12 Differentiation

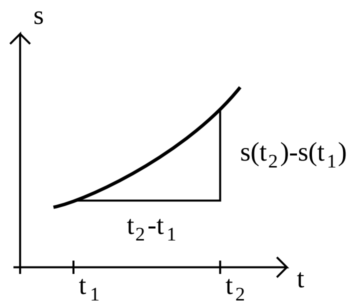
12.1 Definition der Differenzierbarkeit

Beispiel 12.1 Die geradlinige Bewegung eines Massepunktes wird beschrieben durch eine Funktion $s(t)$, wobei t die Zeit und $s(t)$ den zurückgelegten Weg des Massepunktes bezeichnet. Ist $s(t)$ linear, so ist

$$\frac{s(t)}{t} = \text{constant}$$

die Geschwindigkeit. Ist $s(t)$ nichtlinear und sind t_1, t_2 zwei Zeitpunkte, so ist $s(t_2)-s(t_1)$ der im Zeitraum t_2-t_1 zurückgelegte Weg und damit

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

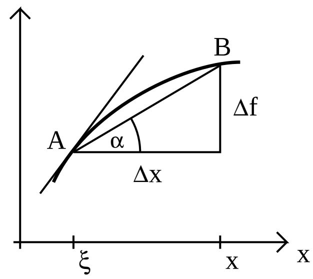


die Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitraum (t_1, t_2). □

Für eine Funktion f heißt

$$m = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \tan\alpha$$

Differenzenquotient. Er gibt die *Steigung* m der Sekante durch die Punkte A und B an. Wandert nun x nach links zum Punkt ξ, so läuft B nach A und die Sekante geht in die Tangente im Punkt A über.



Sei f in einer Umgebung von $\xi \in \mathbb{R}$ definiert. f heißt in ξ *differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$f'(\xi) = \frac{df(\xi)}{dx} = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

existiert. $f'(\xi)$ heißt *Ableitung* von f in ξ.

Beispiel 12.2 Für $f(x) = ax + b$ erhalten wir

$$f'(\xi) = \lim_{h\to 0} \frac{a(\xi + h) + b - (a\xi + b)}{h} = a.$$

□

Physikalisch gibt $f'(\xi)$ die Momentangeschwindigkeit eines Massepunktes an. Geometrisch ist $f'(\xi)$ die Steigung der Tangenten im Punkt $(\xi, f(\xi))$. Die Tangente $y(x)$ läuft ebenfalls durch diesen Punkt und besitzt die gleiche Steigung wie f. Aus $y(\xi) = f(\xi)$ und $y'(\xi) = f'(\xi)$ folgt die *Tangentengleichung*

$$y(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi).$$

Einseitige Ableitungen lassen sich analog zu einseitigen Grenzwerten definieren

$$f'_+(\xi) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \quad \text{(rechtsseitige Ableitung)}$$

$$f'_-(\xi) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \quad \text{(linksseitige Ableitung)}$$

Wenn $f'_+(\xi)$ und $f'_-(\xi)$ existieren und übereinstimmen, ist f in ξ differenzierbar.

Beispiel 12.3 Für $f(x) = |x|$ erhalten wir

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{|h| - |0|}{h} = 1, \quad f'_-(0) = \lim_{h\to 0-} \frac{|h| - |0|}{h} = -1.$$

Da die einseitigen Ableitungen verschieden sind, ist $|x|$ im Nullpunkt nicht differenzierbar. □

Satz 12.4 *Sei f in ξ differenzierbar. Dann gilt eine* lokale Lipschitzbedingung*, nämlich*

$$|f(x) - f(\xi)| \le K|x - \xi|$$

für alle x in einer genügend kleinen Umgebung von ξ, also $x \in [\xi - h_0, \xi + h_0]$ für ein $h_0 > 0$. Insbesondere ist f stetig in ξ. Ist $f'(\xi) > 0$, so gilt

$$f(\xi - h) < f(\xi) < f(\xi + h) \quad \textit{für alle } 0 < h \le h_0. \tag{12.1}$$

