4 Zahlen

Themen:

- Rationale und reelle Zahlen
- Komplexe Zahlen
- Mächtigkeit von Mengen

4.1 Körper – Potenzen und geometrische Summenformel

In einem Körper $\mathbb{K}$ können wir für $a \neq 0$ auch negative Potenzen

$$a^{-n} = (a^n)^{-1}$$

erklären.

In einem Körper $\mathbb{K}$ können wir für $a \neq 0$ auch negative Potenzen

$$a^{-n} = (a^n)^{-1}$$

erklären.

Die Potenzgesetze

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \quad a^n b^n = (ab)^n, \quad (a^m)^n = a^{mn},$$

gelten auch für $m, n \in \mathbb{Z}$, sofern $a, b \neq 0$.

Satz In einem Körper $\mathbb{K}$ gilt die *geometrische Summenformel*

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad \text{für alle } q \neq 1.$$

Geometrische Summenformel

Satz In einem Körper $\mathbb{K}$ gilt die *geometrische Summenformel*

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad \text{für alle } q \neq 1.$$

Beweis Man verwendet den „Teleskopeffekt"

$$\sum_{i=0}^{n} q^i (1 - q) = \sum_{i=0}^{n} q^i - \sum_{i=0}^{n} q^{i+1} = 1 - q^{n+1}.$$

4.2 Angeordnete Körper und die rationalen Zahlen

Eine Struktur $\mathbb{K} = (K, 0, 1, +, \cdot, \leq)$ heißt *angeordneter Körper*, wenn

- $(K, 0, 1, +, \cdot)$ ist ein Körper,

Eine Struktur $\mathbb{K} = (K, 0, 1, +, \cdot, \leq)$ heißt *angeordneter Körper*, wenn

- $(K, 0, 1, +, \cdot)$ ist ein Körper,
- $\leq$ ist eine totale Ordnung,

4.2 Angeordnete Körper und die rationalen Zahlen

Eine Struktur $\mathbb{K} = (K, 0, 1, +, \cdot, \leq)$ heißt *angeordneter Körper*, wenn

- $(K, 0, 1, +, \cdot)$ ist ein Körper,
- $\leq$ ist eine totale Ordnung,
- $\leq$ ist mit den algebraischen Operationen verträglich.

Totale Ordnung

Wir hatten eine Relation $\leq$ eine totale Ordnung genannt, wenn

(O1) $a \leq a$

(O2) $a \leq b$ und $b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

(O3) Für a, b gilt genau eine der folgenden Relationen

$$a < b, \quad a > b, \quad a = b.$$

Totale Ordnung

Wir hatten eine Relation $\leq$ eine totale Ordnung genannt, wenn

(O1) $a \leq a$

(O2) $a \leq b$ und $b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

(O3) Für a, b gilt genau eine der folgenden Relationen

$$a < b, \quad a > b, \quad a = b.$$

Hier bedeutet $a < b$, dass $a \leq b$ und $a \neq b$ erfüllt ist.

Verträglichkeit von $\leq$

Es gelten die *Anordnungsaxiome*

(A1) $a \leq b \;\Rightarrow\; a + c \leq b + c.$

(A2) $a \leq b$ und $c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc.$

Satz Im angeordneten Körper gelten die folgenden Rechenregeln

(a) $a \leq b \;\Leftrightarrow\; -b \leq -a.$

Rechenregeln

Satz Im angeordneten Körper gelten die folgenden Rechenregeln

(a) $a \leq b \;\Leftrightarrow\; -b \leq -a$.

(b) $ab \geq 0 \;\Leftrightarrow\; a, b \geq 0$ oder $a, b \leq 0$.

Insbesondere ist $a^2 > 0$ für $a \neq 0$ sowie $1 = 1^2 > 0$.

Satz Im angeordneten Körper gelten die folgenden Rechenregeln

(a) $a \leq b \;\Leftrightarrow\; -b \leq -a$.

(b) $ab \geq 0 \;\Leftrightarrow\; a, b \geq 0$ oder $a, b \leq 0$.

Insbesondere ist $a^2 > 0$ für $a \neq 0$ sowie $1 = 1^2 > 0$.

(c) Ist $a \leq b$, so gilt $ac \geq bc$ für $c \leq 0$.

Satz Im angeordneten Körper gelten die folgenden Rechenregeln

(a) $a \leq b \;\Leftrightarrow\; -b \leq -a$.

(b) $ab \geq 0 \;\Leftrightarrow\; a, b \geq 0$ oder $a, b \leq 0$.

Insbesondere ist $a^2 > 0$ für $a \neq 0$ sowie $1 = 1^2 > 0$.

(c) Ist $a \leq b$, so gilt $ac \geq bc$ für $c \leq 0$.

(d) (a)-(c) bleiben richtig, wenn man $\leq$ durch $<$ und $\geq$ durch $>$ ersetzt.

Beweis

(a) $a \leq b \;\Leftrightarrow\; -b \leq -a.$

Beweis

(a) $a \leq b \;\Leftrightarrow\; -b \leq -a$.

Auf $a \leq b$ addieren wir auf beiden Seiten $-a - b$.

Beweis

(b) $ab \geq 0 \;\Leftrightarrow\; a, b \geq 0$ oder $a, b \leq 0$.

Beweis

(b) $ab \geq 0 \;\Leftrightarrow\; a, b \geq 0$ oder $a, b \leq 0$.

Für $a, b \geq 0$ folgt aus (A2) $ab \geq 0$.

Beweis

(b) $ab \geq 0 \;\Leftrightarrow\; a, b \geq 0$ oder $a, b \leq 0$.

Für $a, b \geq 0$ folgt aus (A2) $ab \geq 0$.

$a \leq 0 \Rightarrow -a \geq 0$ nach (a).

Für $a, b \leq 0$ daher $0 \leq (-a)(-b) = ab$.

Beweis

(b) $ab \geq 0 \;\Leftrightarrow\; a, b \geq 0$ oder $a, b \leq 0$.

Für $a, b \geq 0$ folgt aus (A2) $ab \geq 0$.

$a \leq 0 \Rightarrow -a \geq 0$ nach (a).

Für $a, b \leq 0$ daher $0 \leq (-a)(-b) = ab$.

Ist $a \leq 0$, $b \geq 0$ (oder umgekehrt), so folgt mit analoger Argumentation $ab \leq 0$.

Beweis

(c) Ist $a \leq b$, so gilt $ac \geq bc$ für $c \leq 0$.

Beweis

(c) Ist $a \leq b$, so gilt $ac \geq bc$ für $c \leq 0$.

Auch hier ist wieder nach (A2) $a(-c) \leq b(-c)$.

Beweis

(c) Ist $a \leq b$, so gilt $ac \geq bc$ für $c \leq 0$.

Auch hier ist wieder nach (A2) $a(-c) \leq b(-c)$.

$-ac \leq -bc$ und nach (a) $bc \leq ac$.

Folgerungen

- $0 < 1 < 1+1 < \ldots \Rightarrow \mathbb{N} \subset K$

Folgerungen

- $0 < 1 < 1 + 1 < \ldots \; \Rightarrow \; \mathbb{N} \subset K$
- $-n \in K \; \Rightarrow \; \mathbb{Z} \subset K$

Folgerungen

- $0 < 1 < 1 + 1 < \ldots \Rightarrow \mathbb{N} \subset K$
- $-n \in K \Rightarrow \mathbb{Z} \subset K$
- $m/n \in K \Rightarrow \mathbb{Q} \subset K$

Folgerungen

- $0 < 1 < 1 + 1 < \ldots \Rightarrow \mathbb{N} \subset K$
- $-n \in K \Rightarrow \mathbb{Z} \subset K$
- $m/n \in K \Rightarrow \mathbb{Q} \subset K$

$\mathbb{Q}$ ist der minimale angeordnete Körper.

Folgerungen

- $0 < 1 < 1+1 < \dots \;\Rightarrow\; \mathbb{N} \subset K$
- $-n \in K \;\Rightarrow\; \mathbb{Z} \subset K$
- $m/n \in K \;\Rightarrow\; \mathbb{Q} \subset K$

$\mathbb{Q}$ ist der minimale angeordnete Körper.

Insbesondere können alle endlichen Körper nicht angeordnet werden.

$\mathbb{Q}$ ist nicht alles

Wir können die Grundrechenarten innerhalb von $\mathbb{Q}$ uneingeschränkt ausführen.

$\mathbb{Q}$ ist nicht alles

Wir können die Grundrechenarten innerhalb von $\mathbb{Q}$ uneingeschränkt ausführen.

Satz Es gibt keine rationale Zahl r mit $r^2 = 2$.

