5 Lineare Vektorräume

- Der Raum $\mathbb{K}^n$
- Allgemeine lineare Vektorräume
- Basis und Dimension

5.1 Der Raum $\mathbb{K}^n$

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Der Raum $\mathbb{K}^n$ besteht aus n-tupeln in $\mathbb{K}$, die spaltenweise angeordnet werden

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{K}.$$

5.1 Der Raum $\mathbb{K}^n$

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Der Raum $\mathbb{K}^n$ besteht aus n-tupeln in $\mathbb{K}$, die spaltenweise angeordnet werden

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{K}.$$

Schreibe dafür auch

$$u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T.$$

5.1 Der Raum $\mathbb{K}^n$

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Der Raum $\mathbb{K}^n$ besteht aus n-tupeln in $\mathbb{K}$, die spaltenweise angeordnet werden

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{K}.$$

Schreibe dafür auch

$$u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T.$$

Die Elemente von $\mathbb{K}^n$ bezeichnen wir als *Vektoren*, die von $\mathbb{K}$ als *Skalare*.

Addition und Skalarmultiplikation definiert man komponentenweise

$$u + v = \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \alpha u = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

Addition und Skalarmultiplikation definiert man komponentenweise

$$u + v = \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \alpha u = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

Im R^2 können wir einen Vektor zunächst als Punkt in ein Koordinatensystem einzeichnen und diesen dann mit dem Nullpunkt des Koordinatensystems verbinden.

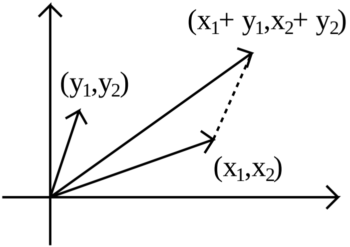
Addition und Skalarmultiplikation definiert man komponentenweise

$$u + v = \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \alpha u = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

Im R^2 können wir einen Vektor zunächst als Punkt in ein Koordinatensystem einzeichnen und diesen dann mit dem Nullpunkt des Koordinatensystems verbinden.

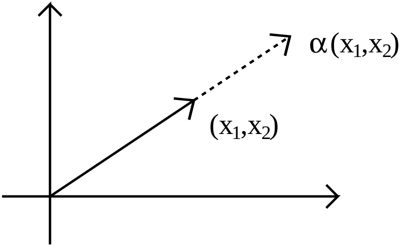
Der am Ende in den Punkt eingezeichnete Pfeil gibt die Orientierung des Vektors an.

Addition



Die Addition zweier Vektoren verläuft wie im Bild. Wir verschieben (y_1, y_2) so, dass sein Fußpunkt auf dem Endpunkt von (x_1, x_2) steht, der Endpunkt des so verschobenen Vektors zeigt dann auf den Endpunkt der Summe.

Skalarmultiplikation



Für $\alpha \geq 0$ ist der Ergebnisvektor die Verlängerung oder Verkürzung um das α-fache. Bei $\alpha < 0$ kehrt sich zusätzlich die Orientierung um.

Kanonische Basis

Setze

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)^T, \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)^T, \quad \ldots$$

Kanonische Basis

Setze

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)^T, \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)^T, \quad \ldots$$

Daher

$$u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Kanonische Basis

Setze

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^T, \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \quad \dots$$

Daher

$$u = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Man bezeichnet $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ auch als *kanonische Basis*.

Kanonische Basis

Setze

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)^T, \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)^T, \quad \ldots$$

Daher

$$u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Man bezeichnet $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ auch als *kanonische Basis*.

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel (i)

Polynome in einer Variablen $x \in \mathbb{R}$ sind von der Form

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Beispiel (i)

Polynome in einer Variablen $x \in \mathbb{R}$ sind von der Form

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Da wir hier beliebige $x \in \mathbb{R}$ einsetzen können, definiert jedes Polynom eine Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Beispiel (i)

Polynome in einer Variablen $x \in \mathbb{R}$ sind von der Form

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Da wir hier beliebige $x \in \mathbb{R}$ einsetzen können, definiert jedes Polynom eine Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Für $p(x) = \sum_i a_i x^i$, $p'(x) = \sum_i a'_i x^i$ sowie $\alpha \in \mathbb{R}$ setze

$$p(x) + p'(x) = \sum_i (a_i + a'_i) x^i, \quad \alpha p(x) = \sum_i \alpha a_i x^i.$$

Beispiel (i)

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Beispiel (i)

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Das Polynom p besitzt den Grad k, wenn

$$a_k \neq 0 \;\text{ und }\; a_i = 0 \text{ für alle } i > k.$$

Beispiel (i)

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Das Polynom p besitzt den Grad k, wenn

$$a_k \neq 0 \;\text{ und }\; a_i = 0 \text{ für alle } i > k.$$

$\mathbb{P}_n$ = Raum der Polynome vom Grad $\leq n$.

Beispiel (i)

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Das Polynom p besitzt den Grad k, wenn

$$a_k \neq 0 \;\text{ und }\; a_i = 0 \text{ für alle } i > k.$$

$\mathbb{P}_n$ = Raum der Polynome vom Grad $\leq n$.

$\mathbb{P}_n$ lässt sich vermöge

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \;\leftrightarrow (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

mit dem $\mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren.

Beispiel (i)

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \;\leftrightarrow (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Dies ist eine bijektive Abbildung zwischen den angegebenen Räumen.

Beispiel (i)

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \ \leftrightarrow (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Dies ist eine bijektive Abbildung zwischen den angegebenen Räumen.

Bezeichnen wir die angegebene Abbildung mit $I : \mathbb{P}_n \to \mathbb{R}^{n+1}$, also $Ip = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, so gilt

$$I(p + p') = Ip + Ip', \quad I(\alpha p) = \alpha I(p) \quad \forall p, p' \in \mathbb{P}_n \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Beispiel (ii)

Hier betrachten wir $(m \times n)$-Schemata der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{K} \text{ für } 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$$

Beispiel (ii)

Hier betrachten wir $(m \times n)$-Schemata der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{K} \text{ für } 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$$

Diese Schemata kommen in Form von Tabellen überall vor.

Beispiel (ii)

Hier betrachten wir $(m \times n)$-Schemata der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{K} \text{ für } 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$$

Diese Schemata kommen in Form von Tabellen überall vor.

Wir bezeichnen ein solches Schema als $(m \times n)$-Matrix, wenn zusätzlich noch Addition und Skalarmultiplikation definiert sind:

Beispiel (ii)

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a2n + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Beispiel (ii)

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a2n+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\alpha A=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass diese Addition nur definiert ist, wenn die beiden Dimensionsgrößen m und n für die beiden Matrizen die selben sind.

