11 Funktionen und Stetigkeit

Stetige Funktionen sind die konvergenzerhaltenden Funktionen,

$$x_n \to \xi \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(\xi).$$

Stetige Funktionen sind die konvergenzerhaltenden Funktionen,

$$x_n \to \xi \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(\xi).$$

Weil Konvergenz der Grundbegriff der Analysis ist, sind stetige Funktionen so wichtig.

11 Funktionen und Stetigkeit

Stetige Funktionen sind die konvergenzerhaltenden Funktionen,

$$x_n \to \xi \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(\xi).$$

Weil Konvergenz der Grundbegriff der Analysis ist, sind stetige Funktionen so wichtig.

Themen:

- Stetigkeit
- Annahme von Minimum und Maximum
- Potenzreihen
- Exponentialfunktion und Logarithmus
- Trigonometrische Funktionen

11.1 Beispiele von Funktionen

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt *Funktion*. $D \subset \mathbb{R}$ heißt *Definitionsbereich*.

11.1 Beispiele von Funktionen

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt *Funktion*. $D \subset \mathbb{R}$ heißt *Definitionsbereich*.

$$\mathcal{R}(f) = f(D) = \{y = f(x) \text{ für ein } x \in D\}$$

heißt *Wertebereich*.

11.1 Beispiele von Funktionen

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt *Funktion*. $D \subset \mathbb{R}$ heißt *Definitionsbereich*.

$$\mathcal{R}(f) = f(D) = \{y = f(x) \text{ für ein } x \in D\}$$

heißt *Wertebereich*.

Gilt $f(x) = 0$, so heißt x *Nullstelle* von f.

11.1 Beispiele von Funktionen

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt *Funktion*. $D \subset \mathbb{R}$ heißt *Definitionsbereich*.

$$\mathcal{R}(f) = f(D) = \{y = f(x) \text{ für ein } x \in D\}$$

heißt *Wertebereich*.

Gilt $f(x) = 0$, so heißt x *Nullstelle* von f.

Meist ist D ein Intervall oder die Vereinigung von Intervallen.

Polynome

Seien $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ reelle Zahlen. Dann heißt

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Polynom.

Polynome

Seien $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ reelle Zahlen. Dann heißt

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Polynom.

Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der *Grad* von p und wir schreiben $\operatorname{grad} p = n$.

Polynome

Seien $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ reelle Zahlen. Dann heißt

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Polynom.

Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der *Grad* von p und wir schreiben $\operatorname{grad} p = n$.

Was ist der Wertebereich eines Polynoms $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Polynome

Seien $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ reelle Zahlen. Dann heißt

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Polynom.

Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der *Grad* von p und wir schreiben $\operatorname{grad} p = n$.

Was ist der Wertebereich eines Polynoms $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Ist $\operatorname{grad} p$ ungerade, so $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (wird noch bewiesen).

Polynome

Seien $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ reelle Zahlen. Dann heißt

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Polynom.

Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der *Grad* von p und wir schreiben $\operatorname{grad} p = n$.

Was ist der Wertebereich eines Polynoms $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Ist $\operatorname{grad} p$ ungerade, so $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (wird noch bewiesen).
Ist $\operatorname{grad} p \geq 2$ gerade, so $p(D) = [a, \infty)$ oder $(-\infty, a]$ für ein $a \in \mathbb{R}$.

Sind $p(x)$ und $q(x)$ Polynome, so heißt $r(x) = \dfrac{q(x)}{p(x)}$ *rationale Funktion*.

Sind $p(x)$ und $q(x)$ Polynome, so heißt $r(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$ *rationale Funktion*.

Eine rationale Funktion ist außerhalb der Nullstellen des Nennerpolynoms $p(x)$ definiert.

Rationale und algebraische Funktionen

Sind $p(x)$ und $q(x)$ Polynome, so heißt $r(x) = \dfrac{q(x)}{p(x)}$ *rationale Funktion*.

Eine rationale Funktion ist außerhalb der Nullstellen des Nennerpolynoms $p(x)$ definiert.

Eine Funktion, die sich aus Wurzelausdrücken und rationalen Funktionen zusammensetzt, heißt *algebraische Funktion*.

Beispiel: $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Rationale und algebraische Funktionen

Sind $p(x)$ und $q(x)$ Polynome, so heißt $r(x) = \dfrac{q(x)}{p(x)}$ *rationale Funktion*.

Eine rationale Funktion ist außerhalb der Nullstellen des Nennerpolynoms $p(x)$ definiert.

Eine Funktion, die sich aus Wurzelausdrücken und rationalen Funktionen zusammensetzt, heißt *algebraische Funktion*.

Beispiel: $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Beim Definitionsbereich algebraischer Funktionen ist zu beachten, dass Wurzeln nur aus nichtnegativen Zahlen gezogen werden. In unserem Beispiel ist daher $D = [-1, 1]$.

11.2 Grenzwerte von Funktionen

Häufungspunkt einer Zahlenfolge: a hieß Häufungspunkt der Folge (a_n), wenn in jeder Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen.

Häufungspunkt einer Zahlenfolge: a hieß Häufungspunkt der Folge (a_n), wenn in jeder Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen.

Ist $A \subset \mathbb{R}$, so heißt $a \in \mathbb{R}$ *Häufungspunkt von A*, wenn in jeder ε-Umgebung $B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ unendlich viele Punkte von A liegen.

Häufungspunkt einer Zahlenfolge: a hieß Häufungspunkt der Folge (a_n), wenn in jeder Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen.

Ist $A \subset \mathbb{R}$, so heißt $a \in \mathbb{R}$ *Häufungspunkt von* A, wenn in jeder ε-Umgebung $B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ unendlich viele Punkte von A liegen.

Aufgaben: Welche Häufungspunkte hat

$$M = \left\{ \pm \frac{1}{n} : \; n \in \mathbb{N} \right\} ?$$

Häufungspunkt einer Zahlenfolge: a hieß Häufungspunkt der Folge (a_n), wenn in jeder Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen.

Ist $A \subset \mathbb{R}$, so heißt $a \in \mathbb{R}$ *Häufungspunkt von A*, wenn in jeder ε-Umgebung $B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ unendlich viele Punkte von A liegen.

Aufgaben: Welche Häufungspunkte hat

$$M = \left\{ \pm \frac{1}{n} : \; n \in \mathbb{N} \right\} ?$$

Welche Häufungspunkte hat $\mathbb{Q}$?

Grenzwerte von Funktionen

Sei ξ Häufungspunkt des Definitionsbereichs D der Funktion f.

Sei ξ Häufungspunkt des Definitionsbereichs D der Funktion f.

f konvergiert gegen a für $x \to \xi$, geschrieben

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = a \quad \text{oder} \quad f(x) \to a \text{ für } x \to \xi,$$

wenn für alle Folgen (x_n) mit $x_n \to \xi$ und $x_n \neq \xi$ gilt $f(x_n) \to a$.

Sei ξ Häufungspunkt des Definitionsbereichs D der Funktion f.

f konvergiert gegen a für $x \to \xi$, geschrieben

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = a \quad \text{oder} \quad f(x) \to a \text{ für } x \to \xi,$$

wenn für alle Folgen (x_n) mit $x_n \to \xi$ und $x_n \neq \xi$ gilt $f(x_n) \to a$.

In dieser Definition sind $\xi \in D$ oder $\xi \notin D$ erlaubt.

Sei ξ Häufungspunkt des Definitionsbereichs D der Funktion f.

f *konvergiert gegen* a *für* $x \to \xi$, geschrieben

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = a \quad \text{oder} \quad f(x) \to a \text{ für } x \to \xi,$$

wenn für alle Folgen (x_n) mit $x_n \to \xi$ und $x_n \neq \xi$ gilt $f(x_n) \to a$.

In dieser Definition sind $\xi \in D$ oder $\xi \notin D$ erlaubt.

Schreibe $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$, wenn für jede Folge (x_n), die bestimmt gegen ∞ divergiert, gilt $\lim f(x_n) = a$.

Aufgaben

Sei $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ für $x \neq -1$.

Was ist $\lim_{x\to 0} f(x)$?

Aufgaben

Sei $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ für $x \neq -1$.

Was ist $\lim_{x\to 0} f(x)$?

Für $x \geq -\frac{1}{2}$ gilt

$$\left|\frac{x}{1+x} - 0\right| \leq 2|x| \;\to\; 0, \quad x \to 0,$$

also $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Aufgaben

Sei $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ für $x \neq -1$.

Was ist $\lim_{x\to 0} f(x)$?

Für $x \geq -\frac{1}{2}$ gilt

$$\left|\frac{x}{1+x} - 0\right| \leq 2|x| \ \to \ 0, \quad x \to 0,$$

also $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Was ist $\lim_{x\to\infty} f(x)$?

Aufgaben

Sei $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ für $x \neq -1$.

Was ist $\lim_{x\to 0} f(x)$?

Für $x \geq -\frac{1}{2}$ gilt

$$\left|\frac{x}{1+x} - 0\right| \leq 2|x| \;\to\; 0, \quad x \to 0,$$

also $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Was ist $\lim_{x\to\infty} f(x)$?

$f(x) \to 1$ wegen

$$\left|\frac{x}{1+x} - 1\right| = \left|\frac{-1}{1+x}\right| \;\to\; 0, \quad x \to \infty.$$

11.3 Stetigkeit von Funktionen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt *stetig* in $\xi \in D$, wenn:

$$\text{Für jede Folge } (x_n) \text{ mit } x_n \to \xi \quad \text{gilt} \quad f(x_n) \to f(\xi).$$

11.3 Stetigkeit von Funktionen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt *stetig* in $\xi \in D$, wenn:

$$\text{Für jede Folge } (x_n) \text{ mit } x_n \to \xi \ \text{ gilt } \ f(x_n) \to f(\xi).$$

f heißt *stetig in D*, wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.

11.3 Stetigkeit von Funktionen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt *stetig* in $\xi \in D$, wenn:

$$\text{Für jede Folge } (x_n) \text{ mit } x_n \to \xi \quad \text{gilt} \quad f(x_n) \to f(\xi).$$

f heißt *stetig in D*, wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch:

Ist $\xi \in D$ kein Häufungspunkt von D, so ist jede Funktion in ξ stetig.

11.3 Stetigkeit von Funktionen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt *stetig* in $\xi \in D$, wenn:

$$\text{Für jede Folge } (x_n) \text{ mit } x_n \to \xi \;\text{ gilt }\; f(x_n) \to f(\xi).$$

f heißt *stetig in D*, wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch:

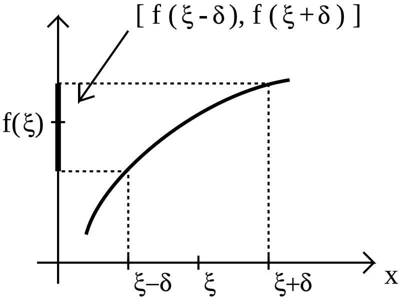
Ist $\xi \in D$ kein Häufungspunkt von D, so ist jede Funktion in ξ stetig.

Ist ξ Häufungspunkt von D und existiert $lim_{x \to \xi} f(x)$, so ist f in ξ stetig.

Ist ξ Häufungspunk von D, so

$$f \text{ stetig in } \xi \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to\xi} f(x) \text{ existiert und stimmt mit } f(\xi) \text{ überein.}$$

$\varepsilon - \delta$-Kriterium für die Stetigkeit



Satz Die Funktion f ist genau dann stetig in $\xi \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - \xi| < \delta$ folgt

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

$\varepsilon - \delta$-Kriterium für die Stetigkeit

Satz Die Funktion f ist genau dann stetig in $\xi \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - \xi| < \delta$ folgt

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

$\varepsilon - \delta$-Kriterium für die Stetigkeit

Satz Die Funktion f ist genau dann stetig in $\xi \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - \xi| < \delta$ folgt

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Oder formal (Horror!):

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D \; \big(|x - \xi| < \delta \; \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon\big).$$

Satz Die Funktion f ist genau dann stetig in $\xi \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - \xi| < \delta$ folgt

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Oder formal (Horror!):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \ \big(|x - \xi| < \delta \ \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon\big).$$

Formulieren Sie: f ist in ξ nicht stetig (=unstetig).

