Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Effiziente Algorithmen und
wissensbasierte Systeme

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2018/19

14. Vorlesung

Rot-Schwarz-Bäume

Prof. Dr. Alexander Wolff

Lehrstuhl für Informatik I

Dynamische Menge

verwaltet Elemente einer
sich ändernden Menge M

Abstrakter Datentyp	*Funktionalität*
ptr Insert(key k, info i) Delete(ptr x)	} Änderungen
ptr Search(key k) ptr Minimum() ptr Maximum() ptr Predecessor(ptr x) ptr Successor(ptr x)	} Anfragen

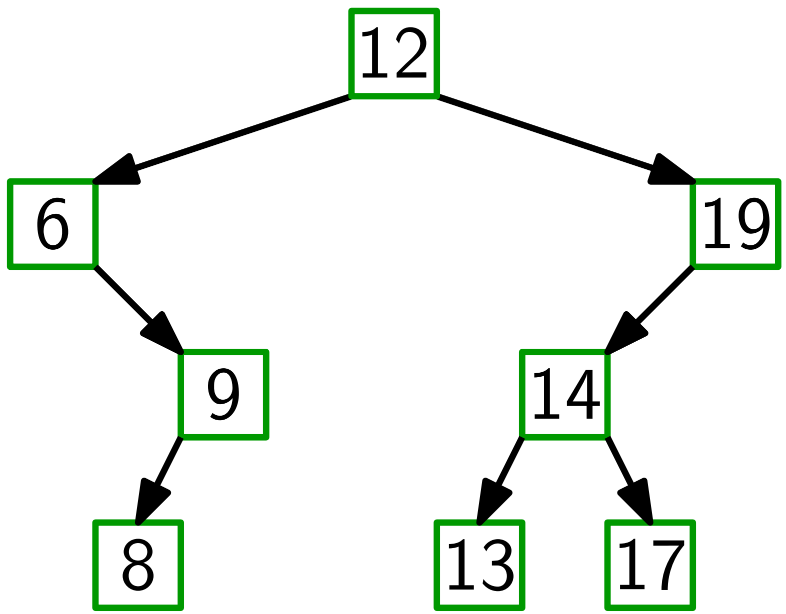
Implementierung: je nachdem...

Binäre Suchbäume

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $O(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber: Im schlechtesten Fall gilt $h \in \Theta(n)$.

Ziel: Suchbäume *balancieren*!
$\Rightarrow \; h \in O(\log n)$



Binärer-Suchbaum-Eigenschaft:

Für jeden Knoten v gilt:

alle Knoten im linken Teilbaum von v haben Schlüssel $\leq v.key$
rechten $\geq$

(c) Rhein-Zeitung, 2.8.1998

Balaciermethoden

Beispiele

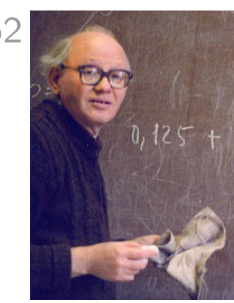
nach Gewicht — $BB[\alpha]$-Bäume

für jeden Knoten ist das Gewicht (= Anzahl der Knoten) von linkem u. rechtem Teilbaum ungefähr gleich.

nach Höhe — AVL-Bäume*

für jeden Knoten ist die Höhe von linkem und rechtem Teilbaum ungefähr gleich.

*) Georgi M. Adelson-Velski & Jewgeni M. Landis, Doklady Akademii Nauk SSSR, 1962



1922–2014

1921–1997

nach Grad — $(2,3)$-Bäume

alle Blätter haben dieselbe Tiefe, aber innere Knoten können verschieden viele Kinder haben.

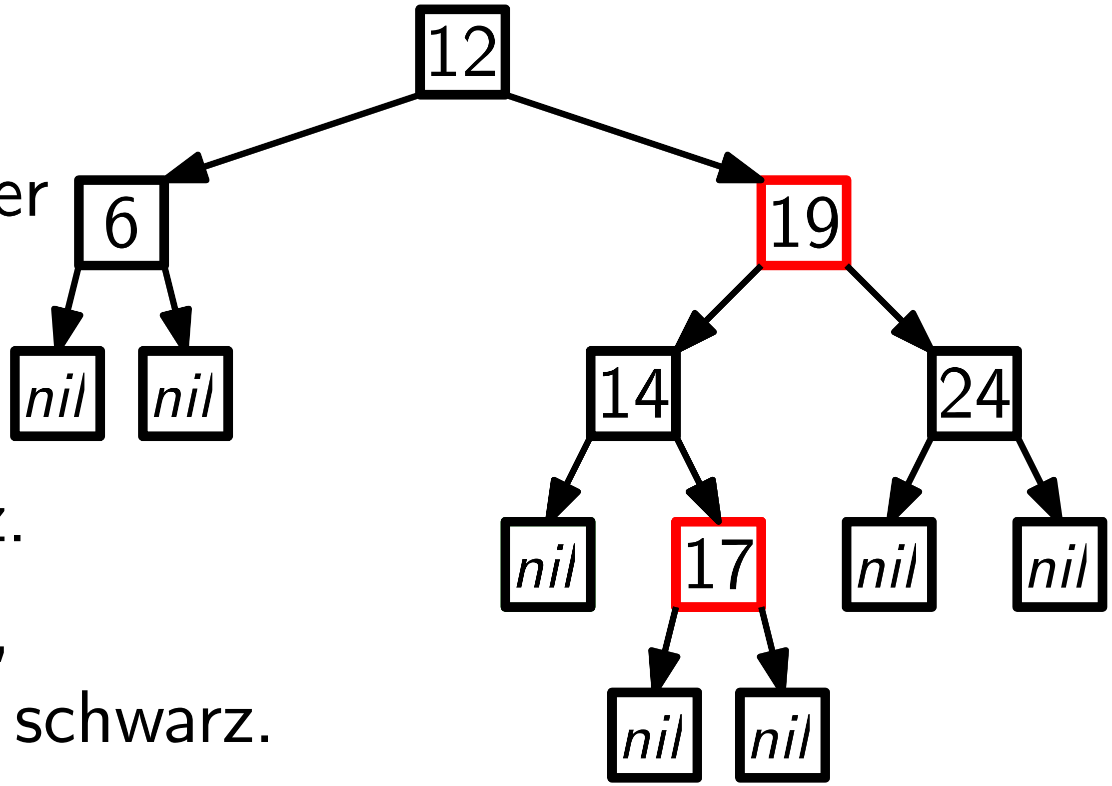
nach Knotenfarbe — Rot-Schwarz-Bäume

jeder Knoten ist entw. „gut“ oder „schlecht“; der Anteil schlechter Knoten darf in keinem Teilbaum zu groß sein.

