15 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Themen:

- Arten von Wahrscheinlichkeitsräumen
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten
- Unabhängige Ereignisse
- Monte-Carlo-Methode

15.1 Grundbegriffe

Ω = endliche oder abzählbar unendliche Menge.

15.1 Grundbegriffe

Ω = endliche oder abzählbar unendliche Menge.

$P : \Omega \to [0, 1]$ heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß*, wenn

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1.$$

15.1 Grundbegriffe

$\Omega =$ endliche oder abzählbar unendliche Menge.

$P : \Omega \to [0,1]$ heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß*, wenn

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1.$$

$\omega \in \Omega$ heißt *elementares Ereignis*.

15.1 Grundbegriffe

$\Omega =$ endliche oder abzählbar unendliche Menge.

$P : \Omega \to [0,1]$ heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß*, wenn

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1.$$

$\omega \in \Omega$ heißt *elementares Ereignis*.

(Ω, P) heißt *Wahrscheinlichkeitsraum*.

Beispiele für Wahrscheinlichkeitsräume

Anschaulich besteht ein Wahrscheinlichkeitsraum aus den möglichen Ausgängen eines wiederholbaren Zufallsexperiments.

Beispiele für Wahrscheinlichkeitsräume

Anschaulich besteht ein Wahrscheinlichkeitsraum aus den möglichen Ausgängen eines wiederholbaren Zufallsexperiments.

- Werfen eines Würfels ($\Omega = \{1, \ldots, 6\}$),
- Ziehen einer Karte aus einem Kartenspiel ($\Omega = \{1, \ldots, 52\}$),
- Werfen einer Münze ($\Omega = \{K, Z\}$).

Beispiele für Wahrscheinlichkeitsräume

Anschaulich besteht ein Wahrscheinlichkeitsraum aus den möglichen Ausgängen eines wiederholbaren Zufallsexperiments.

- Werfen eines Würfels ($\Omega = \{1, \ldots, 6\}$),
- Ziehen einer Karte aus einem Kartenspiel ($\Omega = \{1, \ldots, 52\}$),
- Werfen einer Münze ($\Omega = \{K, Z\}$).

$P(\omega)$ gibt dann die relative Häufigkeit an, mit der ω eintritt.

Spezialfälle

$P(\omega) = 1$ bedeutet demnach, dass ω immer eintritt.

Spezialfälle

$P(\omega) = 1$ bedeutet demnach, dass ω immer eintritt.

Wegen $\sum P(\omega) = 1$ treten dann alle anderen elementaren Ereignisse niemals ein.

Spezialfälle

$P(\omega) = 1$ bedeutet demnach, dass ω immer eintritt.

Wegen $\sum P(\omega) = 1$ treten dann alle anderen elementaren Ereignisse niemals ein.

Wenn alle elementaren Ereignisse *gleichverteilt* sind, gilt

$$P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|},$$

wobei $|\Omega|$ die Anzahl der Elemente von Ω bezeichnet.

Ereignisse

$A \subset \Omega$ heißt *Ereignis*, die *Wahrscheinlichkeit* von A ist definiert durch

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Ereignisse

$A \subset \Omega$ heißt *Ereignis*, die *Wahrscheinlichkeit* von A ist definiert durch

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Aus dieser Definition folgt für $A, B, A_i \subset \Omega$

$$P(A^c) = 1 - P(A), \quad \text{insbesondere } P(\emptyset) = 0,\ P(\Omega) = 1$$

$$A \subset B \ \Rightarrow\ P(A) \leq P(B)$$

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Ereignisse

$A \subset \Omega$ heißt *Ereignis*, die *Wahrscheinlichkeit* von A ist definiert durch

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Aus dieser Definition folgt für $A, B, A_i \subset \Omega$

$$P(A^c) = 1 - P(A), \quad \text{insbesondere } P(\emptyset) = 0,\ P(\Omega) = 1$$

$$A \subset B \ \Rightarrow \ P(A) \leq P(B)$$

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad \text{mit Gleichheit bei disjunkten } A_i$$

Die vier Abzählprobleme bei Gleichverteilung

In einer Urne liegen N Kugeln, die wir uns von 1 bis N nummeriert denken.

In einer Urne liegen N Kugeln, die wir uns von 1 bis N nummeriert denken.

Es werden n Kugeln sukzessive gezogen, was *Stichprobe* genannt wird.

Die vier Abzählprobleme bei Gleichverteilung

In einer Urne liegen N Kugeln, die wir uns von 1 bis N nummeriert denken.

Es werden n Kugeln sukzessive gezogen, was *Stichprobe* genannt wird.

Wie viele solcher Stichproben es gibt, hängt von der Art der Ziehung ab und davon, ob die Reihenfolge der gezogenen Kugeln berücksichtigt wird.

I Stichproben in Reihenfolge mit Rücklegen

Nach jedem Ziehen wird die Kugel wieder zurückgelegt, unterschiedliche Reihenfolgen werden mitgezählt.

I Stichproben in Reihenfolge mit Rücklegen

Nach jedem Ziehen wird die Kugel wieder zurückgelegt, unterschiedliche Reihenfolgen werden mitgezählt.

Dies ist äquivalent dazu, aus n Urnen jeweils eine Kugel zu ziehen. Die Zahl der Möglichkeiten ist demnach N^n.

II Stichproben in Reihenfolge ohne Rücklegen

Für die erste Kugel gibt es N Möglichkeiten, für die nächste $N - 1$.

II Stichproben in Reihenfolge ohne Rücklegen

Für die erste Kugel gibt es N Möglichkeiten, für die nächste $N-1$.

Für $n \leq N$ gibt es daher $N(N-1)\ldots(N-n+1)$ Möglichkeiten, für $n > N$ keine.

III Stichproben ohne Reihenfolge ohne Rücklegen

$$= \text{Anzahl der } n\text{-elementigen Teilmengen von } \{1,\ldots,N\} = \binom{N}{n}.$$

IV Stichproben ohne Reihenfolge mit Rücklegen

Ordne die gezogenen Kugeln nach Größe. Demnach ist die Zahl der Elemente der Menge

$$M = \big\{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) : \omega_1 \leq \omega_2 \leq \ldots \leq \omega_n,\, \omega_i \in \{1, \ldots, N\}\big\}$$

zu bestimmen.

IV Stichproben ohne Reihenfolge mit Rücklegen

Ordne die gezogenen Kugeln nach Größe. Demnach ist die Zahl der Elemente der Menge

$$M = \left\{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) : \omega_1 \leq \omega_2 \leq \ldots \leq \omega_n,\, \omega_i \in \{1, \ldots, N\}\right\}$$

zu bestimmen.

Wir addieren die i-te Komponente eines Vektors in M mit $i-1$ und erhalten so einen Vektor der Menge

$$M' = \left\{(\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_n') : \omega_1' < \omega_2' < \ldots < \omega_n',\, \omega_i \in \{1, \ldots, N+n-1\}\right\}$$

Ordne die gezogenen Kugeln nach Größe. Demnach ist die Zahl der Elemente der Menge

$$M = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) : \omega_1 \leq \omega_2 \leq \ldots \leq \omega_n,\ \omega_i \in \{1, \ldots, N\}\}$$

zu bestimmen.

Wir addieren die i-te Komponente eines Vektors in M mit $i - 1$ und erhalten so einen Vektor der Menge

$$M' = \{(\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n) : \omega'_1 < \omega'_2 < \ldots < \omega'_n,\ \omega_i \in \{1, \ldots, N+n-1\}\}$$

Umgekehrt: Aus jedem Vektor in M', wenn man von seiner i-ten Komponente $i - 1$ abzieht, entsteht ein Element von M.

IV Stichproben ohne Reihenfolge mit Rücklegen

Ordne die gezogenen Kugeln nach Größe. Demnach ist die Zahl der Elemente der Menge

$$M = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) : \omega_1 \le \omega_2 \le \ldots \le \omega_n,\ \omega_i \in \{1, \ldots, N\}\}$$

zu bestimmen.

Wir addieren die i-te Komponente eines Vektors in M mit $i-1$ und erhalten so einen Vektor der Menge

$$M' = \{(\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n) : \omega'_1 < \omega'_2 < \ldots < \omega'_n,\ \omega_i \in \{1, \ldots, N+n-1\}\}$$

Umgekehrt: Aus jedem Vektor in M', wenn man von seiner i-ten Komponente $i-1$ abzieht, entsteht ein Element von M.

Beide Mengen sind gleich groß. Damit gibt es $\binom{N+n-1}{n}$ Stichproben ohne Reihenfolge mit Rücklegen.

Beispiel (i)

Es werden vier nicht unterscheidbare Würfel gleichzeitig geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass die vier erscheinenden Augenzahlen verschieden sind?

