6 Lineare Abbildungen und Matrizen

- Lineare Abbildungen
- Matrizen

6.1 Lineare Abbildungen

Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$.

Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$.

Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt *linear*, wenn sie die beiden linearen Operationen Addition und Skalarmultiplikation erhält, wenn also

$$f(u+v) = f(u)+f(v), \quad f(\alpha u) = \alpha f(u) \quad \text{für alle } u, v \in V, \alpha \in \mathbb{K}.$$

6.1 Lineare Abbildungen

Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$.

Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt *linear*, wenn sie die beiden linearen Operationen Addition und Skalarmultiplikation erhält, wenn also

$$f(u+v) = f(u)+f(v), \quad f(\alpha u) = \alpha f(u) \quad \text{für alle } u, v \in V, \alpha \in \mathbb{K}.$$

Das Grundprinzip der modernen Mathematik besteht darin, zunächst Strukturen und dann strukturerhaltende Abbildungen zu definieren.

6.1 Lineare Abbildungen

Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$.

Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt *linear*, wenn sie die beiden linearen Operationen Addition und Skalarmultiplikation erhält, wenn also

$$f(u+v) = f(u)+f(v), \quad f(\alpha u) = \alpha f(u) \quad \text{für alle } u, v \in V, \alpha \in \mathbb{K}.$$

Das Grundprinzip der modernen Mathematik besteht darin, zunächst Strukturen und dann strukturerhaltende Abbildungen zu definieren.

In diesem Fall ist die Struktur der lineare Vektorraum zusammen mit Addition und Skalarmultiplikation.

Folgerungen aus der Definition der Linearität

Äquivalent zur Linearität von f ist:

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

Folgerungen aus der Definition der Linearität

Äquivalent zur Linearität von f ist:

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

Mehrfache Anwendung der Linearitätsbedingung liefert

$$f\Big(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(v_i).$$

Folgerungen aus der Definition der Linearität

Äquivalent zur Linearität von f ist:

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

Mehrfache Anwendung der Linearitätsbedingung liefert

$$f\Big(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(v_i).$$

Aus $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0f(0)$ folgt $f(0) = 0$.

Kern einer linearen Abbildung

Der *Nullraum* oder *Kern* einer linearen Abbildung ist

$$\operatorname{Kern} f = \{v \in V : f(v) = 0\} \subset V.$$

Der *Nullraum* oder *Kern* einer linearen Abbildung ist

$$\operatorname{Kern} f = \{v \in V : f(v) = 0\} \subset V.$$

Er ist Unterraum von V weil für alle $v, v' \in \operatorname{Kern} f$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$f(v + v') = f(v) + f(v') = 0, \quad f(\alpha v) = \alpha f(v) = 0.$$

Der *Nullraum* oder *Kern* einer linearen Abbildung ist

$$\operatorname{Kern} f = \{v \in V : f(v) = 0\} \subset V.$$

Er ist Unterraum von V weil für alle $v, v' \in \operatorname{Kern} f$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$f(v + v') = f(v) + f(v') = 0, \quad f(\alpha v) = \alpha f(v) = 0.$$

Damit ist das Unterraumkriterium aus einem alten Satz erfüllt.

Injektivitätskriterium

Eine einfache, aber oft verwendete Eigenschaft des Kerns:

Eine lineare Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn

$$\operatorname{Kern} f = \{0\}.$$

Injektivitätskriterium

Eine einfache, aber oft verwendete Eigenschaft des Kerns:

Eine lineare Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn

$$\mathrm{Kern}\, f = \{0\}.$$

Enthält der Kern noch eine weiteres Element, so werden dieses und die Null auf die Null abgebildet.

Injektivitätskriterium

Eine einfache, aber oft verwendete Eigenschaft des Kerns:

Eine lineare Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn

$$\operatorname{Kern} f = \{0\}.$$

Enthält der Kern noch eine weiteres Element, so werden dieses und die Null auf die Null abgebildet.

Enthält der Kern nur die Null, so kann es nicht sein, dass ein w zwei verschiedene Urbilder v, v' besitzt wegen

$$w = f(v) = f(v') \;\Rightarrow\; 0 = f(v - v') \;\Rightarrow\; v = v'.$$

Bild einer linearen Abbildung

Der *Bildraum* oder das *Bild* einer linearen Abbildung ist

$$\mathrm{Bild}\, f = \{w \in W : \exists v \in V \text{ mit } f(v) = w\} \subset W.$$

Bild einer linearen Abbildung

Der *Bildraum* oder das *Bild* einer linearen Abbildung ist

$$\mathrm{Bild}\, f = \{w \in W : \exists v \in V \text{ mit } f(v) = w\} \subset W.$$

Das Bild ist Unterraum von W, denn wenn $w, w' \in \mathrm{Bild}\, f$, so

$$\exists v, v' \in V \text{ mit } f(v) = w \text{ und } f(v') = w'.$$

Bild einer linearen Abbildung

Der *Bildraum* oder das *Bild* einer linearen Abbildung ist

$$\mathrm{Bild}\, f = \{w \in W : \exists v \in V \text{ mit } f(v) = w\} \subset W.$$

Das Bild ist Unterraum von W, denn wenn $w, w' \in \mathrm{Bild}\, f$, so

$$\exists v, v' \in V \text{ mit } f(v) = w \text{ und } f(v') = w'.$$

Damit ist

$$w + w' = f(v) + f(v') = f(v + v')$$

und $w + w'$ ist aus dem Bild von f.

Bild einer linearen Abbildung

Der *Bildraum* oder das *Bild* einer linearen Abbildung ist

$$\mathrm{Bild}\, f = \{w \in W : \exists v \in V \text{ mit } f(v) = w\} \subset W.$$

Das Bild ist Unterraum von W, denn wenn $w, w' \in \mathrm{Bild}\, f$, so

$$\exists v, v' \in V \text{ mit } f(v) = w \text{ und } f(v') = w'.$$

Damit ist

$$w + w' = f(v) + f(v') = f(v + v')$$

und $w + w'$ ist aus dem Bild von f.

Für die Skalarmultiplikation zeigt man das genauso.

Beispiele (i)

Die Abbildung in die Null $v \mapsto 0$ ist immer eine lineare Abbildung zwischen den Räumen V und W.

Beispiele (i)

Die Abbildung in die Null $v \mapsto 0$ ist immer eine lineare Abbildung zwischen den Räumen V und W.

In diesem Fall ist $\operatorname{Kern} f = V$ und $\operatorname{Bild} f = \{0\}$.

Beispiele (ii)

Die Identität $Id : V \to V$ ist linear mit $\mathrm{Kern}\, f = \{0\}$ und $\mathrm{Bild}\, f = V$.

Beispiele (iii)

Die *orthogonalen Transformationen* des $\mathbb{R}^2$ sind

- Drehungen,

Beispiele (iii)

Die *orthogonalen Transformationen* des $\mathbb{R}^2$ sind

- Drehungen,
- Spiegelungen an einer Geraden, die durch den Nullpunkt läuft.

Beispiele (iii)

Die *orthogonalen Transformationen* des $\mathbb{R}^2$ sind

- Drehungen,
- Spiegelungen an einer Geraden, die durch den Nullpunkt läuft.