Beweis

Sei f stetig in ξ. Angenommen, die Bedingung des Satzes ist nicht erfüllt.

Beweis

Sei f stetig in ξ. Angenommen, die Bedingung des Satzes ist nicht erfüllt.

Wir müssen diese Bedingung korrekt verneinen:

Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $x_\delta \in D$ existiert mit $|x_\delta - \xi| < \delta$ und $|f(x_\delta) - f(\xi)| \geq \varepsilon$.

Beweis

Sei f stetig in ξ. Angenommen, die Bedingung des Satzes ist nicht erfüllt.

Wir müssen diese Bedingung korrekt verneinen:

Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $x_\delta \in D$ existiert mit $|x_\delta - \xi| < \delta$ und $|f(x_\delta) - f(\xi)| \geq \varepsilon$.

Speziell können wir hier $\delta = \frac{1}{n}$ wählen und x_δ nennen wir x_n.

Beweis

Sei f stetig in ξ. Angenommen, die Bedingung des Satzes ist nicht erfüllt.

Wir müssen diese Bedingung korrekt verneinen:

Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $x_\delta \in D$ existiert mit $|x_\delta - \xi| < \delta$ und $|f(x_\delta) - f(\xi)| \geq \varepsilon$.

Speziell können wir hier $\delta = \frac{1}{n}$ wählen und x_δ nennen wir x_n.

Dann gilt $x_n \to \xi$, aber $f(x_n) \not\to f(\xi)$. Widerspruch!

Beweis

Umgekehrte Richtung: Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to \xi$.

Beweis

Umgekehrte Richtung: Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to \xi$.

Die ε-δ-Bedingung heißt: Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|x - \xi| < \delta$ gerade $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ impliziert.

Beweis

Umgekehrte Richtung: Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to \xi$.

Die ε-δ-Bedingung heißt: Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|x - \xi| < \delta$ gerade $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ impliziert.

Wegen $x_n \to \xi$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - \xi| < \delta$ für alle $n \geq N$.

Beweis

Umgekehrte Richtung: Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to \xi$.

Die ε-δ-Bedingung heißt: Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|x - \xi| < \delta$ gerade $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ impliziert.

Wegen $x_n \to \xi$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - \xi| < \delta$ für alle $n \geq N$.

Daher $|f(x_n) - f(\xi)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und $f(x_n) \to f(\xi)$.

Beispiele

(i) Jede konstante Funktion ist stetig, denn wenn $f(x) = a$ für alle $x \in D$, so folgt aus $x_n \to \xi$, dass $a = f(x_n) = f(\xi)$.

Beispiele

(i) Jede konstante Funktion ist stetig, denn wenn $f(x) = a$ für alle $x \in D$, so folgt aus $x_n \to \xi$, dass $a = f(x_n) = f(\xi)$.

(ii) Die Funktion $f(x) = x$ ist stetig, denn wenn $x_n \to \xi$, so trivialerweise $x_n = f(x_n) \to f(\xi) = \xi$.

Aufgaben

(a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ stetig?

(a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ stetig?

Für $x \neq 0$ stimmt $|x|$ mit mit $-x$ oder x überein. Beide Funktionen sind stetig.

Aufgaben

(a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ stetig?

Für $x \neq 0$ stimmt $|x|$ mit mit $-x$ oder x überein. Beide Funktionen sind stetig.

Für $\xi = 0$: Ist $x_n \to 0$, so auch $|x_n| \to 0$.

(a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ stetig?

Für $x \neq 0$ stimmt $|x|$ mit mit $-x$ oder x überein. Beide Funktionen sind stetig.

Für $\xi = 0$: Ist $x_n \to 0$, so auch $|x_n| \to 0$.

(b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$ stetig?

Aufgaben

(a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ stetig?

Für $x \neq 0$ stimmt $|x|$ mit mit $-x$ oder x überein. Beide Funktionen sind stetig.

Für $\xi = 0$: Ist $x_n \to 0$, so auch $|x_n| \to 0$.

(b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$ stetig?

Für Folgen (x_n) mit $x_n \nearrow 0$ folgt $f(x_n) \to -1$ und für Folgen mit $x_n \searrow 0$ gilt $f(x_n) \to 1$. Dagegen ist $f(0) = 0$.

Aufgaben

(a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ stetig?

Für $x \neq 0$ stimmt $|x|$ mit mit $-x$ oder x überein. Beide Funktionen sind stetig.

Für $\xi = 0$: Ist $x_n \to 0$, so auch $|x_n| \to 0$.

(b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$ stetig?

Für Folgen (x_n) mit $x_n \nearrow 0$ folgt $f(x_n) \to -1$ und für Folgen mit $x_n \searrow 0$ gilt $f(x_n) \to 1$. Dagegen ist $f(0) = 0$.

Also: Die einseitigen Grenzwerte existieren, sind verschieden und stimmen beide nicht mit $f(0)$ überein.

(a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ stetig?

Für $x \neq 0$ stimmt $|x|$ mit mit $-x$ oder x überein. Beide Funktionen sind stetig.

Für $\xi = 0$: Ist $x_n \to 0$, so auch $|x_n| \to 0$.

(b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$ stetig?

Für Folgen (x_n) mit $x_n \nearrow 0$ folgt $f(x_n) \to -1$ und für Folgen mit $x_n \searrow 0$ gilt $f(x_n) \to 1$. Dagegen ist $f(0) = 0$.

Also: Die einseitigen Grenzwerte existieren, sind verschieden und stimmen beide nicht mit $f(0)$ überein.

Dieses Argument kann auf alle Funktionen mit einer „Sprungstelle“ wie etwa stückweise konstante Funktionen übertragen werden.

(c) Die *Dirichlet-Funktion* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \text{ rational} \\ 0 & \text{für } x \text{ irrational} \end{cases} .$$

Ist f stetig?

(c) Die *Dirichlet-Funktion* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \text{ rational} \\ 0 & \text{für } x \text{ irrational} \end{cases} .$$

Ist f stetig?

f ist in jedem Punkt unstetig. Denn ist ξ irrational, so gibt es nach einem Satz eine Folge rationaler Zahlen (x_n) mit $x_n \to \xi$ und daher $1 = f(x_n) \not\to f(\xi) = 0$.

(c) Die *Dirichlet-Funktion* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \text{ rational} \\ 0 & \text{für } x \text{ irrational} \end{cases} .$$

Ist f stetig?

f ist in jedem Punkt unstetig. Denn ist ξ irrational, so gibt es nach einem Satz eine Folge rationaler Zahlen (x_n) mit $x_n \to \xi$ und daher $1 = f(x_n) \not\to f(\xi) = 0$.

Ist ξ dagegen rational, so ist beispielsweise $x_n = \xi + \sqrt{2}/n$ irrational mit $x_n \to \xi$ und es folgt $0 = f(x_n) \not\to f(\xi) = 1$.

(d) Sei $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \text{ irrational} \\ \dfrac{1}{k} & \text{für } x = \frac{k}{l} \text{ mit } k, l \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \end{cases} .$$

(d) Sei $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \text{ irrational} \\ \dfrac{1}{k} & \text{für } x = \frac{k}{l} \text{ mit } k, l \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \end{cases} .$$

f ist in jedem rationalen Punkt unstetig. Denn wie zuvor gezeigt wurde, gibt es zu jeder rationalen Zahl ξ eine Folge von Irrationalzahlen (x_n) mit $x_n \to \xi$, aber $0 = f(x_n) \not\to f(\xi) > 0$.

(d) Sei $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \text{ irrational} \\ \dfrac{1}{k} & \text{für } x = \frac{k}{l} \text{ mit } k, l \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \end{cases} .$$

f ist in jedem rationalen Punkt unstetig. Denn wie zuvor gezeigt wurde, gibt es zu jeder rationalen Zahl ξ eine Folge von Irrationalzahlen (x_n) mit $x_n \to \xi$, aber $0 = f(x_n) \not\to f(\xi) > 0$.

Ist ξ irrational, so betrachte eine Folge rationaler Zahlen $x_n = \frac{k_n}{l_n}$ mit $x_n \to \xi$.

(d) Sei $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \text{ irrational} \\ \dfrac{1}{k} & \text{für } x = \frac{k}{l} \text{ mit } k, l \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \end{cases} .$$

f ist in jedem rationalen Punkt unstetig. Denn wie zuvor gezeigt wurde, gibt es zu jeder rationalen Zahl ξ eine Folge von Irrationalzahlen (x_n) mit $x_n \to \xi$, aber $0 = f(x_n) \not\to f(\xi) > 0$.

Ist ξ irrational, so betrachte eine Folge rationaler Zahlen $x_n = \frac{k_n}{l_n}$ mit $x_n \to \xi$.

Da es nur endlich viele Zahlen der Form $\frac{k}{l}$ mit $k, l \le K$ gibt, muss zwangsläufig k_n bestimmt gegen unendlich divergieren. Daher ist f in jedem irrationalen Punkt stetig.

Aufgabe

Zwei stetige Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stimmen in allen rationalen Punkten überein. Gilt $f = g$?

Aufgabe

Zwei stetige Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stimmen in allen rationalen Punkten überein. Gilt $f = g$?

Aufgrund der g-adischen Entwicklung läßt sich jede reelle Zahl x als Limes einer rationalen Folge (r_n) darstellen.

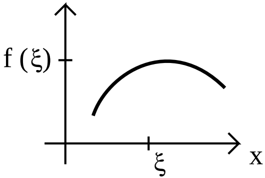
Aufgabe

Zwei stetige Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stimmen in allen rationalen Punkten überein. Gilt $f = g$?

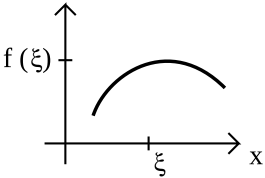
Aufgrund der g-adischen Entwicklung läßt sich jede reelle Zahl x als Limes einer rationalen Folge (r_n) darstellen.

Aus $r_n \to x$ folgt $f(r_n) \to f(x)$. Wegen $f(r_n) = g(r_n)$ gilt $f(x) = g(x)$.

Permanenz des Vorzeichens



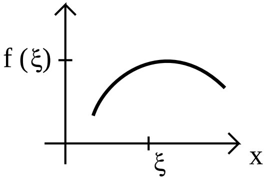
Anschaulich bedeutet die Stetigkeit einer Funktion, dass man ihren Graphen in einem Zug, ohne abzusetzen, zeichnen kann.



Anschaulich bedeutet die Stetigkeit einer Funktion, dass man ihren Graphen in einem Zug, ohne abzusetzen, zeichnen kann.

Gilt für eine in ξ stetige Funktion f, dass $f(\xi) > 0$, so gibt es eine Umgebung $B_\varepsilon(\xi) = (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ mit $f(x) > 0$ für alle $x \in B_\varepsilon(\xi)$.

Permanenz des Vorzeichens



Anschaulich bedeutet die Stetigkeit einer Funktion, dass man ihren Graphen in einem Zug, ohne abzusetzen, zeichnen kann.

Gilt für eine in ξ stetige Funktion f, dass $f(\xi) > 0$, so gibt es eine Umgebung $B_\varepsilon(\xi) = (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ mit $f(x) > 0$ für alle $x \in B_\varepsilon(\xi)$.

Andernfalls gäbe es in jedem $B_{1/n}(\xi)$ ein x_n mit $f(x_n) \leq 0$. Diese x_n bilden eine Folge mit $x_n \to \xi$ und $f(x_n) \to f(\xi) > 0$. Widerspruch!

Halbseitige Stetigkeit

Wir nennen eine Funktion *von rechts stetig*, wenn die Einschränkung von f auf die Menge

$$D^+ = \{x \in D : x \geq \xi\}$$

in ξ stetig ist.

Halbseitige Stetigkeit

Wir nennen eine Funktion *von rechts stetig*, wenn die Einschränkung von f auf die Menge

$$D^+ = \{x \in D : x \geq \xi\}$$

in ξ stetig ist.