Beispiel (ii)

Für eine $(m \times n)$-Matrix schreiben wir kürzer $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n}$ oder manchmal, wenn die Dimensionierung aus dem Zusammenhang klar ist, noch kürzer $A = (a_{ij})$.

Beispiel (ii)

Für eine $(m \times n)$-Matrix schreiben wir kürzer $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n}$ oder manchmal, wenn die Dimensionierung aus dem Zusammenhang klar ist, noch kürzer $A = (a_{ij})$.

Damit gilt für $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ einfach

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \quad \alpha A = (\alpha a_{ij}).$$

Beispiel (ii)

Setze

$$I : \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathbb{K}^{mn}, \quad IA = (a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{2,1}, \ldots, a_{2,n}, \ldots, a_{mn})^T,$$

d.h. wir stellen die Zeilen der Matrix A von oben nach unten als Vektor des $\mathbb{K}^{mn}$ zusammen.

Beispiel (ii)

Setze

$$I : \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathbb{K}^{mn}, \quad IA = (a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{2,1}, \ldots, a_{2,n}, \ldots, a_{mn})^T,$$

d.h. wir stellen die Zeilen der Matrix A von oben nach unten als Vektor des $\mathbb{K}^{mn}$ zusammen.

Diese Abbildung ist bijektiv zwischen den angegebenen Räumen und erhält Addition und Skalarmultiplikation,

$$I(A+B) = IA + IB, \quad I(\alpha A) = \alpha IA.$$

Beispiel (ii)

Setze

$$I : \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathbb{K}^{mn}, \quad IA = (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{2,1}, \dots, a_{2,n}, \dots, a_{mn})^T,$$

d.h. wir stellen die Zeilen der Matrix A von oben nach unten als Vektor des $\mathbb{K}^{mn}$ zusammen.

Diese Abbildung ist bijektiv zwischen den angegebenen Räumen und erhält Addition und Skalarmultiplikation,

$$I(A+B) = IA + IB, \quad I(\alpha A) = \alpha IA.$$

Wir können den Raum der $(m \times n)$-Matrizen daher komplett mit dem $\mathbb{K}^{mn}$ identifizieren.

Beispiel (ii)

Setze

$$I : \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathbb{K}^{mn}, \quad IA = (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{2,1}, \dots, a_{2,n}, \dots, a_{mn})^T,$$

d.h. wir stellen die Zeilen der Matrix A von oben nach unten als Vektor des $\mathbb{K}^{mn}$ zusammen.

Diese Abbildung ist bijektiv zwischen den angegebenen Räumen und erhält Addition und Skalarmultiplikation,

$$I(A+B) = IA + IB, \quad I(\alpha A) = \alpha IA.$$

Wir können den Raum der $(m \times n)$-Matrizen daher komplett mit dem $\mathbb{K}^{mn}$ identifizieren.

Der kanonischen Basis für den $\mathbb{K}^{mn}$ entsprechen die kanonischen Basismatrizen für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

$$A_{ij} = (\delta_{ij}) \quad \text{mit } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}.$$

Beispiel (ii) - Kanonische Basis

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel (ii) - Kanonische Basis

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.2 Allgemeine lineare Vektorräume

Wir betrachten eine Menge V mit einem ausgezeichneten Element $0 \in V$ und einem Körper $\mathbb{K}$.

5.2 Allgemeine lineare Vektorräume

Wir betrachten eine Menge V mit einem ausgezeichneten Element $0 \in V$ und einem Körper $\mathbb{K}$.

Auf $(V, \mathbb{K})$ sollen zwei Operationen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ definiert sein, wobei meist kürzer $\alpha \cdot u = \alpha u$ geschrieben wird.

5.2 Allgemeine lineare Vektorräume

Wir betrachten eine Menge V mit einem ausgezeichneten Element $0 \in V$ und einem Körper $\mathbb{K}$.

Auf $(V, \mathbb{K})$ sollen zwei Operationen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ definiert sein, wobei meist kürzer $\alpha \cdot u = \alpha u$ geschrieben wird.

Die Menge V heißt *linearer Vektorraum über dem Körper* $\mathbb{K}$, wenn man mit V und $\mathbb{K}$ so rechnen kann, wie wir es vom $\mathbb{K}^n$ gewohnt sind. Also:

(A1) V bildet mit der Operation $+$ eine kommutative Gruppe mit dem neutralen Element $0 \in V$.

(A1) V bildet mit der Operation $+$ eine kommutative Gruppe mit dem neutralen Element $0 \in V$.

(A2) Es gelten die beiden distributiven Gesetze für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $u, v \in V$,

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \quad (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u.$$

(A1) V bildet mit der Operation $+$ eine kommutative Gruppe mit dem neutralen Element $0 \in V$.

(A2) Es gelten die beiden distributiven Gesetze für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $u, v \in V$,

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \quad (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u.$$

(A3) Es gilt ein Assoziativgesetz für die Skalarmultiplikation

$$(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ u \in V.$$

(A1) V bildet mit der Operation $+$ eine kommutative Gruppe mit dem neutralen Element $0 \in V$.

(A2) Es gelten die beiden distributiven Gesetze für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $u, v \in V$,

$$\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v, \quad (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u.$$

(A3) Es gilt ein Assoziativgesetz für die Skalarmultiplikation

$$(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ u \in V.$$

(A4) Für die 1 des Körpers $\mathbb{K}$ gilt $1 \cdot u = u$ für alle $u \in V$.

Das wichtigste Beispiel für einen linearen Vektorraum ist der im vorigen Abschnitt eingeführte $\mathbb{K}^n$ mit dem Nullvektor $0 = (0, 0, \ldots, 0)^T$.

Das wichtigste Beispiel für einen linearen Vektorraum ist der im vorigen Abschnitt eingeführte $\mathbb{K}^n$ mit dem Nullvektor $0 = (0, 0, \ldots, 0)^T$.

Aus den Axiomenen lassen sich leicht die Rechenregeln

$$0 \cdot u = 0, \quad \alpha \cdot 0 = 0$$

ableiten.

Das wichtigste Beispiel für einen linearen Vektorraum ist der im vorigen Abschnitt eingeführte $\mathbb{K}^n$ mit dem Nullvektor $0 = (0, 0, \ldots, 0)^T$.

Aus den Axiomenen lassen sich leicht die Rechenregeln

$$0 \cdot u = 0, \quad \alpha \cdot 0 = 0$$

ableiten.

Vorsicht: Wir unterscheiden nicht zwischen $0 \in \mathbb{K}$ und $0 \in V$.

Das wichtigste Beispiel für einen linearen Vektorraum ist der im vorigen Abschnitt eingeführte $\mathbb{K}^n$ mit dem Nullvektor $0 = (0, 0, \dots, 0)^T$.

Aus den Axiomenen lassen sich leicht die Rechenregeln

$$0 \cdot u = 0, \quad \alpha \cdot 0 = 0$$

ableiten.