Diese sind linear. Auf die Konstruktion solcher Abbildungen werden wir später eingehen.

Beispiele (iv)

Dagegen ist die *Translation* um einen Vektor $v_0 \neq 0$, das ist

$$f(v) = v_0 + v,$$

keine lineare Selbstabbildung des $\mathbb{R}^2$.

Beispiele (iv)

Dagegen ist die *Translation* um einen Vektor $v_0 \neq 0$, das ist

$$f(v) = v_0 + v,$$

keine lineare Selbstabbildung des $\mathbb{R}^2$.

Klar wegen

$$f(0) = v_0 \neq 0.$$

Satz (a) Die Komposition linearer Abbildungen ist linear.

Satz (a) Die Komposition linearer Abbildungen ist linear.

(b) Ist $f : V \to W$ linear und bijektiv, so ist auch die Inverse

$$f^{(-1)} : W \to V$$

linear.

Satz (a) Die Komposition linearer Abbildungen ist linear.

(b) Ist $f : V \to W$ linear und bijektiv, so ist auch die Inverse

$$f^{(-1)} : W \to V$$

linear.

(c) Sind $f, g : V \to W$ linear, so sind die punktweise Summe und die Multiplikation mit Skalaren

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

linear.

Beweis a)

Die Komposition linearer Abbildungen ist linear.

Beweis a)

Die Komposition linearer Abbildungen ist linear.

Ist $g : V \to W$ linear sowie $f : W \to X$ linear, so gilt

$$f\big(g(v+v')\big) = f\big(g(v)+g(v')\big) = f\big(g(v)\big) + f\big(g(v')\big).$$

Für die Skalarmultiplikation läuft das genauso.

Beweis b)

Ist $f : V \to W$ linear und bijektiv, so ist auch die Inverse

$$f^{(-1)} : W \to V$$

linear.

Beweis b)

Ist $f : V \to W$ linear und bijektiv, so ist auch die Inverse

$$f^{(-1)} : W \to V$$

linear.

Das folgt aus

$$f(v) = w, \quad f(v') = w', \quad f(v + v') = f(v) + f(v'),$$

wenn man in der letzten Gleichung auf beiden Seiten $f^{(-1)}$ anwendet,

$$v+v' = f^{(-1)}\big(f(v)+f(v')\big) \;\Rightarrow\; f^{(-1)}(w)+f^{(-1)}(w') = f^{(-1)}(w+w').$$

Für die Skalarmultiplikation folgt das ebenso einfach.

Beweis c)

Sind $f, g : V \to W$ linear, so sind die punktweise Summe und die Multiplikation mit Skalaren

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

linear.

Beweis c)

Sind $f, g : V \to W$ linear, so sind die punktweise Summe und die Multiplikation mit Skalaren

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

linear.

Dazu brauchen wir eine sehr einfache Rechnung

$$\begin{aligned}(f+g)(\beta v + \beta' v') &= f(\beta v + \beta' v') + g(\beta v + \beta' v') \\ &= \beta f(v) + \beta' f(v') + \beta g(v) + \beta' g(v') \\ &= \beta (f+g)(v) + \beta' (f+g)(v').\end{aligned}$$

Für αf beweist man das ganz analog.

Isomorphismus

Eine bijektive lineare Abbildung $f : V \to W$ heißt *Isomorphismus*.

Isomorphismus

Eine bijektive lineare Abbildung $f : V \to W$ heißt *Isomorphismus*.

In diesem Fall heißen die beiden Räume V und W *isomorph* und man schreibt $V \cong W$.

Isomorphismus

Eine bijektive lineare Abbildung $f : V \to W$ heißt *Isomorphismus*.

In diesem Fall heißen die beiden Räume V und W *isomorph* und man schreibt $V \cong W$.

Nach dem letzten Satz ist die Inverse eines Isomorphismusses selber linear, insbesondere ist $f^{(-1)} : W \to V$ ein Isomorphismus.

Isomorphismus

Eine bijektive lineare Abbildung $f : V \to W$ heißt *Isomorphismus*.

In diesem Fall heißen die beiden Räume V und W *isomorph* und man schreibt $V \cong W$.

Nach dem letzten Satz ist die Inverse eines Isomorphismusses selber linear, insbesondere ist $f^{(-1)} : W \to V$ ein Isomorphismus.

Nach dem letzten Satz ist die Komposition von Isomorphismen ein Isomorphismus.

Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation

Es gilt

- $Id : V \to V$ linear und damit $V \cong V$.
- Da die Umkehrung eines Isomorphismus ebenfalls ein Isomorphismus ist, gilt $V \cong W$ genau dann, wenn $W \cong V$.
- Aus „Komposition von Isomorphismen ist wieder Isomorphismus“ folgt die Transitivität von $\cong$.

Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation

Es gilt

- $Id : V \to V$ linear und damit $V \cong V$.
- Da die Umkehrung eines Isomorphismus ebenfalls ein Isomorphismus ist, gilt $V \cong W$ genau dann, wenn $W \cong V$.
- Aus „Komposition von Isomorphismen ist wieder Isomorphismus" folgt die Transitivität von $\cong$.

Damit können isomorphe Vektorräume als Vektorräume nicht voneinander unterschieden werden.

Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation

Es gilt

- $Id : V \to V$ linear und damit $V \cong V$.
- Da die Umkehrung eines Isomorphismus ebenfalls ein Isomorphismus ist, gilt $V \cong W$ genau dann, wenn $W \cong V$.
- Aus „Komposition von Isomorphismen ist wieder Isomorphismus" folgt die Transitivität von $\cong$.

Damit können isomorphe Vektorräume als Vektorräume nicht voneinander unterschieden werden.

Sofern eine Aussage nur aus den beiden linearen Operationen aufgebaut ist, gilt sie in V genau dann, wenn sie auch in W gilt.

Satz Alle endlich dimensionalen Vektorräume über $\mathbb{K}$ der Dimension n sind zueinander isomorph. Insbesondere ist jeder n-dimensionale Vektorraum isomorph zu $\mathbb{K}^n$.

Beweis

Wir nehmen eine beliebige Basis von V, sagen wir $v_1, \dots, v_n$, und definieren die *Koordinatenabbbildung*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V \; \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{K}^n.$$

Beweis

Wir nehmen eine beliebige Basis von V, sagen wir $v_1, \ldots, v_n$, und definieren die *Koordinatenabbbildung*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V \ \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T \in \mathbb{K}^n.$$

Die so definierte Abbildung

$$f : V \to \mathbb{K}^n, \quad f(v) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$$

ist linear.

Beweis

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V \ \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T \in \mathbb{K}^n.$$

Beweis

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V \ \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T \in \mathbb{K}^n.$$

Wenn $v = \sum_i \alpha_i v_i$, $v' = \sum_i \alpha_i' v_i$, so folgt

$$\begin{aligned} f(v + v') &= (\alpha_1 + \alpha_1', \ldots, \alpha_n + \alpha_n')^T \\ &= (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T + (\alpha_1', \ldots, \alpha_n')^T = f(v) + f(v'). \end{aligned}$$

Beweis

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V \ \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T \in \mathbb{K}^n.$$

Wenn $v = \sum_i \alpha_i v_i$, $v' = \sum_i \alpha_i' v_i$, so folgt

$$\begin{aligned} f(v + v') &= (\alpha_1 + \alpha_1', \ldots, \alpha_n + \alpha_n')^T \\ &= (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T + (\alpha_1', \ldots, \alpha_n')^T = f(v) + f(v'). \end{aligned}$$

Es gilt $f(v_i) = e_i$ mit den kanonischen Einheitsvektoren e_i des $\mathbb{K}^n$.