Beispiel (i)

Es werden vier nicht unterscheidbare Würfel gleichzeitig geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass die vier erscheinenden Augenzahlen verschieden sind?

Der zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum ist die Zahl aller möglichen Würfe, also 6^4.

Beispiel (i)

Es werden vier nicht unterscheidbare Würfel gleichzeitig geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass die vier erscheinenden Augenzahlen verschieden sind?

Der zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum ist die Zahl aller möglichen Würfe, also 6^4.

Für den ersten Würfel gibt es 6 Möglichkeiten, für den zweiten 5 usw. Es liegt also Typ II vor, also

$$p = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} = \frac{5}{18}.$$

Beispiel (ii)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, beim Zahlenlotto „6 aus 49“ genau vier Richtige zu haben?

Beispiel (ii)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, beim Zahlenlotto „6 aus 49" genau vier Richtige zu haben?

Da die Reihenfolge der gezogenen Zahlen keine Rolle spielt, ist der Wahrscheinlichkeitsraum vom Typ III, seine Kardinalität daher $\binom{49}{6}$.

Beispiel (ii)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, beim Zahlenlotto „6 aus 49“ genau vier Richtige zu haben?

Da die Reihenfolge der gezogenen Zahlen keine Rolle spielt, ist der Wahrscheinlichkeitsraum vom Typ III, seine Kardinalität daher $\binom{49}{6}$.

Man hat genau vier richtige Zahlen, wenn vier Zahlen in der Menge der sechs gezogenen Zahlen liegen und zwei Zahlen außerhalb.

Beispiel (ii)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, beim Zahlenlotto „6 aus 49“ genau vier Richtige zu haben?

Da die Reihenfolge der gezogenen Zahlen keine Rolle spielt, ist der Wahrscheinlichkeitsraum vom Typ III, seine Kardinalität daher $\binom{49}{6}$.

Man hat genau vier richtige Zahlen, wenn vier Zahlen in der Menge der sechs gezogenen Zahlen liegen und zwei Zahlen außerhalb.

Da es in beiden Fällen nicht auf die Reihenfolge ankommt, liegt wieder Typ III vor und wir erhalten

$$p = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = 0,00096\ldots$$

Hypergeometrische Verteilung

- S schwarze Kugeln
- W weiße Kugeln
- $n \leq N = S + W$ Kugeln werden ohne Rücklegen gezogen.

Hypergeometrische Verteilung

- S schwarze Kugeln
- W weiße Kugeln
- $n \leq N = S + W$ Kugeln werden ohne Rücklegen gezogen.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Stichprobe aus genau s schwarzen und $w = n - s$ weißen Kugeln besteht, beträgt dann

$$h(s; n, N, S) = \binom{S}{s}\binom{W}{w} \Big/ \binom{S+W}{n}.$$

Hypergeometrische Verteilung

- S schwarze Kugeln
- W weiße Kugeln
- $n \leq N = S + W$ Kugeln werden ohne Rücklegen gezogen.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Stichprobe aus genau s schwarzen und $w = n - s$ weißen Kugeln besteht, beträgt dann

$$h(s; n, N, S) = \binom{S}{s}\binom{W}{w}\Big/\binom{S+W}{n}.$$

Zahl der möglichen Stichproben (Typ III) $= \binom{S+W}{n}$.

- S schwarze Kugeln
- W weiße Kugeln
- $n \leq N = S + W$ Kugeln werden ohne Rücklegen gezogen.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Stichprobe aus genau s schwarzen und $w = n - s$ weißen Kugeln besteht, beträgt dann

$$h(s; n, N, S) = \binom{S}{s}\binom{W}{w} \Big/ \binom{S+W}{n}.$$

Zahl der möglichen Stichproben (Typ III) $= \binom{S+W}{n}$.

$\binom{S}{s}$ Möglichkeiten, um s schwarze Kugeln zuerhalten.

- S schwarze Kugeln
- W weiße Kugeln
- $n \leq N = S + W$ Kugeln werden ohne Rücklegen gezogen.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Stichprobe aus genau s schwarzen und $w = n - s$ weißen Kugeln besteht, beträgt dann

$$h(s; n, N, S) = \binom{S}{s}\binom{W}{w} / \binom{S+W}{n}.$$

Zahl der möglichen Stichproben (Typ III) $= \binom{S+W}{n}$.

$\binom{S}{s}$ Möglichkeiten, um s schwarze Kugeln zuerhalten.

Dies muss mit der Zahl der Möglichkeiten, $n - s$ weiße Kugeln zu ziehen, multipliziert werden.

$P(R)$

R = Aussage über die Elemente eines Wahrscheinlichkeitsraumes.

$P(R)$

$R =$ Aussage über die Elemente eines Wahrscheinlichkeitsraumes.

$P(R) =$ Summe der $P(\omega)$, für die $R(\omega)$ wahr ist.

15.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

$P(A \mid B) =$ Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, wenn B eingetreten ist.

15.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

$P(A \mid B) =$ Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, wenn B eingetreten ist.

Beispiel Werfe einen Würfel.

$A =$ eine 6 wird geworfen,

$B =$ eine gerade Zahl wird geworfen.

15.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

$P(A \mid B) =$ Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, wenn B eingetreten ist.

Beispiel Werfe einen Würfel.

$A =$ eine 6 wird geworfen,

$B =$ eine gerade Zahl wird geworfen.

Wenn also B bereits eingetroffen ist, bleiben nur nur noch die Möglichkeiten $2, 4, 6$, die Wahrscheinlichkeit für A ist dann $1/3$.

$P(A \mid B) =$ Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, wenn B eingetreten ist.

Beispiel Werfe einen Würfel.

$A =$ eine 6 wird geworfen,

$B =$ eine gerade Zahl wird geworfen.

Wenn also B bereits eingetroffen ist, bleiben nur nur noch die Möglichkeiten $2, 4, 6$, die Wahrscheinlichkeit für A ist dann $1/3$.

Bei Gleichverteilung erhalten wir für die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

$P(A \mid B)$ = Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, wenn B eingetreten ist.

Beispiel Werfe einen Würfel.

A = eine 6 wird geworfen,

B = eine gerade Zahl wird geworfen.

Wenn also B bereits eingetroffen ist, bleiben nur nur noch die Möglichkeiten $2, 4, 6$, die Wahrscheinlichkeit für A ist dann $1/3$.

Bei Gleichverteilung erhalten wir für die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|},\ P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} \Rightarrow\ P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Sei nun (Ω, P) ein allgemeiner Wahrscheinlichkeitsraum. Ist $P(B) > 0$, so definieren wir *die bedingte Wahrscheinlichkeit* $P(A \mid B)$ *von* A *bei gegebenem* B durch

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Sei nun (Ω, P) ein allgemeiner Wahrscheinlichkeitsraum. Ist $P(B) > 0$, so definieren wir *die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B)$ von A bei gegebenem B* durch

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Mache ein Zufallsexperiment: Wir brauchen nur die Fälle des Experiments zu betrachten, in denen das Ereignis B eintrifft.

Sei nun (Ω, P) ein allgemeiner Wahrscheinlichkeitsraum. Ist $P(B) > 0$, so definieren wir *die bedingte Wahrscheinlichkeit* $P(A \mid B)$ *von* A *bei gegebenem* B durch

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Mache ein Zufallsexperiment: Wir brauchen nur die Fälle des Experiments zu betrachten, in denen das Ereignis B eintrifft.

Dann liegt entweder der günstige Fall $A \cap B$ oder der ungünstige Fall $B \setminus A$ vor.

Lemma Sind $A_1, \ldots, A_k$ Ereignisse mit $P(A_1), \ldots, P(A_k) > 0$, so gilt

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cap \ldots \cap A_k) = & P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \\
& \ldots \cdot P(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1})
\end{aligned}
$$

Beweis

Wir verwenden Induktion über k. $k = 2$ ist gerade die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit.

Beweis

Wir verwenden Induktion über k. $k = 2$ ist gerade die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit.

Für den Induktionsschritt schreiben wir

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1} \cap A_k) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1}) \cdot P(A_k \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1}).$$

Beispiel

Skat wird mit einem deutschen Kartenspiel zu 32 Karten gespielt.

Beispiel

Skat wird mit einem deutschen Kartenspiel zu 32 Karten gespielt.

Die drei Spieler erhalten jeweils 10 Karten, die restlichen 2 Karten werden in den *Skat* gelegt.

Beispiel

Skat wird mit einem deutschen Kartenspiel zu 32 Karten gespielt.

Die drei Spieler erhalten jeweils 10 Karten, die restlichen 2 Karten werden in den *Skat* gelegt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jeder Spieler genau ein As besitzt?

Beispiel

Wir nehmen an, dass Spieler 1 die ersten 10 Karten, Spieler 2 die zweiten 10 und Spieler 3 die dritten 10 Karten bekommt.