Vorsicht: Wir unterscheiden nicht zwischen $0 \in \mathbb{K}$ und $0 \in V$.

Die erste Gleichheit folgt aus

$$0 \cdot u = (0 + 0) \cdot u = 0 \cdot u + 0 \cdot u,$$

und, da (V,0,+) eine Gruppe ist, $0 \cdot u = 0$.

Das wichtigste Beispiel für einen linearen Vektorraum ist der im vorigen Abschnitt eingeführte $\mathbb{K}^n$ mit dem Nullvektor $0 = (0, 0, \ldots, 0)^T$.

Aus den Axiomenen lassen sich leicht die Rechenregeln

$$0 \cdot u = 0, \quad \alpha \cdot 0 = 0$$

ableiten.

Vorsicht: Wir unterscheiden nicht zwischen $0 \in \mathbb{K}$ und $0 \in V$.

Die erste Gleichheit folgt aus

$$0 \cdot u = (0 + 0) \cdot u = 0 \cdot u + 0 \cdot u,$$

und, da (V,0,+) eine Gruppe ist, $0 \cdot u = 0$.

Die zweite Gleichung folgt genauso mit Hilfe des anderen Distributivgesetzes:

$$\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0 + 0) = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0.$$

Es gilt

$$(-1) \cdot u = -u, \quad \alpha u = 0 \;\Rightarrow \alpha = 0 \text{ oder } u = 0.$$

Es gilt

$$(-1) \cdot u = -u, \quad \alpha u = 0 \ \Rightarrow \alpha = 0 \text{ oder } u = 0.$$

Das linke Gesetz folgt leicht mit

$$(-1) \cdot u + u = (-1 + 1) \cdot u = 0 \cdot u = u,$$

also ist u invers zu $(-1) \cdot u$.

Es gilt

$$(-1) \cdot u = -u, \quad \alpha u = 0 \ \Rightarrow \alpha = 0 \text{ oder } u = 0.$$

Das linke Gesetz folgt leicht mit

$$(-1) \cdot u + u = (-1 + 1) \cdot u = 0 \cdot u = u,$$

also ist u invers zu $(-1) \cdot u$.

Das zweite Gesetz beweist man so: Ist $\alpha = 0$, so ist in der Tat $\alpha \cdot u = 0$.

Es gilt

$$(-1) \cdot u = -u, \quad \alpha u = 0 \ \Rightarrow \alpha = 0 \text{ oder } u = 0.$$

Das linke Gesetz folgt leicht mit

$$(-1) \cdot u + u = (-1 + 1) \cdot u = 0 \cdot u = u,$$

also ist u invers zu $(-1) \cdot u$.

Das zweite Gesetz beweist man so: Ist $\alpha = 0$, so ist in der Tat $\alpha \cdot u = 0$.

Ist $\alpha \neq 0$, so können wir beide Seiten mit α^{-1} multiplizieren und aus $\alpha^{-1}(\alpha u) = 0$ folgt mit dem Assoziativgesetz $u = 0$.

Unterraum

Wir nennen eine Teilmenge U eines linearen Vektorraums *Unterraum* von V, wenn U selber ein linearer Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist.

Unterraum

Wir nennen eine Teilmenge U eines linearen Vektorraums *Unterraum* von V, wenn U selber ein linearer Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist.

Satz Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $U \subset V$ eine Teilmenge von V.

Wir nennen eine Teilmenge U eines linearen Vektorraums *Unterraum* von V, wenn U selber ein linearer Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist.

Satz Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $U \subset V$ eine Teilmenge von V.

Dann ist U genau dann ein Unterraum von V, wenn er *abgeschlossen* bezüglich den beiden Operationen Addition und Skalarmultiplikation ist,

$$u + u' \in U \text{ und } \alpha u \in U \quad \text{für alle } u, u' \in U \text{ und für alle } \alpha \in \mathbb{K}.$$

Wir nennen eine Teilmenge U eines linearen Vektorraums *Unterraum* von V, wenn U selber ein linearer Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist.

Satz Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $U \subset V$ eine Teilmenge von V.

Dann ist U genau dann ein Unterraum von V, wenn er *abgeschlossen* bezüglich den beiden Operationen Addition und Skalarmultiplikation ist,

$$u + u' \in U \text{ und } \alpha u \in U \quad \text{für alle } u, u' \in U \text{ und für alle } \alpha \in \mathbb{K}.$$

Wir sagen daher auch, dass U die Axiome (A1)-(A4) von V „erbt".

Beweis

Viel ist hier nicht zu zeigen. Wegen $0u = 0$ ist auch $0 \in U$ und wegen $-u = (-1)u \in U$ ist auch das inverse Element bezüglich der Addition in U.

Beweis

Viel ist hier nicht zu zeigen. Wegen $0u = 0$ ist auch $0 \in U$ und wegen $-u = (-1)u \in U$ ist auch das inverse Element bezüglich der Addition in U.

Die weiteren Axiome gelten in U, weil sie bereits in V gelten.

Beispiel (i)

Die Menge der Abbildungen von $\mathbb{K}$ nach $\mathbb{K}$ bilden einen linearen Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Beispiel (i)

Die Menge der Abbildungen von $\mathbb{K}$ nach $\mathbb{K}$ bilden einen linearen Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Der Nullvektor ist die Nullabbildung $x \mapsto 0$ und das inverse Element zu f ist $-f$.

Beispiel (i)

Die Menge der Abbildungen von $\mathbb{K}$ nach $\mathbb{K}$ bilden einen linearen Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Der Nullvektor ist die Nullabbildung $x \mapsto 0$ und das inverse Element zu f ist $-f$.

Die Axiome folgen aus den Rechenregeln für $\mathbb{K}$. Jeder Polynomraum $\mathbb{P}_n$ ist demnach ein Unterraum dieses Raumes.

Beispiel (ii)

Triviale Unterräume sind

$$U = \{0\} \quad \text{und} \quad U = V.$$

Beispiel (ii)

Triviale Unterräume sind

$$U = \{0\} \quad \text{und} \quad U = V.$$

Im $\mathbb{R}^2$ gibt es als Unterräume nur noch die Geraden, die durch den Nullpunkt laufen.

Beispiel (ii)

Triviale Unterräume sind

$$U = \{0\} \quad \text{und} \quad U = V.$$

Im $\mathbb{R}^2$ gibt es als Unterräume nur noch die Geraden, die durch den Nullpunkt laufen.

Sie werden von einem Vektor $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ erzeugt durch

$$U_u = \{\alpha u : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Beispiel (ii)

Triviale Unterräume sind

$$U = \{0\} \quad \text{und} \quad U = V.$$

Im $\mathbb{R}^2$ gibt es als Unterräume nur noch die Geraden, die durch den Nullpunkt laufen.