Foto von GAV: The Eugene Dynkin Collection, Cornell University. Foto von JL: Konrad Jacobs / wikipedia

Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden *Rot-Schwarz-Eigenschaften:*



(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

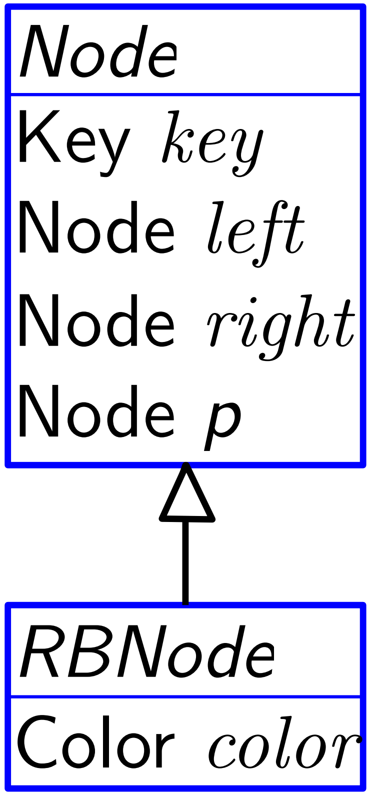
(E3) Alle Blätter sind schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.

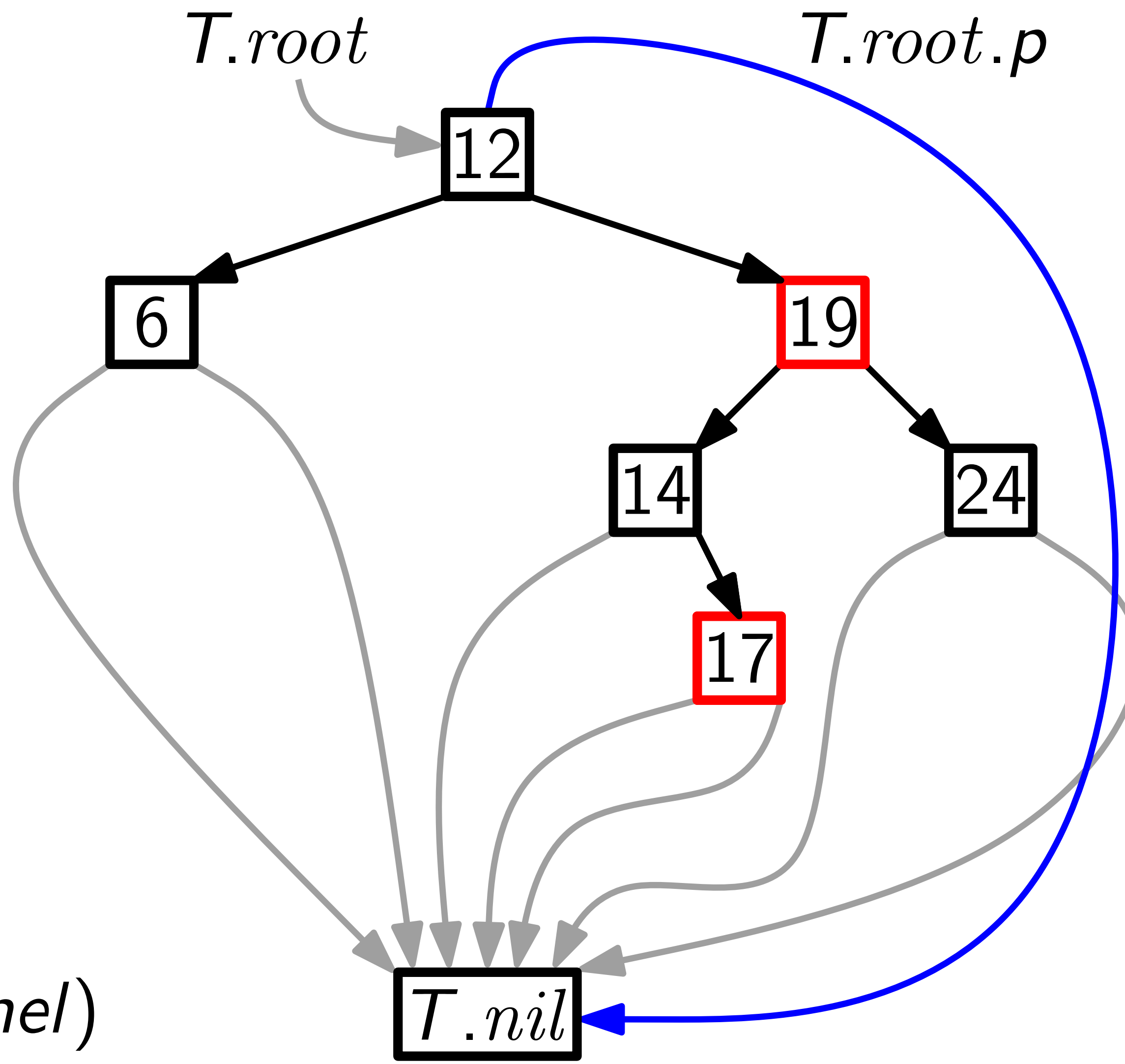
(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

Aus (E4) folgt: Auf keinem Wurzel-Blatt-Pfad folgen zwei rote Knoten direkt auf einander.

Technisches Detail



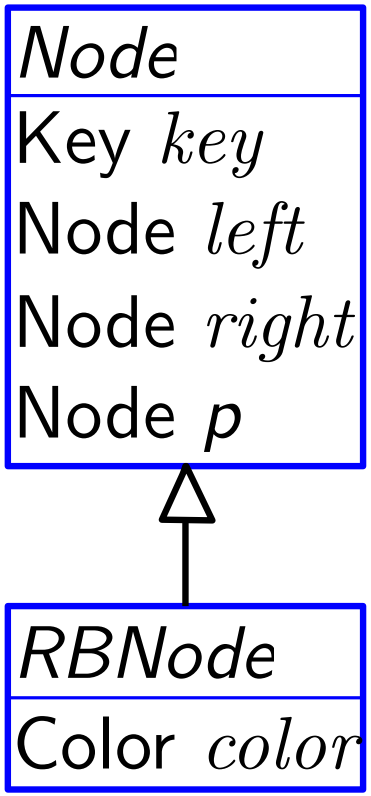
$T.root$, $T.nil$



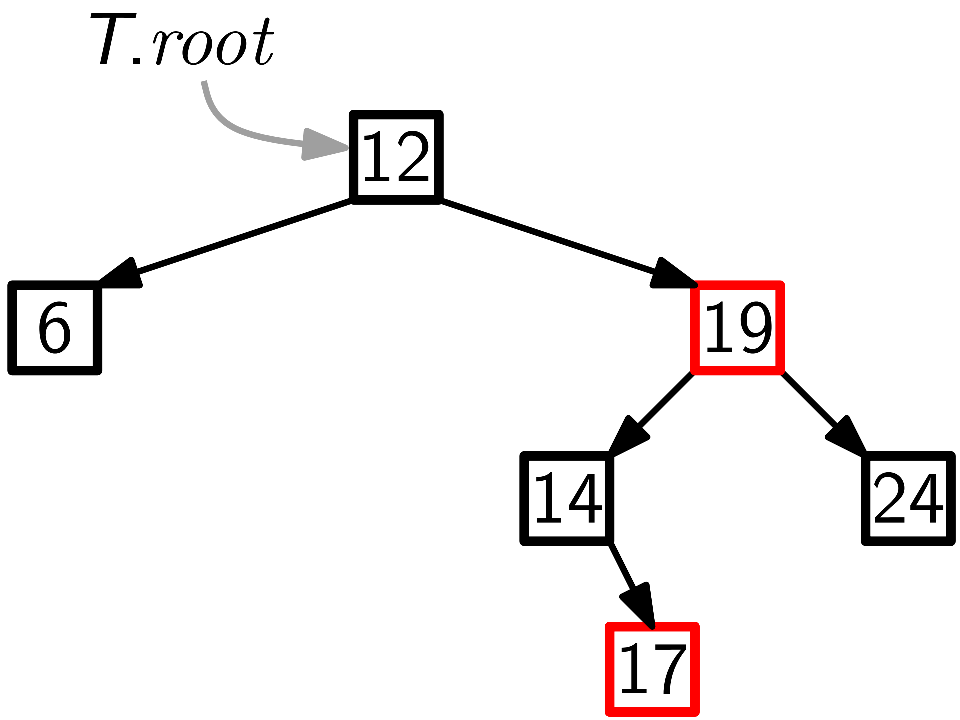
Dummy-Knoten (engl. *sentinel*)