Beispiel

Wir nehmen an, dass Spieler 1 die ersten 10 Karten, Spieler 2 die zweiten 10 und Spieler 3 die dritten 10 Karten bekommt.

Sei A_i das Ereignis, dass Spieler i genau ein As erhält.

Beispiel

Wir nehmen an, dass Spieler 1 die ersten 10 Karten, Spieler 2 die zweiten 10 und Spieler 3 die dritten 10 Karten bekommt.

Sei A_i das Ereignis, dass Spieler i genau ein As erhält.

Nach dem letzten Lemma gilt dann

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2).$$

Beispiel

Wir nehmen an, dass Spieler 1 die ersten 10 Karten, Spieler 2 die zweiten 10 und Spieler 3 die dritten 10 Karten bekommt.

Sei A_i das Ereignis, dass Spieler i genau ein As erhält.

Nach dem letzten Lemma gilt dann

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2).$$

Es ist

$$P(A_1) = \binom{4}{1}\binom{28}{9} \Big/ \binom{32}{10}, \quad P(A_2 \mid A_1) = \binom{3}{1}\binom{19}{9} \Big/ \binom{22}{10},$$

Beispiel

Wir nehmen an, dass Spieler 1 die ersten 10 Karten, Spieler 2 die zweiten 10 und Spieler 3 die dritten 10 Karten bekommt.

Sei A_i das Ereignis, dass Spieler i genau ein As erhält.

Nach dem letzten Lemma gilt dann

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2).$$

Es ist

$$P(A_1) = \binom{4}{1}\binom{28}{9}/\binom{32}{10}, \quad P(A_2 \mid A_1) = \binom{3}{1}\binom{19}{9}/\binom{22}{10},$$

denn nachdem Spieler 1 die 10 Karten mit genau einem As bekommen hat, bleiben noch 22 Karten mit drei Assen übrig.

Beispiel

Wir nehmen an, dass Spieler 1 die ersten 10 Karten, Spieler 2 die zweiten 10 und Spieler 3 die dritten 10 Karten bekommt.

Sei A_i das Ereignis, dass Spieler i genau ein As erhält.

Nach dem letzten Lemma gilt dann

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 \,|\, A_1) \cdot P(A_3 \,|\, A_1 \cap A_2).$$

Es ist

$$P(A_1) = \binom{4}{1}\binom{28}{9}\Big/\binom{32}{10}, \quad P(A_2 \,|\, A_1) = \binom{3}{1}\binom{19}{9}\Big/\binom{22}{10},$$

denn nachdem Spieler 1 die 10 Karten mit genau einem As bekommen hat, bleiben noch 22 Karten mit drei Assen übrig.

Analog gilt

$$P(A_3 \,|\, A_1 \cap A_2) = \binom{2}{1}\binom{10}{9}\Big/\binom{12}{10}.$$

Satz (a) Sei $P(B) > 0$. Durch $P_B(A) = P(A \,|\, B)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω definiert.

Satz (a) Sei $P(B) > 0$. Durch $P_B(A) = P(A \mid B)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω definiert.

(b) (Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit) Sei $\{B_1, \ldots, B_k\}$ eine disjunkte Zerlegung von Ω. Dann gilt für jedes Ereignis A

$$P(A) = \sum_i P(B_i) P(A \mid B_i),$$

wobei im Falle $P(B_i) = 0$ das Produkt $P(B_i)P(A|B_i)$ zu Null gesetzt wird.

Satz (a) Sei $P(B) > 0$. Durch $P_B(A) = P(A \mid B)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω definiert.

(b) (Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit) Sei $\{B_1, \ldots, B_k\}$ eine disjunkte Zerlegung von Ω. Dann gilt für jedes Ereignis A

$$P(A) = \sum_i P(B_i) P(A \mid B_i),$$

wobei im Falle $P(B_i) = 0$ das Produkt $P(B_i)P(A|B_i)$ zu Null gesetzt wird.

(c) (Formel von Bayes) Ist $P(A) > 0$ und gelten die Voraussetzungen von (ii), so

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(B_j)\, P(A \mid B_j)}{\sum_i P(B_i) P(A \mid B_i)}.$$

Beweis (b)

(b) Sei $\{B_1, \ldots, B_k\}$ eine disjunkte Zerlegung von Ω. Dann gilt für jedes Ereignis A

$$P(A) = \sum_i P(B_i)P(A \mid B_i),$$

wobei im Falle $P(B_i) = 0$ das Produkt $P(B_i)P(A|B_i)$ zu Null gesetzt wird.

Beweis (b)

(b) Sei $\{B_1, \ldots, B_k\}$ eine disjunkte Zerlegung von Ω. Dann gilt für jedes Ereignis A

$$P(A) = \sum_i P(B_i) P(A \mid B_i),$$

wobei im Falle $P(B_i) = 0$ das Produkt $P(B_i)P(A|B_i)$ zu Null gesetzt wird.

$$P(A) = P\big(\cup_i (A \cap B_i)\big) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(B_i) P(A \mid B_i).$$

Beweis (c)

(c) Ist $P(A) > 0$ und gelten die Voraussetzungen von (ii), so

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(B_j)\, P(A \mid B_j)}{\sum_i P(B_i) P(A \mid B_i)}.$$

folgt aus (b) wegen

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_j)\, P(A \mid B_j)}{\sum_i P(B_i) P(A \mid B_i)}.$$

Beispiel

Eine Krankheit kommt bei $0,5\%$ der Bevölkerung vor. Es gibt einen Test für diese Krankheit:

- 99% der Kranken werden identifiziert,
- 2% der Gesunden werden positiv getestet.

Beispiel

Eine Krankheit kommt bei $0,5\%$ der Bevölkerung vor. Es gibt einen Test für diese Krankheit:

- 99% der Kranken werden identifiziert,
- 2% der Gesunden werden positiv getestet.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein positiv Getesteter tatsächlich krank ist?

Beispiel

Eine Krankheit kommt bei $0,5\%$ der Bevölkerung vor. Es gibt einen Test für diese Krankheit:

- 99% der Kranken werden identifiziert,
- 2% der Gesunden werden positiv getestet.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein positiv Getesteter tatsächlich krank ist?

- $\{1, \ldots, N\}$ = Menge der Bevölkerung,
- B_k = Menge der Kranken,
- B_g = Menge der Gesunden.

Beispiel

Eine Krankheit kommt bei $0,5\%$ der Bevölkerung vor. Es gibt einen Test für diese Krankheit:

- 99% der Kranken werden identifiziert,
- 2% der Gesunden werden positiv getestet.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein positiv Getesteter tatsächlich krank ist?

- $\{1, \ldots, N\}$ = Menge der Bevölkerung,
- B_k = Menge der Kranken,
- B_g = Menge der Gesunden.

Damit gilt

$$|B_k| \approx 0,005N, \quad |B_g| \approx 0,995N.$$

Beispiel

Eine Krankheit kommt bei $0,5\%$ der Bevölkerung vor. Es gibt einen Test für diese Krankheit:

- 99% der Kranken werden identifiziert,
- 2% der Gesunden werden positiv getestet.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein positiv Getesteter tatsächlich krank ist?

- $\{1, \ldots, N\}$ = Menge der Bevölkerung,
- B_k = Menge der Kranken,
- B_g = Menge der Gesunden.

Damit gilt

$$|B_k| \approx 0,005N, \quad |B_g| \approx 0,995N.$$

Ist ferner A die Menge der positiv getesteten Personen, so haben wir

$$|A \cap B_K| \approx 0,99|B_k|, \quad |A \cap B_g| \approx 0,02|B_g|.$$

Beispiel

$$|B_k| \approx 0,005N,\ |B_g| \approx 0,995N,\ |A \cap B_K| \approx 0,99|B_k|,\ |A \cap B_g| \approx 0,02|B_g|$$

Beispiel

$$|B_k| \approx 0,005N,\ |B_g| \approx 0,995N,\ |A \cap B_K| \approx 0,99|B_k|,\ |A \cap B_g| \approx 0,02|B_g|$$

Bei zufälliger Auswahl einer Person ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten

$$P(B_k) = 0,005, \quad P(B_g) = 0,995,$$
$$P(A \cap B_k) = 0,99 \cdot 0,005, \quad P(A \cap B_g) = 0,02 \cdot 0,995.$$

Beispiel

$$|B_k| \approx 0,005N,\ |B_g| \approx 0,995N,\ |A \cap B_K| \approx 0,99|B_k|,\ |A \cap B_g| \approx 0,02|B_g|$$

Bei zufälliger Auswahl einer Person ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten

$$P(B_k) = 0,005, \quad P(B_g) = 0,995,$$

$$P(A \cap B_k) = 0,99 \cdot 0,005, \quad P(A \cap B_g) = 0,02 \cdot 0,995.$$

Nach der Formel von Bayes gilt daher

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{0,99 \cdot 0,005}{0,99 \cdot 0,005 + 0,02 \cdot 0,995} = \frac{495}{2485} \approx 0,2.$$

Beispiel

$$|B_k| \approx 0,005N,\ |B_g| \approx 0,995N,\ |A \cap B_K| \approx 0,99|B_k|,\ |A \cap B_g| \approx 0,02|B_g|$$

Bei zufälliger Auswahl einer Person ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten

$$P(B_k) = 0,005, \quad P(B_g) = 0,995,$$

$$P(A \cap B_k) = 0,99 \cdot 0,005, \quad P(A \cap B_g) = 0,02 \cdot 0,995.$$

Nach der Formel von Bayes gilt daher

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{0,99 \cdot 0,005}{0,99 \cdot 0,005 + 0,02 \cdot 0,995} = \frac{495}{2485} \approx 0,2.$$

Von den postiv getesteten Personen sind demnach nur 20% krank.