Beweis

Angenommen, für teilerfremde $m, n \in \mathbb{N}$ wäre

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

Beweis

Angenommen, für teilerfremde $m, n \in \mathbb{N}$ wäre

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

Dann folgt

$$m^2 = 2n^2.$$

Beweis

Angenommen, für teilerfremde $m, n \in \mathbb{N}$ wäre

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

Dann folgt

$$m^2 = 2n^2.$$

Da die rechte Seite durch 2 teilbar ist, muss auch die linke durch 2 teilbar sein, also $m = 2k$ und $4k^2 = 2n^2$.

Beweis

Angenommen, für teilerfremde $m, n \in \mathbb{N}$ wäre

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

Dann folgt

$$m^2 = 2n^2.$$

Da die rechte Seite durch 2 teilbar ist, muss auch die linke durch 2 teilbar sein, also $m = 2k$ und $4k^2 = 2n^2$.

In dieser Identität kann durch 2 geteilt werden, $2k^2 = n^2$. Mit der gleichen Argumentation wie vorher folgt, dass auch n durch 2 teilbar ist.

Beweis

Angenommen, für teilerfremde $m, n \in \mathbb{N}$ wäre

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

Dann folgt

$$m^2 = 2n^2.$$

Da die rechte Seite durch 2 teilbar ist, muss auch die linke durch 2 teilbar sein, also $m = 2k$ und $4k^2 = 2n^2$.

In dieser Identität kann durch 2 geteilt werden, $2k^2 = n^2$. Mit der gleichen Argumentation wie vorher folgt, dass auch n durch 2 teilbar ist.

Da m und n durch 2 teilbar sind, erhalten wir einen Widerspruch zur Annahme, dass m und n teilerfremd sind.

$\mathbb{Q}$ enthält noch viel mehr Lücken

Schauen wir uns Dezimalzahlen der Form

$$n + \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\},$$

an.

$\mathbb{Q}$ enthält noch viel mehr Lücken

Schauen wir uns Dezimalzahlen der Form

$$n + \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\},$$

an.

Der Einfachheit halber betrachten wir hier und im Folgenden nur nichtnegative Zahlen.

Satz Eine Zahl ist genau dann rational, wenn ihre Dezimalentwicklung periodisch ist, also

$$0, a_1 \dots a_k \overline{b_1 \dots b_l}.$$

Beweis

Sei

$$x = 0,a_1 \dots a_k\overline{b_1 \dots b_l}.$$

Dann ist

$$10^k x = a_1 \dots a_k, \overline{b_1 \dots b_l}, \quad 10^{k+l} x = a_1 \dots a_k b_1 \dots b_l, \overline{b_1 \dots b_l}.$$

Beweis

Sei

$$x = 0, a_1 \ldots a_k \overline{b_1 \ldots b_l}.$$

Dann ist

$$10^k x = a_1 \ldots a_k, \overline{b_1 \ldots b_l}, \quad 10^{k+l} x = a_1 \ldots a_k b_1 \ldots b_l, \overline{b_1 \ldots b_l}.$$

$$(10^{k+l} - 10^k) x = a_1 \ldots a_k b_1 \ldots b_l - a_1 \ldots a_k$$

Beweis

Sei

$$x = 0, a_1 \dots a_k \overline{b_1 \dots b_l}.$$

Dann ist

$$10^k x = a_1 \dots a_k, \overline{b_1 \dots b_l}, \quad 10^{k+l} x = a_1 \dots a_k b_1 \dots b_l, \overline{b_1 \dots b_l}.$$

$$(10^{k+l} - 10^k) x = a_1 \dots a_k b_1 \dots b_l - a_1 \dots a_k$$

Damit ist x rational. Insbesondere ist $0, \overline{9} = 1$.

Beweis

Umgekehrte Richtung: In jedem Teilschritt von $m : n$ führen wir eine Division mit Rest aus: $m' \operatorname{div} n = a$ mit Rest $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Beweis

Umgekehrte Richtung: In jedem Teilschritt von $m : n$ führen wir eine Division mit Rest aus: $m' \operatorname{div} n = a$ mit Rest $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Entweder wir gelangen irgendwann zum Rest $r = 0$, dann ist die Zahl nichtperiodisch, oder wir kommen zu einem Rest, den wir bereits hatten. Von da an ist die Dezimalzahl periodisch.

Verallgemeinerung

Der Beweis lässt sich in jedem Stellenwertsystem mit Grundzahl $g > 1$ auf die gleiche Weise durchführen.

Verallgemeinerung

Der Beweis lässt sich in jedem Stellenwertsystem mit Grundzahl $g > 1$ auf die gleiche Weise durchführen.

Für eine rationale Zahl x bezeichnen wir mit $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq x$, z.B. $\lfloor 1,3 \rfloor = 1$, $\lfloor -1,3 \rfloor = -2$.

Verallgemeinerung

Der Beweis lässt sich in jedem Stellenwertsystem mit Grundzahl $g > 1$ auf die gleiche Weise durchführen.

Für eine rationale Zahl x bezeichnen wir mit $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq x$, z.B. $\lfloor 1,3 \rfloor = 1$, $\lfloor -1,3 \rfloor = -2$.

Sei $0 \leq x < 1$ mit $x = 0, a_1 a_2 \ldots {}_g$.

Verallgemeinerung

Der Beweis lässt sich in jedem Stellenwertsystem mit Grundzahl $g > 1$ auf die gleiche Weise durchführen.

Für eine rationale Zahl x bezeichnen wir mit $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq x$, z.B. $\lfloor 1,3 \rfloor = 1$, $\lfloor -1,3 \rfloor = -2$.

Sei $0 \leq x < 1$ mit $x = 0, a_1 a_2 \ldots {}_g$.

Setze $x_0 = x$ und bestimme für $k = 0, 1, \ldots$

$$y_{k+1} = g \cdot x_k, \quad a_{k+1} = \lfloor y_{k+1} \rfloor, \quad x_{k+1} = y_{k+1} - a_{k+1}.$$

Beispiel

Wir stellen $x = 0,1$ im Dreiersystem dar und schreiben die Ziffern in Klammern

$$0,1 \to 0,3\ (0)\ \to 0,9\ (0)\ \to 2,7\ (2)\ \to 0,7 \to\ 2,1\ (2) \to 0,1,$$

daher $0,1 = 0,\overline{0022}_3$.

Die nichtnegativen reellen Zahlen bestehen aus allen Dezimalbrüchen der Form

$$n + \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

Die nichtnegativen reellen Zahlen bestehen aus allen Dezimalbrüchen der Form

$$n + \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

Dem reellen Dezimalbruch $x = 0, a_1 a_2 \ldots$ können wir rationale Zahlen

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k} = 0, a_1 a_2 \ldots a_n, \quad y_n = a_n + 10^{-n}$$

zuordnen. Anschaulich liegt die reelle Zahl „zwischen“ x_n und y_n.

Die nichtnegativen reellen Zahlen bestehen aus allen Dezimalbrüchen der Form

$$n + \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

Dem reellen Dezimalbruch $x = 0, a_1 a_2 \ldots$ können wir rationale Zahlen

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k} = 0, a_1 a_2 \ldots a_n, \quad y_n = a_n + 10^{-n}$$

zuordnen. Anschaulich liegt die reelle Zahl „zwischen“ x_n und y_n.

Die Paare $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilden eine *Intervallschachtelung*:

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist steigend,
- die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist fallend,
- für die Differenz gilt $y_n - x_n \leq 10^{-n}$.

Noch einmal: beschränkt

Eine Teilmenge A in einer angeordneten Menge K heißt *nach unten (oben) beschränkt*, wenn es ein $\xi \in K$ gibt mit $\xi \leq a$ ($\xi \geq a$) für alle $a \in A$.

Noch einmal: beschränkt

Eine Teilmenge A in einer angeordneten Menge K heißt *nach unten (oben) beschränkt*, wenn es ein $\xi \in K$ gibt mit $\xi \leq a$ ($\xi \geq a$) für alle $a \in A$.

ξ heißt in diesem Fall *untere (obere) Schranke* von A.

Noch einmal: beschränkt

Eine Teilmenge A in einer angeordneten Menge K heißt *nach unten (oben) beschränkt*, wenn es ein $\xi \in K$ gibt mit $\xi \leq a$ ($\xi \geq a$) für alle $a \in A$.

ξ heißt in diesem Fall *untere (obere) Schranke* von A.

Ist die Menge A sowohl nach unten als auch nach oben beschränkt, so heißt A *beschränkt*.

Infimum und Supremum

ξ heißt *größte untere Schranke* von A oder *Infimum* von A, wenn für jede andere untere Schranke ξ' gilt $\xi' \leq \xi$.