Sie werden von einem Vektor $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ erzeugt durch

$$U_u = \{\alpha u : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Dieses Beispiel zeigt auch, dass im Allgemeinen $U_1 \cup U_2$ keine Unterraumstruktur besitzt. Liegen $u_1 \neq 0$ und $u_2 \neq 0$ nicht auf einer Geraden, so ist $u_1 + u_2 \notin U_1 \cup U_2$.

Sind Schnitte von Unterräumen Unterräume?

Sind Schnitte von Unterräumen Unterräume?

Beliebige Schnitte von Unterräumen sind wiederum Unterräume.

Sind Schnitte von Unterräumen Unterräume?

Beliebige Schnitte von Unterräumen sind wiederum Unterräume.

Für Mengen U, V setze

$$U + V = \{w = u + v : u \in U,\ v \in V\}.$$

Sind Schnitte von Unterräumen Unterräume?

Beliebige Schnitte von Unterräumen sind wiederum Unterräume.

Für Mengen U, V setze

$$U + V = \{w = u + v : u \in U,\ v \in V\}.$$

Wenn U, V Unterräume sind, ist dann auch $U + V$ Unterraum?

Schnitte und Summen von Unterräumen

Sind Schnitte von Unterräumen Unterräume?

Beliebige Schnitte von Unterräumen sind wiederum Unterräume.

Für Mengen U, V setze

$$U + V = \{w = u + v : u \in U,\ v \in V\}.$$

Wenn U, V Unterräume sind, ist dann auch $U + V$ Unterraum?

Ja. Wenn $w = u + v$, $w' = u' + v'$ so

$$w + w' = (u + u') + (v + v') \in U + V.$$

αw genauso.

5.3 Linearkombinationen und erzeugende Systeme

Sei ab nun V ein linearer Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$.

5.3 Linearkombinationen und erzeugende Systeme

Sei ab nun V ein linearer Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$.

Für Vektoren $u_1, \ldots, u_k$ und Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ heißt

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$$

eine *Linearkombination* der Vektoren $u_1, \ldots, u_k$.

5.3 Linearkombinationen und erzeugende Systeme

Sei ab nun V ein linearer Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$.

Für Vektoren $u_1, \ldots, u_k$ und Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ heißt

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$$

eine *Linearkombination* der Vektoren $u_1, \ldots, u_k$.

Wir können den Vektoren $u_1, \ldots, u_k$ die Menge der mit ihnen erzeugten Linearkombinationen zuordnen

$$U = \left\{ u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i : \alpha_i \in \mathbb{K} \text{ für } 1 \leq i \leq k \right\}$$

Die Linearkombinationen bilden einen Unterraum

$$U = \left\{ u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i : \alpha_i \in \mathbb{K} \text{ für } 1 \leq i \leq k \right\}$$

U ist Unterraum, denn

$$u = \sum_i \alpha_i u_i \text{ und } u' = \sum_i \alpha'_i u_i \;\Rightarrow\; u + u' = \sum_i (\alpha_i + \alpha'_i) u_i \in U$$

und auch $\alpha u = \sum_i \alpha \alpha_i u_i \in U$.

Die Linearkombinationen bilden einen Unterraum

$$U = \left\{ u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i : \alpha_i \in \mathbb{K} \text{ für } 1 \leq i \leq k \right\}$$

U ist Unterraum, denn

$$u = \sum_i \alpha_i u_i \text{ und } u' = \sum_i \alpha'_i u_i \;\Rightarrow\; u + u' = \sum_i (\alpha_i + \alpha'_i) u_i \in U$$

und auch $\alpha u = \sum_i \alpha \alpha_i u_i \in U$.

U heißt der von $u_1, \ldots, u_k$ *aufgespannte Unterraum*.

Die Linearkombinationen bilden einen Unterraum

$$U = \left\{ u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i : \alpha_i \in \mathbb{K} \text{ für } 1 \le i \le k \right\}$$

U ist Unterraum, denn

$$u = \sum_i \alpha_i u_i \text{ und } u' = \sum_i \alpha_i' u_i \ \Rightarrow \ u + u' = \sum_i (\alpha_i + \alpha_i') u_i \in U$$

und auch $\alpha u = \sum_i \alpha \alpha_i u_i \in U$.

U heißt der von $u_1, \ldots, u_k$ *aufgespannte Unterraum*.

Schreibe dafür

$$U = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_k\}.$$

Erzeugendes System

$$U = \left\{ u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i : \alpha_i \in \mathbb{K} \text{ für } 1 \leq i \leq k \right\}$$

Ist $U = V$ so heißt $\{u_i\}_{i=1,\dots,k}$ *erzeugendes System* von V.

Erzeugendes System

$$U = \left\{ u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i : \alpha_i \in \mathbb{K} \text{ für } 1 \leq i \leq k \right\}$$

Ist $U = V$ so heißt $\{u_i\}_{i=1,\dots,k}$ *erzeugendes System* von V.

Beispiel:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

sind erzeugende Systeme des $\mathbb{K}^2$.

5.4 Basis und Dimension

Für eine Folge von Vektoren $u_1, u_2, \ldots$ können wir die Folge von aufgespannten Unterräumen betrachten

$$U_k = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_k\}.$$

5.4 Basis und Dimension

Für eine Folge von Vektoren $u_1, u_2, \ldots$ können wir die Folge von aufgespannten Unterräumen betrachten

$$U_k = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_k\}.$$

Klar ist U_k eine aufsteigende Folge von Unterräumen, aber wann wird U_{k+1} echt größer als U_k?

$$U_k = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_k\}.$$

Wenn beispielsweise u_{k+1} bereits in U_k enthalten ist,

$$u_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i u_i,$$

so kommt in den Linearkombinationem mit u_{k+1} gegenüber U_k nichts Neues hinzu.

$$U_k = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_k\}.$$

Wenn beispielweise u_{k+1} bereits in U_k enthalten ist,

$$u_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i u_i,$$

so kommt in den Linearkombinationem mit u_{k+1} gegenüber U_k nichts Neues hinzu.

Denn

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \alpha_k \beta_i) u_i,$$

also gilt in diesem Fall $U_{k+1} = U_k$.

Lineare Unabhängigkeit

Wir sagen, die Menge von Vektoren $u_1, \dots, u_k$ ist *linear unabhängig* (kurz: l.u.), wenn

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

Lineare Unabhängigkeit

Wir sagen, die Menge von Vektoren $u_1, \ldots, u_k$ ist *linear unabhängig* (kurz: l.u.), wenn

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

In diesem Fall kann keiner der Vektoren u_i als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden.

Lineare Unabhängigkeit

Wir sagen, die Menge von Vektoren $u_1, \ldots, u_k$ ist *linear unabhängig* (kurz: l.u.), wenn

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

In diesem Fall kann keiner der Vektoren u_i als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden.