Unabhängige Ereignisse

Seien A, B zwei Ereignisse mit Wahrscheinlichkeiten $P(A), P(B) > 0$.

Seien A, B zwei Ereignisse mit Wahrscheinlichkeiten $P(A), P(B) > 0$.

A und B definieren wir als unabhängig, wenn die Kenntnis von B an der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von A nichts ändert, wenn also

$$P(A) = P(A \mid B).$$

Unabhängige Ereignisse

Seien A, B zwei Ereignisse mit Wahrscheinlichkeiten $P(A), P(B) > 0$.

A und B definieren wir als unabhängig, wenn die Kenntnis von B an der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von A nichts ändert, wenn also

$$P(A) = P(A \mid B).$$

Anders ausgedrückt: Die Kenntnis von B hilft uns nicht weiter.

Problem

Der Begriff der Unabhängigkeit ist problematisch, weil er von der Mehrheit der Menschen nicht akzeptiert wird.

Problem

Der Begriff der Unabhängigkeit ist problematisch, weil er von der Mehrheit der Menschen nicht akzeptiert wird.

Es ist aber eine empirische Tatsache, dass der zweite Wurf einer Münze oder einer Roulettekugel nicht vom ersten Wurf in irgendeiner Weise beeinflußt wird.

Problem

Der Begriff der Unabhängigkeit ist problematisch, weil er von der Mehrheit der Menschen nicht akzeptiert wird.

Es ist aber eine empirische Tatsache, dass der zweite Wurf einer Münze oder einer Roulettekugel nicht vom ersten Wurf in irgendeiner Weise beeinflußt wird.

Gegen diese Tatsache stehen Millionen Menschen, die glauben, dass aus den ausgespielten Zahlen beispielsweise im Lotto oder im Roulette auf die Zahlen der Zukunft geschlossen werden kann.

Problem

Der Begriff der Unabhängigkeit ist problematisch, weil er von der Mehrheit der Menschen nicht akzeptiert wird.

Es ist aber eine empirische Tatsache, dass der zweite Wurf einer Münze oder einer Roulettekugel nicht vom ersten Wurf in irgendeiner Weise beeinflußt wird.

Gegen diese Tatsache stehen Millionen Menschen, die glauben, dass aus den ausgespielten Zahlen beispielsweise im Lotto oder im Roulette auf die Zahlen der Zukunft geschlossen werden kann.

Die Wahrscheinlichkeit ist ein mathematisches Konstrukt, das keine Aussagen über die Tiefenstruktur der Welt erlaubt.

Unabhängige Ereignisse

Wir werfen zwei Würfel hintereinander:

- $A =$ im ersten Wurf erscheint eine 1 oder 2,
- $B =$ im zweiten Wurf kommt eine 6.

Unabhängige Ereignisse

Wir werfen zwei Würfel hintereinander:

- $A =$ im ersten Wurf erscheint eine 1 oder 2,
- $B =$ im zweiten Wurf kommt eine 6.

Dann gilt

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{6}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{18}.$$

Unabhängige Ereignisse

Wir werfen zwei Würfel hintereinander:

- $A =$ im ersten Wurf erscheint eine 1 oder 2,
- $B =$ im zweiten Wurf kommt eine 6.

Dann gilt

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{6}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{18}.$$

Damit ist

$$P(A \mid B) = \frac{1}{3} = P(A).$$

Wir werfen zwei Würfel hintereinander:

- $A =$ im ersten Wurf erscheint eine 1 oder 2,
- $B =$ im zweiten Wurf kommt eine 6.

Dann gilt

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{6}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{18}.$$

Damit ist

$$P(A \,|\, B) = \frac{1}{3} = P(A).$$

Klar, denn das Auftreten von B ändert nichts an der Wahrscheinlichkeit von A.

Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B heißen *unabhängig*, wenn

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B heißen *unabhängig*, wenn

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

In diesem Fall gilt

$$P(A) = P(A \mid B), \quad P(B) = P(B \mid A).$$

Zwei Ereignisse A und B heißen *unabhängig*, wenn

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

In diesem Fall gilt

$$P(A) = P(A \mid B), \quad P(B) = P(B \mid A).$$

Diese Definition greift auch im Falle $P(B) = 0$.

Beispiel

Wir werfen zwei Würfel hintereinander.

- $A =$ eine gerade Augensumme wird gewürfelt,
- $B =$ die zweite Augenzahl ist geradzahlig.

Beispiel

Wir werfen zwei Würfel hintereinander.

- $A =$ eine gerade Augensumme wird gewürfelt,
- $B =$ die zweite Augenzahl ist geradzahlig.

Dann gilt

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4},$$

die beiden Ereignisse sind also unabhängig, obwohl B durchaus A beeinflußt.

Beispiel

Wir werfen zwei Würfel hintereinander.

- $A =$ eine gerade Augensumme wird gewürfelt,
- $B =$ die zweite Augenzahl ist geradzahlig.

Dann gilt

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4},$$

die beiden Ereignisse sind also unabhängig, obwohl B durchaus A beeinflußt.

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer geraden Zahl in beiden Würfen sei nun $2/5$.

Beispiel

Wir werfen zwei Würfel hintereinander.

- $A =$ eine gerade Augensumme wird gewürfelt,
- $B =$ die zweite Augenzahl ist geradzahlig.

Dann gilt

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4},$$

die beiden Ereignisse sind also unabhängig, obwohl B durchaus A beeinflußt.

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer geraden Zahl in beiden Würfen sei nun $2/5$.

Dann gilt

$$P(A) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2, \quad P(A \cap B) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \neq P(A)P(B).$$

Unabhängige Ereignisse

Sei I eine beliebige Indexmenge und $\{A_i : i \in I\}$ eine Familie von Ereignissen.

Unabhängige Ereignisse

Sei I eine beliebige Indexmenge und $\{A_i : i \in I\}$ eine Familie von Ereignissen.

Die Familie heißt *unabhängig*, wenn für alle endlichen Indexmengen $\emptyset \neq J \subset I$ gilt

$$P\Big(\bigcap_{i \in J} A_i\Big) = \prod_{i \in J} P(A_i).$$

Besipiel

Wir werfen zweimal hintereinander eine Münze:

- $A =$ „beim ersten Wurf K“,
- $B =$ „beim zweiten Wurf K“,
- $C =$ „genau ein K“.

Besipiel

Wir werfen zweimal hintereinander eine Münze:

- $A =$ „beim ersten Wurf K“,
- $B =$ „beim zweiten Wurf K“,
- $C =$ „genau ein K“.

Dann sind A und B unabhängig.

Besipiel

Wir werfen zweimal hintereinander eine Münze:

- $A =$ „beim ersten Wurf K“,
- $B =$ „beim zweiten Wurf K“,
- $C =$ „genau ein K“.

Dann sind A und B unabhängig.

Obwohl A und B das Ereignis C bestimmen, sind A und C ebenfalls unabhängig wegen

$$P(A) = 1/2, \quad P(C) = 1/2, \quad P(A \cap C) = 1/4.$$

Besipiel

Wir werfen zweimal hintereinander eine Münze:

- $A =$ „beim ersten Wurf K“,
- $B =$ „beim zweiten Wurf K“,
- $C =$ „genau ein K“.

Dann sind A und B unabhängig.

Obwohl A und B das Ereignis C bestimmen, sind A und C ebenfalls unabhängig wegen

$$P(A) = 1/2, \quad P(C) = 1/2, \quad P(A \cap C) = 1/4.$$

Gleiches gilt für B und C. Andererseits ist

$$P(A \cap B \cap C) = 0, \;\text{ aber } P(A)P(B)P(C) = 1/8.$$

Besipiel

Wir werfen zweimal hintereinander eine Münze:

- $A =$ „beim ersten Wurf K“,
- $B =$ „beim zweiten Wurf K“,
- $C =$ „genau ein K“.

Dann sind A und B unabhängig.