Beweis

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V \ \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T \in \mathbb{K}^n.$$

Wenn $v = \sum_i \alpha_i v_i$, $v' = \sum_i \alpha'_i v_i$, so folgt

$$\begin{aligned} f(v + v') &= (\alpha_1 + \alpha'_1, \ldots, \alpha_n + \alpha'_n)^T \\ &= (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T + (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)^T = f(v) + f(v'). \end{aligned}$$

Es gilt $f(v_i) = e_i$ mit den kanonischen Einheitsvektoren e_i des $\mathbb{K}^n$.

Da die e_i eine Basis des $\mathbb{K}^n$ bilden, ist

$$f(v) = f(\sum_i \alpha_i v_i) = \sum_i \alpha_i e_i = 0,$$

genau dann, wenn alle $\alpha_i = 0$. Damit ist f injektiv. f surjektiv ist noch offensichtlicher, weil jeder Punkt $\sum_i \alpha_i e_i$ im Bild von f liegt.

Beweis

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V \ \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{K}^n.$$

Wenn $v = \sum_i \alpha_i v_i$, $v' = \sum_i \alpha'_i v_i$, so folgt

$$\begin{aligned} f(v + v') &= (\alpha_1 + \alpha'_1, \dots, \alpha_n + \alpha'_n)^T \\ &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T + (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)^T = f(v) + f(v'). \end{aligned}$$

Es gilt $f(v_i) = e_i$ mit den kanonischen Einheitsvektoren e_i des $\mathbb{K}^n$.

Da die e_i eine Basis des $\mathbb{K}^n$ bilden, ist

$$f(v) = f(\sum_i \alpha_i v_i) = \sum_i \alpha_i e_i = 0,$$

genau dann, wenn alle $\alpha_i = 0$. Damit ist f injektiv. f surjektiv ist noch offensichtlicher, weil jeder Punkt $\sum_i \alpha_i e_i$ im Bild von f liegt.

Da Isomorphie eine Äquivalenzrelation ist, sind alle $\mathbb{K}$-Vektorräume der Dimension n zueinander isomorph.

Beispiel

Wir können jetzt die Konstruktionen in zwei alten Beispielen mathematisch präziser fassen.

Beispiel

Wir können jetzt die Konstruktionen in zwei alten Beispielen mathematisch präziser fassen.

Wir hatten einem Polynom

$$p(x) = \sum_i \alpha_i x^i \in \mathbb{P}_n$$

den Koeffizientenvektor

$$(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

zugeordnet.

Beispiel

Wir können jetzt die Konstruktionen in zwei alten Beispielen mathematisch präziser fassen.

Wir hatten einem Polynom

$$p(x) = \sum_i \alpha_i x^i \in \mathbb{P}_n$$

den Koeffizientenvektor

$$(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

zugeordnet.

Dies definiert eine lineare Abbildung $I : \mathbb{P}_n \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Beispiel

Wir können jetzt die Konstruktionen in zwei alten Beispielen mathematisch präziser fassen.

Wir hatten einem Polynom

$$p(x) = \sum_i \alpha_i x^i \in \mathbb{P}_n$$

den Koeffizientenvektor

$$(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

zugeordnet.

Dies definiert eine lineare Abbildung $I : \mathbb{P}_n \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Die Linearität hatten wir nachgewiesen, bijektiv ist I offenbar auch. Damit ist I ein Isomorphismus zwischen den angegebenen Räumen.

Beispiel (ii)

Genauso hatten wir in dem alten Beispiel den Matrizenraum $\mathbb{K}^{m\times n}$ linear und bijektiv auf den Raum $\mathbb{K}^{mn}$ abgebildet. Auch diese Räume sind daher isomorph.

Der Raum $\mathcal{L}(V, W)$

Mit $\mathcal{L}(V, W)$ bezeichnen wir die Menge der linearen Abbildungen zwischen den Vektorräumen V und W.

Der Raum $\mathcal{L}(V, W)$

Mit $\mathcal{L}(V, W)$ bezeichnen wir die Menge der linearen Abbildungen zwischen den Vektorräumen V und W.

Auf $\mathcal{L}(V, W)$ können wir die Abbildungen punktweise addieren und mit Skalaren multiplizieren, also

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(v)$$

bilden.

Der Raum $\mathcal{L}(V, W)$

Mit $\mathcal{L}(V, W)$ bezeichnen wir die Menge der linearen Abbildungen zwischen den Vektorräumen V und W.

Auf $\mathcal{L}(V, W)$ können wir die Abbildungen punktweise addieren und mit Skalaren multiplizieren, also

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(v)$$

bilden.

Nach obigem Satz ist das Ergebnis dieser Operationen wieder in $\mathcal{L}(V, W)$.

Der Raum $\mathcal{L}(V, W)$

Mit $\mathcal{L}(V, W)$ bezeichnen wir die Menge der linearen Abbildungen zwischen den Vektorräumen V und W.

Auf $\mathcal{L}(V, W)$ können wir die Abbildungen punktweise addieren und mit Skalaren multiplizieren, also

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(v)$$

bilden.

Nach obigem Satz ist das Ergebnis dieser Operationen wieder in $\mathcal{L}(V, W)$.

$\mathcal{L}(V, W)$ ist $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Lineare Abbildungen sind arme Abbildungen

Sei $\dim V = n$ und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V.

Lineare Abbildungen sind arme Abbildungen

Sei $\dim V = n$ und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V.

Dann ist wegen

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i).$$

jede lineare Abbildung durch die Werte auf einer Basis eindeutig bestimmt.

Sei $\dim V = n$ und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V.

Dann ist wegen

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i).$$

jede lineare Abbildung durch die Werte auf einer Basis eindeutig bestimmt.

Ferner wird das Bild durch eine Linearkombination dieser n Bildvektoren $f(v_i)$ aufgespannt.

Sei $\dim V = n$ und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V.

Dann ist wegen

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i).$$

jede lineare Abbildung durch die Werte auf einer Basis eindeutig bestimmt.

Ferner wird das Bild durch eine Linearkombination dieser n Bildvektoren $f(v_i)$ aufgespannt.

Daher ist das Bild eines n-dimensionalen Vektorraums endlich dimensional mit $\dim \mathrm{Bild}\, f \leq n$.

Rang einer linearen Abbildung

Die Dimension des Bildes einer linearen Abbildung f heißt *Rang* von f, geschrieben $\operatorname{rang} f$.

Rang einer linearen Abbildung

Die Dimension des Bildes einer linearen Abbildung f heißt *Rang* von f, geschrieben $\operatorname{rang} f$.