Zweck: um Baum-Operationen prägnanter aufschreiben zu können. (Wir zeichnen den Dummy-Knoten i.A. nicht.)

Technisches Detail

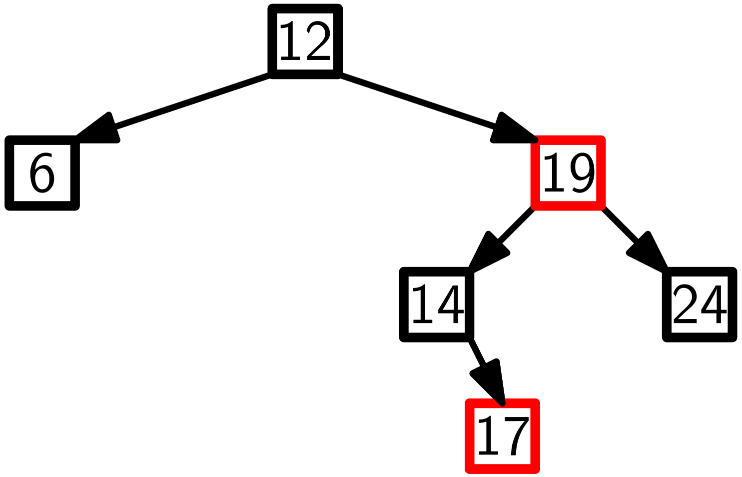


$T.root\,,\ T.nil$



Zweck: um Baum-Operationen prägnanter aufschreiben zu können. (Wir zeichnen den Dummy-Knoten i.A. nicht.)

(Schwarz-) Höhe



Definition: Die *Länge* eines Pfades ist die Anz. seiner Kanten.

Definition: Sei B ein Baum.
Knoten u ist *unter* Knoten v, wenn u in dem Teilbaum B_v von B mit Wurzel v enthalten ist.

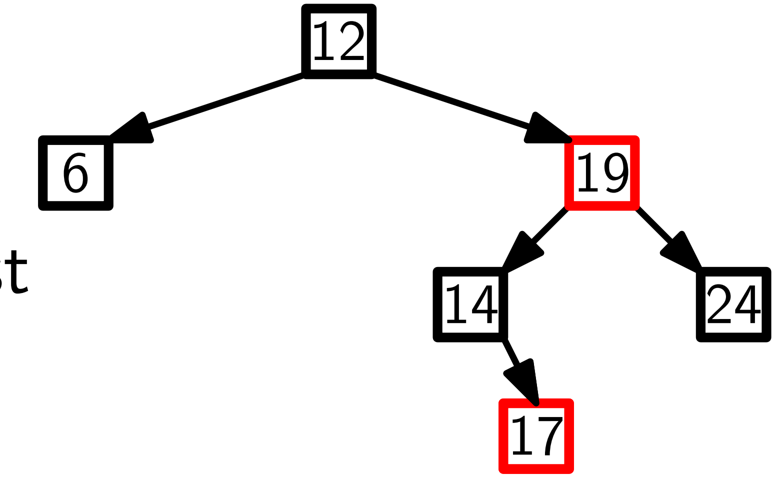
Beispiel: „17“ ist unter „19“, „14“ ist *nicht* unter „6“.

Definition: Die *Höhe* eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

Definition': Die *Höhe* Höhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der Knoten (ohne v) auf dem längsten Pfad zu einem Blatt (inkl. Blatt) in B_v.

Beispiel: „12“ hat Höhe

(Schwarz-) Höhe



Definition: Die *Länge* eines Pfades ist die Anz. seiner Kanten.

Definition: Sei B ein Baum.
Knoten u ist *unter* Knoten v, wenn u in dem Teilbaum B_v von B mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: „17“ ist unter „19“, „14“ ist *nicht* unter „6“.

Definition: Die *Höhe* eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

wohl-definiert wg. (E5)

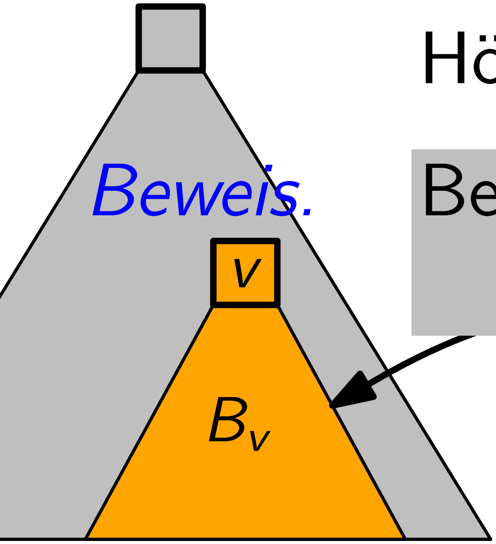
Definition: Die *Schwarz-Höhe* sHöhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der schwarzen Knoten (ohne v) auf jedem ~~längsten~~ Pfad zu einem Blatt (inkl. Blatt) in B_v.

Beispiel: „12“ hat Höhe 4 (!) und Schwarz-Höhe 2.

Folgerung: v Knoten $\Rightarrow$ sHöhe(v) $\leq$ Höhe(v) $\leq 2 \cdot$ sHöhe(v).

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.



Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:

B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:
B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe$(v) = 0$. Dann $B_v = B.nil$ und sHöhe$(v) = 0$.
B_v hat $0 = 2^0 - 1$ innere Knoten. ✓

Höhe$(v) > 0$. Beide Kinder von v haben Höhe $<$ Höhe(v).

$\Rightarrow$ können Ind.-Annahme anwenden.

$\Rightarrow$ # innere Knoten von B_v ist mind.

$$2 \cdot (\underbrace{2^{\boxed{\text{sHöhe}(v)-1}} - 1}_{\text{Anz. innerer Knoten unter einem Kind von } v}) + 1 = 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1.$$ ✓

sHöhe der Kinder von v ist mind.