In diesem Fall hätten wir ja

$$u_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i u_i \;\Rightarrow\; \sum_{i \neq j} \alpha_i u_i - u_j = 0.$$

Lineare Unabhängigkeit

Wir sagen, die Menge von Vektoren $u_1, \ldots, u_k$ ist *linear unabhängig* (kurz: l.u.), wenn

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

In diesem Fall kann keiner der Vektoren u_i als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden.

In diesem Fall hätten wir ja

$$u_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i u_i \;\Rightarrow\; \sum_{i \neq j} \alpha_i u_i - u_j = 0.$$

Die Vektoren wären nicht linear unabhängig.

Lemma Die Vektoren $u_1, \ldots, u_k$ sind genau dann linear unabhängig, wenn jedes

$$u \in U = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_k\}$$

sich *eindeutig* als Linearkombination der u_i darstellen lässt.

Beweis

Angenommen, es gäbe zwei Darstellungen von u,

$$u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha'_i u_i.$$

Beweis

Angenommen, es gäbe zwei Darstellungen von u,

$$u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha'_i u_i.$$

Dann folgt

$$0 = \sum_i (\alpha_i - \alpha'_i) u_i.$$

Beweis

Angenommen, es gäbe zwei Darstellungen von u,

$$u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha'_i u_i.$$

Dann folgt

$$0 = \sum_i (\alpha_i - \alpha'_i) u_i.$$

Die Eigenschaft $\alpha_i = \alpha'_i$ für alle i ist daher äquivalent zur linearen Unabhängigkeit der Vektoren u_i.

Lineare Abhängigkeit

Sind die Vektoren $u_1, \ldots, u_k$ nicht l.u., so heißen sie *linear abhängig* (kurz: l.a.).

Lineare Abhängigkeit

Sind die Vektoren $u_1, \dots, u_k$ nicht l.u., so heißen sie *linear abhängig* (kurz: l.a.).

In diesem Fall gibt es eine nichttriviale Linearkombination zur 0, also $\sum_i \alpha_i u_i = 0$ mit mindestens einem $\alpha_{i_0} \neq 0$.

Lineare Abhängigkeit

Sind die Vektoren $u_1, \ldots, u_k$ nicht l.u., so heißen sie *linear abhängig* (kurz: l.a.).

In diesem Fall gibt es eine nichttriviale Linearkombination zur 0, also $\sum_i \alpha_i u_i = 0$ mit mindestens einem $\alpha_{i_0} \neq 0$.

Dann können wir nach

$$u_{i_0} = -\sum_{i \neq i_0} \frac{\alpha_i}{\alpha_{i_0}} u_i$$

auflösen.

Sind die Vektoren $u_1, \ldots, u_k$ nicht l.u., so heißen sie *linear abhängig* (kurz: l.a.).

In diesem Fall gibt es eine nichttriviale Linearkombination zur 0, also $\sum_i \alpha_i u_i = 0$ mit mindestens einem $\alpha_{i_0} \neq 0$.

Dann können wir nach

$$u_{i_0} = -\sum_{i \neq i_0} \frac{\alpha_i}{\alpha_{i_0}} u_i$$

auflösen.

Kurz: Die Vektoren $u_1, \ldots, u_k$ sind genau dann l.a., wenn man zum Aufspannen des Unterraums $U_k = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_k\}$ nicht alle Vektoren $u_1, \ldots, u_k$ benötigt.

Linear unabhängige Mengen

Eine nichtleere Menge $M \subset V$ heißt linear unabhängig, wenn alle endlichen Teilmengen von M linear unabhängig sind.

Linear unabhängige Mengen

Eine nichtleere Menge $M \subset V$ heißt linear unabhängig, wenn alle endlichen Teilmengen von M linear unabhängig sind.

Andernfalls heißt M linear abhängig.

Linear unabhängige Mengen

Eine nichtleere Menge $M \subset V$ heißt linear unabhängig, wenn alle endlichen Teilmengen von M linear unabhängig sind.

Andernfalls heißt M linear abhängig.

Da die leere Menge keine endlichen Teilmengen enthält, ist sie l.u.

Beispiel (i)

Sei $V = \mathbb{K}^n$ und seien e_i, $i = 1, \ldots, n$, die kanonischen Basisvektoren.

Beispiel (i)

Sei $V = \mathbb{K}^n$ und seien e_i, $i = 1, \ldots, n$, die kanonischen Basisvektoren.

Wegen

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind die Vektoren $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ l.u.:

Beispiel (i)

Sei $V = \mathbb{K}^n$ und seien e_i, $i = 1, \ldots, n$, die kanonischen Basisvektoren.

Wegen

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind die Vektoren $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ l.u.:

Jeder Vektor e_i ist sozusagen für die i-te Komponente zuständig.

Beispiel (ii)

Enthält eine Menge den Nullvektor, ist sie linear abhängig, denn der Nullvektor ist bereits selber l.a.

Beispiel (iii)

Sind $u_1, \ldots, u_k$ l.u. und sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ beliebige Skalare, so sind auch die Vektoren

$$u_1 - \lambda_1 u_k, \ldots, u_{k-1} - \lambda_{k-1} u_k, u_k$$

l.u.,

Beispiel (iii)

Sind $u_1, \dots, u_k$ l.u. und sind $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ beliebige Skalare, so sind auch die Vektoren

$$u_1 - \lambda_1 u_k, \dots, u_{k-1} - \lambda_{k-1} u_k, u_k$$

l.u.,

denn wenn

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (u_i - \lambda_i u_k) + \alpha_k u_k = 0,$$

so folgt

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i u_i + \big(\alpha_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \lambda_i\big) u_k = 0.$$

Beispiel (iii)

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i u_i + \left(\alpha_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \lambda_i\right) u_k = 0.$$

Beispiel (iii)

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i u_i + \left(\alpha_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \lambda_i\right) u_k = 0.$$

Wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit folgt zunächst

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} = 0$$

und dann schließlich $\alpha_k = 0$.

Aufgabe

Eine Menge $v_1, \ldots, v_n$ sei l.u. in einem Vektorraum V. Für $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ sei

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

Aufgabe

Eine Menge $v_1, \ldots, v_n$ sei l.u. in einem Vektorraum V. Für $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ sei

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

Man formuliere eine notwendige und hinreichende Bedingung an die α_i, so dass auch die Vektoren

$$x_i = v_i - w, \quad i = 1, \ldots, n$$

l.u. sind.