Der folgende Satz wird auch *Rangformel* genannt:

Rang einer linearen Abbildung

Die Dimension des Bildes einer linearen Abbildung f heißt *Rang* von f, geschrieben $\operatorname{rang} f$.

Der folgende Satz wird auch *Rangformel* genannt:

Satz Sei V endlich dimensional und $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Dann gilt

$$\dim V = \dim \operatorname{Kern} f + \operatorname{rang} f.$$

Beweis

Da $\mathrm{Kern}\, f$ endlich dimensional ist, gibt es Basen

$$u_1, \ldots, u_r \text{ von } \mathrm{Kern}\, f, \quad w_1, \ldots, w_s \text{ von } \mathrm{Bild}\, f$$

mit Urbildern $v_1, \ldots, v_s$.

Beweis

Da $\mathrm{Kern}\, f$ endlich dimensional ist, gibt es Basen

$$u_1, \ldots, u_r \text{ von } \mathrm{Kern}\, f, \quad w_1, \ldots, w_s \text{ von } \mathrm{Bild}\, f$$

mit Urbildern $v_1, \ldots, v_s$.

Es gilt

$$r = \dim \mathrm{Kern}\, f, \quad s = \dim \mathrm{Bild}\, f = \mathrm{rang}\, f.$$

Beweis

Da $\operatorname{Kern} f$ endlich dimensional ist, gibt es Basen

$$u_1, \ldots, u_r \text{ von } \operatorname{Kern} f, \quad w_1, \ldots, w_s \text{ von } \operatorname{Bild} f$$

mit Urbildern $v_1, \ldots, v_s$.

Es gilt

$$r = \dim \operatorname{Kern} f, \quad s = \dim \operatorname{Bild} f = \operatorname{rang} f .$$

Wegen $\sum_i \alpha_i f(v_i) = \sum_i \alpha_i w_i$ spannt das Bild von

$$V_B = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_s\}$$

das gesamte Bild auf.

Beweis

$$u_1, \ldots, u_r \text{ Basis von } \mathrm{Kern}\, f, \quad w_1, \ldots, w_s \text{ Basis von } \mathrm{Bild}\, f$$

mit Urbildern $v_1, \ldots, v_s$.

$$r = \dim \mathrm{Kern}\, f, \quad s = \dim \mathrm{Bild}\, f = \mathrm{rang}\, f, \quad V_B = \mathrm{span}\,\{v_1, \ldots, v_s\}$$

Beweis

$$u_1, \ldots, u_r \text{ Basis von } \operatorname{Kern} f, \quad w_1, \ldots, w_s \text{ Basis von } \operatorname{Bild} f$$

mit Urbildern $v_1, \ldots, v_s$.

$r = \dim \operatorname{Kern} f, \quad s = \dim \operatorname{Bild} f = \operatorname{rang} f, \quad V_B = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_s\}$

Die Vektoren $\{v_i\}$ müssen daher l.u. sein und damit $\dim V_B = s = \operatorname{rang} f$.

Beweis

$$u_1, \ldots, u_r \text{ Basis von } \mathrm{Kern}\, f, \quad w_1, \ldots, w_s \text{ Basis von } \mathrm{Bild}\, f$$

mit Urbildern $v_1, \ldots, v_s$.

$r = \dim \mathrm{Kern}\, f, \quad s = \dim \mathrm{Bild}\, f = \mathrm{rang}\, f, \quad V_B = \mathrm{span}\,\{v_1, \ldots, v_s\}$

Die Vektoren $\{v_i\}$ müssen daher l.u. sein und damit $\dim V_B = s = \mathrm{rang}\, f$.

Für beliebiges $v \in V$ gilt $f(v) = \sum_i \alpha_i w_i$. Setze daher

$$v = v_B + v_K, \; v_B = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i v_i \;\Rightarrow\; f(v - v_B) = 0$$

Beweis

$$u_1, \ldots, u_r \text{ Basis von } \mathrm{Kern}\, f, \quad w_1, \ldots, w_s \text{ Basis von } \mathrm{Bild}\, f$$

mit Urbildern $v_1, \ldots, v_s$.

$r = \dim \mathrm{Kern}\, f, \quad s = \dim \mathrm{Bild}\, f = \mathrm{rang}\, f, \quad V_B = \mathrm{span}\,\{v_1, \ldots, v_s\}$

Die Vektoren $\{v_i\}$ müssen daher l.u. sein und damit $\dim V_B = s = \mathrm{rang}\, f$.

Für beliebiges $v \in V$ gilt $f(v) = \sum_i \alpha_i w_i$. Setze daher

$$v = v_B + v_K, \;\; v_B = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i v_i \;\Rightarrow\; f(v - v_B) = 0$$

$$\Rightarrow\; f(v_K) = 0 \;\Rightarrow\; v_K = \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i.$$

Beweis

$$v = v_B + v_K,\ v_B = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i v_i \ \Rightarrow\ f(v - v_B) = 0$$

Beweis

$$v = v_B + v_K,\ v_B = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i v_i \ \Rightarrow\ f(v - v_B) = 0$$

$$\Rightarrow\ f(v_K) = 0 \ \Rightarrow\ v_K = \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i.$$

Beweis

$$v = v_B + v_K, \;\; v_B = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i v_i \;\Rightarrow\; f(v - v_B) = 0$$

$$\Rightarrow\; f(v_K) = 0 \;\Rightarrow\; v_K = \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i .$$

Nach Konstruktion sind die Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_r$ eindeutig bestimmt.

Beweis

$$v = v_B + v_K, \;\; v_B = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i v_i \;\Rightarrow\; f(v - v_B) = 0$$

$$\Rightarrow\; f(v_K) = 0 \;\Rightarrow\; v_K = \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i .$$

Nach Konstruktion sind die Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_r$ eindeutig bestimmt.

Daher sind die Vektoren

$$u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$$

linear unabhängig.

Beweis

$$v = v_B + v_K\,, \;\; v_B = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i v_i \;\Rightarrow\; f(v - v_B) = 0$$

$$\Rightarrow\; f(v_K) = 0 \;\Rightarrow\; v_K = \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i\,.$$

Nach Konstruktion sind die Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_r$ eindeutig bestimmt.

Daher sind die Vektoren

$$u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$$

linear unabhängig.

Da sich jedes v nach diesen Vektoren entwickeln lässt, handelt es sich um eine Basis von V und es gilt $n = r + s$.

Korollar

Sind V, W endlich dimensional mit $\dim V = \dim W$, so gilt für jede lineare Abbildung $f \in \mathcal{L}(V, W)$

$$f \text{ ist injektiv} \;\Leftrightarrow\; f \text{ ist surjektiv} \;\Leftrightarrow\; f \text{ ist bijektiv.}$$

Korollar

Sind V, W endlich dimensional mit $\dim V = \dim W$, so gilt für jede lineare Abbildung $f \in \mathcal{L}(V, W)$

$$f \text{ ist injektiv } \Leftrightarrow f \text{ ist surjektiv } \Leftrightarrow f \text{ ist bijektiv.}$$

Beweis Nach der Rangformel impliziert jeder dieser Bedingungen, dass

$$\dim \mathrm{Bild}\, f = \dim V.$$

Für ein n-dimensionales V und $f \in \mathcal{L}(V, W)$ gilt:

Die Abbildung f ist bereits durch die Werte auf einer beliebigen Basis von V eindeutig bestimmt.