In diesem Fall schreiben wir

$$f(\xi+) = f(\xi + 0) = \lim_{x \to \xi+} f(x) = \lim_{x \searrow \xi} f(x).$$

Beispiel

Die Funktion

$$f(x) = [x] = \text{größte ganze Zahl} \leq x$$

Beispiel

Die Funktion

$$f(x) = [x] = \text{größte ganze Zahl} \leq x$$

ist für jedes $p \in \mathbb{Z}$ unstetig, wegen $f(p+) = p$ ist sie in jedem Punkt von rechts stetig.

11.4 Stetigkeit und arithmetische Operationen

Satz Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so sind auch $\alpha f + \beta g$, fg und, sofern $g \neq 0$ in D, auch f/g stetig.

11.4 Stetigkeit und arithmetische Operationen

Satz Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so sind auch $\alpha f + \beta g$, fg und, sofern $g \neq 0$ in D, auch f/g stetig.

Ist f auf dem Bildbereich von g definiert und stetig, so ist auch die Komposition $f \circ g(x) = f(g(x))$ stetig.

Beweis

Ist $x_n \to \xi$, so gilt $f(x_n) \to f(\xi)$, $g(x_n) \to g(\xi)$.

Beweis

Ist $x_n \to \xi$, so gilt $f(x_n) \to f(\xi)$, $g(x_n) \to g(\xi)$.

Aus den Regeln für die Konvergenz von Zahlenfolgen folgt dann, dass

$$\alpha f(x_n) + \beta g(x_n) \to \alpha f(\xi) + \beta g(\xi),$$

$$f(x_n) g(x_n) \to f(\xi) g(\xi),$$

$$f(x_n)/g(x_n) \to f(\xi)/g(\xi).$$

Beweis

Ist $x_n \to \xi$, so gilt $f(x_n) \to f(\xi)$, $g(x_n) \to g(\xi)$.

Aus den Regeln für die Konvergenz von Zahlenfolgen folgt dann, dass

$$\alpha f(x_n) + \beta g(x_n) \to \alpha f(\xi) + \beta g(\xi),$$

$$f(x_n) g(x_n) \to f(\xi) g(\xi),$$

$$f(x_n)/g(x_n) \to f(\xi)/g(\xi).$$

Ist f auf dem Bildbereich von g stetig, so folgt aus $x_n \to \xi$, dass $g(x_n) \to g(\xi)$.

Beweis

Ist $x_n \to \xi$, so gilt $f(x_n) \to f(\xi)$, $g(x_n) \to g(\xi)$.

Aus den Regeln für die Konvergenz von Zahlenfolgen folgt dann, dass

$$\alpha f(x_n) + \beta g(x_n) \to \alpha f(\xi) + \beta g(\xi),$$

$$f(x_n)g(x_n) \to f(\xi)g(\xi),$$

$$f(x_n)/g(x_n) \to f(\xi)/g(\xi).$$

Ist f auf dem Bildbereich von g stetig, so folgt aus $x_n \to \xi$, dass $g(x_n) \to g(\xi)$.

Für die Folge $(g(x_n))$ können wir die Stetigkeit von f im Punkt $g(\xi)$ verwenden und erhalten $f(g(x_n)) \to f(g(\xi))$.

11.5 Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig* in D, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x, y \in D \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

11.5 Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig* in D, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x, y \in D \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

Für festes x liefert diese Definition genau die Stetigkeit von f in x. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit folgt also die Stetigkeit von f in D.

Formaler Horror

f stetig in $D \quad \Leftrightarrow$

$$\forall x\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y\ \big(|x - y| < \delta\ \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big)$$

f gleichmäßig stetig in $D \quad \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y\ \big(|x - y| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big)$$

Formaler Horror

$$f \text{ stetig in } D \quad \Leftrightarrow$$

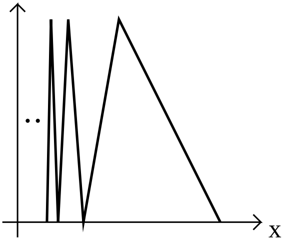
$$\forall x\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y\ \big(|x - y| < \delta\ \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big)$$

$$f \text{ gleichmäßig stetig in } D \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y\ \big(|x - y| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big)$$

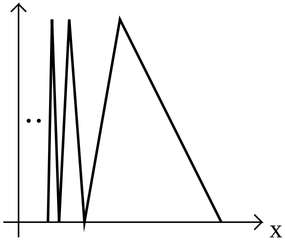
In der gleichmäßigen Stetigkeit darf das zu findende δ nicht von x, y abhängen.

Beispiel



Sei $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ folgendermaßen definiert. Wir verbinden für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Punkte $(\frac{1}{2k-1}, 0)$ und $(\frac{1}{2k}, 1)$ durch eine Strecke und die Punkte $(\frac{1}{2k}, 1)$ und $(\frac{1}{2k+1}, 0)$ ebenfalls durch eine Strecke.

Beispiel



Sei $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ folgendermaßen definiert. Wir verbinden für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Punkte $(\frac{1}{2k-1}, 0)$ und $(\frac{1}{2k}, 1)$ durch eine Strecke und die Punkte $(\frac{1}{2k}, 1)$ und $(\frac{1}{2k+1}, 0)$ ebenfalls durch eine Strecke.

f ist offenbar stetig, aber wir müssen das δ immer kleiner wählen, je näher wir mit dem x zur 0 kommen. f ist also nicht gleichmäßig stetig in D.

Es ist keine Zufall, dass im vorigen Beispiel das Definitionsintervall nach links offen war:

Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit

Es ist keine Zufall, dass im vorigen Beispiel das Definitionsintervall nach links offen war:

Satz Eine auf einem beschränkten und abgeschlossenen Intervall definierte stetige Funktion ist dort gleichmäßig stetig.

Beweis

Angenommen, eine stetige Funktion f ist auf dem beschränkten und abgeschlossenen Intervall D stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Beweis

Angenommen, eine stetige Funktion f ist auf dem beschränkten und abgeschlossenen Intervall D stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Es gibt dann ein $\varepsilon_0 > 0$, für das wir kein zugehöriges $\delta > 0$ finden können: Zu jedem $\delta_n = \frac{1}{n}$ gibt es also Punkte $x_n, y_n \in D$ mit

$$|x_n - y_n| < 1/n \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Beweis

Angenommen, eine stetige Funktion f ist auf dem beschränkten und abgeschlossenen Intervall D stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Es gibt dann ein $\varepsilon_0 > 0$, für das wir kein zugehöriges $\delta > 0$ finden können: Zu jedem $\delta_n = \frac{1}{n}$ gibt es also Punkte $x_n, y_n \in D$ mit

$$|x_n - y_n| < 1/n \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine in D konvergente Teilfolge von (x_n), die wir der Einfachheit halber wieder mit (x_n) bezeichnen. Es gilt also $x_n \to \xi$ und wegen $|x_n - y_n| < 1/n$ auch $y_n \to \xi$.

Beweis

Angenommen, eine stetige Funktion f ist auf dem beschränkten und abgeschlossenen Intervall D stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

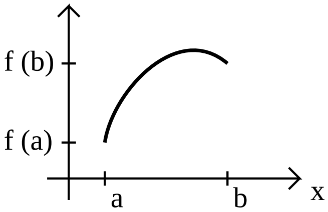
Es gibt dann ein $\varepsilon_0 > 0$, für das wir kein zugehöriges $\delta > 0$ finden können: Zu jedem $\delta_n = \frac{1}{n}$ gibt es also Punkte $x_n, y_n \in D$ mit

$$|x_n - y_n| < 1/n \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine in D konvergente Teilfolge von (x_n), die wir der Einfachheit halber wieder mit (x_n) bezeichnen. Es gilt also $x_n \to \xi$ und wegen $|x_n - y_n| < 1/n$ auch $y_n \to \xi$.

Wegen der Stetigkeit der Funktion f in ξ folgt $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$, was einen Widerspruch ergibt.

11.6 Der Zwischenwertsatz



Satz Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es zu jedem y im Intervall zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = y$.

Beweis des Zwischenwertsatzes

Wir beweisen den Zwischenwertsatz konstruktiv mit einem Verfahren zur Nullstellenbestimmung.

Beweis des Zwischenwertsatzes

Wir beweisen den Zwischenwertsatz konstruktiv mit einem Verfahren zur Nullstellenbestimmung.

Der allgemeine Fall folgt, indem wir für

$$F(x) = f(x) - y$$

eine Nullstelle bestimmen.

Bisektionsverfahren

Sei $a < b$ und f stetig auf $[a, b]$ mit

$$f(a) < 0, \quad f(b) > 0.$$

Bisektionsverfahren

Sei $a < b$ und f stetig auf $[a, b]$ mit

$$f(a) < 0, \quad f(b) > 0.$$

Mit den Startwerten $a_0 = a$ und $b_0 = b$ bestimmen wir Folgen (a_n), (b_n) durch:

Seien a_n, b_n bereits bestimmt. Setze $m = (a_n + b_n)/2$ sowie

$$f(m) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = a_n, \; b_{n+1} = m$$

$$f(m) < 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = m, \; b_{n+1} = b_n$$

Sei $a < b$ und f stetig auf $[a, b]$ mit

$$f(a) < 0, \quad f(b) > 0.$$

Mit den Startwerten $a_0 = a$ und $b_0 = b$ bestimmen wir Folgen (a_n), (b_n) durch:

Seien a_n, b_n bereits bestimmt. Setze $m = (a_n + b_n)/2$ sowie

$$f(m) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = a_n, \; b_{n+1} = m$$

$$f(m) < 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = m, \; b_{n+1} = b_n$$

Man bricht ab, wenn $|f(m)|$ kleiner als eine vorgegebene Schranke ist.

Bisektionsverfahren

- (a_n) ist eine monoton steigende Folge und (b_n) ist monoton fallend.
- Die Intervallänge halbiert sich in jedem Schritt.

- (a_n) ist eine monoton steigende Folge und (b_n) ist monoton fallend.
- Die Intervallänge halbiert sich in jedem Schritt.

Die beiden Folgen schachteln genau eine reelle Zahl x ein.

- (a_n) ist eine monoton steigende Folge und (b_n) ist monoton fallend.
- Die Intervallänge halbiert sich in jedem Schritt.

Die beiden Folgen schachteln genau eine reelle Zahl x ein.

Wegen der Stetigkeit von f gilt

$$f(x) = \lim f(a_n) \leq 0,\; f(x) = \lim f(b_n) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0.$$

Eine Anwendung des Zwischenwertsatzes

Jedes Polynom ungeraden Grades besitzt mindestens eine Nullstelle.

Jedes Polynom ungeraden Grades besitzt mindestens eine Nullstelle.

Wir können den führenden Koeffizienten des Polynoms zu 1 normieren und haben

$$p(x) = x^n + q(x), \quad q(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Jedes Polynom ungeraden Grades besitzt mindestens eine Nullstelle.

Wir können den führenden Koeffizienten des Polynoms zu 1 normieren und haben

$$p(x) = x^n + q(x), \quad q(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Mit $r = 1 + |a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|$ folgt dann

$$\begin{aligned} |q(\pm r)| &\leq |a_{n-1}| r^{n-1} + \ldots + |a_1| r + |a_0| \\ &\leq (|a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|) r^{n-1} \\ &= (r-1) r^{n-1} < r^n. \end{aligned}$$

Es folgt

$$p(r) \geq r^n - |q(r)| > 0.$$

Es folgt

$$p(r) \geq r^n - |q(r)| > 0.$$

Da n als ungerade vorausgesetzt wurde,

$$p(-r) \leq -r^n + |q(-r)| < 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz besitzt p daher eine Nullstelle in $[-r, r]$.

Es folgt
$$p(r) \geq r^n - |q(r)| > 0.$$
Da n als ungerade vorausgesetzt wurde,
$$p(-r) \leq -r^n + |q(-r)| < 0.$$
Nach dem Zwischenwertsatz besitzt p daher eine Nullstelle in $[-r, r]$.

In dieser Argumentation sagen wir auch „x^n dominiert $q(x)$“.

Es folgt
$$p(r) \geq r^n - |q(r)| > 0.$$
Da n als ungerade vorausgesetzt wurde,
$$p(-r) \leq -r^n + |q(-r)| < 0.$$
Nach dem Zwischenwertsatz besitzt p daher eine Nullstelle in $[-r, r]$.