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:
B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

$$v := B.\mathit{root} \;\Rightarrow\; \underbrace{\#\text{ innere Knoten}(B)}_{n} \geq 2^{\text{sHöhe}(B)} - 1.$$

$\Rightarrow \text{sHöhe}(B) \leq \log_2(n+1)$

Wegen R-S-Eig. (E4) gilt: $\text{Höhe}(B) \leq 2\,\text{sHöhe}(B)$.

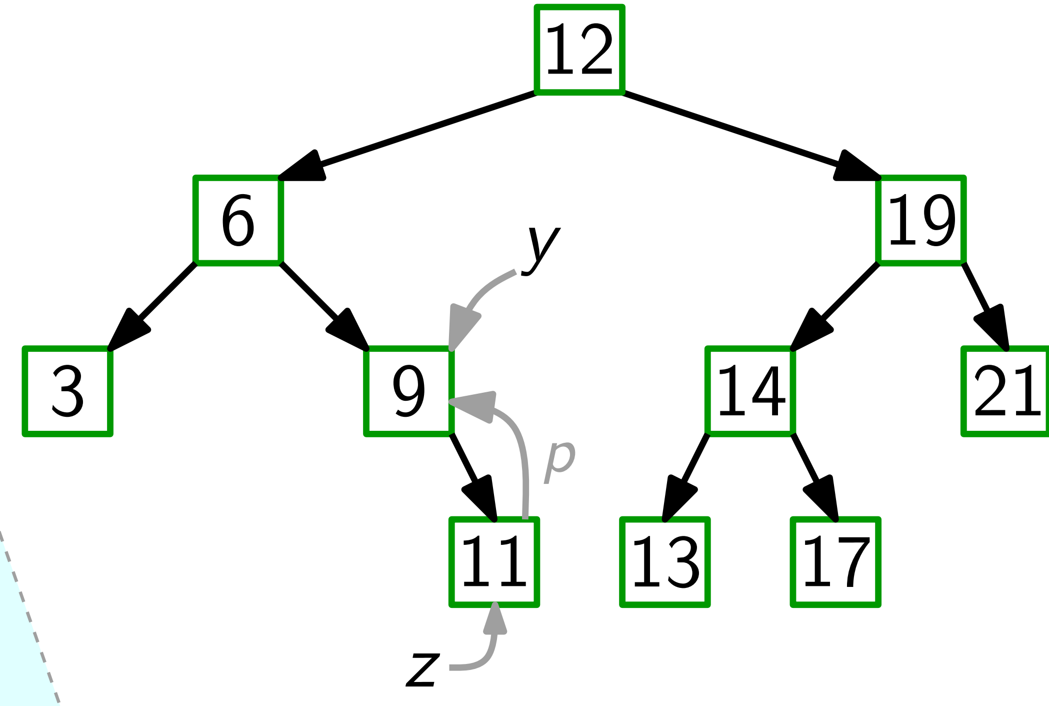
$\Rightarrow \text{Höhe}(B) \leq 2\log_2(n+1)$ $\square$

Also: Rot-Schwarz-Bäume sind *balanciert*! Fertig?!
Nee: Insert & Delete können R-S-Eig. *verletzen!*

Einfügen

Node Insert(key k)
  $y = nil$
  $x = root$
  while $x \neq nil$ **do**
    $y = x$
    if $k < x.key$ **then**
      $x = x.left$
    else $x = x.right$
  $z = $ new Node(k, y)
  if $y == nil$ **then** $root = z$
  else
    if $k < y.key$ **then** $y.left = z$
    else $y.right = z$
  return z

