.

Im Falle einfacher Rekursionsgleichungen wie der Fibonacci-Folge wird die erzeugende Funktion rational sein und wir können Partialbruchzerlegung verwenden.

Treten im Nennerpolynom mehrfache Nullstellen auf, so entstehen Terme der Form

$$\frac{1}{(1-\alpha z)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} \alpha^n z^n.$$

Beispiel

Wir bestimmen die Lösung der Rekursion

$$f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2} + (-1)^n, \; n \geq 2, \quad f_0 = f_1 = 1.$$

Beispiel

Wir bestimmen die Lösung der Rekursion

$$f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2} + (-1)^n, \ n \geq 2, \quad f_0 = f_1 = 1.$$

In diesem Fall ist bereits $f_0 = 1$. Wir müssen sicherstellen, dass die Rekursion für alle $n \in \mathbb{Z}$ richtig ist. Wir setzen

$$f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2} + (-1)^n[n \geq 0] + [n = 1].$$

Beispiel

Wir bestimmen die Lösung der Rekursion

$$f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2} + (-1)^n, \; n \geq 2, \quad f_0 = f_1 = 1.$$

In diesem Fall ist bereits $f_0 = 1$. Wir müssen sicherstellen, dass die Rekursion für alle $n \in \mathbb{Z}$ richtig ist. Wir setzen

$$f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2} + (-1)^n[n \geq 0] + [n = 1].$$

Aus $f_{-2} = f_{-1} = 0$ folgt $f_0 = 1$, $f_1 = 1$. Damit wird die Folge für alle $n \in \mathbb{Z}$ korrekt dargestellt.

Beispiel

Für die zugeordnete Reihe gilt

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum f_n z^n \\
&= \sum f_{n-1} z^n + 2 \sum f_{n-2} z^n + \sum (-1)^n z^n [n \geq 0] + \sum z^n [n = 1] \\
&= z f(z) + 2z^2 f(z) + \frac{1}{1+z} + z,
\end{aligned}
$$

Beispiel

Für die zugeordnete Reihe gilt

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum f_n z^n \\
&= \sum f_{n-1} z^n + 2 \sum f_{n-2} z^n + \sum (-1)^n z^n [n \geq 0] + \sum z^n [n = 1] \\
&= z f(z) + 2z^2 f(z) + \frac{1}{1+z} + z,
\end{aligned}
$$

daher

$$
f(z) = \frac{1 + z(1+z)}{(1+z)(1-z-2z^2)} = \frac{1+z+z^2}{(1-2z)(1+z)^2}.
$$

Beispiel

In

$$f(z) = \frac{a}{1-2z} + \frac{b}{1+z} + \frac{c}{(1+z)^2}$$

erhalten wir

$$a = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{9}{4}} = \frac{7}{9}, \quad c = \frac{1-1+1}{1+2} = \frac{1}{3}.$$

Beispiel

In
$$f(z) = \frac{a}{1-2z} + \frac{b}{1+z} + \frac{c}{(1+z)^2}$$
erhalten wir
$$a = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{9}{4}} = \frac{7}{9}, \quad c = \frac{1-1+1}{1+2} = \frac{1}{3}.$$
Durch Einsetzen von beispielsweise $z=0$ folgt $b = -\frac{1}{9}$ und mit $(1+z)^{-2} = \sum (n+1)(-1)^n$
$$f_n = \frac{7}{9}2^n - \frac{1}{9}(-1)^n + \frac{1}{3}(n+1)(-1)^n = \frac{7}{9}2^n + (\frac{1}{3}n + \frac{2}{9})(-1)^n.$$

Wir betrachten die *homogene lineare Differenzengleichung der Ordnung k*

$$f_n = a_{k-1} f_{n-1} + \ldots + a_1 f_{n-k+1} + a_0 f_{n-k}.$$

Wir betrachten die *homogene lineare Differenzengleichung der Ordnung k*

$$f_n = a_{k-1}f_{n-1} + \ldots + a_1 f_{n-k+1} + a_0 f_{n-k}.$$

In diesem Fall benötigen wir k Anfangswerte, beispielsweise die Kenntnis von $f_0, \ldots, f_{k-1}$, um die Rekursion starten zu können.

Lösungsraum der Differenzengleichung

$$f_n = a_{k-1} f_{n-1} + \ldots + a_1 f_{n-k+1} + a_0 f_{n-k}.$$

Wir setzen $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{C}$ voraus und betrachten die Lösungsmenge ebenfalls in $\mathbb{C}$.

Lösungsraum der Differenzengleichung

$$f_n = a_{k-1} f_{n-1} + \ldots + a_1 f_{n-k+1} + a_0 f_{n-k}.$$

Wir setzen $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{C}$ voraus und betrachten die Lösungsmenge ebenfalls in $\mathbb{C}$.

- Die Summe zweie Lösungen ist wieder eine Lösung,
- Das Vielfache einer Lösung ist wieder eine Lösung,
- Die k Zahlen $f_0, \ldots, f_{k-1}$ können frei gewählt werden.