In dieser Argumentation sagen wir auch „x^n dominiert $q(x)$“.

Statt der Null lässt sich dies für jedes $a \in \mathbb{R}$ durchführen:

Es folgt

$$p(r) \geq r^n - |q(r)| > 0.$$

Da n als ungerade vorausgesetzt wurde,

$$p(-r) \leq -r^n + |q(-r)| < 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz besitzt p daher eine Nullstelle in $[-r, r]$.

In dieser Argumentation sagen wir auch „x^n dominiert $q(x)$“.

Statt der Null lässt sich dies für jedes $a \in \mathbb{R}$ durchführen:

Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein x mit $p(x) = a$, also $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

11.7 Monotone Funktionen und Stetigkeit der Umkehrfunktion

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt *monoton wachsend*, wenn für alle $x, y \in D$

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq f(y).$$

11.7 Monotone Funktionen und Stetigkeit der Umkehrfunktion

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt *monoton wachsend*, wenn für alle $x, y \in D$

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq f(y).$$

f heißt *streng monoton wachsend*, wenn hier „$\leq$" ersetzt werden kann durch „$<$".

11.7 Monotone Funktionen und Stetigkeit der Umkehrfunktion

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt *monoton wachsend*, wenn für alle $x, y \in D$

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq f(y).$$

f heißt *streng monoton wachsend*, wenn hier „$\leq$“ ersetzt werden kann durch „$<$“.

Die Begriffe „monoton fallend“ und „streng monoton fallend“ sind analog definiert.

Satz Ist $f[a, b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig mit $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, so ist auch die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [\alpha, \beta] \to [a, b] \quad \text{mit} \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in [a, b]$$

streng monoton wachsend und stetig.

Beweis

Da f streng monoton wachsend ist, ist f injektiv. Ferner folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass die Umkehrfunktion im angegebenen Bereich existiert.

Beweis

Da f streng monoton wachsend ist, ist f injektiv. Ferner folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass die Umkehrfunktion im angegebenen Bereich existiert.

In die Beziehung

$$x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

setzen wir $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ ein:

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \quad \Leftrightarrow \quad y_1 < y_2$$

Beweis

Da f streng monoton wachsend ist, ist f injektiv. Ferner folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass die Umkehrfunktion im angegebenen Bereich existiert.

In die Beziehung

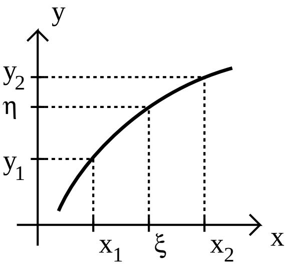
$$x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

setzen wir $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ ein:

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \quad \Leftrightarrow \quad y_1 < y_2$$

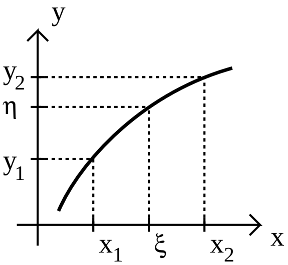
Damit ist auch f^{-1} streng monoton wachsend.

Beweis



Stetigkeit von f^{-1} : Sei $\eta = f(\xi)$ ein Punkt aus dem offenen Intervall (α, β).

Beweis



Stetigkeit von f^{-1} : Sei $\eta = f(\xi)$ ein Punkt aus dem offenen Intervall (α, β).

Aufgrund der strengen Monotonie von f ist dann $\xi \in (a, b)$.

Für genügend kleines ε sind auch

$$x_1 = \xi - \varepsilon, \quad x_2 = \xi + \varepsilon \in (a, b).$$

Für $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ gilt $y_1 < \eta < y_2$.

Beweis

Daher gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$y_1 < \eta - \delta < \eta < \eta + \delta < y_2,$$

also

$$|y - \eta| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f^{-1}(y) - \xi| < \varepsilon.$$

Beweis

Daher gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$y_1 < \eta - \delta < \eta < \eta + \delta < y_2,$$

also

$$|y - \eta| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f^{-1}(y) - \xi| < \varepsilon.$$

Damit ist f^{-1} stetig in η.

Beweis

Daher gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$y_1 < \eta - \delta < \eta < \eta + \delta < y_2,$$

also

$$|y - \eta| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f^{-1}(y) - \xi| < \varepsilon.$$

Damit ist f^{-1} stetig in η.

Ist a ein Randpunkt, kann man mit halbseitigen Umgebungen entsprechend verfahren.

Die Funktion

$$f(x) = x^n : [0, a] \to [0, a^n]$$

ist für jedes $a > 0$ zwischen den angegebenen Bereichen bijektiv, stetig und streng monoton wachsend.

Die Funktion

$$f(x) = x^n : [0, a] \to [0, a^n]$$

ist für jedes $a > 0$ zwischen den angegebenen Bereichen bijektiv, stetig und streng monoton wachsend.

Die Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$ ist damit ebenfalls stetig.

Stetigkeit der Wurzelfunktion

Die Funktion

$$f(x) = x^n : [0, a] \to [0, a^n]$$

ist für jedes $a > 0$ zwischen den angegebenen Bereichen bijektiv, stetig und streng monoton wachsend.

Die Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$ ist damit ebenfalls stetig.

Ferner sind alle algebraischen Funktionen als Kompositionen von Wurzel- und rationalen Funktionen in ihrem Definitionsbereich stetig.

11.8 Stetiges Bild eines beschränkten und abgeschlossenen Intervalls

Satz [Weierstraß] Das stetige Bild eines beschränkten und abgeschlossenen Intervalls ist wieder ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall.

11.8 Stetiges Bild eines beschränkten und abgeschlossenen Intervalls

Satz [Weierstraß] Das stetige Bild eines beschränkten und abgeschlossenen Intervalls ist wieder ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall.

Insbesondere nimmt jede stetige Funktion f auf einem beschränkten und abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ Maximum und Minimum an, es gibt also $\xi_1, \xi_2 \in [a, b]$ mit

$$f(\xi_1) \leq f(x) \leq f(\xi_2) \text{ für alle } x \in [a, b].$$

Beweis

Sei $d = \inf \mathcal{R}(f)$, wobei $d = -\infty$ gesetzt wird, falls die Bildmenge nach unten unbeschränkt ist.

Beweis

Sei $d = \inf \mathcal{R}(f)$, wobei $d = -\infty$ gesetzt wird, falls die Bildmenge nach unten unbeschränkt ist.

Nach Definition des Infimums gibt es eine Folge (x_n) mit $f(x_n) \to d$. Im Falle $d = -\infty$ ist damit gemeint, dass die Folge nach $-\infty$ bestimmt divergiert.

Beweis

Sei $d = \inf \mathcal{R}(f)$, wobei $d = -\infty$ gesetzt wird, falls die Bildmenge nach unten unbeschränkt ist.

Nach Definition des Infimums gibt es eine Folge (x_n) mit $f(x_n) \to d$. Im Falle $d = -\infty$ ist damit gemeint, dass die Folge nach $-\infty$ bestimmt divergiert.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}), die gegen ein $\xi_1 \in [a, b]$ konvergiert.

Beweis

Sei $d = \inf \mathcal{R}(f)$, wobei $d = -\infty$ gesetzt wird, falls die Bildmenge nach unten unbeschränkt ist.

Nach Definition des Infimums gibt es eine Folge (x_n) mit $f(x_n) \to d$. Im Falle $d = -\infty$ ist damit gemeint, dass die Folge nach $-\infty$ bestimmt divergiert.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}), die gegen ein $\xi_1 \in [a, b]$ konvergiert.

Da f stetig ist, gilt $d = \lim f(x_{n_k}) = f(\xi_1)$. Damit ist d endlich und ξ_1 das gesuchte Minimum.

Beweis

Sei $d = \inf \mathcal{R}(f)$, wobei $d = -\infty$ gesetzt wird, falls die Bildmenge nach unten unbeschränkt ist.

Nach Definition des Infimums gibt es eine Folge (x_n) mit $f(x_n) \to d$. Im Falle $d = -\infty$ ist damit gemeint, dass die Folge nach $-\infty$ bestimmt divergiert.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}), die gegen ein $\xi_1 \in [a, b]$ konvergiert.

Da f stetig ist, gilt $d = \lim f(x_{n_k}) = f(\xi_1)$. Damit ist d endlich und ξ_1 das gesuchte Minimum.

Beweise die Existenz des Maximums genauso. Wir können auf das Intervall $[\xi_1, \xi_2]$ den Zwischenwertsatz anwenden. Damit ist das Bild von f das ganze Intervall $[f(\xi_1), f(\xi_2)]$.

Der Brouwersche Fixpunktsatz

Sei f auf $[a, b]$ stetig mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gibt es eine Konstante $c > 0$ mit $f(x) \geq c > 0$ für alle x.

Sei f auf $[a, b]$ stetig mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gibt es eine Konstante $c > 0$ mit $f(x) \geq c > 0$ für alle x.

Sei c das Minimum von f auf $[a, b]$. Da c angenommen wird, muß wegen $f > 0$ auch $c > 0$ gelten.

Aufgabe

Es sei J ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall und $f : J \to J$ stetig. Man zeige: Es gibt einen Fixpunkt $\xi \in J$ mit $f(\xi) = \xi$.

Aufgabe

Es sei J ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall und $f : J \to J$ stetig. Man zeige: Es gibt einen Fixpunkt $\xi \in J$ mit $f(\xi) = \xi$.

Die Funktion $F(x) = f(x) - x$ nimmt auf $J = [a, b]$ Maximum M und Minimum m an. Es gilt dann

$$f(x) \geq x + m$$

Aufgabe

Es sei J ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall und $f : J \to J$ stetig. Man zeige: Es gibt einen Fixpunkt $\xi \in J$ mit $f(\xi) = \xi$.

Die Funktion $F(x) = f(x) - x$ nimmt auf $J = [a, b]$ Maximum M und Minimum m an. Es gilt dann

$$f(x) \geq x + m$$

Insbesondere $f(b) \geq b + m$. Da f nach $[a, b]$ abbildet, folgt $m \leq 0$.

Aufgabe

Es sei J ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall und $f : J \to J$ stetig. Man zeige: Es gibt einen Fixpunkt $\xi \in J$ mit $f(\xi) = \xi$.

Die Funktion $F(x) = f(x) - x$ nimmt auf $J = [a, b]$ Maximum M und Minimum m an. Es gilt dann

$$f(x) \geq x + m$$

Insbesondere $f(b) \geq b + m$. Da f nach $[a, b]$ abbildet, folgt $m \leq 0$.

Genauso zeigt man $M \geq 0$. Die Behauptung folgt aus dem Zwischenwertsatz.

11.9 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Seien $f_n : D \to \mathbb{R}$. Wir sagen, die Folge (f_n) *konvergiert punktweise gegen* $f : D \to \mathbb{R}$, wenn:

$$\text{Für alle } x \in D \text{ gilt } \; f_n(x) \to f(x).$$

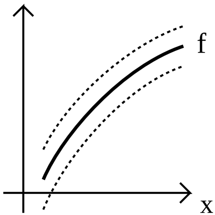
11.9 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Seien $f_n : D \to \mathbb{R}$. Wir sagen, die Folge (f_n) *konvergiert punktweise gegen* $f : D \to \mathbb{R}$, wenn:

$$\text{Für alle } x \in D \text{ gilt } \; f_n(x) \to f(x).$$

Die Folge (f_n) *konvergiert gleichmäßig gegen* f, wenn: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N \text{ und für alle } x \in D.$$



In der gleichmäßigen Konvergenz darf das zu findende N *nicht* von x abhängen. Wir können uns die gleichmäßige Konvergenz daher so vorstellen, dass wir um f einen ε-Schlauch legen, in dem alle bis auf endlich viele f_n liegen müssen.

Beispiel

Sei $D = [0, 1]$ und $f_n(x) = x^n$.

Beispiel

Sei $D = [0,1]$ und $f_n(x) = x^n$.

Bestimmen Sie die Grenzfunktion. Liegt gleichmäßige Konvergenz vor?

Beispiel

Sei $D = [0, 1]$ und $f_n(x) = x^n$.