Beweis: Für x in einer genügend kleinen Umgebung von ξ folgt aus der Definition der Differenzierbarkeit

$$\left| \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \right| \le |f'(\xi)| + 1 = K.$$

Ist $f'(\xi) > 0$, so gilt für genügend kleine $|h|$

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} > 0.$$

Daraus folgt (12.1). □

Allgemeiner erfüllt eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ eine *globale Lipschitzbedingung*, wenn

$$|f(x) - f(y)| \le K|x - y| \qquad \text{für alle } x, y \in I.$$

f heißt dann auch *lipschitzstetig*. Eine lipschitzstetige Funktion ist gleichmäßig stetig: Für $\varepsilon > 0$ kann man $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ verwenden.

12.2 Differenzierbarkeit und arithmetische Operationen

Satz 12.5 *Sind die Funktionen f, g in ξ differenzierbar, so sind für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auch die Funktionen $\alpha f + \beta g$ sowie fg und, falls $g \ne 0$, f/g in ξ differenzierbar. Für diese Ableitungen gilt*

(a) $$(\alpha f + \beta g)'(\xi) = \alpha f'(\xi) + \beta g'(\xi), \qquad (\textit{Linearität}),$$

(b) $$(fg)'(\xi) = f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi) \qquad (\textit{Produktregel}),$$

(c) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)} \qquad (\textit{Quotientenregel}).$$

Beweis: (a) Die Linearität der Ableitung folgt aus der Linearität des Differenzenquotienten.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(\xi+h)g(\xi+h) - f(\xi)g(\xi)}{h} &= \frac{f(\xi+h)g(\xi+h) - f(\xi+h)g(\xi) + f(\xi+h)g(\xi) - f(\xi)g(\xi)}{h} \\ &= f(\xi+h)\frac{g(\xi+h) - g(\xi)}{h} + g(\xi)\frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h}. \end{aligned}$$

Da f in ξ stetig ist, folgt die Behauptung durch Grenzübergang.

(c) Wir zeigen die Behauptung nur für $f = 1$, der allgemeine Fall folgt dann aus der Produktregel.

$$\frac{1}{h}\Big(\frac{1}{g(\xi+h)} - \frac{1}{g(\xi)}\Big) = \frac{1}{h}\,\frac{-g(\xi+h)+g(\xi)}{g(\xi+h)g(\xi)}.$$

Wegen der Stetigkeit von g in ξ können wir auch hier den Grenzübergang $h \to 0$ durchführen und erhalten die Behauptung. ▯

Als Anwendung dieses Satzes zeigen wir $(x^n)' = nx^{n-1}$ durch vollständige Induktion. Für $n = 0$ erhalten wir die konstante Funktion, für die $1' = 0$ aus der Definition der Differenzierbarkeit folgt. Ebenso bestimmt man $x' = 1$. Als Induktionsannahme dürfen wir $(x^n)' = nx^{n-1}$ verwenden. Aus der Produktregel folgt dann

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + xnx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

Damit ist die Ableitung eines Polynoms

$$\frac{d}{dx}\big(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0\big) = na_n x^{n-1} + \ldots + a_1.$$

Zur Bestimmung der Ableitung von x^{-n} verwenden wir die Quotientenregel

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

12.3 Kettenregel

Satz 12.6 *Seien I, J Intervalle mit $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ sowie $f(I) \subset J$. Ist f an der Stelle ξ und g an der Stelle $f(\xi)$ differenzierbar, so ist auch $h = g \circ f$, $h(x) = g(f(x))$, an der Stelle ξ differenzierbar mit*

$$h'(\xi) = g'\big(f(\xi)\big)f'(\xi) \quad \textit{(Kettenregel).}$$

Beweis: Sei zunächst $f'(\xi) \neq 0$. Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to \xi$ und $x_n \neq \xi$. Da f in ξ stetig ist, folgt $y_n = f(x_n) \to y = f(\xi)$. Wegen $f'(\xi) \neq 0$ folgt aus (12.1) $y_n \neq y$ für genügend große n. Durch Erweiterung des Differenzenquotienten um $f(x_n) - f(\xi) = y_n - y$ erhalten wir

$$\frac{h(x_n) - h(\xi)}{x_n - \xi} = \frac{(g(y_n) - g(y))(f(x_n) - f(\xi))}{(y_n - y)(x_n - \xi)} \;\to\; g'(y)\big|_{y=f(\xi)} f'(\xi).$$