Obwohl A und B das Ereignis C bestimmen, sind A und C ebenfalls unabhängig wegen

$$P(A) = 1/2, \quad P(C) = 1/2, \quad P(A \cap C) = 1/4.$$

Gleiches gilt für B und C. Andererseits ist

$$P(A \cap B \cap C) = 0, \text{ aber } P(A)P(B)P(C) = 1/8.$$

Aus der paarweisen Unabhängigkeit folgt daher nicht notwendig die oben definierte Unabhängigkeit.

Satz (a) Ist $\{A_i : i \in I\}$ eine unabhängige Familie von Ereignissen und ist

$$P(A_k) = 0 \text{ oder } P(A_k) = 1 \text{ mit } k \notin I,$$

so ist auch $\{A_i : i \in I \cup \{k\}\}$ unabhängig.

Eigenschaften der Unabhängigkeit

Satz (a) Ist $\{A_i : i \in I\}$ eine unabhängige Familie von Ereignissen und ist

$$P(A_k) = 0 \text{ oder } P(A_k) = 1 \text{ mit } k \notin I,$$

so ist auch $\{A_i : i \in I \cup \{k\}\}$ unabhängig.

(b) Ist $\{A_i : i \in I\}$ unabhängig und ist $B_i \in \{A_i, A_i^c, \emptyset, \Omega\}$ für jedes $i \in I$, so ist auch $\{B_i : i \in I\}$ unabhängig.

Satz (a) Ist $\{A_i : i \in I\}$ eine unabhängige Familie von Ereignissen und ist

$$P(A_k) = 0 \text{ oder } P(A_k) = 1 \text{ mit } k \notin I,$$

so ist auch $\{A_i : i \in I \cup \{k\}\}$ unabhängig.

(b) Ist $\{A_i : i \in I\}$ unabhängig und ist $B_i \in \{A_i, A_i^c, \emptyset, \Omega\}$ für jedes $i \in I$, so ist auch $\{B_i : i \in I\}$ unabhängig.

(c) Ist $I = \{1, \ldots, n\}$, so ist die endliche Familie von Ereignissen $\{A_i : i \in I\}$ genau dann unabhängig, wenn für jede Wahl von $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$ gilt

$$P(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = P(B_1) \ldots P(B_n).$$

Beweis (a)

(a) Ist $\{A_i : i \in I\}$ eine unabhängige Familie von Ereignissen und ist

$$P(A_k) = 0 \text{ oder } P(A_k) = 1 \text{ mit } k \notin I,$$

so ist auch $\{A_i : i \in I \cup \{k\}\}$ unabhängig.

Beweis (a)

(a) Ist $\{A_i : i \in I\}$ eine unabhängige Familie von Ereignissen und ist

$$P(A_k) = 0 \text{ oder } P(A_k) = 1 \text{ mit } k \notin I,$$

so ist auch $\{A_i : i \in I \cup \{k\}\}$ unabhängig.

Gehört k zur Indexmenge J, so ändert sich im Falle $P(B) = 1$ auf beiden Seiten der Definition nichts wegen $P(A \cap B) = P(A)$ für alle Mengen A.

Beweis (a)

(a) Ist $\{A_i : i \in I\}$ eine unabhängige Familie von Ereignissen und ist

$$P(A_k) = 0 \text{ oder } P(A_k) = 1 \text{ mit } k \notin I,$$

so ist auch $\{A_i : i \in I \cup \{k\}\}$ unabhängig.

Gehört k zur Indexmenge J, so ändert sich im Falle $P(B) = 1$ auf beiden Seiten der Definition nichts wegen $P(A \cap B) = P(A)$ für alle Mengen A.

Im Falle $P(B) = 0$ steht hingegen auf beiden Seiten Null.

Beweis (b)

(b) Ist $\{A_i : i \in I\}$ unabhängig und ist $B_i \in \{A_i, A_i^c, \emptyset, \Omega\}$ für jedes $i \in I$, so ist auch $\{B_i : i \in I\}$ unabhängig.

Beweis (b)

(b) Ist $\{A_i : i \in I\}$ unabhängig und ist $B_i \in \{A_i, A_i^c, \emptyset, \Omega\}$ für jedes $i \in I$, so ist auch $\{B_i : i \in I\}$ unabhängig.

Wegen (a) ist nur der Fall $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$ näher zu untersuchen.

Beweis (b)

(b) Ist $\{A_i : i \in I\}$ unabhängig und ist $B_i \in \{A_i, A_i^c, \emptyset, \Omega\}$ für jedes $i \in I$, so ist auch $\{B_i : i \in I\}$ unabhängig.

Wegen (a) ist nur der Fall $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$ näher zu untersuchen.

Durch Induktion über m beweisen wir die Behauptung: Ist $J \subset I$ endlich und $|\{j \in J : B_j = A_j^c\}| \leq m$, so gilt

$$(*) \qquad P\Big(\bigcap_{j \in J} B_j\Big) = \prod_{j \in J} P(B_j).$$

Beweis (b)

(b) Ist $\{A_i : i \in I\}$ unabhängig und ist $B_i \in \{A_i, A_i^c, \emptyset, \Omega\}$ für jedes $i \in I$, so ist auch $\{B_i : i \in I\}$ unabhängig.

Wegen (a) ist nur der Fall $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$ näher zu untersuchen.

Durch Induktion über m beweisen wir die Behauptung: Ist $J \subset I$ endlich und $|\{j \in J : B_j = A_j^c\}| \leq m$, so gilt

$$(*) \qquad P\Big(\bigcap_{j \in J} B_j\Big) = \prod_{j \in J} P(B_j).$$

Ist $m = 0$, so sind alle B_i gleich A_i und (*) folgt aus der Definition.

Beweis (b)

Ist $J \subset I$ endlich und $|\{j \in J : B_j = A_j^c\}| \leq m$, so gilt

$$(*) \qquad P\Big(\bigcap_{j \in J} B_j\Big) = \prod_{j \in J} P(B_j).$$

Beweis (b)

Ist $J \subset I$ endlich und $|\{j \in J : B_j = A_j^c\}| \leq m$, so gilt

$$(*) \qquad P\Big(\bigcap_{j \in J} B_j\Big) = \prod_{j \in J} P(B_j).$$

Sei (*) für m bewiesen und J eine Indexmenge mit

$$|\{j \in J : B_j = A_j^c\}| = m + 1.$$

Beweis (b)

Ist $J \subset I$ endlich und $|\{j \in J : B_j = A_j^c\}| \leq m$, so gilt

$$(*) \qquad P\Big(\bigcap_{j \in J} B_j\Big) = \prod_{j \in J} P(B_j).$$

Sei (*) für m bewiesen und J eine Indexmenge mit

$$|\{j \in J : B_j = A_j^c\}| = m + 1.$$

Wir können annehmen. dass $J = \{1, \ldots, n\}$ und $B_1 = A_1^c$. Für $j = 2, \ldots, n$ kann dann die Induktionsvoraussetzung verwendet werden. Es gilt daher

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{n} B_j\Big) = P\Big(\bigcap_{j=2}^{n} B_j\Big) - P\Big(A_1 \cap \bigcap_{j=2}^{n} B_j\Big)$$

$$= \prod_{j=2}^{n} P(B_j) - P(A_1) \cdot \prod_{j=2}^{n} P(B_j) = \prod_{j=1}^{n} P(B_j).$$

Beweis (c)

(c) Ist $I = \{1, \dots, n\}$, so ist die endliche Familie von Ereignissen $\{A_i : i \in I\}$ genau dann unabhängig, wenn für jede Wahl von $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$ gilt

$$(**) \qquad P(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = P(B_1) \ldots P(B_n).$$

Beweis (c)

(c) Ist $I = \{1, \ldots, n\}$, so ist die endliche Familie von Ereignissen $\{A_i : i \in I\}$ genau dann unabhängig, wenn für jede Wahl von $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$ gilt

$$(**) \qquad P(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = P(B_1) \ldots P(B_n).$$

Die Notwendigkeit der Bedingung ist gerade (b).