Insert(11) $x == nil$

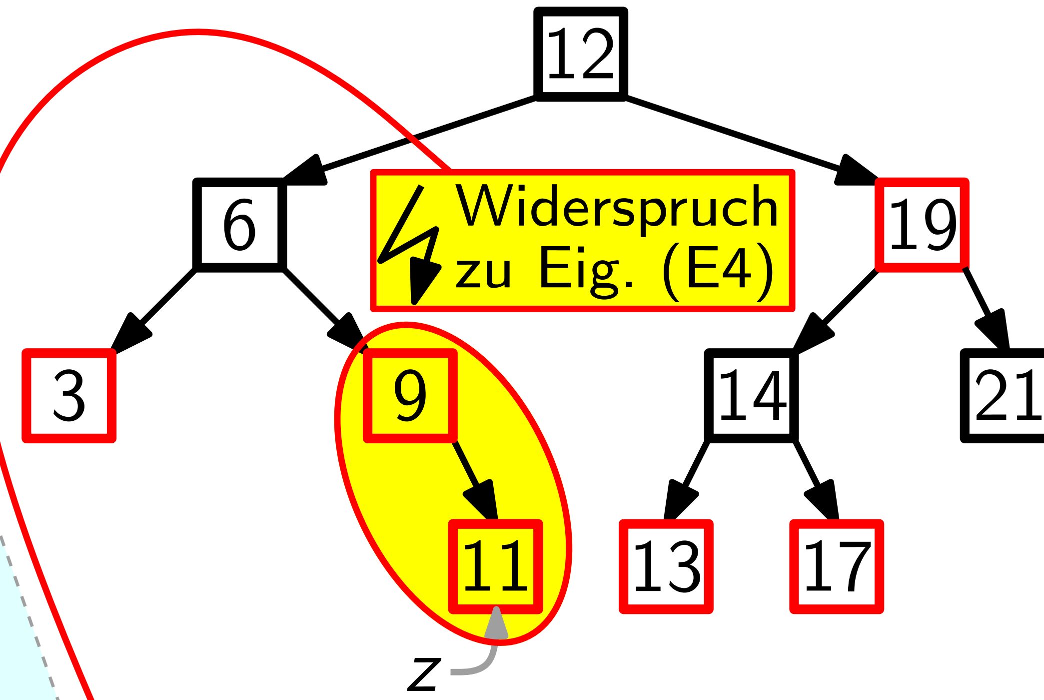


Node(Key k, Node par)
  $key = k$
  $p = par$
  $right = left = nil$

Einfügen

Laufzeit? (ohne RBInsertFixup) $O(h) = O(\log n)$

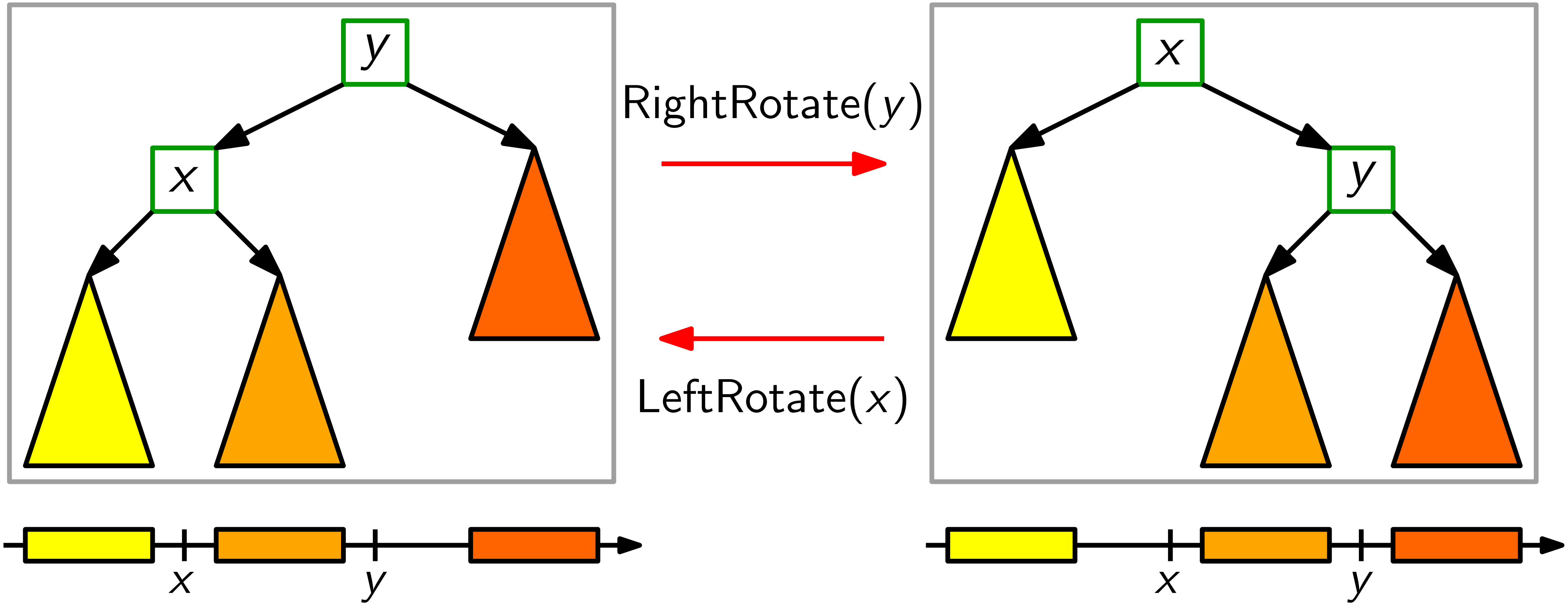
RB RB
Node Insert(key k)
    $y = T.nil$
    $x = root$
    while $x \neq T.nil$ **do**
        $y = x$
        if $k < x.key$ **then**
            $x = x.left$
        else $x = x.right$
                RB
    $z =$ new Node(k, y ~~)~~ $, red)$
    if $y == T.nil$ **then** $root = z$
    else
        if $k < y.key$ **then** $y.left = z$
        else $y.right = z$
    RBInsertFixup(z)
    return z



Node(Key k, Node par)
    $key = k$
    $p = par$
    $right = left = T.nil$

RBNode($\ldots$, Color c)
    super(k, par)
    $color = c$

Exkurs: Rotationen



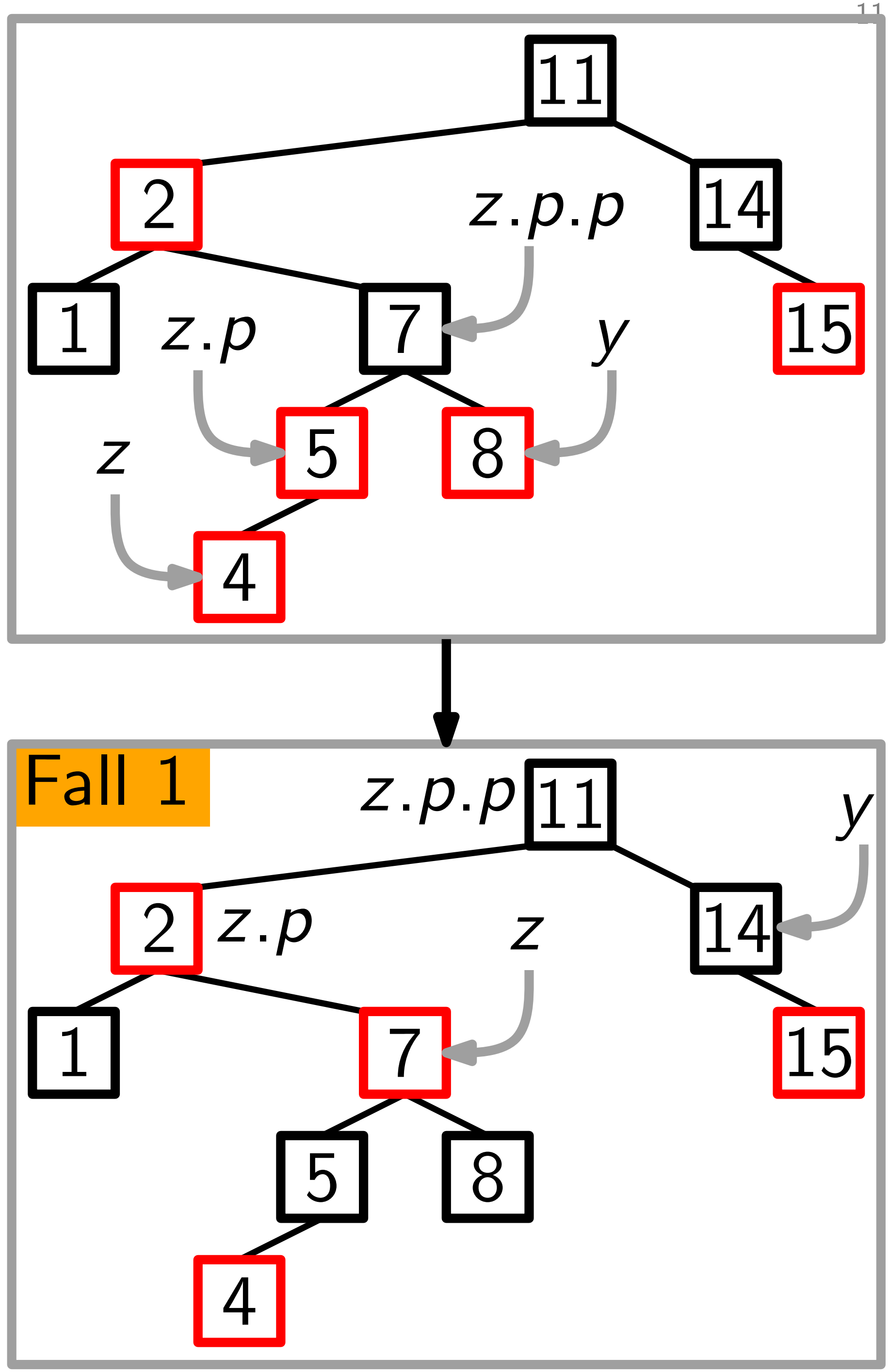
Also: Binärer-Suchbaum-Eig. bleibt beim Rotieren erhalten!

Aufgabe: Schreiben Sie Pseudocode für LeftRotate(x)!

Laufzeit: $O(1)$.