Aufgabe

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \qquad x_i = v_i - w, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Aufgabe

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \qquad x_i = v_i - w, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Aus $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ folgt

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Big(v_i - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \alpha_k v_k$$

Aufgabe

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \qquad x_i = v_i - w, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Aus $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ folgt

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Big(v_i - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \alpha_k v_k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\lambda_i - \alpha_i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Big) v_i.$$

Aufgabe

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \qquad x_i = v_i - w, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Aus $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ folgt

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Big(v_i - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \alpha_k v_k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\lambda_i - \alpha_i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Big) v_i.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der v_i folgt

$$\lambda_i - \alpha_i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Aufgabe

$$\lambda_i - \alpha_i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Aufgabe

$$\lambda_i - \alpha_i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Wir summieren bezüglich i,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$$

und erhalten

$$\sum_i \lambda_i = 0 \ \text{ wenn } \ \sum_i \alpha_i \neq 1.$$

Aufgabe

$$\lambda_i - \alpha_i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Wir summieren bezüglich i,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$$

und erhalten

$$\sum_{i} \lambda_i = 0 \ \text{ wenn } \ \sum_{i} \alpha_i \neq 1.$$

Es folgt $\lambda_i = 0$ für alle i.

Aufgabe

$$\lambda_i - \alpha_i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Wir summieren bezüglich i,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$$

und erhalten

$$\sum_i \lambda_i = 0 \ \text{ wenn } \ \sum_i \alpha_i \neq 1.$$

Es folgt $\lambda_i = 0$ für alle i.

$$\sum_i \alpha_i = 1 \ \Rightarrow \ \lambda_i = \alpha_i \ \text{ ist Lösung.}$$

Endlich erzeugte Vektorräume

Wir sagen, der lineare Vektorraum V wird *endlich erzeugt*, wenn eine endliche Menge von Vektoren den Raum V aufspannen.

Lemma V werde von den n Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ erzeugt. Dann ist jede $n+1$-elementige Menge $M \subset V$ l.a..

Beweis

Angenommen, die Menge $M = \{w_1, \ldots, w_{n+1}\}$ ist l.u..

Beweis

Angenommen, die Menge $M = \{w_1, \ldots, w_{n+1}\}$ ist l.u..

Wir tauschen sukzessive ein Element von M gegen ein Element von $N = \{v_1, \ldots, v_n\}$ aus.

Beweis

Angenommen, die Menge $M = \{w_1, \ldots, w_{n+1}\}$ ist l.u..

Wir tauschen sukzessive ein Element von M gegen ein Element von $N = \{v_1, \ldots, v_n\}$ aus.

Da die Elemente von N den Raum V erzeugen, gibt es $\alpha_i \in \mathbb{K}$ mit

$$w_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

Beweis

Angenommen, die Menge $M = \{w_1, \dots, w_{n+1}\}$ ist l.u..

Wir tauschen sukzessive ein Element von M gegen ein Element von $N = \{v_1, \dots, v_n\}$ aus.

Da die Elemente von N den Raum V erzeugen, gibt es $\alpha_i \in \mathbb{K}$ mit

$$w_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

Da w_1 nicht der Nullvektor ist, gibt es ein $\alpha_{i_0} \neq 0$, sagen wir $i_0 = 1$. Damit

$$v_1 = \frac{1}{\alpha_1}\Big(w_1 - \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i\Big).$$

Beweis

Angenommen, die Menge $M = \{w_1, \ldots, w_{n+1}\}$ ist l.u..

Wir tauschen sukzessive ein Element von M gegen ein Element von $N = \{v_1, \ldots, v_n\}$ aus.

Da die Elemente von N den Raum V erzeugen, gibt es $\alpha_i \in \mathbb{K}$ mit

$$w_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

Da w_1 nicht der Nullvektor ist, gibt es ein $\alpha_{i_0} \neq 0$, sagen wir $i_0 = 1$. Damit

$$v_1 = \frac{1}{\alpha_1}\Big(w_1 - \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i\Big).$$

Wir tauschen in N v_1 gegen w_1 aus und erhalten die modifizierte Menge

$$N' = \{w_1, v_2, \ldots v_n\}.$$

Beweis

$$v_1 = \frac{1}{\alpha_1}\Big(w_1 - \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i\Big).$$

$$N' = \{w_1, v_2, \ldots v_n\}.$$

Beweis

$$v_1 = \frac{1}{\alpha_1}\Big(w_1 - \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i\Big).$$

$$N' = \{w_1, v_2, \dots v_n\}.$$

N' ist nach wie vor erzeugend, denn in jeder Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$ können wir v_1 nach obiger Gleichung durch w_1 und die übrigen v_i ausdrücken.

Beweis

$$v_1 = \frac{1}{\alpha_1}\Big(w_1 - \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i\Big).$$

$$N' = \{w_1, v_2, \dots v_n\}.$$

N' ist nach wie vor erzeugend, denn in jeder Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$ können wir v_1 nach obiger Gleichung durch w_1 und die übrigen v_i ausdrücken.

Auf diese Weise fahren wir fort und tauschen nach und nach die anderen Elemente von N aus. Dieser Austauschprozess kommt zum Erliegen, wenn in

$$w_{k+1} = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i w_i + \sum_{i=k}^{n} \alpha_i v_i$$

die α_i mit $i \geq k$ alle verschwinden.

Beweis

$$v_1 = \frac{1}{\alpha_1}\Big(w_1 - \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i\Big).$$

$$N' = \{w_1, v_2, \dots v_n\}.$$

N' ist nach wie vor erzeugend, denn in jeder Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$ können wir v_1 nach obiger Gleichung durch w_1 und die übrigen v_i ausdrücken.

Auf diese Weise fahren wir fort und tauschen nach und nach die anderen Elemente von N aus. Dieser Austauschprozess kommt zum Erliegen, wenn in

$$w_{k+1} = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i w_i + \sum_{i=k}^{n} \alpha_i v_i$$

die α_i mit $i \geq k$ alle verschwinden.

In diesem Fall ist w_{k+1} eine Linearkombination der w_i und die Ausgangsmenge M l.a..

Beweis

Geht der Austauschprozess bis zum Ende durch, so ist N vollständig ersetzt durch

$$\{w_1, \ldots, w_n\}.$$

Beweis

Geht der Austauschprozess bis zum Ende durch, so ist N vollständig ersetzt durch

$$\{w_1, \dots, w_n\}.$$

w_{n+1} lässt sich als Linearkombination der w_i für $i \leq n$ darstellen. Auch in diesem Fall sind die Vektoren in M l.a..

Basis eines linearen Vektorraums

Nun kommt der wichtigste Begriff der linearen Algebra:

Ein linear unabhängiges erzeugendes System von V heißt *Basis* von V.

Nun kommt der wichtigste Begriff der linearen Algebra:

Ein linear unabhängiges erzeugendes System von V heißt *Basis* von V.