Das Wichtige noch einmal

Für ein n-dimensionales V und $f \in \mathcal{L}(V, W)$ gilt:

Die Abbildung f ist bereits durch die Werte auf einer beliebigen Basis von V eindeutig bestimmt.

Dies folgt aus

$$f(\sum_i \alpha_i v_i) = \sum_i \alpha_i f(v_i).$$

Das Wichtige noch einmal

Für ein n-dimensionales V und $f \in \mathcal{L}(V, W)$ gilt:

Die Abbildung f ist bereits durch die Werte auf einer beliebigen Basis von V eindeutig bestimmt.

Dies folgt aus

$$f(\sum_i \alpha_i v_i) = \sum_i \alpha_i f(v_i).$$

Daraus folgt auch, dass $\dim \mathrm{Bild}\, f \leq \dim V$.

Das Wichtige noch einmal

Für ein n-dimensionales V und $f \in \mathcal{L}(V, W)$ gilt:

Die Abbildung f ist bereits durch die Werte auf einer beliebigen Basis von V eindeutig bestimmt.

Dies folgt aus
$$f(\sum_i \alpha_i v_i) = \sum_i \alpha_i f(v_i).$$

Daraus folgt auch, dass $\dim \mathrm{Bild}\, f \leq \dim V$.

Eine lineare Abbildung kann also höchstens einen n-dimensionalen Bildraum aufspannen.

Das Wichtige noch einmal

Für eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V kann man $f(v_i) \in W$ beliebig vorgeben. Durch diese Vorgaben ist die lineare Abbildung f eindeutig bestimmt.

Das Wichtige noch einmal

Für eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V kann man $f(v_i) \in W$ beliebig vorgeben. Durch diese Vorgaben ist die lineare Abbildung f eindeutig bestimmt.

Es gilt ja für jedes v

$$v = \sum_i \alpha_i v_i \;\Rightarrow\; f(v) = \sum_i \alpha_i f(v_i).$$

Das Wichtige noch einmal

Für eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V kann man $f(v_i) \in W$ beliebig vorgeben. Durch diese Vorgaben ist die lineare Abbildung f eindeutig bestimmt.

Es gilt ja für jedes v

$$v = \sum_i \alpha_i v_i \;\Rightarrow\; f(v) = \sum_i \alpha_i f(v_i).$$

Dass ein so definiertes f linear ist, weist man ohne Mühe nach.

6.2 Darstellungsmatrizen linearer Abbildungen

Eine $(m \times n)$-Matrix A hatten wir als rechteckiges Schema

$$A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m,\ j=1,\dots n}$$

definiert.

6.2 Darstellungsmatrizen linearer Abbildungen

Eine $(m \times n)$-Matrix A hatten wir als rechteckiges Schema

$$A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m,\ j=1,\dots n}$$

definiert.

Operationen sind komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation.

6.2 Darstellungsmatrizen linearer Abbildungen

Eine $(m \times n)$-Matrix A hatten wir als rechteckiges Schema

$$A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m,\ j=1,\dots n}$$

definiert.

Operationen sind komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation.

$\mathbb{K}^{m\times n}$ ist mit diesen Operationen ein linearer Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit $\dim \mathbb{K}^{m\times n} = mn$.

Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung

Sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ linear. f ist durch die Werte auf einer Basis von $\mathbb{K}^n$ eindeutig bestimmt.

Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung

Sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ linear. f ist durch die Werte auf einer Basis von $\mathbb{K}^n$ eindeutig bestimmt.

Wähle die kanonische Basis

$$\{e_j\}_{j=1,\ldots,n} \;\Rightarrow\; f(e_j) = a_j \in \mathbb{K}^m.$$

Sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ linear. f ist durch die Werte auf einer Basis von $\mathbb{K}^n$ eindeutig bestimmt.

Wähle die kanonische Basis

$$\{e_j\}_{j=1,\dots,n} \;\Rightarrow\; f(e_j) = a_j \in \mathbb{K}^m.$$

Wir schreiben die Spaltenvektoren $(a_j)_{j=1,\dots,n}$ hintereinander und erhalten so eine $(m \times n)$-Matrix

$$A_f = (a_1|a_2|\dots|a_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ linear. f ist durch die Werte auf einer Basis von $\mathbb{K}^n$ eindeutig bestimmt.

Wähle die kanonische Basis

$$\{e_j\}_{j=1,\dots,n} \ \Rightarrow \ f(e_j) = a_j \in \mathbb{K}^m.$$

Wir schreiben die Spaltenvektoren $(a_j)_{j=1,\dots,n}$ hintereinander und erhalten so eine $(m \times n)$-Matrix

$$A_f = (a_1|a_2|\dots|a_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

A_f heißt *Darstellungsmatrix* der linearen Abbildung f.

Matrix × Vektor

$$A_f = (a_1|a_2|\dots|a_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

Für

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=j}^{n} x_j e_j$$

Matrix × Vektor

$$A_f = (a_1|a_2|\dots|a_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

Für

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=j}^{n} x_j e_j$$

gilt dann

$$f(u) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_j a_{ij} e_i = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix}.$$

Matrix × Vektor

$$f(u) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_j a_{ij} e_i = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix}.$$

Man bestimmt also $f(u)$ nach der Regel „Zeile × Spalte“.

Matrix × Vektor

$$f(u) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_j a_{ij} e_i = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix}.$$

Man bestimmt also $f(u)$ nach der Regel „Zeile × Spalte“.

Um die i-te Komponente von $f(u)$ zu bekommen, nimmt man

- die i-te Zeile der Matrix, das ist $a_{i1}, \ldots, a_{in}$,
- multipliziert sie mit den entsprechenden Einträgen des Spaltenvektors u, das ist $x_1, \ldots, x_n$,
- addiert das Ganze, also

$$(f(u))_i = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n.$$

Beispiel

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(e_1) = (1,1)^T, \quad f(e_2) = (2,1)^T, \quad f(e_3) = (-1,3)^T.$$

Beispiel

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(e_1) = (1,1)^T, \quad f(e_2) = (2,1)^T, \quad f(e_3) = (-1,3)^T.$$

Zu f gehört demnach die Darstellungsmatrix

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Beispiel

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(e_1) = (1,1)^T, \quad f(e_2) = (2,1)^T, \quad f(e_3) = (-1,3)^T.$$

Zu f gehört demnach die Darstellungsmatrix

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Für $u = (1,2,-4)^T$ bestimmen wir $f(u)$ nach der Regel Zeile mal Spalte

$$f(u) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Beispiel

$$f(u) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Beispiel

$$f(u) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Beachte: Wir bilden eine Linearkombination der Spaltenvektoren:

$$f(u) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Komposition linearer Abbildungen

Seien $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^l$ und $g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit Matrixdarstellungen

$$A \in \mathbb{K}^{l \times m} \text{ von } f, \quad B \in \mathbb{K}^{m \times n} \text{ von } g.$$