RBInsertFixup(Node z)

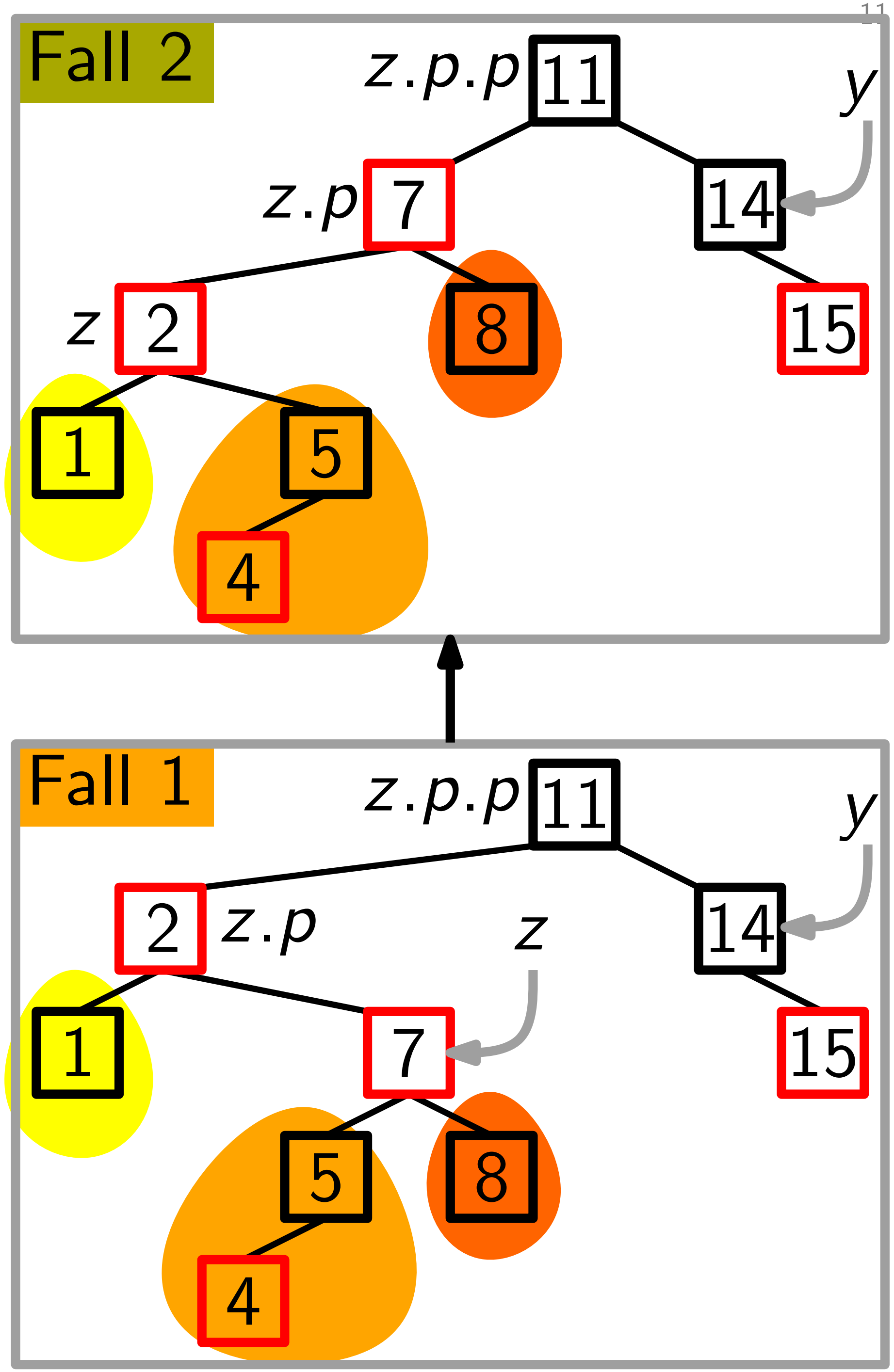
```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right        // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
root.color = black
```



RBInsertFixup(Node z)

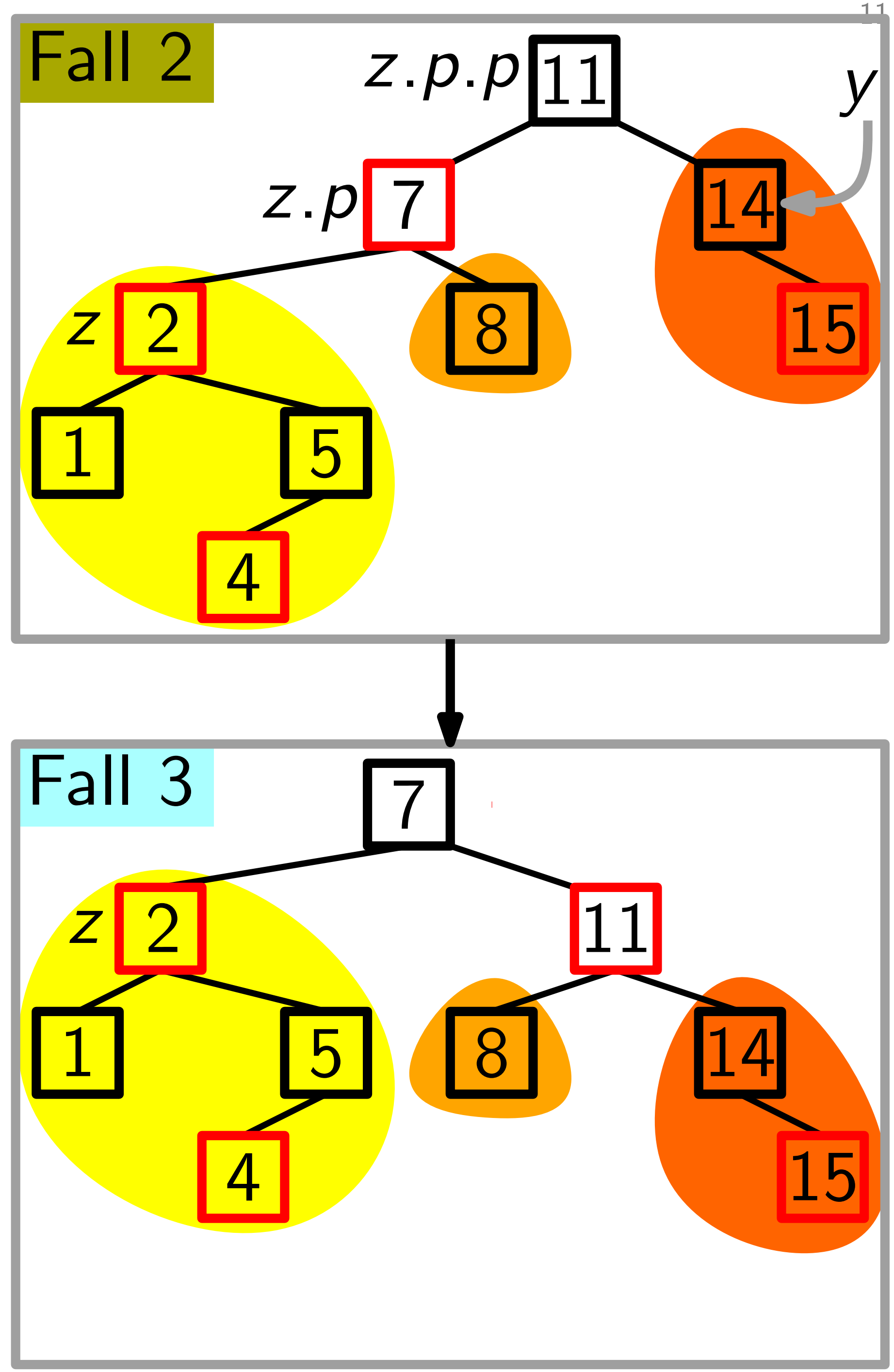
while $z.p.color == red$ **do**
- **if** $z.p == z.p.p.left$ **then**
  - $y = z.p.p.right$ // Tante von z
  - **if** $y.color == red$ **then**
    - $z.p.color = black$
    - $z.p.p.color = red$
    - $y.color = black$
    - $z = z.p.p$
  - **else**
    - **if** $z == z.p.right$ **then**
      - $z = z.p$
      - LeftRotate(z)
    - $z.p.color = black$
    - $z.p.p.color = red$
    - RightRotate($z.p.p$)
- **else** … // wie oben, aber re. & li. vertauscht