Infimum und Supremum

ξ heißt *größte untere Schranke* von A oder *Infimum* von A, wenn für jede andere untere Schranke ξ' gilt $\xi' \leq \xi$.

ξ heißt *kleinste obere Schranke* oder *Supremum* von A, wenn für jede andere obere Schranke ξ' gilt $\xi' \geq \xi$.

ξ heißt *größte untere Schranke* von A oder *Infimum* von A, wenn für jede andere untere Schranke ξ' gilt $\xi' \leq \xi$.

ξ heißt *kleinste obere Schranke* oder *Supremum* von A, wenn für jede andere obere Schranke ξ' gilt $\xi' \geq \xi$.

In diesen Fällen schreiben wir $\xi = \inf A$ beziehungsweise $\xi = \sup A$.

ξ heißt *größte untere Schranke* von A oder *Infimum* von A, wenn für jede andere untere Schranke ξ' gilt $\xi' \leq \xi$.

ξ heißt *kleinste obere Schranke* oder *Supremum* von A, wenn für jede andere obere Schranke ξ' gilt $\xi' \geq \xi$.

In diesen Fällen schreiben wir $\xi = \inf A$ beziehungsweise $\xi = \sup A$.

Gehört ein Infimum (Supremum) selber zu A, so heißt es *Minimum (Maximum)*.

Infimum und Supremum einer Menge A sind eindeutig bestimmt, denn wären beispielsweise ξ und η Infima, so

$$\xi \le \eta \text{ und } \eta \le \xi.$$

Beispiel

Wir bestimmen, sofern vorhanden, Supremum, Infimum, Maximum und Minimum der Menge

$$M = \{2^{-m} + n^{-1} : m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Beispiel

Wir bestimmen, sofern vorhanden, Supremum, Infimum, Maximum und Minimum der Menge

$$M = \{2^{-m} + n^{-1} : m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Offenbar ist 0 eine untere Schranke. Da sowohl 2^{-m} als auch n^{-1} für große m, n beliebig klein werden, ist 0 auch die größte untere Schranke.

Beispiel

Wir bestimmen, sofern vorhanden, Supremum, Infimum, Maximum und Minimum der Menge

$$M = \{2^{-m} + n^{-1} : m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Offenbar ist 0 eine untere Schranke. Da sowohl 2^{-m} als auch n^{-1} für große m, n beliebig klein werden, ist 0 auch die größte untere Schranke.

Diese wird aber in der Menge nicht angenommen, ein Minimum gibt es daher nicht.

Beispiel

Wir bestimmen, sofern vorhanden, Supremum, Infimum, Maximum und Minimum der Menge

$$M = \{2^{-m} + n^{-1} : m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Offenbar ist 0 eine untere Schranke. Da sowohl 2^{-m} als auch n^{-1} für große m, n beliebig klein werden, ist 0 auch die größte untere Schranke.

Diese wird aber in der Menge nicht angenommen, ein Minimum gibt es daher nicht.

Das maximale Element erhält man für $m = n = 1$, womit $3/2$ das Maximum von M ist.

Vollständigkeitsaxiom

Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Ist zusätzlich noch

(V) Vollständigkeitsaxiom: Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum.

erfüllt, so heißt $\mathbb{K}$ der *Körper der reellen Zahlen* und wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Vollständigkeitsaxiom

Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Ist zusätzlich noch

(V) Vollständigkeitsaxiom: Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum.

erfüllt, so heißt $\mathbb{K}$ der *Körper der reellen Zahlen* und wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Der Körper $\mathbb{R}$ ist *eindeutig* durch die Axiome festgelegt.

In $\mathbb{Q}$ gilt das Vollständigkeitsaxiom nicht

Im Körper $\mathbb{Q}$ gilt das Vollständigkeitsaxiom nicht, denn wir hatten bereits in einem Satz gesehen, dass $x^2 = 2$ in $\mathbb{Q}$ keine Lösung besitzt.

In $\mathbb{Q}$ gilt das Vollständigkeitsaxiom nicht

Im Körper $\mathbb{Q}$ gilt das Vollständigkeitsaxiom nicht, denn wir hatten bereits in einem Satz gesehen, dass $x^2 = 2$ in $\mathbb{Q}$ keine Lösung besitzt.

Damit hat die nach oben beschränkte Menge

$$M = \{x : \; x^2 < 2\}$$

kein Supremum in $\mathbb{Q}$.

In $\mathbb{Q}$ gilt das Vollständigkeitsaxiom nicht

Im Körper $\mathbb{Q}$ gilt das Vollständigkeitsaxiom nicht, denn wir hatten bereits in einem Satz gesehen, dass $x^2 = 2$ in $\mathbb{Q}$ keine Lösung besitzt.

Damit hat die nach oben beschränkte Menge

$$M = \{x : \ x^2 < 2\}$$

kein Supremum in $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{R}$ enthält neue Zahlen wie eben $\sqrt{2}$, die wir *irrationale Zahlen* nennen.

Satz Ist $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so besitzt die Gleichung $x^n = a$ genau eine reelle Lösung x mit $x \geq 0$.

Satz Ist $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so besitzt die Gleichung $x^n = a$ genau eine reelle Lösung x mit $x \geq 0$.

Diese Lösung wird mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet und die *n-te Wurzel* aus a genannt.

n-te Wurzel

Satz Ist $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so besitzt die Gleichung $x^n = a$ genau eine reelle Lösung x mit $x \geq 0$.

Diese Lösung wird mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet und die *n-te Wurzel* aus a genannt.

Beachte

- Die Wurzel wird nur aus nichtnegativen Zahlen gezogen,
- die Wurzel ist eine nichtnegative Zahl.

Satz Ist $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so besitzt die Gleichung $x^n = a$ genau eine reelle Lösung x mit $x \geq 0$.

Diese Lösung wird mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet und die *n-te Wurzel* aus a genannt.

Beachte

- Die Wurzel wird nur aus nichtnegativen Zahlen gezogen,
- die Wurzel ist eine nichtnegative Zahl.

$(-2)^2 = 4$ und $(-3)^3 = -27$.

Die Wurzel ist nicht die allgemeine Lösung von $x^n = a$.

Vorzeichen und Betrag

Zu einer reellen Zahl heißt

$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1 & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ -1 & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

das *Vorzeichen* (=Signum) von a.

Vorzeichen und Betrag

Zu einer reellen Zahl heißt

$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1 & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ -1 & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

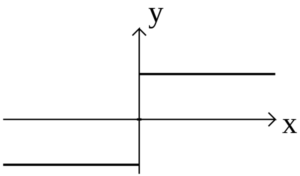
das *Vorzeichen* (=Signum) von a.

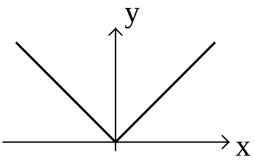
Ferner heißt $|a| = a \operatorname{sgn} a$ oder

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

der *Betrag* von a.

Vorzeichen und Betrag





Eigenschaften des Betrags

(a) Für $a \neq 0$ ist $|a| > 0$.

Eigenschaften des Betrags

(a) Für $a \neq 0$ ist $|a| > 0$.

(b) Es gilt $|ab| = |a|\,|b|$.

Eigenschaften des Betrags

(a) Für $a \neq 0$ ist $|a| > 0$.

(b) Es gilt $|ab| = |a|\,|b|$.

(c) $|a + b| \leq |a| + |b| \quad$ (Dreiecksungleichung).

Eigenschaften des Betrags

(a) Für $a \neq 0$ ist $|a| > 0$.

(b) Es gilt $|ab| = |a|\,|b|$.

(c) $|a + b| \leq |a| + |b| \quad$ (Dreiecksungleichung).

(c) folgt aus $\pm a \leq |a|$, $\pm b \leq |b|$,

$$a + b \leq |a| + |b|, \quad -(a + b) \leq |a| + |b|.$$

Intervalle

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Man nennt

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes Intervall
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	offenes Intervall
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	(nach rechts) halboffenes Intervall
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	(nach links) halboffenes Intervall

Unbeschränkte Intervalle

Für $a \in \mathbb{R}$ heißen die Mengen

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \quad (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

offene und die Mengen

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \quad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

abgeschlossene Intervalle.

Unbeschränkte Intervalle

Für $a \in \mathbb{R}$ heißen die Mengen

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \quad (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

offene und die Mengen

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \quad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

abgeschlossene Intervalle.

Die Menge $\mathbb{R}$ wird auch als Intervall $(-\infty, \infty)$ angesehen und sowohl als offen als auch als abgeschlossen definiert.