Aus dem letzten Lemma folgt: Besitzt ein Vektorraum eine Basis mit endlich vielen Elementen, so haben alle Basen dieses Raumes dieselbe endliche Zahl von Elementen.

Basis eines linearen Vektorraums

Nun kommt der wichtigste Begriff der linearen Algebra:

Ein linear unabhängiges erzeugendes System von V heißt *Basis* von V.

Aus dem letzten Lemma folgt: Besitzt ein Vektorraum eine Basis mit endlich vielen Elementen, so haben alle Basen dieses Raumes dieselbe endliche Zahl von Elementen.

Mit $|M|$ bezeichnen wir die Kardinalität der Menge M.

Basis eines linearen Vektorraums

Nun kommt der wichtigste Begriff der linearen Algebra:

Ein linear unabhängiges erzeugendes System von V heißt *Basis* von V.

Aus dem letzten Lemma folgt: Besitzt ein Vektorraum eine Basis mit endlich vielen Elementen, so haben alle Basen dieses Raumes dieselbe endliche Zahl von Elementen.

Mit $|M|$ bezeichnen wir die Kardinalität der Menge M.

Haben wir zwei endliche Basen B, B' von V, so folgt aus dem letzten Lemma

$$|B| \leq |B'| \text{ und } |B'| \leq |B|.$$

V besitzt eine Basis

Satz Jeder endlich erzeugte Vektorraum besitzt eine Basis.

Beweis

Sei $\{u_1, \ldots, u_k\}$ ein erzeugendes System des Vektorraums V. Sind die u_i l.u., so sind wir fertig.

Beweis

Sei $\{u_1, \ldots, u_k\}$ ein erzeugendes System des Vektorraums V. Sind die u_i l.u., so sind wir fertig.

Andernfalls gilt für einen Index i_0

$$u_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \alpha_i u_i .$$

Beweis

Sei $\{u_1, \ldots, u_k\}$ ein erzeugendes System des Vektorraums V. Sind die u_i l.u., so sind wir fertig.

Andernfalls gilt für einen Index i_0

$$u_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \alpha_i u_i.$$

Wir können das u_{i_0} aus der Menge $\{u_1, \ldots, u_k\}$ entfernen, die Menge bleibt erzeugend.

Beweis

Sei $\{u_1, \ldots, u_k\}$ ein erzeugendes System des Vektorraums V. Sind die u_i l.u., so sind wir fertig.

Andernfalls gilt für einen Index i_0

$$u_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \alpha_i u_i.$$

Wir können das u_{i_0} aus der Menge $\{u_1, \ldots, u_k\}$ entfernen, die Menge bleibt erzeugend.

Denn in jeder Linearkombination der u_i kann mit der letzten Gleichung das u_{i_0} eliminiert werden.

Beweis

Sei $\{u_1, \ldots, u_k\}$ ein erzeugendes System des Vektorraums V. Sind die u_i l.u., so sind wir fertig.

Andernfalls gilt für einen Index i_0

$$u_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \alpha_i u_i .$$

Wir können das u_{i_0} aus der Menge $\{u_1, \ldots, u_k\}$ entfernen, die Menge bleibt erzeugend.

Denn in jeder Linearkombination der u_i kann mit der letzten Gleichung das u_{i_0} eliminiert werden.

Nach endlich vielen Schritten dieser Konstruktion erhalten wir eine Basis von V.

Dimension

Ein endlich erzeugter Vektorraum V heißt *endlich dimensional*.

Dimension

Ein endlich erzeugter Vektorraum V heißt *endlich dimensional*.

Die Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}$ der Basis heißt *Dimension* von V.

Dimension

Ein endlich erzeugter Vektorraum V heißt *endlich dimensional*.

Die Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}$ der Basis heißt *Dimension* von V.

Wir schreiben dann $\dim V = n$ und setzen für den etwas pathologischen Fall $\dim\{0\} = 0$.

Dimension

Ein endlich erzeugter Vektorraum V heißt *endlich dimensional*.

Die Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}$ der Basis heißt *Dimension* von V.

Wir schreiben dann $\dim V = n$ und setzen für den etwas pathologischen Fall $\dim\{0\} = 0$.

Ist V nicht endlich erzeugt, so schreiben wir $\dim V = \infty$.

Beispiel (i) - $\mathbb{K}^n$

Es gilt $\dim \mathbb{K}^n = n$ und die einfachste Basis ist die kanonische Basis $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ wie in

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^T, \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \quad \dots$$

Beispiel (ii) - $\mathbb{C}$

$\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$ ist Vektorraum über $\mathbb{C}$ und es gilt natürlich $\dim \mathbb{C} = 1$.

Beispiel (ii) - $\mathbb{C}$

$\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$ ist Vektorraum über $\mathbb{C}$ und es gilt natürlich $\dim \mathbb{C} = 1$.

Wir können $\mathbb{C}$ aber auch als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen und in diesem Fall gilt $\dim \mathbb{C} = 2$ mit den kanonischen Basisvektoren

$$1 \text{ und } i = \sqrt{-1}.$$

Beispiel (ii) - $\mathbb{C}$

$\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$ ist Vektorraum über $\mathbb{C}$ und es gilt natürlich $\dim \mathbb{C} = 1$.

Wir können $\mathbb{C}$ aber auch als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen und in diesem Fall gilt $\dim \mathbb{C} = 2$ mit den kanonischen Basisvektoren

$$1 \text{ und } i = \sqrt{-1}.$$

Dies entspricht unserer „reellen" Vorstellungswelt, in der die komplexen Zahlen als ebene Vektoren dargestellt werden.

Beispiel (iii) - c_{00}

Auch unendlich dimensionale Vektorräume besitzen eine Basis, allerdings gibt es i.A. kein Verfahren, um eine solche Basis zu konstruieren.

Beispiel (iii) - c_{00}

Auch unendlich dimensionale Vektorräume besitzen eine Basis, allerdings gibt es i.A. kein Verfahren, um eine solche Basis zu konstruieren.

Eine Ausnahme bildet der einfachste unendlich dimensionale Vektorraum c_{00}, der aus den endlichen Folgen besteht.

Beispiel (iii) - c_{00}

Auch unendlich dimensionale Vektorräume besitzen eine Basis, allerdings gibt es i.A. kein Verfahren, um eine solche Basis zu konstruieren.

Eine Ausnahme bildet der einfachste unendlich dimensionale Vektorraum c_{00}, der aus den endlichen Folgen besteht.

Verlängere eine endliche Folge durch Nullen zu einer unendlichen Folge.

Beispiel (iii) - c_{00}

Auch unendlich dimensionale Vektorräume besitzen eine Basis, allerdings gibt es i.A. kein Verfahren, um eine solche Basis zu konstruieren.

Eine Ausnahme bildet der einfachste unendlich dimensionale Vektorraum c_{00}, der aus den endlichen Folgen besteht.