Ist $f'(\xi) = 0$, so erhalten wir aus dem ersten Teil von Satz 12.4

$$\begin{aligned}\left|\frac{h(x) - h(\xi)}{x - \xi}\right| &= \left|\frac{g(f(x)) - g(f(\xi))}{x - \xi}\right| \\ &\leq K\left|\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}\right| \;\to\; 0 \quad \text{wegen } f'(\xi) = 0.\end{aligned}$$

▯

Beispiele 12.7 (i) Ist f differenzierbar, so bestimmen wir die Ableitung von f^n, indem wir $g(y) = y^n$ setzen. Aus der Kettenregel folgt dann

$$\frac{d}{dx}f^n(x) = \frac{d}{dy}y^n f'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x).$$

(ii) Die Ableitung von $\frac{1}{f}$ kann man ebenfalls aus der Kettenregel erschließen,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{d}{dy}y^{-1}f'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

▯

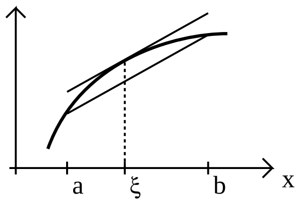
12.4 Mittelwertsätze

Satz 12.8 (Rolle) *f sei im Intervall $[a,b]$ stetig und in (a,b) differenzierbar mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es einen Punkt $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Beweis: Ist f konstant, so ist die Behauptung jedenfalls richtig. Ist f nicht konstant, so nimmt f in $\xi \in (a,b)$ das Maximum oder Minimum an. Ist ξ das Maximum, so gilt $f(\xi) \geq f(x)$ und aus dem Differenzenquotienten erschließen wir, dass $f'_-(\xi) \geq 0$ und $f'_+(\xi) \leq 0$, also $f'(\xi) = 0$. □

Satz 12.9 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
f sei im Intervall $[a,b]$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$



Beweis: Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$g(x) = f(x) - \alpha(x - a), \quad \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Es gilt $g(a) = g(b) = f(a)$. Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \alpha$, woraus die Behauptung folgt. □

Erfüllt f die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes und besitzt f' ein Vorzeichen im Intervall (a,b), so kann man auf das Monotonieverhalten der Funktion schließen:

(12.2) $$f'(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; f \text{ ist monoton wachsend,}$$

(12.3) $$f'(x) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; f \text{ ist monoton fallend,}$$

$$f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; f \text{ ist streng monoton wachsend,}$$

$$f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; f \text{ ist streng monoton fallend.}$$

Dabei erhalten wir die Implikation von links nach rechts, indem wir den Mittelwertsatz auf ein beliebiges Teilintervall anwenden. Die Implikation von rechts nach links folgt aus der Definition des Differenzenquotienten. Eine streng monoton wachsende Funktion muß nicht zwangsläufig $f'(x) > 0$ erfüllen, wie das Beispiel $f(x) = x^3$ zeigt.

Kombinieren wir (12.2) und (12.3), so erhalten wir eine weitere wichtige Folgerung aus dem Mittelwertsatz

(12.4) $$f'(x) = 0 \text{ in } (a,b) \;\Rightarrow\; f \text{ ist konstant in } (a,b).$$

12.5 Ableitung von Potenzreihen

Satz 12.10 *Die Potenzreihe $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist im Inneren ihres Konvergenzbereichs $|x| < R$ differenzierbar und darf dort gliedweise differenziert werden,*

$$p'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Für die Exponentialfunktion, deren Reihe ja auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert, erhalten wir mit diesem Satz

$$\frac{d}{dx} e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = e^x.$$

Entsprechend gilt für Sinus und Cosinus, deren Potenzreihen auf Seite 96 angegeben sind

$$\sin' x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) x^{2n}}{(2n+1)!} = \cos x,$$

$$\cos' x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{(2n)!} = -\sin x.$$