Unbeschränkte Intervalle

Für $a \in \mathbb{R}$ heißen die Mengen

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \quad (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

offene und die Mengen

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \quad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

abgeschlossene Intervalle.

Die Menge $\mathbb{R}$ wird auch als Intervall $(-\infty, \infty)$ angesehen und sowohl als offen als auch als abgeschlossen definiert.

Die positiven reellen Zahlen werden mit $\mathbb{R}_+$, die negativen mit $\mathbb{R}_-$ bezeichnet.

Unbeschränkte Intervalle

Für $a \in \mathbb{R}$ heißen die Mengen

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \quad (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

offene und die Mengen

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \quad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

abgeschlossene Intervalle.

Die Menge $\mathbb{R}$ wird auch als Intervall $(-\infty, \infty)$ angesehen und sowohl als offen als auch als abgeschlossen definiert.

Die positiven reellen Zahlen werden mit $\mathbb{R}_+$, die negativen mit $\mathbb{R}_-$ bezeichnet.

Die Mengen $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ und $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$ sind demnach offene Intervalle.

4.4 Das Rechnen mit reellen Zahlen

Wichtig, hier wird gerechnet!

Beispiel (i)

Wir bestimmen Infimum und Supremum der Menge

$$M = \left\{x + \frac{1}{x} : \frac{1}{2} < x \leq 2\right\}.$$

Beispiel (i)

Wir bestimmen Infimum und Supremum der Menge

$$M = \left\{x + \frac{1}{x} : \frac{1}{2} < x \leq 2\right\}.$$

Aus $(x-1)^2 \geq 0$ folgt für $x > 0$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Beispiel (i)

Wir bestimmen Infimum und Supremum der Menge

$$M = \left\{x + \frac{1}{x} : \frac{1}{2} < x \le 2\right\}.$$

Aus $(x-1)^2 \ge 0$ folgt für $x > 0$

$$x^2 - 2x + 1 \ge 0 \;\Leftrightarrow\; x + \frac{1}{x} \ge 2.$$

Da der Wert 2 für $x = 1$ angenommen wird, ist das Infimum 2 auch Minimum.

Beispiel (i)

Wir bestimmen Infimum und Supremum der Menge

$$M = \left\{x + \frac{1}{x} : \frac{1}{2} < x \leq 2\right\}.$$

Aus $(x-1)^2 \geq 0$ folgt für $x > 0$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Da der Wert 2 für $x = 1$ angenommen wird, ist das Infimum 2 auch Minimum.

Für $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ gilt

$$\left|x - \frac{5}{4}\right| \leq \frac{3}{4}.$$

Beispiel (i)

Wir bestimmen Infimum und Supremum der Menge

$$M = \left\{x + \frac{1}{x} : \frac{1}{2} < x \le 2\right\}.$$

Aus $(x-1)^2 \ge 0$ folgt für $x > 0$

$$x^2 - 2x + 1 \ge 0 \;\Leftrightarrow\; x + \frac{1}{x} \ge 2.$$

Da der Wert 2 für $x = 1$ angenommen wird, ist das Infimum 2 auch Minimum.

Für $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ gilt

$$\left|x - \frac{5}{4}\right| \le \frac{3}{4}.$$

Nach Quadrieren und Division durch x folgt

$$x + \frac{1}{x} \le \frac{5}{2}.$$

Beispiel (i)

Wir bestimmen Infimum und Supremum der Menge

$$M = \left\{x + \frac{1}{x} : \frac{1}{2} < x \leq 2\right\}.$$

Aus $(x-1)^2 \geq 0$ folgt für $x > 0$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Da der Wert 2 für $x = 1$ angenommen wird, ist das Infimum 2 auch Minimum.

Für $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ gilt

$$\left|x - \frac{5}{4}\right| \leq \frac{3}{4}.$$

Nach Quadrieren und Division durch x folgt

$$x + \frac{1}{x} \leq \frac{5}{2}.$$

Damit ist das Supremum $\frac{5}{2}$, das für $x = 2$ angenommen wird. $\frac{5}{2} \in M$ ist daher auch das Maximum von M.

Beispiel (ii)

Wir bestimmen die Menge

$$M = \left\{x \in \mathbb{R} : \ \frac{x+4}{x-2} < x\right\}.$$

Beispiel (ii)

Wir bestimmen die Menge

$$M = \left\{x \in \mathbb{R} :\ \frac{x+4}{x-2} < x\right\}.$$

Um den Bruch umzuformen, unterscheiden wir die Fälle $x > 2$ und $x < 2$,

$$M = M_1 \cup M_2,$$

$$M_1 = \{x > 2 :\ 0 < x^2 - 3x - 4\}, \quad M_2 = \{x < 2 :\ 0 > x^2 - 3x - 4\}.$$

Beispiel (ii)

Wir bestimmen die Menge

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}: \ \frac{x+4}{x-2} < x\right\}.$$

Um den Bruch umzuformen, unterscheiden wir die Fälle $x > 2$ und $x < 2$,

$$M = M_1 \cup M_2,$$

$$M_1 = \{x > 2: \ 0 < x^2 - 3x - 4\}, \quad M_2 = \{x < 2: \ 0 > x^2 - 3x - 4\}.$$

Mit $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$ folgt dann

$$M_1 = \{x > 4\}, \quad M_2 = \{-1 < x < 2\}, \quad M = (4, \infty) \cup (-1, 2).$$

Beispiel (iii)

Für $a, b > 0$ wollen wir die Ungleichung

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

beweisen.

Beispiel (iii)

Für $a, b > 0$ wollen wir die Ungleichung

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

beweisen.

Wichtig: Erst Nachdenken, dann Umformen!

Beispiel (iii)

Für $a, b > 0$ wollen wir die Ungleichung

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

beweisen.

Wichtig: Erst Nachdenken, dann Umformen!

Teile beide Seiten durch $\sqrt{b}$. Erhalte äquivalente Ungleichung in $x = \sqrt{a}/\sqrt{b}$,

$$x^2 + \frac{1}{x} \geq x + 1, \quad x > 0.$$

Beispiel (iii)

Für $a, b > 0$ wollen wir die Ungleichung

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

beweisen.

Wichtig: Erst Nachdenken, dann Umformen!

Teile beide Seiten durch $\sqrt{b}$. Erhalte äquivalente Ungleichung in $x = \sqrt{a}/\sqrt{b}$,

$$x^2 + \frac{1}{x} \geq x + 1, \quad x > 0.$$

In dieser Gleichung dürfen wir sogar $x \geq 1$ annehmen, denn andernfalls teilen wir die Ausgangsungleichung durch $\sqrt{a}$.

Beispiel (iii)

Für $a, b > 0$ wollen wir die Ungleichung

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

beweisen.

Wichtig: Erst Nachdenken, dann Umformen!

Teile beide Seiten durch $\sqrt{b}$. Erhalte äquivalente Ungleichung in $x = \sqrt{a}/\sqrt{b}$,

$$x^2 + \frac{1}{x} \geq x + 1, \quad x > 0.$$

In dieser Gleichung dürfen wir sogar $x \geq 1$ annehmen, denn andernfalls teilen wir die Ausgangsungleichung durch $\sqrt{a}$.

Wir setzen $x = 1 + y$ mit $y \geq 0$ und erhalten mit Hilfe der binomischen Formel

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (y^3 + 3y^2 + 3y + 1) - (y^2 + 2y + 1) - (y + 1) + 1$$
$$= y^3 + 2y^2 + y \geq 0.$$

Beispiel (iv)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gilt

$$\left(\sqrt{\varepsilon}a \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}b\right)^2 \geq 0.$$

Beispiel (iv)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gilt

$$\left(\sqrt{\varepsilon}a \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}b\right)^2 \geq 0.$$

Es folgt die *Youngsche Ungleichung*

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2.$$

4.5 Komplexe Zahlen

Sei

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{R}^2$ können wir als Punkte in der Ebene oder als Vektoren mit Komponenten x und y auffassen.

Addition

Für $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ definieren wir die Summe durch

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

Addition

Für $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ definieren wir die Summe durch

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

Dies ist die übliche Addition zweier ebener Vektoren: Wir verschieben (x', y') so, dass sein Fußpunkt auf dem Endpunkt von (x, y) steht, der Endpunkt des so verschobenen Vektors zeigt dann auf den Endpunkt der Summe.