Verlängere eine endliche Folge durch Nullen zu einer unendlichen Folge.

Auf diesen verlängerten Folgen kann wie gewohnt komponentenweise addiert und mit Skalaren multipliziert werden. In beiden Fällen verbleibt der Ergebnisvektor im Raum der endlichen Folgen.

Beispiel (iii) - c_{00}

Auch unendlich dimensionale Vektorräume besitzen eine Basis, allerdings gibt es i.A. kein Verfahren, um eine solche Basis zu konstruieren.

Eine Ausnahme bildet der einfachste unendlich dimensionale Vektorraum c_{00}, der aus den endlichen Folgen besteht.

Verlängere eine endliche Folge durch Nullen zu einer unendlichen Folge.

Auf diesen verlängerten Folgen kann wie gewohnt komponentenweise addiert und mit Skalaren multipliziert werden. In beiden Fällen verbleibt der Ergebnisvektor im Raum der endlichen Folgen.

Die kanonischen Einheitsvektoren $\{e_i\}$ bilden eine Basis dieses Raumes für $i = 1, 2, \ldots$. Damit ist $\dim c_{00} = \infty$ und der Raum ist abzählbar dimensional.

Aufgabe

Sei für eine Primzahl p

$$V = \{f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p\}.$$

Aufgabe

Sei für eine Primzahl p

$$V = \{f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p\}.$$

Wie viele Elemente besitzt V?

Aufgabe

Sei für eine Primzahl p

$$V = \{f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p\}.$$

Wie viele Elemente besitzt V?

V ist Vektorraum über $\mathbb{Z}_p$ mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation,

$$(f +_p g)(x) = f(x) +_p g(x), \quad (\alpha_p f)(x) = \alpha_p f(x).$$

Was ist dim V?

Basisergänzungssatz

Satz Sei $\dim V = n$ und für $s < n$ seien $b_1, \ldots, b_s$ l.u..

Satz Sei $\dim V = n$ und für $s < n$ seien $b_1, \ldots, b_s$ l.u..

Dann gibt es

$$b_{s+1}, \ldots, b_n \in V,$$

so dass

$$b_1, \ldots, b_n$$

eine Basis von V ist.

Basisergänzungssatz

Satz Sei $\dim V = n$ und für $s < n$ seien $b_1, \ldots, b_s$ l.u..

Dann gibt es

$$b_{s+1}, \ldots, b_n \in V,$$

so dass

$$b_1, \ldots, b_n$$

eine Basis von V ist.

Der Satz kann auch verwendet werden, um eine Basis zu konstruieren.

Satz Sei $\dim V = n$ und für $s < n$ seien $b_1, \ldots, b_s$ l.u..

Dann gibt es

$$b_{s+1}, \ldots, b_n \in V,$$

so dass

$$b_1, \ldots, b_n$$

eine Basis von V ist.

Der Satz kann auch verwendet werden, um eine Basis zu konstruieren.

In diesem Fall startet man mit einem beliebigen $b_1 \in V \setminus \{0\}$.

Beweis

Da alle Basen die gleiche Kardinalität besitzen, ist $V_s = \operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_s\}$ echt in V enthalten.

Beweis

Da alle Basen die gleiche Kardinalität besitzen, ist $V_s = \operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_s\}$ echt in V enthalten.

Es gibt daher ein $b_{s+1} \in V \setminus V_s$.

Beweis

Da alle Basen die gleiche Kardinalität besitzen, ist $V_s = \mathrm{span}\{b_1, \dots, b_s\}$ echt in V enthalten.

Es gibt daher ein $b_{s+1} \in V \setminus V_s$.

Wäre in

$$\sum_{i=1}^{s+1} \alpha_i b_i = 0$$

$\alpha_{s+1} \neq 0$, so

$$b_{s+1} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\alpha_i}{\alpha_{s+1}} b_i \in V.$$

Beweis

$$b_{s+1} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\alpha_i}{\alpha_{s+1}} b_i \in V.$$

Beweis

$$b_{s+1} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\alpha_i}{\alpha_{s+1}} b_i \in V.$$

Daher ist $\alpha_{s+1} = 0$ und aus der linearen Unabhängigkeit von $b_1, \ldots, b_s$ folgt $\alpha_i = 0$ für die übrigen i.

Beweis

$$b_{s+1} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\alpha_i}{\alpha_{s+1}} b_i \in V.$$

Daher ist $\alpha_{s+1} = 0$ und aus der linearen Unabhängigkeit von $b_1, \ldots, b_s$ folgt $\alpha_i = 0$ für die übrigen i.

Damit sind auch die Vektoren $b_1, \ldots, b_{s+1}$ l.u. und mit dieser Konstruktion erreicht man schließlich das gewünschte Ziel.

Aufgabe

Seien U, V Unterräume eines endlich dimensionalen Vektorraums W. Man konstruiere eine Basis von

$$U + V = \{z = u + v : u \in U, v \in V\}.$$

Aufgabe

Ist $U \subset V$ oder $V \subset U$, so ist $U + V = V$ oder $U + V = U$ und es ist nichts zu zeigen.

Aufgabe

Ist $U \subset V$ oder $V \subset U$, so ist $U + V = V$ oder $U + V = U$ und es ist nichts zu zeigen.

Eine Basis von U und eine Basis von V erzeugen den Raum $U + V$, aber im Falle $U \cap V \neq \{0\}$ sind diese Vektoren nicht l.u.

Aufgabe

$$w_1, \ldots, w_r = \text{Basis von } U \cap V$$

$$w_1, \ldots, w_r, u_1, \ldots, u_s = \text{Basis von } U$$

$$w_1, \ldots, w_r, v_1, \ldots, v_t = \text{Basis von } V$$

Aufgabe

$w_1, \ldots, w_r$ = Basis von $U \cap V$

$w_1, \ldots, w_r, u_1, \ldots, u_s$ = Basis von U

$w_1, \ldots, w_r, v_1, \ldots, v_t$ = Basis von V

$$w_1, \ldots, w_r, u_1, \ldots, u_s, v_1, \ldots, v_t$$

ist ein erzeugendes System von $U + V$, denn in $w = u + v$ können wir u und v mit diesen Vektoren darstellen.

Aufgabe

$w_1, \dots, w_r$ = Basis von $U \cap V$

$w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_s$ = Basis von U

$w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_t$ = Basis von V

$$w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_t$$

ist ein erzeugendes System von $U + V$, denn in $w = u + v$ können wir u und v mit diesen Vektoren darstellen.

$$U' = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_r\}, \quad V' = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_t\}.$$

Jedes $w \in U + V$ lässt sich eindeutig in der Form

$$w = s + u' + v', \quad s \in U \cap V,\ u' \in U',\ v' \in V',$$

schreiben.