12.6 Ableitung der Umkehrfunktion

Satz 12.11 *f sei im Intervall I stetig und streng monoton. Ist die Umkehrfunktion $\phi = f^{(-1)}$ in $a = f(\xi)$ differenzierbar mit $\phi'(a) \neq 0$, so ist f in ξ differenzierbar mit*

$$f'(\xi) = \frac{1}{\phi'(a)} = \frac{1}{\phi'(f(\xi))}.$$

Beweis: Sei $x_n \to \xi$ mit $x_n \neq \xi$. Da f streng monoton ist, gilt $y_n = f(x_n) \neq f(\xi)$. Mit $\lim y_n = a$ folgt

$$\frac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi} = \frac{y_n - a}{\phi(y_n) - \phi(a)} \to \frac{1}{\phi'(a)}.$$

□

Beispiele 12.12 (i) $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ist die Umkehrfunktion von $\phi(y) = y^n$. Daher

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{-1+1/n}.$$

(ii) Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Daher für $x > 0$ und $y = \ln x$

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

(iii) Mit $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$ folgt damit für $x > 0$

$$(x^\alpha)' = \frac{d}{dx} \exp(\alpha \ln x) = \exp(\alpha \ln x) \cdot \frac{d}{dx} \alpha \ln x = \alpha x^\alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

□

Die Schreibweise

$$f' = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

erinnert uns daran, dass die Ableitung aus dem Grenzübergang des Differenzenquotienten hervorgegangen ist und es verwundert nicht, dass man mit den Symbolen df und dx so rechnen kann wie mit reellen Zahlen:

Kettenregel	$z(y(x)):$	$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$	(Erweiterung des Bruchs)
Umkehrfunktion	$x(y):$	$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{(y'(x)\big\|_{x=x(y)}}$	(Division des Bruchs)

Gleichzeitig macht diese Heuristik uns auf die Ähnlichkeit zwischen Kettenregel und der Ableitung der inversen Funktion aufmerksam. Rein formal können wir schreiben

$$x = \phi(f(x)) \Rightarrow 1 = x' = \phi'(f(x)) f'(x),$$

woraus die Ableitung der Inversen folgt. Alle diese Überlegungen sind natürlich nicht mathematisch streng zu verstehen, aber als Gedächtnisstütze nützlich.

12.7 Höhere Ableitungen Besitzt f eine Ableitung $f'(x)$, so ist auch f' eine Funktion in x, auf die die Definition der Ableitung angewendet werden kann. Für diese *höheren Ableitungen* schreiben wir

$$\frac{d}{dx}f = \frac{df}{dx} = f' = f^{(1)}, \quad \frac{d^n}{dx^n}f = f^{(n)} = \frac{d}{dx}f^{(n-1)}.$$

Beispiel 12.13 Für das Polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

erhalten wir

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1,$$

$$p''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \ldots + 2a_2$$

und schließlich $p^{(n)}(x) = n!a_n, \; p^{(n+1)}(x) = 0.$ □

12.8 Der Satz von Taylor Wir nennen eine Funktion *m-mal stetig differenzierbar*, wenn die Ableitungen bis zur Ordnung m existieren und stetig sind.

Satz 12.14 *Sei I ein Intervall und f sei für ein $n \in \mathbb{N}_0$ auf I $n+1$-mal stetig differenzierbar. Für $a, x \in I$ gilt die* Taylorentwicklung

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_n(x;a)$$

mit dem Restglied *nach* Lagrange

$$R_n(x;a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \quad \textit{für ein } \xi \in (a,x) \textit{ oder } \xi \in (x,a).$$

Beweis: Wir können $x > a$ annehmen, der Fall $x < a$ verläuft völlig analog. Setze

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - m\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

mit $t \in (a,x)$. Wir können m so wählen, dass $g(a) = 0$. Da auch $g(x) = 0$ gilt, gibt es nach dem Satz von Rolle ein $\xi \in (a,x)$ mit $g'(\xi) = 0$. Daher

$$\begin{aligned} 0 =& g'(\xi) = 0 - f'(\xi) - f''(\xi)(x-\xi) + f'(\xi) - \frac{f'''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 + f''(\xi)(x-\xi) - \ldots \\ & - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1} + m\frac{(x-\xi)^n}{n!} \\ =& - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + m\frac{(x-\xi)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Damit ist $m = f^{(n+1)}(\xi)$. Wir setzen in $g(t)$ den Wert $t = a$ ein und erhalten die behauptete Formel. □

Als Spezialfall bekommen wir für $n = 1$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(\xi)$$

den Mittelwertsatz.