Skalarmultiplikation

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(x, y) \in \mathbb{R}$ ist die *Skalarmultiplikation* definiert durch

$$\alpha\,(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

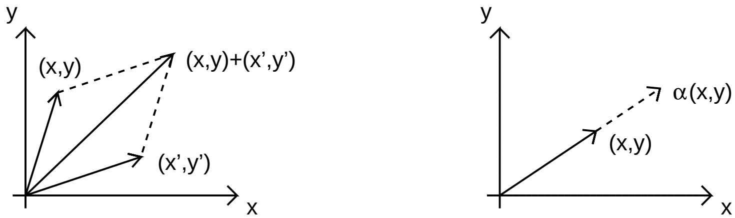
Skalarmultiplikation

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(x, y) \in \mathbb{R}$ ist die *Skalarmultiplikation* definiert durch

$$\alpha\,(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Für $\alpha \geq 0$ ist der Ergebnisvektor die Verlängerung oder Verkürzung um das α-fache. Bei $\alpha < 0$ kehrt sich zusätzlich die Orientierung um.

Addition und Skalarmultiplikation



Abelsche Gruppe

Bis hierin haben wir nur die üblichen Operationen für Vektoren definiert, was in anderen Raumdimensionen genauso geht.

Abelsche Gruppe

Bis hierin haben wir nur die üblichen Operationen für Vektoren definiert, was in anderen Raumdimensionen genauso geht.

Die Vektoren bilden mit der Addition und dem Vektor $(0, 0)$ eine abelsche Gruppe, die Inverse von (x, y) ist $(-x, -y)$.

Multiplikation

Mit Hilfe der Multiplikation

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$$

wird auf den ebenen Vektoren ein Körper definiert.

Multiplikation

Mit Hilfe der Multiplikation

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$$

wird auf den ebenen Vektoren ein Körper definiert.

Im Wesentlichen gibt es nur diese eine Möglichkeit, aus den Vektoren einen Körper zu machen und sie funktioniert nur im ebenen Fall.

Multiplikation

Mit Hilfe der Multiplikation

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$$

wird auf den ebenen Vektoren ein Körper definiert.

Im Wesentlichen gibt es nur diese eine Möglichkeit, aus den Vektoren einen Körper zu machen und sie funktioniert nur im ebenen Fall.

Das Element $(1, 0)$ ist neutral bezüglich dieser Multiplikation und die Inverse von $(x, y) \neq (0, 0)$ ist

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$$

Inverse

$$(x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

$$(x,y)\cdot(x,y)^{-1} = (x,y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

Inverse

$$(x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
(x,y)\cdot(x,y)^{-1} &= (x,y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) \\
&= \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{-y^2}{x^2+y^2}, \frac{-xy}{x^2+y^2} + \frac{xy}{x^2+y^2}\right) \\
&= (1,0).
\end{aligned}$$

Inverse

$$(x,y)^{-1} = \Big(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\Big)$$

$$\begin{aligned}
(x,y)\cdot(x,y)^{-1} &= (x,y)\Big(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\Big) \\
&= \Big(\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{-y^2}{x^2+y^2}, \frac{-xy}{x^2+y^2} + \frac{xy}{x^2+y^2}\Big) \\
&= (1,0).
\end{aligned}$$

Damit ist der $\mathbb{R}^2$ zusammen mit den so definierten Operationen ein Körper:

$\mathbb{C}$ = Körper der komplexen Zahlen

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Wir können die Elemente von $\mathbb{C}$ der Form $(x, 0)$ mit der reellen Zahl x identifizieren, denn es gilt

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$$

$$(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy - 0 \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 0) = (xy, 0).$$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Wir können die Elemente von $\mathbb{C}$ der Form $(x, 0)$ mit der reellen Zahl x identifizieren, denn es gilt

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$$

$$(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy - 0 \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 0) = (xy, 0).$$

Die komplexe Zahl $i = (0, 1)$ heißt *imaginäre Einheit*.

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Wir können die Elemente von $\mathbb{C}$ der Form $(x, 0)$ mit der reellen Zahl x identifizieren, denn es gilt

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$$

$$(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy - 0 \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 0) = (xy, 0).$$

Die komplexe Zahl $i = (0, 1)$ heißt *imaginäre Einheit*.

Es gilt

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -1.$$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Wir können die Elemente von $\mathbb{C}$ der Form $(x, 0)$ mit der reellen Zahl x identifizieren, denn es gilt

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$$

$$(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy - 0 \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 0) = (xy, 0).$$

Die komplexe Zahl $i = (0, 1)$ heißt *imaginäre Einheit*.

Es gilt

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -1.$$

Lösbarkeit der Gleichung $x^2 = -1$.

Rechnen in $\mathbb{C}$ ist einfach

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 0\cdot 1) = (-1,0) = -1.$$

Rechnen in $\mathbb{C}$ ist einfach

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1,0) = -1.$$

Statt $z = (x,y)$ schreibe

$$z = x + iy$$

Rechnen in $\mathbb{C}$ ist einfach

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1,0) = -1.$$

Statt $z = (x,y)$ schreibe

$$z = x + iy$$

Mit $i^2 = -1$ können „normal“ rechnen ($z' = x' + iy'$)

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y'),$$

Rechnen in $\mathbb{C}$ ist einfach

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 0\cdot 1) = (-1,0) = -1.$$

Statt $z = (x,y)$ schreibe

$$z = x + iy$$

Mit $i^2 = -1$ können „normal“ rechnen ($z' = x' + iy'$)

$$z + z' = (x+iy) + (x'+iy') = (x+x') + i(y+y'),$$

$$z\cdot z' = (x+iy)\cdot(x'+iy') = xx' - yy' + i(xy' + yx').$$

Keine Geheimnisse bitte!

Das Wort imaginär hört sich rätselhaft an.

Keine Geheimnisse bitte!

Das Wort imaginär hört sich rätselhaft an.

Nach wie vor sind die komplexen Zahlen die ebenen Vektoren, auf denen eine Multiplikation definiert ist, die sie zu einem Körper machen.

Komplexe Konjugation und Absolutbetrag

Für $z = x + iy$ setzen wir ferner

$$\begin{aligned} \bar{z} &= x - iy && \text{komplexe Konjugation von } z, \\ |z| &= \sqrt{x^2 + y^2} && \text{Absolutbetrag von } z, \end{aligned}$$

wobei $|z|$ mit der zuvor definierten Länge $|(x, y)|$ des Vektors (x, y) übereinstimmt.

Komplexe Konjugation und Absolutbetrag

Für $z = x + iy$ setzen wir ferner

$$\begin{aligned} \bar{z} &= x - iy && \text{komplexe Konjugation von } z, \\ |z| &= \sqrt{x^2 + y^2} && \text{Absolutbetrag von } z, \end{aligned}$$

wobei $|z|$ mit der zuvor definierten Länge $|(x, y)|$ des Vektors (x, y) übereinstimmt.

Die komplexe Konjugation bedeutet geometrisch die Spiegelung des Vektors an der x-Achse.

Für $z = x + iy$ setzen wir ferner

$$\begin{aligned} \bar{z} &= x - iy && \text{komplexe Konjugation von } z, \\ |z| &= \sqrt{x^2 + y^2} && \text{Absolutbetrag von } z, \end{aligned}$$

wobei $|z|$ mit der zuvor definierten Länge $|(x, y)|$ des Vektors (x, y) übereinstimmt.

Die komplexe Konjugation bedeutet geometrisch die Spiegelung des Vektors an der x-Achse.

Definiere *Real-* und *Imaginärteil* einer komplexen Zahl $z = x + iy$ durch

$$\mathrm{Re}\, z = x, \quad \mathrm{Im}\, z = y.$$

Rechenregeln

Satz Für komplexe Zahlen z, z' gilt:

(a) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ für $z \neq 0$.

Satz Für komplexe Zahlen z, z' gilt:

(a) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ für $z \neq 0$.

(b) $|z|^2 = z\overline{z}$.

Rechenregeln

Satz Für komplexe Zahlen z, z' gilt:

(a) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ für $z \neq 0$.

(b) $|z|^2 = z\overline{z}$.

(c) $(\overline{z \pm z'}) = (\overline{z} \pm \overline{z'}), \quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}, \quad \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ für $z' \neq 0$.

Satz Für komplexe Zahlen z, z' gilt:

(a) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ für $z \neq 0$.

(b) $|z|^2 = z\overline{z}$.

(c) $(\overline{z \pm z'}) = (\overline{z} \pm \overline{z'})$, $\quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$, $\quad \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ für $z' \neq 0$.

(d) $|\overline{z}| = |z|$, $\quad |zz'| = |z|\,|z'|$, $\quad \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

Rechenregeln

Satz Für komplexe Zahlen z, z' gilt:

(a) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ für $z \neq 0$.

(b) $|z|^2 = z\overline{z}$.

(c) $(\overline{z \pm z'}) = (\overline{z} \pm \overline{z'})$, $\quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$, $\quad \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ für $z' \neq 0$.