$root.color = black$



RBInsertFixup(Node z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right        // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
root.color = black
```



Korrektheit

Zu zeigen: RBInsertFixup stellt R-S-Eigenschaft wieder her.

Schleifeninvariante (gültig am Anfang der while-Schleife)

- z ist rot.
- Falls $z.p$ die Wurzel ist, dann ist $z.p$ schwarz.
- Falls R-S-Eig. verletzt sind, dann entweder (E2) oder (E4).
  - Falls (E2) verletzt ist, dann weil $z = root$ und z rot ist.
  - Falls (E4) verletzt ist, dann weil z und $z.p$ rot sind.

Zeige:
- Initialisierung
- Aufrechterhaltung
- Terminierung

Viel Arbeit! Siehe [CLRS, Kapitel 13.3].

Laufzeit RBInsertFixup

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
root.color = black
```

$O(1)$

$O(1)$

$O(1)$

Klettert Baum zwei Ebenen nach oben.

Führt zum Abbruch der while-Schleife.

Insgesamt:

– Fall 1 $O(h)$ mal

– Fall 2 ≤ 1 mal

– Fall 3 ≤ 1 mal

$O(\log n)$ Umfärbungen und ≤ 2 Rotationen

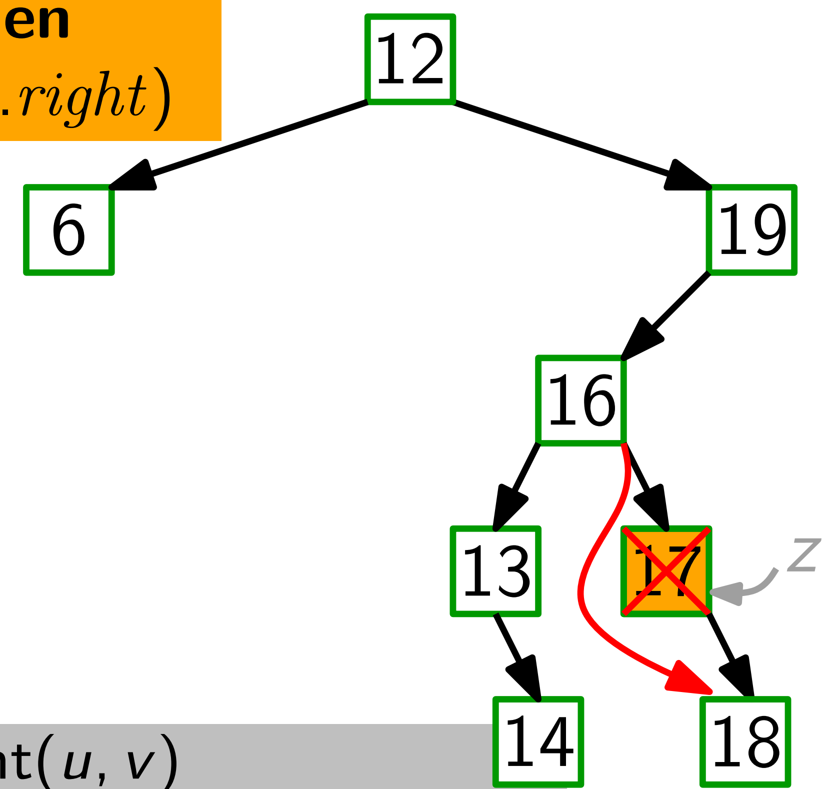
Löschen in (farblosen) binären Suchbäumen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat kein li. Kind.

if $z.\mathit{left} == \mathit{nil}$ **then**
    Transplant$(z, z.\mathit{right})$

Setze $z.\mathit{right}$ an die Stelle von z.
Lösche z.



2. z hat kein re. Kind.

3. z hat zwei Kinder.

Transplant(u, v)
  if $u.p == \mathit{nil}$ **then** $\mathit{root} = v$
  else
    if $u == u.p.\mathit{left}$ **then**
      $u.p.\mathit{left} = v$
    else $u.p.\mathit{right} = v$
  if $v \neq \mathit{nil}$ **then** $v.p = u.p$

Setze v an die Stelle von u.

Löschen in (farblosen) binären Suchbäumen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat kein li. Kind.

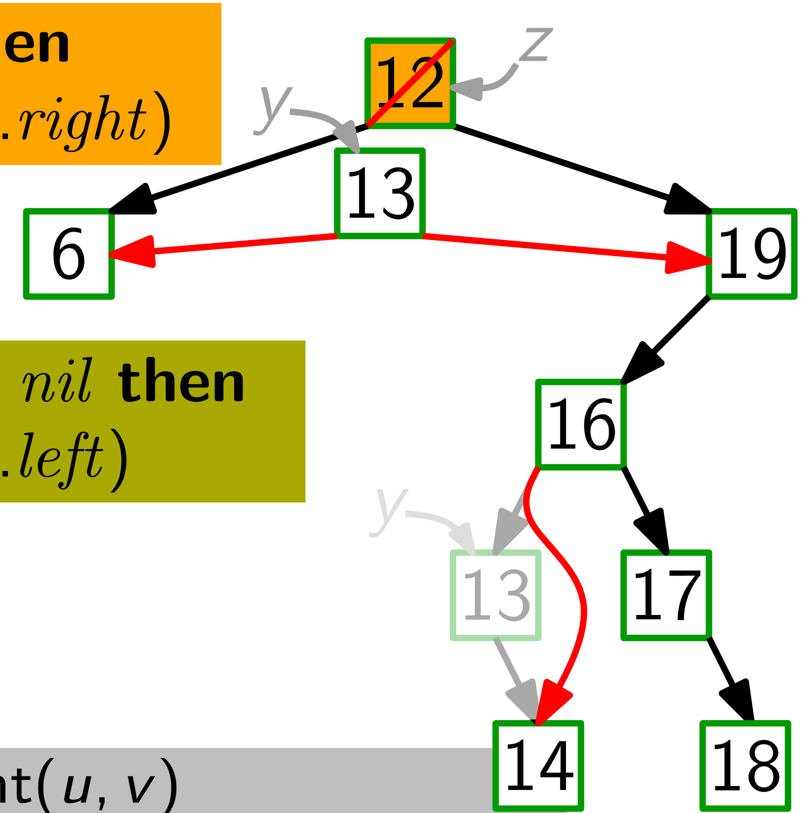
if $z.\mathit{left} == \mathit{nil}$ **then**
    Transplant($z, z.\mathit{right}$)

Setze $z.\mathit{right}$ an die Stelle von z.
Lösche z.