Komposition linearer Abbildungen

Seien $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^l$ und $g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit Matrixdarstellungen

$$A \in \mathbb{K}^{l \times m} \text{ von } f, \quad B \in \mathbb{K}^{m \times n} \text{ von } g.$$

Weiter sei

$$\begin{aligned} e_1^m, \ldots, e_m^m &= \text{kanonische Basis von } \mathbb{K}^m, \\ e_1^l, \ldots, e_l^l &= \text{kanonische Basis von } \mathbb{K}^l. \end{aligned}$$

Komposition linearer Abbildungen

Seien $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^l$ und $g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit Matrixdarstellungen

$$A \in \mathbb{K}^{l \times m} \text{ von } f, \quad B \in \mathbb{K}^{m \times n} \text{ von } g.$$

Weiter sei

$$e_1^m, \ldots, e_m^m = \text{kanonische Basis von } \mathbb{K}^m,$$
$$e_1^l, \ldots, e_l^l = \text{kanonische Basis von } \mathbb{K}^l.$$

Dann gilt

$$f(e_k^m) = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{lk} \end{pmatrix} = \sum_i a_{ik} e_i^l, \quad g(x) = \begin{pmatrix} \sum_j b_{1j} x_j \\ \sum_j b_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_j b_{mj} x_j \end{pmatrix} = \sum_{kj} b_{kj} x_j e_k^m.$$

Komposition linearer Abbildungen

$$f(e_k^m) = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{lk} \end{pmatrix} = \sum_i a_{ik} e_i^l, \quad g(x) = \begin{pmatrix} \sum_j b_{1j} x_j \\ \sum_j b_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_j b_{mj} x_j \end{pmatrix} = \sum_{kj} b_{kj} x_j e_k^m.$$

Komposition linearer Abbildungen

$$f(e_k^m) = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{lk} \end{pmatrix} = \sum_i a_{ik} e_i^l, \quad g(x) = \begin{pmatrix} \sum_j b_{1j} x_j \\ \sum_j b_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_j b_{mj} x_j \end{pmatrix} = \sum_{kj} b_{kj} x_j e_k^m.$$

Daher

$$f(g(x)) = f\Big(\sum_{kj} b_{kj} x_j e_k^m\Big) = \sum_{kj} b_{kj} x_j f(e_k^m) = \sum_{kji} b_{kj} x_j a_{ik} e_i^l$$

$$= \sum_{ji} \underbrace{\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}}_{\text{Zeile}\times\text{Spalte}=c_{ij}} x_j e_i^l = \sum_{ij} c_{ij} x_j e_i^l = Cx, \quad C = (c_{ij}).$$

Matrizenprodukt

$$f(g(x)) = f\Big(\sum_{kj} b_{kj} x_j e_k^m\Big) = \sum_{kj} b_{kj} x_j f(e_k^m) = \sum_{kji} b_{kj} x_j a_{ik} e_i^l$$

$$= \sum_{ji} \underbrace{\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}}_{\text{Zeile}\times\text{Spalte}=c_{ij}} x_j e_i^l = \sum_{ij} c_{ij} x_j e_i^l = Cx, \quad C = (c_{ij}).$$

Matrizenprodukt

$$f(g(x)) = f\Big(\sum_{kj} b_{kj} x_j e_k^m\Big) = \sum_{kj} b_{kj} x_j f(e_k^m) = \sum_{kji} b_{kj} x_j a_{ik} e_i^l$$

$$= \sum_{ji} \underbrace{\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}}_{\text{Zeile}\times\text{Spalte}=c_{ij}} x_j e_i^l = \sum_{ij} c_{ij} x_j e_i^l = Cx, \quad C = (c_{ij}).$$

Also wieder „Zeile $\times$ Spalte“.

Matrizenprodukt

$$f(g(x)) = f\Big(\sum_{kj} b_{kj} x_j e_k^m\Big) = \sum_{kj} b_{kj} x_j f(e_k^m) = \sum_{kji} b_{kj} x_j a_{ik} e_i^l$$

$$= \sum_{ji} \underbrace{\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}}_{\text{Zeile}\times\text{Spalte}=c_{ij}} x_j e_i^l = \sum_{ij} c_{ij} x_j e_i^l = Cx, \quad C = (c_{ij}).$$

Also wieder „Zeile $\times$ Spalte“.

Ist $A = (a_{ik})$, $B = (b_{kj})$ und $C = (c_{ij})$ die Darstellungsmatrix für die Komposition, so gilt

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{im} b_{mj}.$$

Beispiel

Wir nehmen als f die gleiche lineare Abbildung wie im letzten Beispiel und für $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung mit

$$g(e_1) = (2,0,1)^T, \quad g(e_2) = (2,1,0)^T,$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_g = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel

Wir nehmen als f die gleiche lineare Abbildung wie im letzten Beispiel und für $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung mit

$$g(e_1) = (2,0,1)^T, \quad g(e_2) = (2,1,0)^T,$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_g = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen das Produkt nach der Regel Zeile mal Spalte

$$C = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Der Raum $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ mit den Operationen

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

sind zum Matrizenraum $\mathbb{K}^{m\times n}$ isomorph mit dem Isomorphismus $I : f \mapsto A_f$.

6.3 Der Matrizenkalkül

Der Raum $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ mit den Operationen

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

sind zum Matrizenraum $\mathbb{K}^{m\times n}$ isomorph mit dem Isomorphismus $I : f \mapsto A_f$.

Der punktweisen Addition im Raum $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ entspricht genau die Matrizenaddition, bei der Skalarmultiplikation ist es genauso.

Der Raum $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ mit den Operationen

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

sind zum Matrizenraum $\mathbb{K}^{m \times n}$ isomorph mit dem Isomorphismus $I : f \mapsto A_f$.

Der punktweisen Addition im Raum $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ entspricht genau die Matrizenaddition, bei der Skalarmultiplikation ist es genauso.

Ferner können wir den Raum $\mathbb{K}^n$ mit dem Raum der Spaltenmatrizen $\mathbb{K}^{n \times 1}$ identifizieren.

6.3 Der Matrizenkalkül

Der Raum $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ mit den Operationen

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

sind zum Matrizenraum $\mathbb{K}^{m \times n}$ isomorph mit dem Isomorphismus $I : f \mapsto A_f$.

Der punktweisen Addition im Raum $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ entspricht genau die Matrizenaddition, bei der Skalarmultiplikation ist es genauso.

Ferner können wir den Raum $\mathbb{K}^n$ mit dem Raum der Spaltenmatrizen $\mathbb{K}^{n \times 1}$ identifizieren.

Dennoch werden wir zur besseren Unterscheidbarkeit von anderen Matrizen die $\mathbb{K}^{n \times 1}$-Matrizen als Vektoren bezeichnen.

Operationen im Matrizenraum

Auf dem Matrizenraum $\mathbb{K}^{m\times n}$ sind daher Addition und Skalarmultiplikation sowie das Matrizenprodukt zwischen Elementen aus $\mathbb{K}^{m\times n}$ und $\mathbb{K}^{n\times l}$ definiert mit Ergebnis im Raum $\mathbb{K}^{m\times l}$.