(d) $|\overline{z}| = |z|$, $\quad |zz'| = |z|\,|z'|$, $\quad \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

(e) $\mathrm{Re}\, z = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\quad \mathrm{Im}\, z = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

Rechenregeln

Satz Für komplexe Zahlen z, z' gilt:

(a) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ für $z \neq 0$.

(b) $|z|^2 = z\overline{z}$.

(c) $(\overline{z \pm z'}) = (\overline{z} \pm \overline{z'})$, $\quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$, $\quad \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ für $z' \neq 0$.

(d) $|\overline{z}| = |z|$, $\quad |zz'| = |z|\,|z'|$, $\quad \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

(e) $\operatorname{Re} z = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\quad \operatorname{Im} z = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

(f) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $\quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

Rechenregeln

Satz Für komplexe Zahlen z, z' gilt:

(a) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ für $z \neq 0$.

(b) $|z|^2 = z\overline{z}$.

(c) $(\overline{z \pm z'}) = (\overline{z} \pm \overline{z'})$, $\quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$, $\quad \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ für $z' \neq 0$.

(d) $|\overline{z}| = |z|$, $\quad |zz'| = |z|\,|z'|$, $\quad \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

(e) $\mathrm{Re}\, z = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\quad \mathrm{Im}\, z = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

(f) $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$, $\quad |\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$.

(g) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, $\quad \big|\,|z| - |z'|\,\big| \leq |z - z'|$.

Beweis

(a) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ für $z \neq 0$.

(b) $|z|^2 = z\overline{z}$.

Beweis

(a) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ für $z \neq 0$.

(b) $|z|^2 = z\overline{z}$.

$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

und daraus bekommen wir (a) durch Erweiterung des Bruchs

$$\frac{1}{z} = \frac{1 \cdot \overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Beweis

(c) $(\overline{z \pm z'}) = (\overline{z} \pm \overline{z'}), \quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}, \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ für $z' \neq 0$.

(d) $|\overline{z}| = |z|, \quad |zz'| = |z|\,|z'|, \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

Beweis

(c) $(\overline{z \pm z'}) = (\bar{z} \pm \overline{z'}), \quad \overline{zz'} = \bar{z}\overline{z'}, \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$ für $z' \neq 0$.

(d) $|\bar{z}| = |z|, \quad |zz'| = |z|\,|z'|, \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

Die Produktregel in (c) erhalten wir aus

$$\overline{zz'} = \overline{(x+iy)(x'+iy')} = \overline{xx' - yy' + i(yx' + xy')}$$

$$= (x-iy)(x'-iy') = \bar{z}\overline{z'}.$$

Beweis

(c) $\overline{(z \pm z')} = (\bar{z} \pm \overline{z'}), \quad \overline{zz'} = \bar{z}\overline{z'}, \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$ für $z' \neq 0$.

(d) $|\bar{z}| = |z|, \quad |zz'| = |z|\,|z'|, \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

Die Produktregel in (c) erhalten wir aus

$$\overline{zz'} = \overline{(x+iy)(x'+iy')} = \overline{xx' - yy' + i(yx' + xy')}$$

$$= (x - iy)(x' - iy') = \bar{z}\overline{z'}.$$

Mit (b) folgt die Produktregel in (d)

$$|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = z\bar{z}z'\overline{z'}.$$

Beweis

(g) $|z + z'| \leq |z| + |z'|, \qquad \big| |z| - |z'| \big| \leq |z - z'|.$

Beweis

(g) $|z+z'| \le |z|+|z'|, \qquad \big|\,|z|-|z'|\,\big| \le |z-z'|.$

$$|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = z\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z'} + z'\overline{z}$$

Beweis

(g) $|z+z'| \leq |z| + |z'|, \qquad \big|\,|z| - |z'|\,\big| \leq |z - z'|.$

$$\begin{aligned}
|z+z'|^2 &= (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = z\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z'} + z'\overline{z} \\
&= |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}\, z\overline{z'} \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z\overline{z'}| \\
&= |z|^2 + |z'|^2 + 2|z|\,|z'| = (|z| + |z'|)^2.
\end{aligned}$$

Beweis

(g) $|z+z'| \leq |z|+|z'|, \qquad \big||z|-|z'|\big| \leq |z-z'|.$

$$
\begin{aligned}
|z+z'|^2 &= (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = z\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z'} + z'\overline{z} \\
&= |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}\, z\overline{z'} \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z\overline{z'}| \\
&= |z|^2 + |z'|^2 + 2|z|\,|z'| = (|z|+|z'|)^2.
\end{aligned}
$$

Die zweite Ungleichung in (g) ist die *inverse Dreiecksungleichung*:

$$
|z| = |z-z'+z'| \leq |z-z'| + |z'|.
$$

Beweis

(g) $|z+z'| \leq |z| + |z'|, \qquad \big|\,|z| - |z'|\,\big| \leq |z - z'|.$

$$|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = z\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z'} + z'\overline{z}$$

$$= |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}\, z\overline{z'} \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z\overline{z'}|$$

$$= |z|^2 + |z'|^2 + 2|z|\,|z'| = (|z| + |z'|)^2.$$

Die zweite Ungleichung in (g) ist die *inverse Dreiecksungleichung*:

$$|z| = |z - z' + z'| \leq |z - z'| + |z'|.$$

Das umgekehrte Vorzeichen bekommt man, wenn man hier die Rollen von z und z' vertauscht.

Polarkoordinaten

Zu jedem reellen Vektor (x, y) mit $x^2 + y^2 = 1$ gibt es genau ein $\phi \in [0, 2\pi)$ mit

$$x = \cos\phi, \quad y = \sin\phi.$$

Zu jedem reellen Vektor (x, y) mit $x^2 + y^2 = 1$ gibt es genau ein $\phi \in [0, 2\pi)$ mit

$$x = \cos\phi, \quad y = \sin\phi.$$

ϕ ist dabei der im Gegenuhrzeigersinn gemessene Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Strahl vom Nullpunkt zum Punkt (x, y).

Zu jedem reellen Vektor (x, y) mit $x^2 + y^2 = 1$ gibt es genau ein $\phi \in [0, 2\pi)$ mit

$$x = \cos\phi, \quad y = \sin\phi.$$

ϕ ist dabei der im Gegenuhrzeigersinn gemessene Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Strahl vom Nullpunkt zum Punkt (x, y).

Aus diesem Grund können wir eine komplexe Zahl $z = x + iy$ mit $z \neq 0$ eindeutig in der Form

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \quad \text{mit } 0 \leq \phi < 2\pi, \quad r = |z| > 0,$$

schreiben.

Polarkoordinaten

Zu jedem reellen Vektor (x, y) mit $x^2 + y^2 = 1$ gibt es genau ein $\phi \in [0, 2\pi)$ mit

$$x = \cos\phi, \quad y = \sin\phi.$$

ϕ ist dabei der im Gegenuhrzeigersinn gemessene Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Strahl vom Nullpunkt zum Punkt (x, y).

Aus diesem Grund können wir eine komplexe Zahl $z = x + iy$ mit $z \neq 0$ eindeutig in der Form

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \quad \text{mit } 0 \leq \phi < 2\pi, \quad r = |z| > 0,$$

schreiben.

r ist der von uns bereits definierte Absolutbetrag und $\phi = \arg z$ heißt *Argument* von z.

Produkt in Polarkoordinaten

Für das Produkt der beiden Zahlen $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ und $z' = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ ergibt sich wegen der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus

$$z \cdot z' = rs\big(\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi + i(\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi)\big)$$

Produkt in Polarkoordinaten

Für das Produkt der beiden Zahlen $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ und $z' = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ ergibt sich wegen der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= rs\big(\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi + i(\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi)\big) \\ &= rs\big(\cos(\phi+\psi) + i\sin(\phi+\psi)\big). \end{aligned}$$

Produkt in Polarkoordinaten

Für das Produkt der beiden Zahlen $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ und $z' = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ ergibt sich wegen der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= rs\big(\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi + i(\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi)\big) \\ &= rs\big(\cos(\phi+\psi) + i\sin(\phi+\psi)\big). \end{aligned}$$

Der Ortsvektor zz' besitzt demnach die Länge $|zz'|$ und zeigt in Richtung $\phi + \psi$.

Produkt in Polarkoordinaten

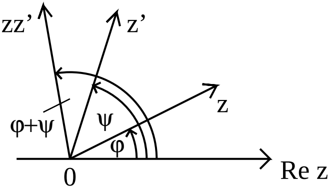
Für das Produkt der beiden Zahlen $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ und $z' = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ ergibt sich wegen der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus

$$
\begin{aligned}
z \cdot z' &= rs\big(\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi + i(\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi)\big) \\
&= rs\big(\cos(\phi+\psi) + i\sin(\phi+\psi)\big).
\end{aligned}
$$

Der Ortsvektor zz' besitzt demnach die Länge $|zz'|$ und zeigt in Richtung $\phi + \psi$.