Lösungsraum der Differenzengleichung

$$f_n = a_{k-1} f_{n-1} + \ldots + a_1 f_{n-k+1} + a_0 f_{n-k}.$$

Wir setzen $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{C}$ voraus und betrachten die Lösungsmenge ebenfalls in $\mathbb{C}$.

- Die Summe zweie Lösungen ist wieder eine Lösung,
- Das Vielfache einer Lösung ist wieder eine Lösung,
- Die k Zahlen $f_0, \ldots, f_{k-1}$ können frei gewählt werden.

Die Menge der Lösungen bilden einen linearen Vektorraum über $\mathbb{C}$ der Dimension k.

Ansatz zur Lösung

$$f_n = a_{k-1} f_{n-1} + \ldots + a_1 f_{n-k+1} + a_0 f_{n-k}.$$

Ansatz: $f_n = \alpha^n$ mit einer komplexen Zahl α.

Ansatz zur Lösung

$$f_n = a_{k-1} f_{n-1} + \ldots + a_1 f_{n-k+1} + a_0 f_{n-k}.$$

Ansatz: $f_n = \alpha^n$ mit einer komplexen Zahl α.

$$\alpha^n \stackrel{!}{=} a_{k-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha^{n-k+1} + a_0 \alpha^{n-k}.$$

Ansatz zur Lösung

$$f_n = a_{k-1} f_{n-1} + \ldots + a_1 f_{n-k+1} + a_0 f_{n-k}.$$

Ansatz: $f_n = \alpha^n$ mit einer komplexen Zahl α.

$$\alpha^n \stackrel{!}{=} a_{k-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha^{n-k+1} + a_0\alpha^{n-k}.$$

Teile durch α^{n-k}. Rekursionsgleichung ist genau dann erfüllt, wenn α Nullstelle des *charakteristischen Polynoms*

$$q(\alpha) = \alpha^k - a_{k-1}\alpha^{k-1} - \ldots - a_1\alpha - a_0$$

ist.

Ansatz zur Lösung

$$f_n = a_{k-1} f_{n-1} + \ldots + a_1 f_{n-k+1} + a_0 f_{n-k}.$$

Ansatz: $f_n = \alpha^n$ mit einer komplexen Zahl α.

$$\alpha^n \stackrel{!}{=} a_{k-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha^{n-k+1} + a_0\alpha^{n-k}.$$

Teile durch α^{n-k}. Rekursionsgleichung ist genau dann erfüllt, wenn α Nullstelle des *charakteristischen Polynoms*

$$q(\alpha) = \alpha^k - a_{k-1}\alpha^{k-1} - \ldots - a_1\alpha - a_0$$

ist.

q stimmt mit dem zuvor als p^R bezeichneten Polynom überein.

Ansatz zur Lösung

$$f_n = a_{k-1} f_{n-1} + \ldots + a_1 f_{n-k+1} + a_0 f_{n-k}.$$

Ansatz: $f_n = \alpha^n$ mit einer komplexen Zahl α.

$$\alpha^n \stackrel{!}{=} a_{k-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha^{n-k+1} + a_0 \alpha^{n-k}.$$

Teile durch α^{n-k}. Rekursionsgleichung ist genau dann erfüllt, wenn α Nullstelle des *charakteristischen Polynoms*

$$q(\alpha) = \alpha^k - a_{k-1}\alpha^{k-1} - \ldots - a_1 \alpha - a_0$$

ist.

q stimmt mit dem zuvor als p^R bezeichneten Polynom überein.

Sind die Nullstellen $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ von q alle verschieden, so ist die allgemeine Lösung der Rekursion

$$f_n = c_1 \alpha_1^n + \ldots + c_k \alpha_k^n, \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

Ansatz zur Lösung

$$f_n = a_{k-1} f_{n-1} + \ldots + a_1 f_{n-k+1} + a_0 f_{n-k}.$$

Ansatz: $f_n = \alpha^n$ mit einer komplexen Zahl α.

$$\alpha^n \overset{!}{=} a_{k-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha^{n-k+1} + a_0\alpha^{n-k}.$$

Teile durch α^{n-k}. Rekursionsgleichung ist genau dann erfüllt, wenn α Nullstelle des *charakteristischen Polynoms*

$$q(\alpha) = \alpha^k - a_{k-1}\alpha^{k-1} - \ldots - a_1\alpha - a_0$$

ist.

q stimmt mit dem zuvor als p^R bezeichneten Polynom überein.

Sind die Nullstellen $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ von q alle verschieden, so ist die allgemeine Lösung der Rekursion

$$f_n = c_1\alpha_1^n + \ldots + c_k\alpha_k^n, \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

Die Konstanten $c_1, \ldots, c_k$ werden aus den Anfangsbedingungen für die f_n bestimmt.

Ansatz zur Lösung

Ist α_j eine r-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms mit $r > 1$, so lässt sich leicht nachrechnen, dass

$$f_n = c_{j,1}\alpha_j^n,\ c_{j,2}n\alpha_j^n, \ldots, c_{j,r}n^{r-1}\alpha_j^n$$

ebenfalls Lösungen der Rekursion sind.