Bestimmen Sie die Grenzfunktion. Liegt gleichmäßige Konvergenz vor?

Für $0 \leq x < 1$ gilt $x^n \to 0$. Der punktweise Limes der Folge ist daher die Funktion f mit $f(x) = 0$ für $0 \leq x < 1$ und $f(1) = 1$.

Beispiel

Sei $D = [0, 1]$ und $f_n(x) = x^n$.

Bestimmen Sie die Grenzfunktion. Liegt gleichmäßige Konvergenz vor?

Für $0 \leq x < 1$ gilt $x^n \to 0$. Der punktweise Limes der Folge ist daher die Funktion f mit $f(x) = 0$ für $0 \leq x < 1$ und $f(1) = 1$.

Diese Konvergenz ist jedoch nicht gleichmäßig, denn wenn um die Grenzfunktion ein ε-Schlauch mit $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ gelegt wird, so liegt kein f_n komplett in diesem Schlauch.

Gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist stetig

Satz Der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist stetig.

Gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist stetig

Satz Der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist stetig.

Beweis Sei $\xi \in D$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ für alle $x \in D$ (=glchm. Konvergenz).

Satz Der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist stetig.

Beweis Sei $\xi \in D$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ für alle $x \in D$ (=glchm. Konvergenz).

Dieses f_n ist stetig. Es gibt zu $\varepsilon/3$ ein $\delta > 0$ mit $|f_n(\xi) - f_n(x)| < \varepsilon/3$ für alle $x \in D$ mit $|x - \xi| < \delta$.

Satz Der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist stetig.

Beweis Sei $\xi \in D$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ für alle $x \in D$ (=glchm. Konvergenz).

Dieses f_n ist stetig. Es gibt zu $\varepsilon/3$ ein $\delta > 0$ mit $|f_n(\xi) - f_n(x)| < \varepsilon/3$ für alle $x \in D$ mit $|x - \xi| < \delta$.

Für diese x folgt

$$
\begin{aligned}
|f(\xi) - f(x)| &\leq |f(\xi) - f_n(\xi)| + |f_n(\xi) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Satz Der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist stetig.

Beweis Sei $\xi \in D$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ für alle $x \in D$ (=glchm. Konvergenz).

Dieses f_n ist stetig. Es gibt zu $\varepsilon/3$ ein $\delta > 0$ mit $|f_n(\xi) - f_n(x)| < \varepsilon/3$ für alle $x \in D$ mit $|x - \xi| < \delta$.

Für diese x folgt

$$\begin{aligned} |f(\xi) - f(x)| &\leq |f(\xi) - f_n(\xi)| + |f_n(\xi) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist f im Punkt ξ stetig.

11.10 Anwendung der Stetigkeit auf die Konvergenz von Zahlenfolgen

Wir können stetige Funktionen als konvergenzerhaltende Abbildungen ansehen, denn aus $x_n \to \xi$ folgt $f(x_n) \to f(\xi)$.

11.10 Anwendung der Stetigkeit auf die Konvergenz von Zahlenfolgen

Wir können stetige Funktionen als konvergenzerhaltende Abbildungen ansehen, denn aus $x_n \to \xi$ folgt $f(x_n) \to f(\xi)$.

Wir gewinnen dadurch neue Sätze über die Konvergenz von Zahlenfolgen. Ist beispielsweise $a_n \to a$ und $a_n \geq 0$, so gilt $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$.

11.10 Anwendung der Stetigkeit auf die Konvergenz von Zahlenfolgen

Wir können stetige Funktionen als konvergenzerhaltende Abbildungen ansehen, denn aus $x_n \to \xi$ folgt $f(x_n) \to f(\xi)$.

Wir gewinnen dadurch neue Sätze über die Konvergenz von Zahlenfolgen. Ist beispielsweise $a_n \to a$ und $a_n \geq 0$, so gilt $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$.

Betrachte die rekursiv definierte Folge für stetiges f

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad a_0 \in \mathbb{R} \text{ vorgegeben.}$$

11.10 Anwendung der Stetigkeit auf die Konvergenz von Zahlenfolgen

Wir können stetige Funktionen als konvergenzerhaltende Abbildungen ansehen, denn aus $x_n \to \xi$ folgt $f(x_n) \to f(\xi)$.

Wir gewinnen dadurch neue Sätze über die Konvergenz von Zahlenfolgen. Ist beispielsweise $a_n \to a$ und $a_n \geq 0$, so gilt $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$.

Betrachte die rekursiv definierte Folge für stetiges f

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad a_0 \in \mathbb{R} \text{ vorgegeben.}$$

Wenn man weiß, dass (a_n) konvergiert, so gehe dann auf beiden Seiten zum Grenzwert über und erhalte

$$a = f(a).$$

11.10 Anwendung der Stetigkeit auf die Konvergenz von Zahlenfolgen

Wir können stetige Funktionen als konvergenzerhaltende Abbildungen ansehen, denn aus $x_n \to \xi$ folgt $f(x_n) \to f(\xi)$.

Wir gewinnen dadurch neue Sätze über die Konvergenz von Zahlenfolgen. Ist beispielsweise $a_n \to a$ und $a_n \geq 0$, so gilt $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$.

Betrachte die rekursiv definierte Folge für stetiges f

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad a_0 \in \mathbb{R} \text{ vorgegeben.}$$

Wenn man weiß, dass (a_n) konvergiert, so gehe dann auf beiden Seiten zum Grenzwert über und erhalte

$$a = f(a).$$

Der Grenzwert ist also immer ein Fixpunkt von f.

Beispiel

Wir hatten in einem früheren Beispiel bereits bewiesen, dass die rekursiv definierte Folge

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}, \quad a_0 = 0,$$

durch 3 beschränkt und streng monoton wachsend, mithin konvergent ist.

Beispiel

Wir hatten in einem früheren Beispiel bereits bewiesen, dass die rekursiv definierte Folge

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}, \quad a_0 = 0,$$

durch 3 beschränkt und streng monoton wachsend, mithin konvergent ist.

Der Grenzwert $a \geq 0$ genügt daher der Gleichung $a = \sqrt{6 + a}$ oder

$$0 = a^2 - a - 6 = (a + 2)(a - 3).$$

. Wegen $a \geq 0$ folgt $a = 3$.

Beispiel: Babylonisches Wurzelziehen

Sei $b > 0$. Für $a_0 > 0$ untersuchen wir die Folge

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{b}{2a_n}.$$

Beispiel: Babylonisches Wurzelziehen

Sei $b > 0$. Für $a_0 > 0$ untersuchen wir die Folge

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{b}{2a_n}.$$

Ist $a_n = \sqrt{b}$, so ist auch $a_{n+1} = \sqrt{b}$ und die Folge stagniert.

Beispiel: Babylonisches Wurzelziehen

Sei $b > 0$. Für $a_0 > 0$ untersuchen wir die Folge

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{b}{2a_n}.$$

Ist $a_n = \sqrt{b}$, so ist auch $a_{n+1} = \sqrt{b}$ und die Folge stagniert.

Sei also $0 < a_n \neq \sqrt{b}$.

$$(a_n - \sqrt{b})^2 > 0 \;\Rightarrow\; a_n^2 - 2a_n\sqrt{b} + b > 0.$$

Beispiel: Babylonisches Wurzelziehen

Sei $b > 0$. Für $a_0 > 0$ untersuchen wir die Folge

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{b}{2a_n}.$$

Ist $a_n = \sqrt{b}$, so ist auch $a_{n+1} = \sqrt{b}$ und die Folge stagniert. Sei also $0 < a_n \neq \sqrt{b}$.

$$(a_n - \sqrt{b})^2 > 0 \;\Rightarrow\; a_n^2 - 2a_n\sqrt{b} + b > 0.$$

In der letzten Ungleichung können wir durch $2a_n$ teilen,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{b}{2a_n} > \sqrt{b}.$$

Beispiel: Babylonisches Wurzelziehen

Sei $b > 0$. Für $a_0 > 0$ untersuchen wir die Folge

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{b}{2a_n}.$$

Ist $a_n = \sqrt{b}$, so ist auch $a_{n+1} = \sqrt{b}$ und die Folge stagniert.
Sei also $0 < a_n \neq \sqrt{b}$.

$$(a_n - \sqrt{b})^2 > 0 \ \Rightarrow \ a_n^2 - 2a_n\sqrt{b} + b > 0.$$

In der letzten Ungleichung können wir durch $2a_n$ teilen,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{b}{2a_n} > \sqrt{b}.$$

Damit gilt für jeden Startwert $0 < a_0 \neq \sqrt{b}$, dass $a_n > \sqrt{b}$ für alle $n >= 1$.

Beispiel: Babylonisches Wurzelziehen

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{b}{2a_n}.$$

Wir zeigen, dass die Folge (a_n) ab $n = 1$ streng monoton fallend ist.

Beispiel: Babylonisches Wurzelziehen

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{b}{2a_n}.$$

Wir zeigen, dass die Folge (a_n) ab $n = 1$ streng monoton fallend ist.

Aus $a_n > \sqrt{b}$ folgt $(a_n)^2 > b$ und

$$-a_n + \frac{b}{a_n} < 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} - a_n = -\frac{a_n}{2} + \frac{b}{2a_n} < 0.$$

Beispiel: Babylonisches Wurzelziehen

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{b}{2a_n}.$$

Wir zeigen, dass die Folge (a_n) ab $n = 1$ streng monoton fallend ist.

Aus $a_n > \sqrt{b}$ folgt $(a_n)^2 > b$ und

$$-a_n + \frac{b}{a_n} < 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} - a_n = -\frac{a_n}{2} + \frac{b}{2a_n} < 0.$$

Da die Folgenglieder nicht negativ werden können, ist die Folge monoton fallend und nach unten beschränkt. Sie besitzt daher einen eindeutigen Grenzwert $a > 0$.

11.11 Potenzreihen

Eine *Potenzreihe* ist von der Form

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \quad a_n \in \mathbb{R}.$$

Da eine Potenzreihe für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Reihe ist, übertragen sich die Begriffe Konvergenz und absolute Konvergenz.

11.11 Potenzreihen

Eine *Potenzreihe* ist von der Form

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, \quad a_n \in \mathbb{R}.$$

Da eine Potenzreihe für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Reihe ist, übertragen sich die Begriffe Konvergenz und absolute Konvergenz.

Da die Konvergenz einer Reihe auf die Konvergenz der Partialsummen zurückgeführt wird, übernehmen wir auch den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz aus dem letzten Abschnitt.

Bezeichnungen

Wir erinnern daran, dass wir mit $\limsup a_n$ den größten Häufungspunkt der Folge (a_n) bezeichnet haben.

Bezeichnungen

Wir erinnern daran, dass wir mit $\limsup a_n$ den größten Häufungspunkt der Folge (a_n) bezeichnet haben.

Ist die Folge nach oben beschränkt, so existiert der Limes Superior nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß. Ist die Folge nach oben unbeschränkt, so schreiben wir $\limsup a_n = \infty$.

Satz Sei

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

und $R = \frac{1}{L}$, wobei $1/0$ als $R = \infty$ und $1/\infty$ als $R = 0$ interpretiert wird.

Satz Sei

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

und $R = \frac{1}{L}$, wobei $1/0$ als $R = \infty$ und $1/\infty$ als $R = 0$ interpretiert wird.

Dann ist die Reihe $\sum_n a_n x^n$ für $|x| < R$ absolut konvergent und für $|x| > R$ divergent.

Satz Sei

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

und $R = \frac{1}{L}$, wobei $1/0$ als $R = \infty$ und $1/\infty$ als $R = 0$ interpretiert wird.

Dann ist die Reihe $\sum_n a_n x^n$ für $|x| < R$ absolut konvergent und für $|x| > R$ divergent.

Die Reihe konvergiert gleichmäßig in jedem Intervall $|x| \leq r$ mit $r < R$. Über die Konvergenz für $|x| = R$ lässt sich keine allgemeine Ausage machen.

Der Konvergenzsatz

Satz Sei

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

und $R = \frac{1}{L}$, wobei $1/0$ als $R = \infty$ und $1/\infty$ als $R = 0$ interpretiert wird.