Beim Produkt zweier komplexer Zahlen werden die Beträge multipliziert und die Argumente addiert.

Produkt in Polarkoordinaten



$$z \cdot z' = rs\big(\cos(\phi+\psi) + i\sin(\phi+\psi)\big).$$

Beispiel

Für $z = 1 + i$ gilt $|z| = \sqrt{2}$ und damit

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

Beispiel

Für $z = 1 + i$ gilt $|z| = \sqrt{2}$ und damit

$$1 + i = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big),$$

$$(1+i)^2 = 2\Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big) = 2(0 + i\cdot 1) = 2i.$$

Hilberts Hotel

Hilberts Hotel hat unendlich viele Zimmer, die durch $1, 2, 3, \ldots$ nummeriert sind.

Hilberts Hotel hat unendlich viele Zimmer, die durch $1, 2, 3, \dots$ nummeriert sind.

Eines Tages kommt ein Gast zum Portier und bittet um ein Zimmer. Das Hotel ist aber komplett ausgebucht.

Hilberts Hotel hat unendlich viele Zimmer, die durch $1, 2, 3, \ldots$ nummeriert sind.

Eines Tages kommt ein Gast zum Portier und bittet um ein Zimmer. Das Hotel ist aber komplett ausgebucht.

Was macht der Portier?

Hilberts Hotel hat unendlich viele Zimmer, die durch $1, 2, 3, \ldots$ nummeriert sind.

Eines Tages kommt ein Gast zum Portier und bittet um ein Zimmer. Das Hotel ist aber komplett ausgebucht.

Was macht der Portier?

Er quartiert den Gast in Zimmer 1 nach Zimmer 2, den Gast in Zimmer 2 nach Zimmer 3 usw. Den neuen Gast bringt er in Zimmer 1 unter.

Hilberts Hotel

Eines Tages kommt ein Busfahrer zum Portier. Er hat unendlich viele Personen in seinem Bus, die alle ein Zimmer wollen. Das Hotel ist aber komplett ausgebucht.

Eines Tages kommt ein Busfahrer zum Portier. Er hat unendlich viele Personen in seinem Bus, die alle ein Zimmer wollen. Das Hotel ist aber komplett ausgebucht.

Was macht der Portier?

Eines Tages kommt ein Busfahrer zum Portier. Er hat unendlich viele Personen in seinem Bus, die alle ein Zimmer wollen. Das Hotel ist aber komplett ausgebucht.

Was macht der Portier?

Er bringt den Gast von Zimmer 1 nach Zimmer 2, den Gast von Zimmer 2 nach Zimmer 4, den Gast von Zimmer 3 nach Zimmer 6 usw.

Eines Tages kommt ein Busfahrer zum Portier. Er hat unendlich viele Personen in seinem Bus, die alle ein Zimmer wollen. Das Hotel ist aber komplett ausgebucht.

Was macht der Portier?

Er bringt den Gast von Zimmer 1 nach Zimmer 2, den Gast von Zimmer 2 nach Zimmer 4, den Gast von Zimmer 3 nach Zimmer 6 usw.

Anschließend bringt er die Personen aus dem Bus in den ungeradzahligen Zimmern unter.

Hilberts Hotel

Eines Tages kommen unendlich viele Busfahrer zum Portier. Sie haben alle unendlich viele Personen in ihrem Bus, die alle ein Zimmer wollen. Das Hotel ist aber komplett ausgebucht.

Hilberts Hotel

Eines Tages kommen unendlich viele Busfahrer zum Portier. Sie haben alle unendlich viele Personen in ihrem Bus, die alle ein Zimmer wollen. Das Hotel ist aber komplett ausgebucht.

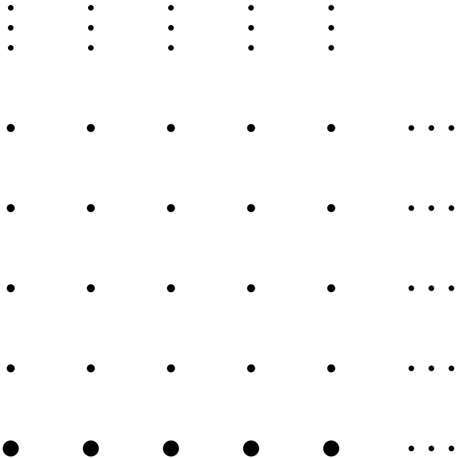
Was macht der Portier?

Eines Tages kommen unendlich viele Busfahrer zum Portier. Sie haben alle unendlich viele Personen in ihrem Bus, die alle ein Zimmer wollen. Das Hotel ist aber komplett ausgebucht.

Was macht der Portier?

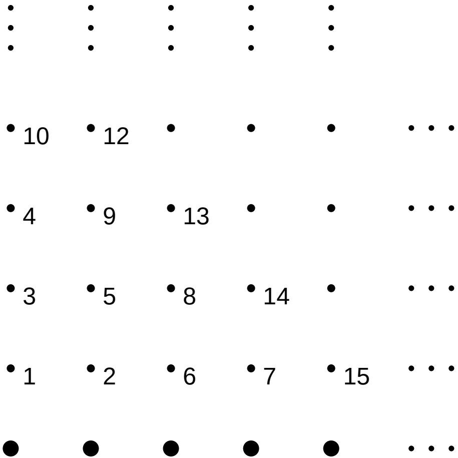
Er holt David Hilbert, den Besitzer des Hotels.

Hilberts Hotel



Die Busfahrer stellen sich nebeneinander hin und die Passagiere stellen sich hinter ihren Busfahrer.

Hilberts Hotel



Hilbert zählt nun alle Passagiere ab!

Jeder Passagier hat nun eine Nummer und kann wie vorher in einem Zimmer mit ungerader Nummer untergebracht werden.

Mächtigkeiten von Mengen

Für den Anfang reicht es, drei Typen von Mengen zu unterscheiden.

- *Endliche Mengen*: In diesem Fall gibt es eine natürliche Zahl n, so dass wir die Elemente der Menge von 1 bis n nummerieren können.

  Beispiel: Das deutsche Alphabet hat 30 Buchstaben.

Für den Anfang reicht es, drei Typen von Mengen zu unterscheiden.

- *Endliche Mengen*: In diesem Fall gibt es eine natürliche Zahl n, so dass wir die Elemente der Menge von 1 bis n nummerieren können.

  Beispiel: Das deutsche Alphabet hat 30 Buchstaben.

Besonderheit: Ist X endlich und $f : X \to X$, so gilt

$$f \text{ injektiv} \;\Leftrightarrow\; f \text{ surjektiv} \;\Leftrightarrow\; f \text{ bijektiv}$$

- *Abzählbare Mengen*: In diesem Fall können wir die Elemente der Menge durch die natürlichen Zahlen nummerieren.

- *Abzählbare Mengen*: In diesem Fall können wir die Elemente der Menge durch die natürlichen Zahlen nummerieren.

Beispiel: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, das sind die Punkte der Ebene der Form (m, n) mit natürlichen Zahlen m und n.

- *Abzählbare Mengen*: In diesem Fall können wir die Elemente der Menge durch die natürlichen Zahlen nummerieren.

Beispiel: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, das sind die Punkte der Ebene der Form (m, n) mit natürlichen Zahlen m und n.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kann mit dem Verfahren aus Hilberst Hotel abgezählt werden. Bei $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ geht das ganz analog.

- *Abzählbare Mengen*: In diesem Fall können wir die Elemente der Menge durch die natürlichen Zahlen nummerieren.

Beispiel: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, das sind die Punkte der Ebene der Form (m, n) mit natürlichen Zahlen m und n.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kann mit dem Verfahren aus Hilberst Hotel abgezählt werden. Bei $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ geht das ganz analog.

Damit sind auch die rationalen Zahlen abzählbar.

- *Abzählbare Mengen*: In diesem Fall können wir die Elemente der Menge durch die natürlichen Zahlen nummerieren.

Beispiel: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, das sind die Punkte der Ebene der Form (m, n) mit natürlichen Zahlen m und n.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kann mit dem Verfahren aus Hilberst Hotel abgezählt werden. Bei $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ geht das ganz analog.

Damit sind auch die rationalen Zahlen abzählbar.

Hilberts Hotel zeigt: Die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar

- *überabzählbare Mengen* sind weder endlich noch abzählbar.

Hier kann man noch weiter unterscheiden mit Hilfe von Kardinalzahlen, im Moment brauchen wir das nicht (ist nämlich schwer).