Satz Sofern die Operationen definiert sind, gelten die folgenden Rechenregeln:

(a) Das Matrizenprodukt ist assoziativ

$$(AB)C = A(BC).$$

Satz Sofern die Operationen definiert sind, gelten die folgenden Rechenregeln:

(a) Das Matrizenprodukt ist assoziativ

$$(AB)C = A(BC).$$

(b) Es gelten die Distibutivgesetze

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC.$$

Satz Sofern die Operationen definiert sind, gelten die folgenden Rechenregeln:

(a) Das Matrizenprodukt ist assoziativ

$$(AB)C = A(BC).$$

(b) Es gelten die Distibutivgesetze

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC.$$

(c) Matrix- und skalare Multiplikation sind homogen

$$\alpha \cdot AB = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

Beweis a)

a) Das Matrizenprodukt ist assoziativ

$$(AB)C = A(BC).$$

Beweis a)

a) Das Matrizenprodukt ist assoziativ

$$(AB)C = A(BC).$$

Hier greift man besser auf die Herkunft des Matrizenprodukts als Komposition linearer Abbildungen zurück. Letztere ist bekanntlich assoziativ.

Beweis b)

b) Es gelten die Distibutivgesetze

$$A(B+C) = AB + AC, \quad (A+B)C = AC + BC$$

Beweis b)

b) Es gelten die Distibutivgesetze

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC$$

Das gilt ebenfalls für lineare Abbildungen, folgt aber auch direkt aus der Definition „Zeile $\times$ Spalte“.

Beweis c)

c) Matrix- und skalare Multiplikation sind homogen

$$\alpha \cdot AB = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

Beweis c)

c) Matrix- und skalare Multiplikation sind homogen

$$\alpha \cdot AB = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

Das ist trivial, ist doch $\alpha A = (\alpha a_{ij})$

Quadratische Matrizen

Im Fall $m = n$ sprechen wir von *quadratischen Matrizen* $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Quadratische Matrizen

Im Fall $m = n$ sprechen wir von *quadratischen Matrizen* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Die Matrizenprodukte AB und BA sind hier zwar definiert, stimmen in der Regel aber nicht überein:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix

Die *Einheitsmatrix* von $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Einheitsmatrix

Die *Einheitsmatrix* von $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Sie entspricht der Identität im Raum $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$. Es gilt

$$AE_n = E_nA = A.$$

Reguläre Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt *regulär* oder *invertierbar*, wenn

$$\exists A^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ mit } AA^{-1} = E_n.$$

Reguläre Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt *regulär* oder *invertierbar*, wenn

$$\exists A^{-1} \in \mathbb{K}^{n \times n} \text{ mit } AA^{-1} = E_n.$$

Eine reguläre Matrix ist die Darstellungsmatrix eines Isomorphismusses des $\mathbb{K}^n$, A^{-1} ist demnach die Darstellungsmatrix des inversen Isomorphismusses.

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt *regulär* oder *invertierbar*, wenn

$$\exists A^{-1} \in \mathbb{K}^{n \times n} \text{ mit } AA^{-1} = E_n.$$

Eine reguläre Matrix ist die Darstellungsmatrix eines Isomorphismusses des $\mathbb{K}^n$, A^{-1} ist demnach die Darstellungsmatrix des inversen Isomorphismusses.

Demnach gilt im Falle einer regulären Matrix auch $A^{-1}A = E_n$.

Reguläre Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt *regulär* oder *invertierbar*, wenn

$$\exists A^{-1} \in \mathbb{K}^{n \times n} \text{ mit } AA^{-1} = E_n.$$

Eine reguläre Matrix ist die Darstellungsmatrix eines Isomorphismusses des $\mathbb{K}^n$, A^{-1} ist demnach die Darstellungsmatrix des inversen Isomorphismusses.

Demnach gilt im Falle einer regulären Matrix auch $A^{-1}A = E_n$.

- $GL(n, \mathbb{K})$=Menge der regulären Matrizen
- mit Matrixmultiplikation
- und neutralem Element E_n

ist eine Gruppe, die allgemeine lineare Gruppe (engl: general linear group).

Bild von A

Wir können viele Begriffsbildungen für lineare Abbildungen auf Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ übertragen:

Bild von A

Wir können viele Begriffsbildungen für lineare Abbildungen auf Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ übertragen:

Das *Bild* von A ist die Menge der durch Ax erzeugten Elemente

$$\operatorname{Bild} A = \{y = Ax : x \in \mathbb{K}^n\} = \{y = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i,\ x_i \in \mathbb{K}\},$$

wobei $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}^m$ die Spalten von A bezeichnet.

Rang von A

Der *Rang* von A ist die Dimension des Bildraums, also die Anzahl der linear unabhängigen Spalten von A.

Rang von A

Der *Rang* von A ist die Dimension des Bildraums, also die Anzahl der linear unabhängigen Spalten von A.

Da wir auch von der Anzahl der linear unabhängigen Zeilen sprechen können, wird der Rang im Zusammenhang mit Matrizen auch als *Spaltenrang* bezeichnet.

Reguläre Matrizen

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist genau dann regulär, wenn $\operatorname{rang} A = n$.

Reguläre Matrizen

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist genau dann regulär, wenn $\operatorname{rang} A = n$.

Nur in diesem Fall ist die zugehörige Selbstabbildung surjektiv und damit bijektiv.

Der *Kern* ist die Menge der Vektoren, die auf die Null abgebildet werden,

$$\mathrm{Kern}\, A = \{x : Ax = 0\}$$

Kern und Rangformel

Der *Kern* ist die Menge der Vektoren, die auf die Null abgebildet werden,

$$\mathrm{Kern}\, A = \{x : Ax = 0\}$$

Die Rangformel ist dann

$$n = \dim \mathrm{Kern}\, A + \mathrm{rang}\, A.$$

Schranke für den Rang

Lemma Es gilt $\operatorname{rang} A \leq \min\{m, n\}$.

Schranke für den Rang

Lemma Es gilt $\operatorname{rang} A \leq \min\{m, n\}$.

Beweis Für $m \geq n$ ist das richtig, wir haben ja nur n Spalten zur Verfügung.

Schranke für den Rang

Lemma Es gilt $\operatorname{rang} A \leq \min\{m, n\}$.

Beweis Für $m \geq n$ ist das richtig, wir haben ja nur n Spalten zur Verfügung.

Der Bildraum ist ein Teilraum des $\mathbb{K}^m$. Dort kann es höchstens m linear unabhängige Vektoren geben.

Beispiel (i)

Wir untersuchen die folgende Matrix in $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel (i)

Wir untersuchen die folgende Matrix in $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Spaltenvektoren a_1 und a_3 sind l.u..

Beispiel (i)

Wir untersuchen die folgende Matrix in $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Spaltenvektoren a_1 und a_3 sind l.u..

Es ist $a_4 = a_1 - a_3$.

Beispiel (i)

Wir untersuchen die folgende Matrix in $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Spaltenvektoren a_1 und a_3 sind l.u..

Es ist $a_4 = a_1 - a_3$.

Damit gilt $\mathrm{Bild}\, A = \mathrm{span}\, \{a_1, a_3\}$.