Wir können
$$f(x) = T_n(x;a) + R_n(x;a)$$
schreiben mit dem *Taylorpolynom* $T_n(x;a)$ vom Grade $\leq n$ und dem Restglied $R_n(x;a)$. Ist das Intervall I beschränkt und abgeschlossen, so ist die stetige Funktion $f^{(n+1)}$ beschränkt und das Restglied lässt sich in der Form
$$|R_n(x;a)| \leq c|x-a|^{n+1}$$
abschätzen. Der Satz von Taylor besagt demnach, dass man eine $n+1$-mal stetig differenzierbare Funktion durch ein Polynom vom Grad $\leq n$ bis auf einen Fehler approximieren kann.

Häufig schreibt man in der Taylorentwicklung h statt $x-a$:
$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + R_n(x;a)$$
mit dem Restglied
$$R_n(h;a) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\xi) \quad \text{für ein } \xi \in (0,h).$$

Beispiele 12.15 (i) Für kleines $|h|$ verwenden Ingenieure
$$\sqrt{1+h} \sim 1 + \frac{1}{2}h.$$
Um dies einzusehen, entwickeln wir die Wurzelfunktion nach Taylor. Mit
$$\big(\sqrt{x}\big)' = \frac{1}{2}x^{-1/2}, \quad \big(\sqrt{x}\big)'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2}.$$
liefert die Taylor-Formel für $n=1$ und Entwicklungspunkt $a=1$
$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}(1+\xi)^{-3/2}h^2.$$
mit $0<\xi<h$ für $h>0$ und $h<\xi<0$ für $h<0$. Für $h>0$ können wir das Restglied abschätzen durch
$$\Big| -\frac{1}{8}(1+\xi)^{-3/2}h^2\Big| \leq \frac{h^2}{8}.$$

(ii) Es gilt
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\ln x)'' = -\frac{1}{x^2},$$
also
$$\ln(1+h) = \ln 1 + \frac{1}{1}h - \frac{1}{2}\frac{h^2}{(1+\xi)^2}.$$
Da das Restglied ein Vorzeichen besitzt, erhalten wir mit $\ln 1 = 0$ die Ungleichung
$$\ln(1+h) \leq h \quad \text{für } -1 < h < \infty.$$

(iii) Wir wollen die Funktion
$$f(x) = (2x + x^2)e^{-x}$$
durch das Taylorpolynom 2. Grades approximieren. Mit
$$f'(x) = -(2x+x^2)e^{-x} + (2+2x)e^{-x} = (2-x^2)e^{-x}$$
$$f''(x) = -(2-x^2)e^{-x} - 2xe^{-x} = (-2-2x+x^2)e^{-x}$$
$$f'''(x) = -(-2-2x+x^2)e^{-x} + (-2+2x)e^{-x} = (4x-x^2)e^{-x}$$

erhalten wir für das Taylorpolynom 2. Ordnung mit Entwicklungspunkt $a = 0$

$$T_2(x;0) = 2x - x^2.$$

Auf dem Intervall $[0,1]$ können wir das Restglied folgendermaßen mit einem $\xi \in (0,x)$ abschätzen:

$$|R_2(x;0)| = \frac{x^3}{6}|f'''(\xi)| \leq \frac{x^3}{6}|4\xi - \xi^2|e^{-\xi}$$

Es gilt $e^{-\xi} \leq 1$ auf dem Intervall $[0,x]$. Die Funktion $g(\xi) = 4\xi - \xi^2$ ist auf dem Intervall $[0,1]$ nichtnegativ und streng monoton steigend. Mit $0 \leq g(\xi) \leq g(x)$ folgt daher

$$|R_2(x;0)| \leq \frac{x^3}{6}(4x - x^2) \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1.$$