Dann ist die Reihe $\sum_n a_n x^n$ für $|x| < R$ absolut konvergent und für $|x| > R$ divergent.

Die Reihe konvergiert gleichmäßig in jedem Intervall $|x| \leq r$ mit $r < R$. Über die Konvergenz für $|x| = R$ lässt sich keine allgemeine Ausage machen.

Existiert der Grenzwert

$$Q = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|},$$

so gilt $L = Q$.

Bemerkung zum Konvergenzsatz

Da die Konvergenz gleichmäßig ist für $|x| \leq r < R$, so ist die Grenzfunktion $p(x)$ in diesem Bereich stetig.

Bemerkung zum Konvergenzsatz

Da die Konvergenz gleichmäßig ist für $|x| \le r < R$, so ist die Grenzfunktion $p(x)$ in diesem Bereich stetig.

Da $r < R$ beliebig gewählt werden kann, ist $p(x)$ für alle $|x| < R$ stetig.

Beweis des Konvergenzsatzes

Sei zunächst $0 < L < \infty$. Für die Konstante L' des Wurzelkriteriums gilt dann

$$L' = \limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup |x| \sqrt[n]{|a_n|} \begin{cases} < 1, & \text{falls } |x| < \frac{1}{L} \\ > 1, & \text{falls } |x| > \frac{1}{L} \end{cases} .$$

Sei zunächst $0 < L < \infty$. Für die Konstante L' des Wurzelkriteriums gilt dann

$$L' = \limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup |x| \sqrt[n]{|a_n|} \begin{cases} < 1, & \text{falls } |x| < \frac{1}{L} \\ > 1, & \text{falls } |x| > \frac{1}{L} \end{cases} .$$

In beiden Fällen folgt Konvergenz oder Divergenz aus dem Wurzelkriterium.

Beweis des Konvergenzsatzes

Sei zunächst $0 < L < \infty$. Für die Konstante L' des Wurzelkriteriums gilt dann

$$L' = \limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup |x| \sqrt[n]{|a_n|} \begin{cases} < 1, & \text{falls } |x| < \frac{1}{L} \\ > 1, & \text{falls } |x| > \frac{1}{L} \end{cases}.$$

In beiden Fällen folgt Konvergenz oder Divergenz aus dem Wurzelkriterium.

Ist $L = 0$, so ist das Wurzelkriterium für alle x erfüllt. Für $L = \infty$ liegt nur Konvergenz im Punkt 0 vor.

Beweis des Konvergenzsatzes

Sei zunächst $0 < L < \infty$. Für die Konstante L' des Wurzelkriteriums gilt dann

$$L' = \limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup |x| \sqrt[n]{|a_n|} \begin{cases} < 1, & \text{falls } |x| < \frac{1}{L} \\ > 1, & \text{falls } |x| > \frac{1}{L} \end{cases} .$$

In beiden Fällen folgt Konvergenz oder Divergenz aus dem Wurzelkriterium.

Ist $L = 0$, so ist das Wurzelkriterium für alle x erfüllt. Für $L = \infty$ liegt nur Konvergenz im Punkt 0 vor.

Für $|x| \leq r < R$ lässt sich die Potenzreihe unabhängig von x durch die geometrische Reihe abschätzen. Damit ist die Konvergenz gleichmäßig.

Beweis des Konvergenzsatzes

Sei zunächst $0 < L < \infty$. Für die Konstante L' des Wurzelkriteriums gilt dann

$$L' = \limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup |x| \sqrt[n]{|a_n|} \begin{cases} < 1, & \text{falls } |x| < \frac{1}{L} \\ > 1, & \text{falls } |x| > \frac{1}{L} \end{cases} .$$

In beiden Fällen folgt Konvergenz oder Divergenz aus dem Wurzelkriterium.

Ist $L = 0$, so ist das Wurzelkriterium für alle x erfüllt. Für $L = \infty$ liegt nur Konvergenz im Punkt 0 vor.

Für $|x| \le r < R$ lässt sich die Potenzreihe unabhängig von x durch die geometrische Reihe abschätzen. Damit ist die Konvergenz gleichmäßig.

Den zweiten Teil des Satzes beweist man genauso mit Hilfe des Quotientenkriteriums an Stelle des Wurzelkriteriums.

Beispiele

(i) Im Kapitel über Folgen hatten wir für jedes $m \in \mathbb{Z}$ $\sqrt[n]{n^m} \to 1$ gezeigt.

Beispiele

(i) Im Kapitel über Folgen hatten wir für jedes $m \in \mathbb{Z}$ $\sqrt[n]{n^m} \to 1$ gezeigt.

Die Potenzreihen $\sum_n n^m x^n$ haben daher alle den gleichen Konvergenzradius $R = 1$.

Beispiele

(i) Im Kapitel über Folgen hatten wir für jedes $m \in \mathbb{Z}$ $\sqrt[n]{n^m} \to 1$ gezeigt.

Die Potenzreihen $\sum_n n^m x^n$ haben daher alle den gleichen Konvergenzradius $R = 1$.

Für $m = 0$ erhalten wir die geometrische Reihe, die für $x = \pm 1$ divergent ist.

Beispiele

(i) Im Kapitel über Folgen hatten wir für jedes $m \in \mathbb{Z}$ $\sqrt[n]{n^m} \to 1$ gezeigt.

Die Potenzreihen $\sum_n n^m x^n$ haben daher alle den gleichen Konvergenzradius $R = 1$.

Für $m = 0$ erhalten wir die geometrische Reihe, die für $x = \pm 1$ divergent ist.

Für $m = -1$ ist für $x = 1$ die harmonische Reihe divergent, für $x = -1$ erhalten wir die konvergente alternierende harmonische Reihe.

Beispiele

(i) Im Kapitel über Folgen hatten wir für jedes $m \in \mathbb{Z}$ $\sqrt[n]{n^m} \to 1$ gezeigt.

Die Potenzreihen $\sum_n n^m x^n$ haben daher alle den gleichen Konvergenzradius $R = 1$.

Für $m = 0$ erhalten wir die geometrische Reihe, die für $x = \pm 1$ divergent ist.

Für $m = -1$ ist für $x = 1$ die harmonische Reihe divergent, für $x = -1$ erhalten wir die konvergente alternierende harmonische Reihe.

Über das Konvergenzverhalten am Rande lässt sich also in der Tat keine allgemeine Aussage machen.

Beispiele

(ii) Für die Reihe $\sum n! x^n$ folgt mit dem Quotientenkriterium

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n + 1 \to \infty.$$

Der Konvergenzradius ist daher $R = 0$.

11.12 Das Cauchy-Produkt von Potenzreihen

Das Produkt zweier Potenzreihen ergibt sich dadurch, dass man jedes Glied der einen Reihe mit jedem Glied der anderen Reihe multipliziert und das Ergebnis nach Potenzen ordnet.

11.12 Das Cauchy-Produkt von Potenzreihen

Das Produkt zweier Potenzreihen ergibt sich dadurch, dass man jedes Glied der einen Reihe mit jedem Glied der anderen Reihe multipliziert und das Ergebnis nach Potenzen ordnet.

Satz Sind die Potenzreihen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ für $|x| < R$ konvergent, so ist auch das Produkt

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0,$$

mindestens im Bereich $|x| < R$ konvergent.

11.13 Die Exponentialfunktion

Die *Exponentialfunktion* wird durch die Potenzreihe

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

dargestellt.

11.13 Die Exponentialfunktion

Die *Exponentialfunktion* wird durch die Potenzreihe

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

dargestellt. Speziell bezeichnen wir

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

als *Eulersche Zahl*.

Die *Exponentialfunktion* wird durch die Potenzreihe

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

dargestellt. Speziell bezeichnen wir

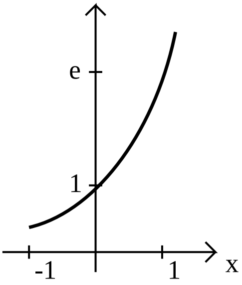
$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

als *Eulersche Zahl*.

Mit $a_n = \frac{1}{n!}$ folgt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}$$

und nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe auf ganz $\mathbb{R}$ und stellt dort eine stetige Funktion dar.



Eine alternative Darstellung der Exponentialfunktion und der Eulerschen Zahl ist gegeben durch

$$\exp(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Beweis der alternativen Darstellung

Aus der binomischen Formel folgt

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k}.$$

Beweis der alternativen Darstellung

Aus der binomischen Formel folgt

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k}.$$

Wegen

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{1}{k!}\,\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n\cdot n\dots n}\\ &= \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\end{aligned}$$

Beweis der alternativen Darstellung

Aus der binomischen Formel folgt

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k}.$$

Wegen

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{1}{k!}\,\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n\cdot n\ldots n} \\ &= \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\end{aligned}$$

gilt

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \frac{1}{k!}, \quad \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \to \frac{1}{k!} \text{ für } n\to\infty.$$

Motivation durch den Zinseszinseffekt

Historisch trat die Eulersche Zahl zuerst im Zusammenhang mit der Definition

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

auf.

Motivation durch den Zinseszinseffekt

Historisch trat die Eulersche Zahl zuerst im Zusammenhang mit der Definition

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

auf.

Verzinsen wir einen Geldbetrag der Größe 1 in einem Jahr mit einem Zinssatz von 100%, so erhalten wir nach einem Jahr den Betrag 2.

Motivation durch den Zinseszinseffekt

Historisch trat die Eulersche Zahl zuerst im Zusammenhang mit der Definition

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

auf.

Verzinsen wir einen Geldbetrag der Größe 1 in einem Jahr mit einem Zinssatz von 100%, so erhalten wir nach einem Jahr den Betrag 2.

Bei zwischenzeitlicher Verzinsung verzinst sich das Kapital besser. Bei monatlicher Zinszahlung bekommen wir $(1 + \frac{1}{12})^{12} = 2,613\ldots$

Motivation durch den Zinseszinseffekt

Historisch trat die Eulersche Zahl zuerst im Zusammenhang mit der Definition

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

auf.

Verzinsen wir einen Geldbetrag der Größe 1 in einem Jahr mit einem Zinssatz von 100%, so erhalten wir nach einem Jahr den Betrag 2.

Bei zwischenzeitlicher Verzinsung verzinst sich das Kapital besser. Bei monatlicher Zinszahlung bekommen wir $(1 + \frac{1}{12})^{12} = 2,613\ldots$

Machen wir die Zeiträume der Verzinsung kürzer und kürzer, so erhalten wir bei kontinuierlicher Verzinsung $e = 2,71\ldots$ am Jahresende.

Satz Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ist bijektiv, streng monoton wachsend und genügt der Funktionalgleichung

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Satz Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ist bijektiv, streng monoton wachsend und genügt der Funktionalgleichung

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Beweis Wir bilden das Produkt $\exp x \, \exp y$, indem wir jeden Summanden mit jedem Summanden multiplizieren und das Ergebnis nach Potenzen ordnen,

$$\exp(x)\exp(y) = \sum d_n \quad \text{mit}$$

$$d_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \frac{y^{n-i}}{(n-i)!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = \frac{1}{n!}(x+y)^n.$$

Beweis

Aus der Definition der Exponentialfunktion folgt sofort, dass sie streng monoton wachsend für nichtnegative x ist.

Beweis

Aus der Definition der Exponentialfunktion folgt sofort, dass sie streng monoton wachsend für nichtnegative x ist.

Ferner gilt $\exp(x) \geq 1 + x$, daher $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$.

Beweis

Aus der Definition der Exponentialfunktion folgt sofort, dass sie streng monoton wachsend für nichtnegative x ist.

Ferner gilt $\exp(x) \geq 1 + x$, daher $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$.

Für negative x erhalten wir die Behauptung aus

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(x - x) = 1,$$

also $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$.

Beweis

Aus der Definition der Exponentialfunktion folgt sofort, dass sie streng monoton wachsend für nichtnegative x ist.

Ferner gilt $\exp(x) \geq 1 + x$, daher $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$.

Für negative x erhalten wir die Behauptung aus

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(x - x) = 1,$$

also $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$.