Beweis (c)

(c) Ist $I = \{1, \ldots, n\}$, so ist die endliche Familie von Ereignissen $\{A_i : i \in I\}$ genau dann unabhängig, wenn für jede Wahl von $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$ gilt

$$(**) \qquad P(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = P(B_1) \ldots P(B_n).$$

Die Notwendigkeit der Bedingung ist gerade (b). Auf (**) addieren wir die gleiche Bedingung für die Mengen $B_1^c, B_2, \ldots, B_n$ und erhalten

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcap_{i=2}^n B_i\Big) &= P\Big(B_1^c \cap \bigcap_{i=2}^n B_i\Big) + P\Big(\bigcap_{i=1}^n B_i\Big) \\ &= P(B_1^c) \prod_{i=2}^n P(B_i) + \prod_{i=1}^n P(B_i) = \prod_{i=2}^n P(B_i). \end{aligned}$$

Beweis (c)

(c) Ist $I = \{1, \ldots, n\}$, so ist die endliche Familie von Ereignissen $\{A_i : i \in I\}$ genau dann unabhängig, wenn für jede Wahl von $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$ gilt

$$(**) \qquad P(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = P(B_1) \ldots P(B_n).$$

Die Notwendigkeit der Bedingung ist gerade (b). Auf (**) addieren wir die gleiche Bedingung für die Mengen $B_1^c, B_2, \ldots, B_n$ und erhalten

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcap_{i=2}^{n} B_i\Big) &= P\Big(B_1^c \cap \bigcap_{i=2}^{n} B_i\Big) + P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\Big) \\ &= P(B_1^c) \prod_{i=2}^{n} P(B_i) + \prod_{i=1}^{n} P(B_i) = \prod_{i=2}^{n} P(B_i). \end{aligned}$$

Auf diese Weise können wir die Bedingung auch für kleinere Indexmengen als $\{1, \ldots, n\}$ nachweisen.

15.3 Die Monte-Carlo-Methode

- ermöglicht, komplizierte deterministische oder stochastische Probleme näherungsweise zu lösen,
- ist sehr langsam
- und wird, wenn möglich, besser durch ein deterministisches Verfahren ersetzt.

Volumen der n-Kugel

$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \; x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + x_n^2 < 1\}.$$

ist die Einheitskugel des n-dimensionalen Raums.

Volumen der n-Kugel

$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \; x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + x_n^2 < 1\}.$$

ist die Einheitskugel des n-dimensionalen Raums.

Deterministisches Verfahren zur Volumenberechnung:

- Überdecke K_n mit n-Würfeln mit Kantenlänge 2^{-k}, k „groß“,
- zähle die Würfel, die ganz in K^n liegen.

Sperre den Einheitskreis in das Quadrat $Q_1 = (-1, 1) \times (-1, 1)$ ein.

Monte-Carlo für den Flächeninhalt

Sperre den Einheitskreis in das Quadrat $Q_1 = (-1,1) \times (-1,1)$ ein.

Generiere Zufallsvektoren $(x_1, x_2) \in Q_1$, die auf Q_1 gleichverteilt sind, und zähle, wie viele davon in den Einheitskreis fallen.

Sperre den Einheitskreis in das Quadrat $Q_1 = (-1, 1) \times (-1, 1)$ ein.

Generiere Zufallsvektoren $(x_1, x_2) \in Q_1$, die auf Q_1 gleichverteilt sind, und zähle, wie viele davon in den Einheitskreis fallen.

Das Verhältnis der Treffer zur Gesamtzahl der Versuche konvergiert dann gegen den gesuchten Flächeninhalt/4.

Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation

Bei N Versuchen erhalten wir für die Kugeln in den Raumdimensionen $n = 2, 3, 4, 5$:

n	$N = 10^1$	$N = 10^3$	$N = 10^5$	$N = 10^7$
2	3,59999	3,25200	3,14276	3,14222
3	4,80000	4,23199	4,18344	4,18810
4	3,20000	4,97599	4,90384	4,93469
5	9,60000	6,07999	5,28032	5,26119

Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation

Bei N Versuchen erhalten wir für die Kugeln in den Raumdimensionen $n = 2, 3, 4, 5$:

n	$N = 10^1$	$N = 10^3$	$N = 10^5$	$N = 10^7$
2	3,59999	3,25200	3,14276	3,14222
3	4,80000	4,23199	4,18344	4,18810
4	3,20000	4,97599	4,90384	4,93469
5	9,60000	6,07999	5,28032	5,26119

$\mathrm{Vol}(K_2) = 3,14159\ldots$ liefert für die Fehler im Falle $n = 2$:

n	$K = 10$	$K = 10^3$	$K = 10^5$	$K = 10^7$
2	0.45841	0.11041	0.0117	0.0063

Vor- und Nachteile der Monte-Carlo-Simulation

Man braucht vom gestellten Problem keine Ahnung zu haben. In unserem Fall lässt sich das Kugelvolumen durch höhere Mathematik exakt bestimmen.

Vor- und Nachteile der Monte-Carlo-Simulation

Man braucht vom gestellten Problem keine Ahnung zu haben. In unserem Fall lässt sich das Kugelvolumen durch höhere Mathematik exakt bestimmen.

Daraus folgt: Auch sehr komplexe Probleme können mit einfachen Monte-Carlo-Programmen behandelt werden.

Vor- und Nachteile der Monte-Carlo-Simulation

Man braucht vom gestellten Problem keine Ahnung zu haben. In unserem Fall lässt sich das Kugelvolumen durch höhere Mathematik exakt bestimmen.

Daraus folgt: Auch sehr komplexe Probleme können mit einfachen Monte-Carlo-Programmen behandelt werden.

Verfahren ist sehr langsam, in der Regel geht der Fehler wie $\sqrt{N^{-1}}$.

Vor- und Nachteile der Monte-Carlo-Simulation

Man braucht vom gestellten Problem keine Ahnung zu haben. In unserem Fall lässt sich das Kugelvolumen durch höhere Mathematik exakt bestimmen.

Daraus folgt: Auch sehr komplexe Probleme können mit einfachen Monte-Carlo-Programmen behandelt werden.

Verfahren ist sehr langsam, in der Regel geht der Fehler wie $\sqrt{N^{-1}}$.

Verfahren ist nicht sicher. Es gibt immer Ausreißer, die stark von den angegebenen $\sqrt{N^{-1}}$ abweichen.

Man braucht vom gestellten Problem keine Ahnung zu haben. In unserem Fall lässt sich das Kugelvolumen durch höhere Mathematik exakt bestimmen.

Daraus folgt: Auch sehr komplexe Probleme können mit einfachen Monte-Carlo-Programmen behandelt werden.

Verfahren ist sehr langsam, in der Regel geht der Fehler wie $\sqrt{N^{-1}}$.

Verfahren ist nicht sicher. Es gibt immer Ausreißer, die stark von den angegebenen $\sqrt{N^{-1}}$ abweichen.

Man benötigt sehr viele Zufallszahlen. Woher nimmt man die?

Gleichverteilte Zufallszahlen

Für die Bestimmung des Kugelvolumens reichen gleichverteilte Zufallszahlen über dem Intervall $[0, 1)$ aus.

Gleichverteilte Zufallszahlen

Für die Bestimmung des Kugelvolumens reichen gleichverteilte Zufallszahlen über dem Intervall $[0, 1)$ aus.

Durch eine Streckung oder Stauchung dieses Intervalls kann man damit auch Zufallszahlen auf jedem anderen Intervall bekommen.

Gleichverteilte Zufallszahlen

Für die Bestimmung des Kugelvolumens reichen gleichverteilte Zufallszahlen über dem Intervall $[0, 1)$ aus.

Durch eine Streckung oder Stauchung dieses Intervalls kann man damit auch Zufallszahlen auf jedem anderen Intervall bekommen.

Gleichverteilt bedeutet, dass die Zufallszahl y mit Wahrscheinlichkeit $b - a$ im Intervall $(a, b) \subset [0, 1)$ liegt.

Gleichverteilte Zufallszahlen

Für die Bestimmung des Kugelvolumens reichen gleichverteilte Zufallszahlen über dem Intervall $[0, 1)$ aus.

Durch eine Streckung oder Stauchung dieses Intervalls kann man damit auch Zufallszahlen auf jedem anderen Intervall bekommen.

Gleichverteilt bedeutet, dass die Zufallszahl y mit Wahrscheinlichkeit $b - a$ im Intervall $(a, b) \subset [0, 1)$ liegt.

Welche Vorgänge sind tatsächlich zufällig?

Gleichverteilte Zufallszahlen

Für die Bestimmung des Kugelvolumens reichen gleichverteilte Zufallszahlen über dem Intervall $[0, 1)$ aus.

Durch eine Streckung oder Stauchung dieses Intervalls kann man damit auch Zufallszahlen auf jedem anderen Intervall bekommen.

Gleichverteilt bedeutet, dass die Zufallszahl y mit Wahrscheinlichkeit $b - a$ im Intervall $(a, b) \subset [0, 1)$ liegt.

Welche Vorgänge sind tatsächlich zufällig?

Verwende durch eine Formel erzeugte "Pseudo-Zufallszahlen"!

Gleichverteilte Zufallszahlen

Für die Bestimmung des Kugelvolumens reichen gleichverteilte Zufallszahlen über dem Intervall $[0, 1)$ aus.

Durch eine Streckung oder Stauchung dieses Intervalls kann man damit auch Zufallszahlen auf jedem anderen Intervall bekommen.