Ansatz zur Lösung

Ist α_j eine r-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms mit $r > 1$, so lässt sich leicht nachrechnen, dass

$$f_n = c_{j,1}\alpha_j^n,\ c_{j,2}n\alpha_j^n, \ldots, c_{j,r}n^{r-1}\alpha_j^n$$

ebenfalls Lösungen der Rekursion sind.

Da ein Polynom vom Grade k genau k Nullstellen besitzt, haben wir also immer k partikuläre Lösungen, deren Konstanten aus den k Anfangsbedingungen bestimmt werden können.

Beispiel (i)

Für die Fibonacci-Folge ist das charakteristische Polynom $p(\alpha) = \alpha^2 - \alpha - 1$ mit den bekannten Nullstellen $\alpha_1 = \phi$, $\alpha_2 = \hat{\phi}$.

Beispiel (i)

Für die Fibonacci-Folge ist das charakteristische Polynom $p(\alpha) = \alpha^2 - \alpha - 1$ mit den bekannten Nullstellen $\alpha_1 = \phi$, $\alpha_2 = \hat{\phi}$.

In der allgemeinen Lösung

$$f_n = c_1 \phi^n + c_2 \hat{\phi}^n$$

liefern die Anfangsbedingungen $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ das lineare Gleichungssystem

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 \phi + c_2 \hat{\phi} = 1,$$

Beispiel (i)

Für die Fibonacci-Folge ist das charakteristische Polynom $p(\alpha) = \alpha^2 - \alpha - 1$ mit den bekannten Nullstellen $\alpha_1 = \phi$, $\alpha_2 = \hat{\phi}$.

In der allgemeinen Lösung

$$f_n = c_1\phi^n + c_2\hat{\phi}^n$$

liefern die Anfangsbedingungen $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ das lineare Gleichungssystem

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1\phi + c_2\hat{\phi} = 1,$$

mit Lösung $c_1 = -c_2 = 1/\sqrt{5}$.

Beispiel (ii)

Das oben behandelte Beispiel

$$f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2} + (-1)^n, \; n \geq 2, \quad f_0 = f_1 = 1.$$

ist nicht von der gewünschten Form.

Beispiel (ii)

Das oben behandelte Beispiel

$$f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2} + (-1)^n,\ \ n \geq 2, \quad f_0 = f_1 = 1.$$

ist nicht von der gewünschten Form.

Wir können die Rekursion erneut auf f_{n-1} anwenden und erhalten

$$f_n = (f_{n-2} + 2f_{n-3} + (-1)^{n-1}) + 2f_{n-2} + (-1)^n = 3f_{n-2} + 2f_{n-3}.$$

Beispiel (ii)

Das oben behandelte Beispiel

$$f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2} + (-1)^n, \; n \geq 2, \quad f_0 = f_1 = 1.$$

ist nicht von der gewünschten Form.

Wir können die Rekursion erneut auf f_{n-1} anwenden und erhalten

$$f_n = (f_{n-2} + 2f_{n-3} + (-1)^{n-1}) + 2f_{n-2} + (-1)^n = 3f_{n-2} + 2f_{n-3}.$$

Das charakteristische Polynom

$$p(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha - 2 = (\alpha - 2)(\alpha + 1)^2$$

hat für $\alpha_2 = -1$ eine doppelte Nullstelle.

Beispiel (ii)

Das oben behandelte Beispiel

$$f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2} + (-1)^n, \; n \geq 2, \quad f_0 = f_1 = 1.$$

ist nicht von der gewünschten Form.

Wir können die Rekursion erneut auf f_{n-1} anwenden und erhalten

$$f_n = (f_{n-2} + 2f_{n-3} + (-1)^{n-1}) + 2f_{n-2} + (-1)^n = 3f_{n-2} + 2f_{n-3}.$$

Das charakteristische Polynom

$$p(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha - 2 = (\alpha - 2)(\alpha + 1)^2$$

hat für $\alpha_2 = -1$ eine doppelte Nullstelle. Das führt auf die allgemeine Lösung

$$f_n = c_1 2^n + c_2(-1)^n + c_3 n(-1)^n.$$

Beispiel (ii)

Das oben behandelte Beispiel

$$f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2} + (-1)^n, \; n \geq 2, \quad f_0 = f_1 = 1.$$

ist nicht von der gewünschten Form.

Wir können die Rekursion erneut auf f_{n-1} anwenden und erhalten

$$f_n = (f_{n-2} + 2f_{n-3} + (-1)^{n-1}) + 2f_{n-2} + (-1)^n = 3f_{n-2} + 2f_{n-3}.$$

Das charakteristische Polynom

$$p(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha - 2 = (\alpha - 2)(\alpha + 1)^2$$

hat für $\alpha_2 = -1$ eine doppelte Nullstelle. Das führt auf die allgemeine Lösung

$$f_n = c_1 2^n + c_2(-1)^n + c_3 n(-1)^n.$$

Aus der Anfangsbedingung $f_0 = f_1 = 1$, $f_2 = 4$, erhalten wir wie oben $c_1 = 7/9$, $c_2 = 2/9$, $c_3 = 1/3$.