Damit gilt insbesondere $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$. Wegen des Zwischenwertsatzes ist die Exponentialfunktion bijektiv zwischen den angegebenen Bereichen.

Wachstum der Exponentialfunktion

Aus der Exponentialreihe erschließen wir ferner für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\exp(-x)}{x^{-n}} = 0,$$

Aus der Exponentialreihe erschließen wir ferner für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\exp(-x)}{x^{-n}} = 0,$$

denn es gilt für $x > 0$

$$\exp(x) > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

Wachstum der Exponentialfunktion

Aus der Exponentialreihe erschließen wir ferner für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\exp(-x)}{x^{-n}} = 0,$$

denn es gilt für $x > 0$

$$\exp(x) > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

daher

$$\frac{\exp(x)}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!} \ \to\ \infty, \quad 0 < x^n \exp(-x) < \frac{(n+1)!}{x} \ \to\ 0$$

für $x \to \infty$.

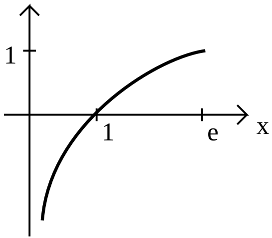
Wachstum der Exponentialfunktion

Kurz: Die Exponentialfunktion wächst für $x \to \infty$ schneller als jede Potenz und sie fällt für $x \to -\infty$ schneller gegen Null als jede negative Potenz.

Wachstum der Exponentialfunktion

Kurz: Die Exponentialfunktion wächst für $x \to \infty$ schneller als jede Potenz und sie fällt für $x \to -\infty$ schneller gegen Null als jede negative Potenz.

„Die Exponentialfunktion erschlägt jede Potenz“.



Nach einem Satz über streng monotone Funktionen besitzt die Exponentialfunktion eine stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion, die wir als *(natürlichen) Logarithmus* ln bezeichnen.

Asymptotisches Verhalten des Logarithmus

Wegen $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ bijetkiv ist $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bijektiv und

$$y = \exp(x) \;\Leftrightarrow\; x = \ln y.$$

Asymptotisches Verhalten des Logarithmus

Wegen $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ bijetkiv ist $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bijektiv und

$$y = \exp(x) \;\Leftrightarrow\; x = \ln y.$$

Hieraus folgt

$$\ln y \to \infty \;\text{ für } y \to \infty, \quad \ln y \to -\infty \;\text{ für } y \to 0.$$

Grundlegende Eigenschaft des Logarithmus

Satz Der natürliche Logarithmus hat die Eigenschaft

$$\ln xy = \ln x + \ln y \quad x, y \in \mathbb{R}_+.$$

Satz Der natürliche Logarithmus hat die Eigenschaft

$$\ln xy = \ln x + \ln y \quad x, y \in \mathbb{R}_+.$$

Beweis Es gilt

$$\exp(\ln(xy)) = xy = \exp(\ln x)\exp(\ln y) = \exp(\ln x + \ln y).$$

Da die Funktion exp bijektiv ist, folgt hieraus die Behauptung.

Satz Der natürliche Logarithmus hat die Eigenschaft

$$\ln xy = \ln x + \ln y \quad x, y \in \mathbb{R}_+.$$

Beweis Es gilt

$$\exp(\ln(xy)) = xy = \exp(\ln x)\exp(\ln y) = \exp(\ln x + \ln y).$$

Da die Funktion exp bijektiv ist, folgt hieraus die Behauptung.

Aus den Sportnachrichten am Ende der Saison:

„Da werden die Rechenschieber herausgeholt“.

Erklären Sie mir das !

Wachstumsverhalten des Logarithmus

Für jedes n gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = 0, \quad \lim_{x\searrow 0} \sqrt[n]{x}\ln x = 0.$$

Wachstumsverhalten des Logarithmus

Für jedes n gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = 0, \quad \lim_{x\searrow 0} \sqrt[n]{x}\ln x = 0.$$

Beweis: Für $x > 0$ setze $x = \exp(ny)$ mit $y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = \frac{ny}{\exp y} \to 0 \;\text{ für } y \to \infty,$$

$$\sqrt[n]{x}\ln x = \exp(y)ny \to 0 \;\text{ für } y \to -\infty.$$

Für jedes n gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = 0, \quad \lim_{x\searrow 0} \sqrt[n]{x}\ln x = 0.$$

Beweis: Für $x > 0$ setze $x = \exp(ny)$ mit $y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = \frac{ny}{\exp y} \to 0 \;\text{ für } y \to \infty,$$

$$\sqrt[n]{x}\ln x = \exp(y)ny \to 0 \;\text{ für } y \to -\infty.$$

Also: Der Logarithmus geht für $x \to \infty$ langsamer gegen unendlich als jede Wurzel. Ferner ist die bestimmte Divergenz gegen $-\infty$ für $x \searrow 0$ nur schwach ausgeprägt.

11.14 Der Logarithmus

Für $a > 0$ folgt aus der Additionseigenschaft des Logarithmus
$\ln a^n = n \ln a$.

11.14 Der Logarithmus

Für $a > 0$ folgt aus der Additionseigenschaft des Logarithmus $\ln a^n = n \ln a$.

Wegen $\sqrt[n]{a} \dots \sqrt[n]{a} = a$ folgt auch $\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a$.

11.14 Der Logarithmus

Für $a > 0$ folgt aus der Additionseigenschaft des Logarithmus $\ln a^n = n \ln a$.

Wegen $\sqrt[n]{a} \ldots \sqrt[n]{a} = a$ folgt auch $\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a$.

Damit gilt $\ln a^r = r \ln a$ für alle rationalen r.

Für $a > 0$ folgt aus der Additionseigenschaft des Logarithmus $\ln a^n = n \ln a$.

Wegen $\sqrt[n]{a} \dots \sqrt[n]{a} = a$ folgt auch $\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a$.

Damit gilt $\ln a^r = r \ln a$ für alle rationalen r.

Nehmen wir hier auf beiden Seiten die Exponentialfunktion, so gilt $a^r = \exp(r \ln a)$.

Für $a > 0$ folgt aus der Additionseigenschaft des Logarithmus $\ln a^n = n \ln a$.

Wegen $\sqrt[n]{a} \dots \sqrt[n]{a} = a$ folgt auch $\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a$.

Damit gilt $\ln a^r = r \ln a$ für alle rationalen r.

Nehmen wir hier auf beiden Seiten die Exponentialfunktion, so gilt $a^r = \exp(r \ln a)$.

Definiere daher allgemeine Potenzen durch

$$a^x = \exp(x \ln a), \quad a, x \in \mathbb{R},\ a > 0.$$

Für $a > 0$ folgt aus der Additionseigenschaft des Logarithmus $\ln a^n = n \ln a$.

Wegen $\sqrt[n]{a} \dots \sqrt[n]{a} = a$ folgt auch $\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a$.

Damit gilt $\ln a^r = r \ln a$ für alle rationalen r.

Nehmen wir hier auf beiden Seiten die Exponentialfunktion, so gilt $a^r = \exp(r \ln a)$.

Definiere daher allgemeine Potenzen durch

$$a^x = \exp(x \ln a), \quad a, x \in \mathbb{R},\ a > 0.$$

Entsprechend schreiben wir für $a = e$ kürzer e^x statt $\exp(x)$.

Potenzgesetze

Es gilt für $a, b > 0$ und beliebige $x, y \in \mathbb{R}$

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$,

(ii) $(a^x)^y = a^{xy}$,

(iii) $a^x b^x = (ab)^x$.

Potenzgesetze

Es gilt für $a, b > 0$ und beliebige $x, y \in \mathbb{R}$

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$,

(ii) $(a^x)^y = a^{xy}$,

(iii) $a^x b^x = (ab)^x$.

Die Beweise folgen aus der Definition. (i) erhalten wir mit

$$a^{x+y} = \exp((x+y)\ln a) = \exp(x\ln a)\exp(y\ln a) = a^x a^y,$$

Potenzgesetze

Es gilt für $a, b > 0$ und beliebige $x, y \in \mathbb{R}$

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$,

(ii) $(a^x)^y = a^{xy}$,

(iii) $a^x b^x = (ab)^x$.

Die Beweise folgen aus der Definition. (i) erhalten wir mit

$$a^{x+y} = \exp((x+y)\ln a) = \exp(x \ln a)\exp(y \ln a) = a^x a^y,$$

(ii) mit

$$(a^x)^y = \exp(y \ln a^x) = \exp(xy \ln a) = a^{xy},$$

Potenzgesetze

Es gilt für $a, b > 0$ und beliebige $x, y \in \mathbb{R}$

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$,

(ii) $(a^x)^y = a^{xy}$,

(iii) $a^x b^x = (ab)^x$.

Die Beweise folgen aus der Definition. (i) erhalten wir mit

$$a^{x+y} = \exp((x+y)\ln a) = \exp(x \ln a)\exp(y \ln a) = a^x a^y,$$

(ii) mit

$$(a^x)^y = \exp(y \ln a^x) = \exp(xy \ln a) = a^{xy},$$

und (iii) mit

$$a^x b^x = \exp(x \ln a)\exp(x \ln b) = \exp(x \ln ab) = (ab)^x.$$

Untersuchung von Grenzwerten

Die Logarithmus-Funktion ist ein wichtiges technisches Hilfsmittel, um das Verhalten komplizierter algebraischer Ausdrücke zu untersuchen.

Die Logarithmus-Funktion ist ein wichtiges technisches Hilfsmittel, um das Verhalten komplizierter algebraischer Ausdrücke zu untersuchen.

(i) Zur Bestimmung des Grenzwertes der Folge $\sqrt[n]{n!}$ betrachten wir die Logarithmen der Folgenglieder

$$\ln \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{n}(\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n).$$

Die Logarithmus-Funktion ist ein wichtiges technisches Hilfsmittel, um das Verhalten komplizierter algebraischer Ausdrücke zu untersuchen.

(i) Zur Bestimmung des Grenzwertes der Folge $\sqrt[n]{n!}$ betrachten wir die Logarithmen der Folgenglieder

$$\ln \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{n}(\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n).$$

Die Logarithmen der Folgenglieder sind also Mittelwerte einer Folge, die bestimmt gegen unendlich divergiert.

Die Logarithmus-Funktion ist ein wichtiges technisches Hilfsmittel, um das Verhalten komplizierter algebraischer Ausdrücke zu untersuchen.

(i) Zur Bestimmung des Grenzwertes der Folge $\sqrt[n]{n!}$ betrachten wir die Logarithmen der Folgenglieder

$$\ln \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{n}(\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n).$$

Die Logarithmen der Folgenglieder sind also Mittelwerte einer Folge, die bestimmt gegen unendlich divergiert.

Damit divergieren auch die Mittelwerte und somit auch $\sqrt[n]{n!}$ bestimmt gegen unendlich.

Untersuchung von Grenzwerten

(ii) Wie verhält sich $x^{1/x}$ für $x \to \infty$?

(ii) Wie verhält sich $x^{1/x}$ für $x \to \infty$?

Der Logarithmus dieser Funktion ist

$$\ln x^{1/x} = \frac{\ln x}{x} \to 0 \quad \text{für } x \to \infty,$$

weil der Logarithmus langsamer gegen ∞ geht als jede Potenz.

(ii) Wie verhält sich $x^{1/x}$ für $x \to \infty$?

Der Logarithmus dieser Funktion ist

$$\ln x^{1/x} = \frac{\ln x}{x} \to 0 \quad \text{für } x \to \infty,$$

weil der Logarithmus langsamer gegen ∞ geht als jede Potenz.

Daher $x^{1/x} \to 1$ für $x \to \infty$.