□

12.9 Die Landauschen Symbole Seien f, g in einer Umgebung des Punktes ξ definiert. Wir sagen f ist gleich groß O von g und schreiben

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to \xi,$$

wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M \quad \text{in einer Umgebung von } \xi.$$

Wir sagen f ist gleich klein o von g und schreiben

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to \xi,$$

wenn

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Wenn beispielsweise $\lim_{x\to\xi} g(x) = 0$, so bedeutet

$$f = O(g) \quad f \text{ geht so schnell oder schneller gegen Null als } g,$$

$$f = o(g) \quad f \text{ geht schneller gegen Null als } g.$$

Man nennt O und o die *Landauschen Symbole*. Die Bezeichnungen O und o werden sinngemäß auch für $\pm\infty$ angewendet. Beispielsweise bedeutet $f(x) = O(x^n)$, $x \to \infty$, dass es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $|f(x)| \leq Mx^n$ für genügend große x.

Die Landauschen Symbole gestatten suggestive Schreibweisen, weil sie den Approximations- oder Wachstumsaspekt hervorheben. Die Ableitung

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'(\xi) \tag{12.5}$$

lässt sich äquivalent schreiben

$$f(x) - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) + h(x) \tag{12.6}$$

mit einer Funktion $h(x) = o(|x - \xi|)$, denn wenn wir in (12.6) durch $x - \xi$ teilen, konvergiert der Ausdruckt $h(x)/(x - \xi)$ immer noch gegen Null und wir erhalten (12.5). Statt (12.6) schreibt man noch kürzer

$$f(x) - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) + o(|x - \xi|).$$

Wenn es in der Taylorentwicklung nicht auf die explizite Gestalt des Restglieds ankommt, verwendet man auch die Schreibweise

$$f(x) = T_n(x;a) + O(|x-a|^{n+1}),$$

das Taylorpolynom approximiert f bis auf einen Fehler der Ordnung $O(|x-a|^{n+1})$.

Unbestimmte Ausdrücke der Form $f(x)/g(x)$ mit $f(x), g(x) \to 0$ für $x \to \xi$ untersucht man am besten mit Hilfe der Taylorentwicklung um den Punkt ξ unter Verwendung der Landauschen Symbole.

Für $\sin x/x$ ist $\sin x = x + O(x^3)$ und daher

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + O(x^3)}{x} = 1.$$

Beispiel 12.16 Wir bestimmen für $a \in \mathbb{R}$

$$L(a) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x\sin x}{\sqrt{1-x^2} + ax^2 - 1}.$$

Dieser Ausdruck ist von der Form „$\frac{0}{0}$“. Für die Exponentialfunktion im Zähler verwenden wir

$$e^{-t} = 1 - t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$$

und erhalten damit für den Zähler insgesamt

$$e^{-x^2} - 1 + x\sin x = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + O(x^6) - 1 + x(x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)) = \frac{1}{3}x^4 + O(x^6).$$

Für den Wurzelausdruck liefert Taylorentwicklung

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3),$$

für den Nenner gilt daher

$$1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + O(x^6) + ax^2 - 1 = (a - \frac{1}{2})x^2 - \frac{1}{8}x^4 + O(x^6).$$

Damit ist $L(a) = 0$ für $a \neq \frac{1}{2}$ und $L(a) = \frac{8}{3}$ für $a = \frac{1}{2}$. □

12.10 Relative Extrema Eine Funktion f sei in einer Umgebung des Punktes ξ definiert. ξ heißt *relatives Minimum* von f, wenn es eine Umgebung U von ξ gibt mit $f(\xi) \le f(x)$ für alle $x \in U$. In einem *relativen Maximum* gilt analog $f(\xi) \ge f(x)$. Ein Minimum oder Maximum heißt *strikt*, wenn statt $\le$ oder $\ge$ die strikte Ungleichung gilt. Zu beachten ist bei dieser Definition, dass f mindestens in einem Intervall $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ definiert sein muss. Liegt der Extremwert am Rande des Definitionsbereichs von f, so sprechen wir von einem *einseitigen* Minimum oder Maximum.