Gleichverteilt bedeutet, dass die Zufallszahl y mit Wahrscheinlichkeit $b - a$ im Intervall $(a, b) \subset [0, 1)$ liegt.

Welche Vorgänge sind tatsächlich zufällig?

Verwende durch eine Formel erzeugte "Pseudo-Zufallszahlen"!

Problem: Die Beschreibung einer wirklich zufälligen Folge ist so lang wie die Folge selbst, oder?

Linearer Kongruenz-Generator

Man gibt sich eine natürliche Zahl m vor sowie Zahlen $a, b \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$.

Man gibt sich eine natürliche Zahl m vor sowie Zahlen $a, b \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$.

Für eine weitere vorgegebene Zahl $x_0 \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ als Startwert bestimme

$$x_{i+1} = (ax_i + b) \mod m.$$

Man gibt sich eine natürliche Zahl m vor sowie Zahlen $a, b \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$.

Für eine weitere vorgegebene Zahl $x_0 \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ als Startwert bestimme

$$x_{i+1} = (ax_i + b) \mod m.$$

Dabei ist $(\ldots) \mod m$ so zu verstehen, dass $x_{i+1} \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ der Rest ist, der beim Teilen der rechten Seite durch m entsteht.

Man gibt sich eine natürliche Zahl m vor sowie Zahlen $a, b \in \{0, 1, \dots, m-1\}$.

Für eine weitere vorgegebene Zahl $x_0 \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ als Startwert bestimme

$$x_{i+1} = (ax_i + b) \mod m.$$

Dabei ist $(\dots) \mod m$ so zu verstehen, dass $x_{i+1} \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ der Rest ist, der beim Teilen der rechten Seite durch m entsteht.

Die x_i liegen alle in der Menge $\{0, 1, \dots, m-1\}$ und sind periodisch mit einer Periode $\leq m$.

Linearer Kongruenz-Generator

Beispiel: Für $a = 4$, $b = 1$ und $m = 11$ erhalte

$$x_0 = 1,\ x_1 = 5,\ x_2 = 10,\ x_3 = 8,\ x_4 = 0,\ x_5 = 1.$$

Beispiel: Für $a = 4$, $b = 1$ und $m = 11$ erhalte

$$x_0 = 1,\ x_1 = 5,\ x_2 = 10,\ x_3 = 8,\ x_4 = 0,\ x_5 = 1.$$

Zahlen m, a, b müssen gut gewählt werden, wenn man Periodenlänge m haben will.

Linearer Kongruenz-Generator

In der Praxis werden die Zahlen m, a, b so gewählt, dass die Periode maximal, also m ist, und die erzeugten x_i verschiedene Tests auf Zufälligkeit erfolgreich bestehen.

In der Praxis werden die Zahlen m, a, b so gewählt, dass die Periode maximal, also m ist, und die erzeugten x_i verschiedene Tests auf Zufälligkeit erfolgreich bestehen.

Man kann die Folge in Binärdarstellung hintereinander schreiben. Es soll dann eine zufällige $0, 1$-Folge entstehen, in denen alle Bitmuster in etwa gleich häufig vorkommen.

In der Praxis werden die Zahlen m, a, b so gewählt, dass die Periode maximal, also m ist, und die erzeugten x_i verschiedene Tests auf Zufälligkeit erfolgreich bestehen.

Man kann die Folge in Binärdarstellung hintereinander schreiben. Es soll dann eine zufällige $0, 1$-Folge entstehen, in denen alle Bitmuster in etwa gleich häufig vorkommen.

Man teilt die Folgenglieder x_i des linearen Kongruenzgenerators durch m und erhält (hoffentlich) gleichverteilte Zufallszahlen auf dem Intervall $[0, 1)$.

In der Praxis werden die Zahlen m, a, b so gewählt, dass die Periode maximal, also m ist, und die erzeugten x_i verschiedene Tests auf Zufälligkeit erfolgreich bestehen.

Man kann die Folge in Binärdarstellung hintereinander schreiben. Es soll dann eine zufällige $0, 1$-Folge entstehen, in denen alle Bitmuster in etwa gleich häufig vorkommen.

Man teilt die Folgenglieder x_i des linearen Kongruenzgenerators durch m und erhält (hoffentlich) gleichverteilte Zufallszahlen auf dem Intervall $[0, 1)$.

Da die Beschreibung der Folge kurz ist, wird es immer Anwendungen geben, bei denen die „Zufälligkeit" dieser Zahlen nicht ausreicht.

Zufallsvektoren

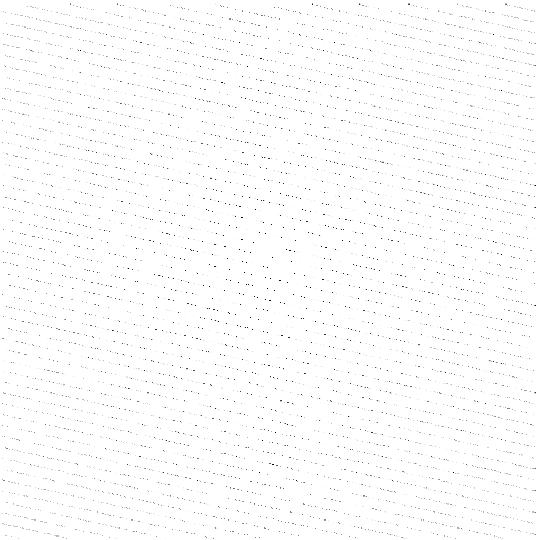
Auch wenn m, a, b im linearen Kongruenz-Generator gut gewählt werden, sind *Zufallsvektoren* problematisch.

Auch wenn m, a, b im linearen Kongruenz-Generator gut gewählt werden, sind *Zufallsvektoren* problematisch.

In diesem Fall bildet man – wie bei der Berechnung von Flächeninhalten – aus den Zufallszahlen die Folge

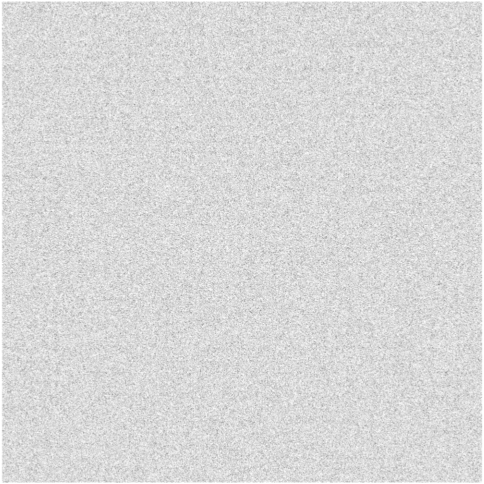
$$(x_0, x_1),\ (x_2, x_3),\ (x_4, x_5), \ldots .$$

Der Hyperebenen-Effekt



Raster 1000 x 1000   Linearer Kongruenzgenerator
a=12453, b=8889, m=247897

Zufallsgenerator des IFORT-Compilers



Raster 1000 x 1000	IFORT-Compiler
Weiss: kein Treffer	Schwarz: Treffer>4

Option auf eine Aktie

Eine Aktie kostet zum 1.1. eines Jahres 100 Euro.

Man kann eine Kaufoption auf diese Aktie erwerben, die einem das Recht gibt, diese Aktie zum 31.12. des gleichen Jahres zum Preis von 100 Euro zu kaufen.

Option auf eine Aktie

Eine Aktie kostet zum 1.1. eines Jahres 100 Euro.

Man kann eine Kaufoption auf diese Aktie erwerben, die einem das Recht gibt, diese Aktie zum 31.12. des gleichen Jahres zum Preis von 100 Euro zu kaufen.

Wir nehmen an, dieses Recht kostet 10 Euro. Zum 31.12. kauft man die Aktie zu 100 Euro, sofern der Kurs über 100 Euro liegt, und verkauft sie gleich wieder.

Option auf eine Aktie

Eine Aktie kostet zum 1.1. eines Jahres 100 Euro.

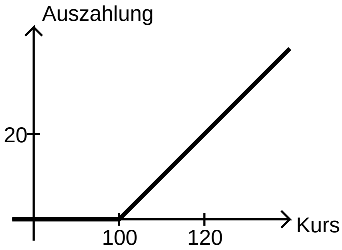
Man kann eine Kaufoption auf diese Aktie erwerben, die einem das Recht gibt, diese Aktie zum 31.12. des gleichen Jahres zum Preis von 100 Euro zu kaufen.

Wir nehmen an, dieses Recht kostet 10 Euro. Zum 31.12. kauft man die Aktie zu 100 Euro, sofern der Kurs über 100 Euro liegt, und verkauft sie gleich wieder.