Zusammenfassung

$$x^a \exp x \to \infty \quad \text{für } x \to \infty \quad \text{für jedes } a \in \mathbb{R},$$

Zusammenfassung

$$x^a \exp x \to \infty \quad \text{für } x \to \infty \quad \text{für jedes } a \in \mathbb{R},$$

$$x^a \exp(-x) \to 0 \quad \text{für } x \to \infty \quad \text{für jedes } a \in \mathbb{R},$$

Zusammenfassung

$$x^a \exp x \to \infty \quad \text{für } x \to \infty \quad \text{für jedes } a \in \mathbb{R},$$

$$x^a \exp(-x) \to 0 \quad \text{für } x \to \infty \quad \text{für jedes } a \in \mathbb{R},$$

$$x^a \ln(x) \to 0 \quad \text{für } x \to \infty \quad \text{für jedes } a < 0,$$

Zusammenfassung

$$x^a \exp x \to \infty \quad \text{für } x \to \infty \quad \text{für jedes } a \in \mathbb{R},$$

$$x^a \exp(-x) \to 0 \quad \text{für } x \to \infty \quad \text{für jedes } a \in \mathbb{R},$$

$$x^a \ln(x) \to 0 \quad \text{für } x \to \infty \quad \text{für jedes } a < 0,$$

$$x^a \ln(x) \to 0 \quad \text{für } x \to 0 \quad \text{für jedes } a > 0,$$

11.15 Hyperbelfunktionen

Aus der Exponentialfunktion lassen sich weitere Funktionen ableiten

$$
\begin{aligned}
\cosh(x) &= \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) && \text{(Cosinus hyperbolicus)},\\
\sinh(x) &= \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) && \text{(Sinus hyperbolicus)},\\
\tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} && \text{(Tangens hyperbolicus)},\\
\coth(x) &= \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} && \text{(Cotangens hyperbolicus)}.
\end{aligned}
$$

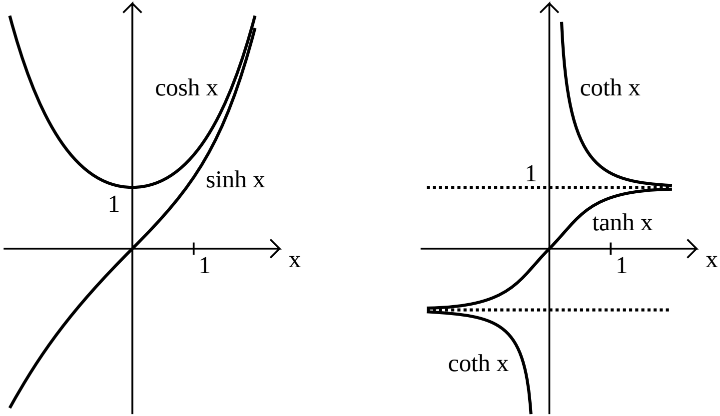
Additionstheoreme

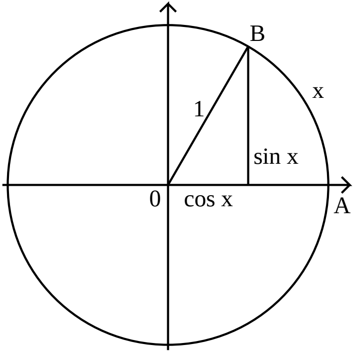
Direkt aus der Additionseigenschaft der Exponentialfunktion beweist man die *Additionstheoreme*

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y),$$

$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y).$$

Bilder der Hyperbelfunktionen





Der Punkt $(\sin x, \cos x)$ liegt auf dem Einheitskreis, x ist dabei die „Länge" des Kreisbogens von A nach B.

Einige Werte

Ist $\pi = 3,1415\ldots$ die Länge des Halbkreises, so gilt

$$\sin 0 = 0,\ \sin\frac{\pi}{2} = 1,\ \sin\pi = 0,\ \sin(x+2\pi) = \sin x,$$

$$\cos 0 = 1,\ \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \cos\pi = 0,\ \cos(x+2\pi) = \cos x,$$

Einige Werte

Ist $\pi = 3,1415\ldots$ die Länge des Halbkreises, so gilt

$$\sin 0 = 0,\ \sin\frac{\pi}{2} = 1,\ \sin\pi = 0,\ \sin(x+2\pi) = \sin x,$$

$$\cos 0 = 1,\ \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \cos\pi = 0,\ \cos(x+2\pi) = \cos x,$$

Da die Winkelfunktionen den Einheitskreis parametrisieren, gilt

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Einige Werte

Ist $\pi = 3,1415\ldots$ die Länge des Halbkreises, so gilt

$$\sin 0 = 0,\ \sin\frac{\pi}{2} = 1,\ \sin\pi = 0,\ \sin(x + 2\pi) = \sin x,$$

$$\cos 0 = 1,\ \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \cos\pi = 0,\ \cos(x + 2\pi) = \cos x,$$

Da die Winkelfunktionen den Einheitskreis parametrisieren, gilt

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Da diese Definition der Winkelfunktionen auf der geometrischen Anschauung beruht, lassen sich konkrete Werte wie beispielsweise $\cos 1$ damit nicht berechnen.

Definition durch Potenzreihen

Definiere die trigonometrischen Funktionen durch Potenzreihen:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Nach dem Quotientenkriterium sind die beiden Reihen auf ganz $\mathbb{R}$ konvergent und stellen stetige Funktionen dar.

Definition durch Potenzreihen

Definiere die trigonometrischen Funktionen durch Potenzreihen:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Nach dem Quotientenkriterium sind die beiden Reihen auf ganz $\mathbb{R}$ konvergent und stellen stetige Funktionen dar.

$\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$ sind klar.

Definition durch Potenzreihen

Definiere die trigonometrischen Funktionen durch Potenzreihen:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Nach dem Quotientenkriterium sind die beiden Reihen auf ganz $\mathbb{R}$ konvergent und stellen stetige Funktionen dar.

$\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$ sind klar.

Wie das Additionstheorem für die Exponentialfunktion leitet man $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und die *Additionstheoreme*

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

her.

Eigenschaften des Cosinus

Wir definieren $\frac{\pi}{2}$ als erste positive Nullstelle des Cosinus. Die Cosinus-Reihe ist alternierend und es gilt

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!} > \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } 0 < x \leq 3.$$

Eigenschaften des Cosinus

Wir definieren $\frac{\pi}{2}$ als erste positive Nullstelle des Cosinus. Die Cosinus-Reihe ist alternierend und es gilt

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!} > \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } 0 < x \leq 3.$$

Die Absolutbeträge der Glieder sind daher ab $n = 1$ streng monoton fallend und nach dem Leibniz-Kriterium ist

$$C_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = C_4(x) \quad \text{für } 0 < x \leq 3.$$

Eigenschaften des Cosinus

Wir definieren $\frac{\pi}{2}$ als erste positive Nullstelle des Cosinus. Die Cosinus-Reihe ist alternierend und es gilt

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!} > \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } 0 < x \leq 3.$$

Die Absolutbeträge der Glieder sind daher ab $n = 1$ streng monoton fallend und nach dem Leibniz-Kriterium ist

$$C_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = C_4(x) \quad \text{für } 0 < x \leq 3.$$

Die Unterfunktion C_2 besitzt eine Nullstelle für $\alpha = \sqrt{2}$, die Oberfunktion C_4 für $\beta = \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}$. Damit gilt

$$1,4 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < 1,6.$$

Mit $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ gilt $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ und aus den Additionstheoremen folgt

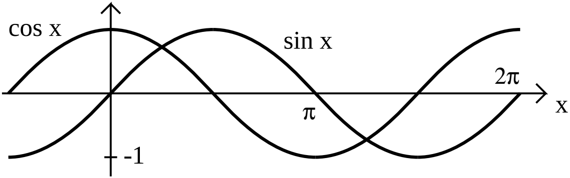
$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x, \quad \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x.$$

Mit $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ gilt $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ und aus den Additionstheoremen folgt

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x, \quad \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x.$$

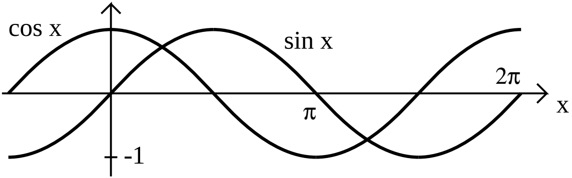
Es fehlt allerdings noch, dass $\frac{\pi}{2}$ tatsächlich der Länge des Viertelkreises entspricht.

Monotonieverhalten



Aufgrund der Definition von $\pi/2$ als erster Nullstelle des Cosinus ist $\cos x > 0$ in $[0, \pi/2)$.

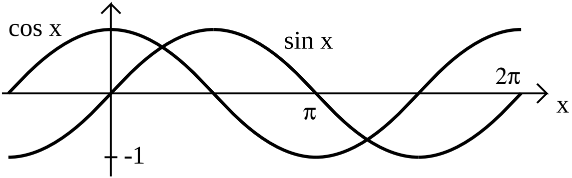
Monotonieverhalten



Aufgrund der Definition von $\pi/2$ als erster Nullstelle des Cosinus ist $\cos x > 0$ in $[0, \pi/2)$.

Wegen $\sin \pi/2 = 1$ und $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ muss wegen des Zwischenwertsatzes auch $\sin x > 0$ in $(0, \pi/2)$ gelten.

Monotonieverhalten



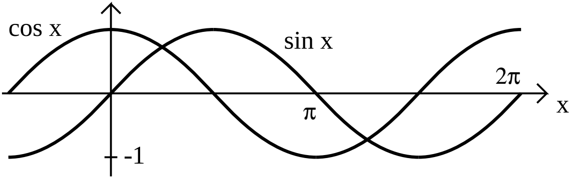
Aufgrund der Definition von $\pi/2$ als erster Nullstelle des Cosinus ist $\cos x > 0$ in $[0, \pi/2)$.

Wegen $\sin \pi/2 = 1$ und $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ muss wegen des Zwischenwertsatzes auch $\sin x > 0$ in $(0, \pi/2)$ gelten.

Aus dem Additionstheorem des Cosinus folgt daher für $0 \leq x < x + y \leq \pi/2$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \leq \cos x \cos y < \cos x.$$

Monotonieverhalten



Aufgrund der Definition von $\pi/2$ als erster Nullstelle des Cosinus ist $\cos x > 0$ in $[0, \pi/2)$.

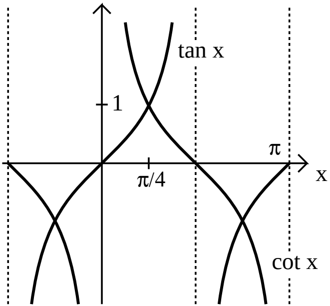
Wegen $\sin \pi/2 = 1$ und $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ muss wegen des Zwischenwertsatzes auch $\sin x > 0$ in $(0, \pi/2)$ gelten.

Aus dem Additionstheorem des Cosinus folgt daher für $0 \leq x < x + y \leq \pi/2$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \leq \cos x \cos y < \cos x.$$

Der Cosinus ist also im Intervall $[0, \pi/2]$ streng monoton fallend.

Tangens und Cotangens



Wir definieren *Tangens* und *Cotangens* durch

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{für } x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\; k \in \mathbb{Z},$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{für } x \neq k\pi,\; k \in \mathbb{Z}.$$

Arcusfunktionen

Die *Arcusfunktionen* sind Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen.

Arcusfunktionen

Die *Arcusfunktionen* sind Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen.

Da diese allesamt periodisch sind, müssen sie auf ein Intervall eingeschränkt werden, auf dem sie streng monoton sind.

Arcusfunktionen

Die *Arcusfunktionen* sind Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen.

Da diese allesamt periodisch sind, müssen sie auf ein Intervall eingeschränkt werden, auf dem sie streng monoton sind.

Bei allen vier trigonometrischen Funktionen hat man sich dabei auf ein Intervall geeinigt und spricht vom *Hauptwert* der Umkehrfunktion.

Definitionsbereiche der Arcusfunktionen

Wir definieren die Hauptwerte der Winkelfunktionen durch mehr oder weniger willkürliche Festlegung des Definitionsbereichs und kommen dann zu

$$
\begin{aligned}
y &= \arcsin x, & |y| &\le \tfrac{\pi}{2}, & (|x| &\le 1),\\
y &= \arccos x, & 0 \le y &\le \pi, & (|x| &\le 1),\\
y &= \arctan x, & |y| &\le \tfrac{\pi}{2}, & (x &\in \mathbb{R}),\\
y &= \operatorname{arccot} x, & 0 \le y &\le \pi, & (x &\in \mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

Bilder der Arcusfunktionen