Beispiel (i)

Wir untersuchen die folgende Matrix in $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Spaltenvektoren a_1 und a_3 sind l.u..

Es ist $a_4 = a_1 - a_3$.

Damit gilt $\mathrm{Bild}\, A = \mathrm{span}\,\{a_1, a_3\}$.

Nach der Rangformel ist

$$\dim \mathrm{Kern}\, A = 2.$$

Beispiel (i)

Wir untersuchen die folgende Matrix in $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Spaltenvektoren a_1 und a_3 sind l.u..

Es ist $a_4 = a_1 - a_3$.

Damit gilt $\mathrm{Bild}\, A = \mathrm{span}\,\{a_1, a_3\}$.

Nach der Rangformel ist

$$\dim \mathrm{Kern}\, A = 2.$$

Basis des Kerns: $e_2, (1, 0, -1, -1)^T \in \mathbb{C}^4$.

Beispiel (ii)

Wir untersuchen die folgende Matrix in $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & -i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel (ii)

Wir untersuchen die folgende Matrix in $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & -i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $b_2 = ib_3$, damit ist

$$\mathrm{Bild}\, A = \mathrm{span}\,\{b_1, b_2\}.$$

Beispiel (ii)

Wir untersuchen die folgende Matrix in $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & -i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $b_2 = ib_3$, damit ist

$$\mathrm{Bild}\, A = \mathrm{span}\, \{b_1, b_2\}.$$

Der Kern ist daher eindimensional, Basis des Kerns:
$(0, 1, -i) \in \mathrm{Kern}\, B$.

Satz (a) Für Matrizen $A : \mathbb{K}^{l \times m}$, $B : \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt

$$\operatorname{rang} AB \leq \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}.$$

Satz (a) Für Matrizen $A : \mathbb{K}^{l\times m}$, $B : \mathbb{K}^{m\times n}$ gilt

$$\operatorname{rang} AB \leq \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}.$$

(b) Sei $A : \mathbb{K}^{m\times n}$, $B : \mathbb{K}^{m\times m}$, $C : \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\operatorname{rang} B = m$, $\operatorname{rang} C = n$. Dann gilt

$$\operatorname{rang} BA = \operatorname{rang} A, \quad \operatorname{rang} AC = \operatorname{rang} A.$$

Beweis (a)

(a) Für Matrizen $A : \mathbb{K}^{l \times m}$, $B : \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt

$$\operatorname{rang} AB \leq \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}.$$

Beweis (a)

(a) Für Matrizen $A : \mathbb{K}^{l\times m}$, $B : \mathbb{K}^{m\times n}$ gilt

$$\operatorname{rang} AB \leq \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}.$$

Ist $\operatorname{rang} A \leq \operatorname{rang} B$, so gilt

$$\operatorname{Bild} AB \subset \operatorname{Bild} A.$$

Beweis (a)

(a) Für Matrizen $A : \mathbb{K}^{l \times m}$, $B : \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt

$$\operatorname{rang} AB \leq \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}.$$

Ist $\operatorname{rang} A \leq \operatorname{rang} B$, so gilt

$$\operatorname{Bild} AB \subset \operatorname{Bild} A.$$

Ist umgekehrt $\operatorname{rang} B \leq \operatorname{rang} A$, so bildet A das Bild von B auf einen Unterraum der Dimension $\leq \operatorname{rang} B$ ab.

Beweis (b)

Sei $A : \mathbb{K}^{m\times n}$, $B : \mathbb{K}^{m\times m}$, $C : \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\operatorname{rang} B = m$, $\operatorname{rang} C = n$. Dann gilt

$$\operatorname{rang} BA = \operatorname{rang} A, \quad \operatorname{rang} AC = \operatorname{rang} A.$$

Beweis (b)

Sei $A : \mathbb{K}^{m\times n}$, $B : \mathbb{K}^{m\times m}$, $C : \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\operatorname{rang} B = m$, $\operatorname{rang} C = n$. Dann gilt

$$\operatorname{rang} BA = \operatorname{rang} A, \quad \operatorname{rang} AC = \operatorname{rang} A.$$

B und C sind Isomorphismen zwischen den angegebenen Räumen.

Beweis (b)

Sei $A : \mathbb{K}^{m \times n}$, $B : \mathbb{K}^{m \times m}$, $C : \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $\operatorname{rang} B = m$, $\operatorname{rang} C = n$. Dann gilt

$$\operatorname{rang} BA = \operatorname{rang} A, \quad \operatorname{rang} AC = \operatorname{rang} A.$$

B und C sind Isomorphismen zwischen den angegebenen Räumen.

B bildet das Bild von A auf einen Unterraum gleicher Dimension ab.

Beweis (b)

Sei $A : \mathbb{K}^{m\times n}$, $B : \mathbb{K}^{m\times m}$, $C : \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\operatorname{rang} B = m$, $\operatorname{rang} C = n$. Dann gilt

$$\operatorname{rang} BA = \operatorname{rang} A, \quad \operatorname{rang} AC = \operatorname{rang} A.$$

B und C sind Isomorphismen zwischen den angegebenen Räumen.

B bildet das Bild von A auf einen Unterraum gleicher Dimension ab.

Das Bild von C spannt den ganzen $\mathbb{K}^n$ auf. In diesem Fall gilt sogar

$$\operatorname{Bild} A = \operatorname{Bild} AC.$$

Beispiel zu (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel zu (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B = 1, \quad \operatorname{rang} AB = 1, \quad \operatorname{rang} BA = 0.$$

Transponierte Matrix

Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist die *transponierte Matrix*:

$$A^T = (a_{ij}^T) \in \mathbb{K}^{n \times m} \text{ mit } a_{ij}^T = a_{ji} \text{ für alle } 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$$

Transponierte Matrix

Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist die *transponierte Matrix*:

$$A^T = (a_{ij}^T) \in \mathbb{K}^{n \times m} \text{ mit } a_{ij}^T = a_{ji} \text{ für alle } 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n.$$

Anschaulich klappt man die Matrix A von links unten nach rechts oben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Produkt transponierter Matrizen

Das Produkt AB sei für die Matrizen A, B erklärt. Dann

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Produkt transponierter Matrizen

Das Produkt AB sei für die Matrizen A, B erklärt. Dann

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Mit $C = AB$ gilt

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} \;\Rightarrow\; c_{ij}^T = c_{ji} = \sum_k a_{jk} b_{ki} = \sum_k b_{ik}^T a_{kj}^T = (B^T A^T)_{ij}.$$

Inversion von Produkten

Eine ähnliche Formel gilt für die Inverse des Produkts zweier regulärer Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

Inversion von Produkten

Eine ähnliche Formel gilt für die Inverse des Produkts zweier regulärer Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

wegen

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(B^{-1}B)A^{-1} = E_n.$$

Invertieren und Transponieren

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

Invertieren und Transponieren

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

Klar, wegen

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = E_n,$$

also ist A^T die Inverse von $(A^{-1})^T$.

Invertieren und Transponieren

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

Klar, wegen

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = E_n,$$

also ist A^T die Inverse von $(A^{-1})^T$.

Wir schreiben daher auch A^{-T} anstatt $(A^{-1})^T$ oder $(A^T)^{-1}$.