Es ergeben sich damit folgende Möglichkeiten zum 31.12.:

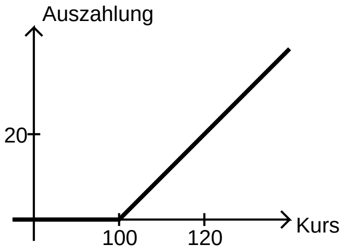
Kurs	Gewinn
120	10
100	-10
80	-10

Auszahlung einer Kaufoption



Auszahlungsfunktion einer Kaufoption (ohne Kaufpreis)

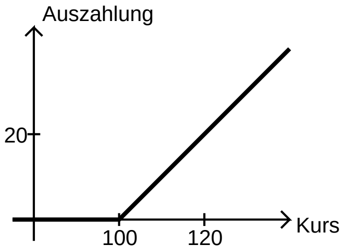
Auszahlung einer Kaufoption



Auszahlungsfunktion einer Kaufoption (ohne Kaufpreis)

- Überproportional hohe Gewinne sind möglich.

Auszahlung einer Kaufoption



Auszahlungsfunktion einer Kaufoption (ohne Kaufpreis)

- Überproportional hohe Gewinne sind möglich.
- Ein Portfolio aus Anleihen und Aktienoptionen ist recht sicher.

Optionsscheine und Optionen

- ist mathematisch dasselbe.

Optionsscheine und Optionen

- ist mathematisch dasselbe.
- Optionen werden an einer Terminbörse gehandelt. Den Preis bestimmt der Markt.

Optionsscheine und Optionen

- ist mathematisch dasselbe.
- Optionen werden an einer Terminbörse gehandelt. Den Preis bestimmt der Markt.
- Optionsscheine werden von Handelshäusern begeben. Börsentäglich werden An- und Verkaufskurse gestellt. Wie bestimmt man die Kurse?

Was ist der faire Wert einer Option?

Wir nehmen an, dass der Kurs der Aktie sich im Jahresverlauf zufällig entwickelt mit einer durchschnittlichen Rendite, die der Marktrendite für Anleihen entspricht.

Was ist der faire Wert einer Option?

Wir nehmen an, dass der Kurs der Aktie sich im Jahresverlauf zufällig entwickelt mit einer durchschnittlichen Rendite, die der Marktrendite für Anleihen entspricht.

Der durchschnittliche Gewinn, der mit einer Option bei diesen zufälligen Kursverläufen erzielt wird, ist gleichzeitig der faire Preis der Option.

Was ist der faire Wert einer Option?

Wir nehmen an, dass der Kurs der Aktie sich im Jahresverlauf zufällig entwickelt mit einer durchschnittlichen Rendite, die der Marktrendite für Anleihen entspricht.

Der durchschnittliche Gewinn, der mit einer Option bei diesen zufälligen Kursverläufen erzielt wird, ist gleichzeitig der faire Preis der Option.

Gerade für erfahrene Börsianer ist dieser Ansatz erstaunlich, weil die Aktie sich nur besser als der planlose Zufall entwickeln muss, um mit der Option Gewinn zu erzielen.

Stochastisches Modell des Kursverlaufs

l Laufzeit der Option in Börsentagen

Stochastisches Modell des Kursverlaufs

l Laufzeit der Option in Börsentagen

s maximale relative Kursänderung an einem Börsentag (wird aus der Vergangenheit des Kurses bestimmt, Volatilität!)

Stochastisches Modell des Kursverlaufs

- l Laufzeit der Option in Börsentagen
- s maximale relative Kursänderung an einem Börsentag (wird aus der Vergangenheit des Kurses bestimmt, Volatilität!)
- a Tageszinssatz des Marktes (z.B. $a^{250} = 1.01$)

Stochastisches Modell des Kursverlaufs

l Laufzeit der Option in Börsentagen

s maximale relative Kursänderung an einem Börsentag (wird aus der Vergangenheit des Kurses bestimmt, Volatilität!)

a Tageszinssatz des Marktes (z.B. $a^{250} = 1.01$)

x_0 Kurs zum Tag 0

Stochastisches Modell des Kursverlaufs

l Laufzeit der Option in Börsentagen

s maximale relative Kursänderung an einem Börsentag (wird aus der Vergangenheit des Kurses bestimmt, Volatilität!)

a Tageszinssatz des Marktes (z.B. $a^{250} = 1.01$)

x_0 Kurs zum Tag 0

y_i gleichverteilte Zufallszahlen im Intervall $(-s, s)$

Stochastisches Modell des Kursverlaufs

- l Laufzeit der Option in Börsentagen
- s maximale relative Kursänderung an einem Börsentag (wird aus der Vergangenheit des Kurses bestimmt, Volatilität!)
- a Tageszinssatz des Marktes (z.B. $a^{250} = 1.01$)
- x_0 Kurs zum Tag 0
- y_i gleichverteilte Zufallszahlen im Intervall $(-s, s)$

$$x_{i+1} = ax_i + y_i x_i, \quad 0 \leq i \leq l - 1,$$

Stochastisches Modell des Kursverlaufs

l Laufzeit der Option in Börsentagen

s maximale relative Kursänderung an einem Börsentag (wird aus der Vergangenheit des Kurses bestimmt, Volatilität!)

a Tageszinssatz des Marktes (z.B. $a^{250} = 1.01$)

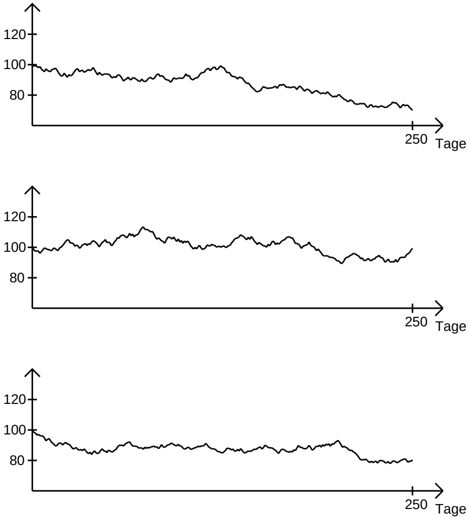
x_0 Kurs zum Tag 0

y_i gleichverteilte Zufallszahlen im Intervall $(-s, s)$

$$x_{i+1} = ax_i + y_i x_i, \quad 0 \leq i \leq l - 1,$$

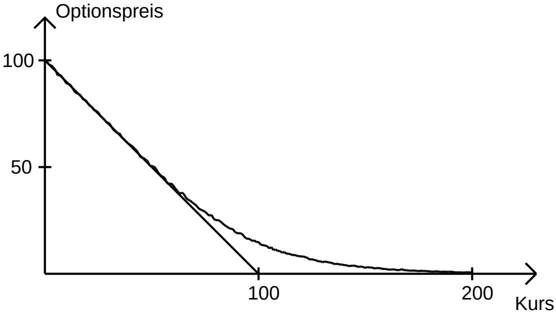
x_l liefert den Gewinn durch die Option

Kursverläufe



Echte Kurse oder aus dem Zufallsgenerator ?

Optionspreis in Abhängigkeit vom aktuellen Kurs



Optionspreis einer Verkaufsoption

Modifikationen

- Analoge Theorie für alle Arten von Optionen und Futures (auch Genußscheine, Wandelanleihen, Futures, Zertifikate usw.) auf alle Arten von Basisobjekten (Aktienindizes, landwirtschaftliche Produkte usw.)

Modifikationen

- Analoge Theorie für alle Arten von Optionen und Futures (auch Genußscheine, Wandelanleihen, Futures, Zertifikate usw.) auf alle Arten von Basisobjekten (Aktienindizes, landwirtschaftliche Produkte usw.)
- Dennoch: Den Optionspreis legt der Markt fest, nicht die Theorie.

- Analoge Theorie für alle Arten von Optionen und Futures (auch Genußscheine, Wandelanleihen, Futures, Zertifikate usw.) auf alle Arten von Basisobjekten (Aktienindizes, landwirtschaftliche Produkte usw.)
- Dennoch: Den Optionspreis legt der Markt fest, nicht die Theorie.
- Der Verkäufer der Option trägt das Risiko. Mit einer Erweiterung der Theorie lässt sich ein Gegengeschäft des Verkäufers angeben, das ihn von jedem Risiko freistellt.

Modifikationen

- Analoge Theorie für alle Arten von Optionen und Futures (auch Genußscheine, Wandelanleihen, Futures, Zertifikate usw.) auf alle Arten von Basisobjekten (Aktienindizes, landwirtschaftliche Produkte usw.)
- Dennoch: Den Optionspreis legt der Markt fest, nicht die Theorie.
- Der Verkäufer der Option trägt das Risiko. Mit einer Erweiterung der Theorie lässt sich ein Gegengeschäft des Verkäufers angeben, das ihn von jedem Risiko freistellt.
- In der Praxis verwendet man normalverteilte an Stelle von gleichverteilten Zufallszahlen und einen kontinuierlichen an Stelle eines diskreten stochastischen Prozesses (=Black-Scholes-Theorie).