Mathematatik für Informatiker 2
Übungsblatt 9

Lukas Vormwald   Noah Mehling   Gregor Seewald

Übung 5:Dienstag 12:00

Aufgabe 1

$P(x) = (x - x_0) \cdot q(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})...(x - x_n) \cdot a$
$P(x_j) = 1 \Rightarrow (x_j - x_0)q(x) = \underbrace{(x_j - x_0)(x_j - x_1)...(x_j - x_{j-1})}_{\neq 0 \text{ da paarweise verschieden}} \cdot a = 1$
$\Rightarrow a = \frac{1}{(x-x_0)(g(x))}$ =Lagrangebasis
mit a Polynom von Grad $n - n = 0 \Rightarrow$ Konstant

2.Teil Aufgrung von Lemma 14.1. lässt sich ein beliebiges Polynom $q(x)$ angeben.
Nun stellt man eine Interpolationsaufgabe $q(x)$ mit $y_j = p(x_j)$
Nach 14.1. lässt sich $P(x)$ schreiben als
$P(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j I_\xi(x) \in \mathbb{P}_n$
Nach Satz 14.1. ist diese Lösung eindeutig. Somit ist $P(x) = q(x)$ und y_j eine Basis des Lösungsraums, da I_j als linearkombination dargestellt werden kann.

Aufgabe 2

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \qquad P'(x) = a_1 + a_2 2x$
$y_0 = a_0$
$y_1 = y_0 + a_1(x_1 - x_0)$
$y_2 = a_1 + a_2 2(x_1 - x_0)$
$y_3 = y_0 + a_1 + a_2(x_1 - x_0)(x_1) + a_3(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)$
$\Rightarrow a_0 = y_0$
$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{(x_1 - x_0)}$
$a_2 = \frac{y_2 - \frac{y_1 - y_0}{(x_1 - x_0)}}{2x}$
$a_3 = \frac{y_3 - y_0 - \left(\frac{y_2 - \frac{y_1 - y_0}{(x_1 - x_0)}}{2x}\right)(x_1 - x_0)(x_1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)}$

Da $a_0 ... a_3$ Vorfaktoren der Standardbasis sind, ist dies ebenfalls eine Basis des $\mathbb{P}$

Aufgabe 3

a)

$$\begin{aligned} q_0 &= (x-1)^2 \\ q_1 &= -(x-1)^2 - 1 \\ q_2 &= (x-0,5)^2 - 0,25 \end{aligned}$$

Zeigen, dass q_0, q_1, q_2 Basis von $\mathbb{P}_2$:
$a \cdot (x-1)^2 + b \cdot \left(-(x-1)^2 + 1\right) + c \cdot (x-0,5)^2 - 0,25 = 0 \Rightarrow a, b, c = 0$
$a + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0$
$\Rightarrow a \stackrel{!}{=} 0$

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ a \cdot 0 + b - c &= 0 \\ \Rightarrow b &= c \\ \Rightarrow b &= 0 \\ c &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ angegeben q_0, q_1, q_2 sind Basis.

b) $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \qquad P'(x) = a_1 + a_2 2x$

$$\begin{aligned} 3 &= a_0 \\ 2 &= 3 + a_1 + a_2 \\ 4 &= a_1 + 2a_2 \\ a_1 &= 4 - 2a_2 \\ &\Rightarrow a_1 = 4 - \frac{10}{3} \approx 0,9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 &= 3 + 4 - 2a_2 + a_2 \\ 3a_2 &= 5 \\ a_2 &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann hat das Restglied $R_n f := f - L_n f$ bei der Polynominterpolation an $n+1$ paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, ..., x_n \in [a, b]$ die Lagrangesche Darstellung

$$(R_n f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j), \quad x \in [a, b]$$

mit einer von der Entwicklungsstelle x abhängigen Stelle $\xi \in [a, b]$. Ist x selbst Stützstelle, so ist die Aussage erfüllt. Sei nun

$$\omega_{n+1}(x) := \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

und für festes, aber beliebiges $x \in [a, b], x \neq x_j, j = 0, ..., n$ eine Hilfsfunktion $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ definiert durch

$$g(y) := f(y) - (L_n f)(y) - \omega_{n+1}(y) \frac{f(x) - (L_n f)(x)}{\omega_{n+1}(x)}, y \in [a, b].$$

Nach den Voraussetzungen an f ist g $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Ferner hat g die $n+2$ Nullstellen $x, x_0, \ldots, x_n$. Der Satz von Rolle besagt nun, dass die Ableitung g' zwischen zwei Nullstellen von g wieder eine Nullstelle besitzt. Damit hat g' $n+1$ paarweise verschiedene Nullstellen auf $[a, b]$. Sukzessive Wiederholung dieses Arguments ergibt, dass $g^{(n+1)}$ eine Nullstelle ξ in $[a, b]$ hat. Man berechnet

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)! \frac{(R_n f)(x)}{\omega_{n+1}(x)}$$

und erhält die Behauptung.

b) Hier können wir die Formel aus a verwenden, da alle Vorraussetzungen erfüllt sind. Da wir 4 Stützstellen, also $n+1$ mit $n = 3$, besitzen. Sie ist laut Aufgabenstellung $n+1$-mal stetig differenzierbar und die Stützstellen sind paarweise verschieden und gleichen einem $f(x_i)$ mit $i = 0, \ldots, 3$