Satz 12.17 (Notwendige Bedingungen für einen Extremwert) *Die Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ besitze in $\xi \in (a,b)$ ein relatives Minimum oder Maximum.*

(a) *Ist f einmal stetig differenzierbar, so gilt $f'(\xi) = 0$.*

(b) *Ist f zweimal stetig differenzierbar, so gilt zusätzlich*

$$f''(\xi) \ge 0 \text{ falls } \xi \text{ Minimum}, \quad f''(\xi) \le 0 \text{ falls } \xi \text{ Maximum}.$$

Beweis: (a) Sei ξ ein relatives Minimum. Für $h > 0$ gilt dann

$$\frac{1}{h}(f(\xi + h) - f(\xi)) \geq 0, \quad \frac{1}{-h}(f(\xi - h) - f(\xi)) \leq 0.$$

Durch Grenzübergang folgt $f'(\xi) = 0$.

(b) Für ein relatives Minimum ξ gilt nach (a) $f'(\xi) = 0$. Die Taylor-Entwicklung für $n = 1$ lautet daher

$$f(x) = f(\xi) + \frac{1}{2} f''(a)(x - \xi)^2, \quad a \in (x, \xi),$$

daher

$$0 \leq f(x) - f(\xi) = \frac{1}{2} f''(a)(x - \xi)^2, \quad a \in (x, \xi).$$

Für eine Folge (x_n) mit $x_n \to \xi$ folgt für die zugehörigen a_n, dass $a_n \to \xi$. Wegen der Stetigkeit von f'' erhalten wir $f''(\xi) \geq 0$. $\square$

Satz 12.18 (Hinreichende Bedingung für einen Extremwert) *Für die zweimal stetig differenzierbare Funktion f seien in $\xi \in (a, b)$ die Bedingungen $f'(\xi) = 0$ sowie $f''(\xi) > 0$ ($f''(\xi) < 0$) erfüllt. Dann besitzt f in ξ ein striktes relatives Minimum (Maximum).*

Beweis: Ähnlich wie im Beweis von Satz 12.10(b) bekommen wir aus der Taylorentwicklung um den Punkt ξ wegen $f'(\xi) = 0$,

$$f(x) - f(\xi) = \frac{1}{2} f''(a)(x - \xi)^2, \quad a \in (x, \xi).$$

Ist nun $f''(\xi) > 0$, so ist wegen der Stetigkeit von f'' auch $f''(a) > 0$ für alle a in einer genügend kleinen Umgebung von ξ. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Bei einseitigen Extremwerten gibt es nur notwendige und hinreichende Bedingungen erster Ordnung, also nur für die erste Ableitung von f. Besitzt ein einmal stetig differenzierbares f ein Minimum an der Stelle a, so folgt für $h > 0$ $f(a + h) - f(a) \geq 0$ und damit $f'(a) \geq 0$. Gilt $f'(a) > 0$, so folgt aus dem Differenzenquotienten, dass f in a ein striktes relatives Minimum besitzt. Zu beachten ist dabei, dass die Vorzeichen für den rechten Randpunkt sich umkehren.

Bei der Bestimmung der globalen Extremwerte einer differenzierbaren Funktion sind alle Nullstellen der ersten Ableitungen und die Randpunkte zu untersuchen, bei unbeschränktem Definitionsbereich zusätzlich das Verhalten im Unendlichen.

Beispiel 12.19 Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{x + 1} \quad \text{in } I = (-1, \infty).$$

Es gilt für $x > -1$

$$f'(x) = \frac{2x}{x + 1} - \frac{x^2}{(x + 1)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x(x + 1) - x^2 = 0$$

mit einziger Lösung $x = 0$ in I. Da $f' < 0$ in $(-1, 0)$ und $f' > 0$ in $(0, \infty)$, ist f ist streng monoton fallend in $(-1, 0)$ und streng monoton wachsend in $(0, \infty)$. $x = 0$ ist daher das globale Minimum. Klar ist $\lim_{x \to -1+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. $\square$