Strenge Formulierung

Zwei Mengen A und B heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.

Strenge Formulierung

Zwei Mengen A und B heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.

Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation. Zu bijektivem $f : A \to B$ existiert die Umkehrfunktion $f^{(-1)} : B \to A$.

Strenge Formulierung

Zwei Mengen A und B heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.

Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation. Zu bijektivem $f : A \to B$ existiert die Umkehrfunktion $f^{(-1)} : B \to A$.

- A heißt *endlich*, wenn A zu einem Abschnitt $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ von $\mathbb{N}_0$ gleichmächtig ist. n heißt die Kardinalität von A, Schreibweise $|A| = n$.

Strenge Formulierung

Zwei Mengen A und B heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.

Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation. Zu bijektivem $f : A \to B$ existiert die Umkehrfunktion $f^{(-1)} : B \to A$.

- A heißt *endlich*, wenn A zu einem Abschnitt $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ von $\mathbb{N}_0$ gleichmächtig ist. n heißt die Kardinalität von A, Schreibweise $|A| = n$.
- A heißt *abzählbar* oder *abzählbar unendlich*, wenn A und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind.

Strenge Formulierung

Zwei Mengen A und B heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.

Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation. Zu bijektivem $f : A \to B$ existiert die Umkehrfunktion $f^{(-1)} : B \to A$.

- A heißt *endlich*, wenn A zu einem Abschnitt $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ von $\mathbb{N}_0$ gleichmächtig ist. n heißt die Kardinalität von A, Schreibweise $|A| = n$.
- A heißt *abzählbar* oder *abzählbar unendlich*, wenn A und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind.
- A heißt überabzählbar oder *überabzählbar unendlich*, wenn A weder endlich nach abzählbar ist.

Vorsicht

Bei unendlichen Mengen gilt keine Implikation in: Ist X endlich und $f : X \to X$, so gilt

$$f \text{ injektiv} \;\Leftrightarrow\; f \text{ surjektiv} \;\Leftrightarrow\; f \text{ bijektiv}$$

Vorsicht

Bei unendlichen Mengen gilt keine Implikation in: Ist X endlich und $f : X \to X$, so gilt

$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow f \text{ surjektiv} \Leftrightarrow f \text{ bijektiv}$$

Beispiele für $X = \mathbb{N}$

1. $f(n) = 2n$,

Vorsicht

Bei unendlichen Mengen gilt keine Implikation in: Ist X endlich und $f : X \to X$, so gilt

$$f \text{ injektiv} \;\Leftrightarrow\; f \text{ surjektiv} \;\Leftrightarrow\; f \text{ bijektiv}$$

Beispiele für $X = \mathbb{N}$

$$1.\;\; f(n) = 2n, \qquad 2.\;\; f(2n) = n,\; f(2n-1) = n$$

Minimum und Maximum

Endliche Mengen von reellen Zahlen besitzen ein Minimum und ein Maximum.

Minimum und Maximum

Endliche Mengen von reellen Zahlen besitzen ein Minimum und ein Maximum.

Ist $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, so können wir das maximale Element durch folgenden Algorithmus finden:

$$\begin{aligned} y_1 &= \max\{x_1, x_2\} \\ y_2 &= \max\{y_1, x_3\} \\ y_3 &= \max\{y_2, x_4\} \\ &\vdots \\ y_{m-1} &= \max\{y_{m-2}, x_m\} \end{aligned}$$

y_{m-1} ist dann das Maximum von M und stimmt mit einem Element aus M überein.

Minimum und Maximum

Ist M eine endliche Menge und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so nimmt f auf M Maximum und Minimum an. D.h, es gibt $x_{min}, x_{max} \in M$ mit

$$f(x_{min}) \leq f(x) \quad \forall x \in M,$$
$$f(x_{max}) \geq f(x) \quad \forall x \in M.$$

Konstruktion von x_{min} und x_{max} mit dem gleichen Algorithmus wie zuvor.

Minimum und Maximum

Ist M eine endliche Menge und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so nimmt f auf M Maximum und Minimum an. D.h, es gibt $x_{min}, x_{max} \in M$ mit

$$f(x_{min}) \leq f(x) \quad \forall x \in M,$$
$$f(x_{max}) \geq f(x) \quad \forall x \in M.$$

Konstruktion von x_{min} und x_{max} mit dem gleichen Algorithmus wie zuvor.

Bei unendlichen Mengen wird alles falsch:

- $\mathbb{N}$ besitzt kein Maximum.

Minimum und Maximum

Ist M eine endliche Menge und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so nimmt f auf M Maximum und Minimum an. D.h, es gibt $x_{min}, x_{max} \in M$ mit

$$
\begin{aligned}
f(x_{min}) &\le f(x) \quad \forall x \in M, \\
f(x_{max}) &\ge f(x) \quad \forall x \in M.
\end{aligned}
$$

Konstruktion von x_{min} und x_{max} mit dem gleichen Algorithmus wie zuvor.

Bei unendlichen Mengen wird alles falsch:

- $\mathbb{N}$ besitzt kein Maximum.
- $f(n) = \frac{1}{n}$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, besitzt kein Minimum.

Wie viele Zahlenfolgen gibt es?

Wir zeigen, dass die Zahlenfolgen mit Werten in 0,1 überabzählbar sind. Diese nennen wir kurz 0,1-Folgen.

Wie viele Zahlenfolgen gibt es?

Wir zeigen, dass die Zahlenfolgen mit Werten in 0,1 überabzählbar sind. Diese nennen wir kurz 0,1-Folgen.

Wir können z.B. die Menge der reellen Zahlen im Intervall $[0, 1]$ nehmen und sie als Binärbrüche schreiben.

Wie viele Zahlenfolgen gibt es?

Wir zeigen, dass die Zahlenfolgen mit Werten in 0,1 überabzählbar sind. Diese nennen wir kurz 0,1-Folgen.

Wir können z.B. die Menge der reellen Zahlen im Intervall $[0,1]$ nehmen und sie als Binärbrüche schreiben.

Angenommen, wir könnten alle 0,1-Folgen nummerieren. Dann hätten wir eine Liste, die alle 0,1-Folgen umfasst:

Wie viele Zahlenfolgen gibt es?

1: 0 1 1 1 0 0 1 0 0 . . .

2: 1 1 1 0 0 0 0 1 0 . . .

3: 0 1 1 1 0 0 1 0 0 . . .

4: 1 1 1 0 0 0 0 1 0 . . .

5: 0 1 1 1 0 0 1 0 0 . . .

$\vdots$

Wie viele Zahlenfolgen gibt es?

1:	0	1	1	1	0	0	1	0	0	...
2:	1	1	1	0	0	0	0	1	0	...
3:	0	1	1	1	0	0	1	0	0	...
4:	1	1	1	0	0	0	0	1	0	...
5:	0	1	1	1	0	0	1	0	0	...
⋮										

Wir konstruieren aus den eingekreisten Diagonalelementen eine neue Folge:

neu: 1 0 0 1 1 ...

Diese ist nicht in der Liste enthalten. Damit sind die 0,1-Folgen überabzählbar.

Ein weiteres Resultat mit vorigem Beweis

Satz Die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

Satz Die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

Wie kann man die Elemente der Potenzmenge als $0, 1$-Folgen schreiben?

Satz Die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

Wie kann man die Elemente der Potenzmenge als $0,1$-Folgen schreiben?

Ist $A \subset \mathbb{N}$ so definiere eine $0,1$-Folge x_A durch

$$x_A(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \in A \\ 0 & \text{falls } n \notin A \end{cases}$$

Satz Die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

Wie kann man die Elemente der Potenzmenge als $0, 1$-Folgen schreiben?

Ist $A \subset \mathbb{N}$ so definiere eine $0, 1$-Folge x_A durch

$$x_A(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \in A \\ 0 & \text{falls } n \notin A \end{cases}$$

Dies liefert eine bijektive Abbildung zwischen den $0, 1$-Folgen und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Wie viele definierbare 0,1-Folgen gibt es?

Dabei ist „definierbar“ hier etwas schwammig. Wir nehmen z.B. eine Programmiersprache, in der wir Programme schreiben, die 0,1-Folgen liefern.

Wie viele definierbare 0,1-Folgen gibt es?

Wie viele definierbare 0,1-Folgen gibt es?

Dabei ist „definierbar“ hier etwas schwammig. Wir nehmen z.B. eine Programmiersprache, in der wir Programme schreiben, die 0,1-Folgen liefern.

Wie viele definierbare 0,1-Folgen gibt es?

Allgemein können wir höchstens abzählbare Objekte formal definieren!