2. z hat kein re. Kind.

else if $z.\mathit{right} == \mathit{nil}$ **then**
    Transplant($z, z.\mathit{left}$)

symmetrisch!



3. z hat zwei Kinder.

Setze $y = \text{Successor}(z)$
Falls $y.p \neq z$, setze $y.\mathit{right}$
  an die Stelle von y.
Setze y an die Stelle von z

Transplant(u, v)
  if $u.p == \mathit{nil}$ **then** $\mathit{root} = v$
  else
    if $u == u.p.\mathit{left}$ **then**
      $u.p.\mathit{left} = v$
    else $u.p.\mathit{right} = v$
  if $v \neq \mathit{nil}$ **then** $v.p = u.p$

Setze v an die Stelle von u.

Löschen (Übersicht)

Delete(Node z)

```
if z.left == nil then                // kein linkes Kind
    Transplant(z, z.right)
else
    if z.right == nil then           // kein rechtes Kind
        Transplant(z, z.left)
    else                             // zwei Kinder
        y = Successor(z)
        if y.p ≠ z then
            Transplant(y, y.right)
            y.right = z.right
            y.right.p = y
        Transplant(z, y)
        y.left = z.left
        y.left.p = y
```

```
RBDelete(Node z)
y = z; origcolor = y.color
if z.left == T.nil then
    x = z.right
    RBTransplant(z, z.right)
else
    if z.right == T.nil then
        x = z.left
        RBTransplant(z, z.left)
    else
        y = Successor(z)
        origcolor = y.color
        x = y.right
        if y.p == z then x.p = y
        else
            RBTransplant(y, y.right)
            y.right = z.right
            y.right.p = y
        RBTransplant(z, y)
        y.left = z.left
        y.left.p = y; y.color = z.color
if origcolor == black then RBDeleteFixup(x)
```

y zeigt auf den Knoten, der entweder gelöscht oder verschoben wird.

x zeigt auf den Knoten, der die Stelle von y einnimmt –

das ist entweder das einzige Kind von y oder $T.nil$.

Falls y ursprünglich *rot* war, bleiben alle R-S-Eig. erhalten:

- Keine Schwarzhöhe hat sich verändert.
- Keine zwei roten Knoten sind Nachbarn geworden.
- y rot $\Rightarrow$ $y \neq$ Wurzel $\Rightarrow$ Wurzel bleibt schwarz.

RBDeleteFixup

Was kann schief gehen, wenn y schwarz war?

(E2) y war Wurzel, und ein rotes Kind von y wurde Wurzel.

(E4) x und $x.p$ sind rot.

(E5) Falls y verschoben wurde, haben jetzt alle Pfade, die vorher y enthielten, einen schwarzen Knoten zu wenig.

„Repariere“ (E5): Knoten x zählt eine schwarze Einheit extra (ist also „rot-schwarz“ oder „doppelt schwarz“)

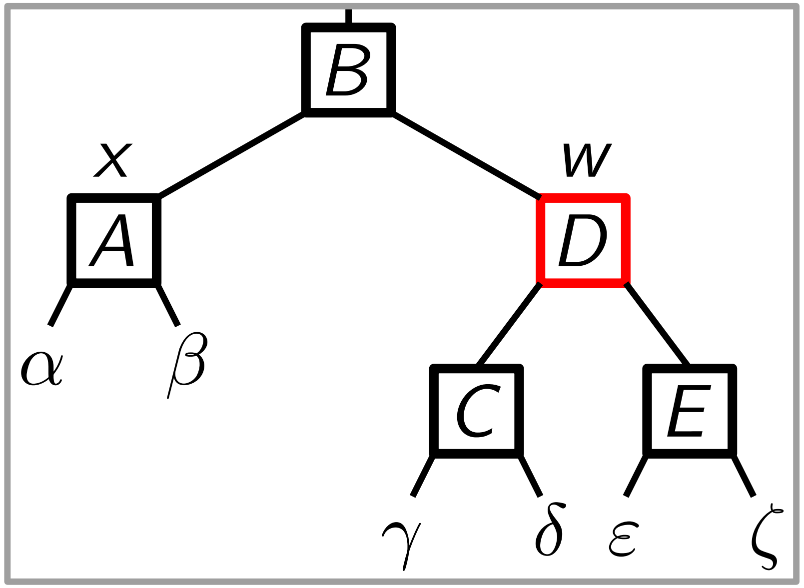
Ziel: Schiebe die überzählige schwarze Einheit nach oben, bis:

- x ist rot-schwarz $\Rightarrow$ mach x schwarz.
- x ist Wurzel $\Rightarrow$ schwarze Extra-Einheit verfällt.
- Problem wird lokal durch Umfärben & Rotieren gelöst.

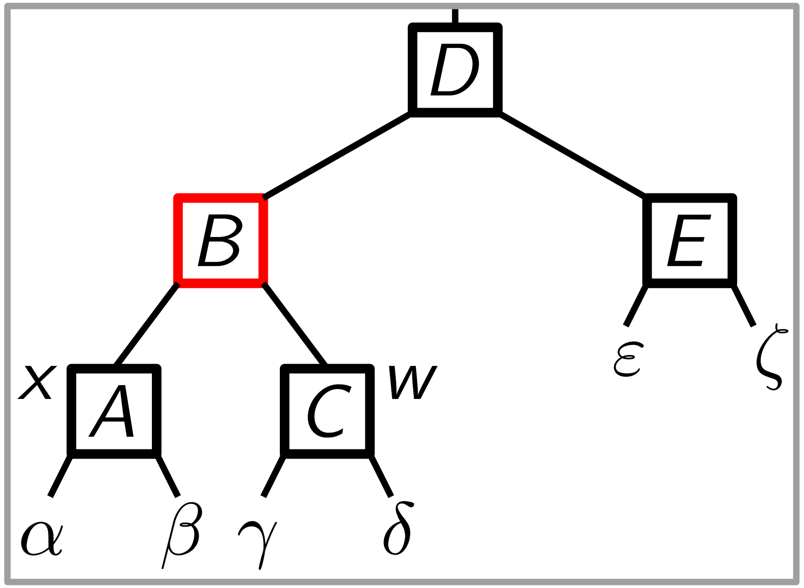
RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        w = x.p.right        // Schwester von x
        if w.color == red then
            w.color = black
            x.p.color = red
            LeftRotate(x.p)
            w = x.p.right
        if w.left.color == black and
           w.right.color == black then
            w.color = red
            x = x.p
        else // kommt gleich!!
    else // wie oben; nur left ↔ right
x.color = black
```

Ziel:
$w \to$ schwarz
ohne R-S-Eig.
zu verletzen.



Fall 1

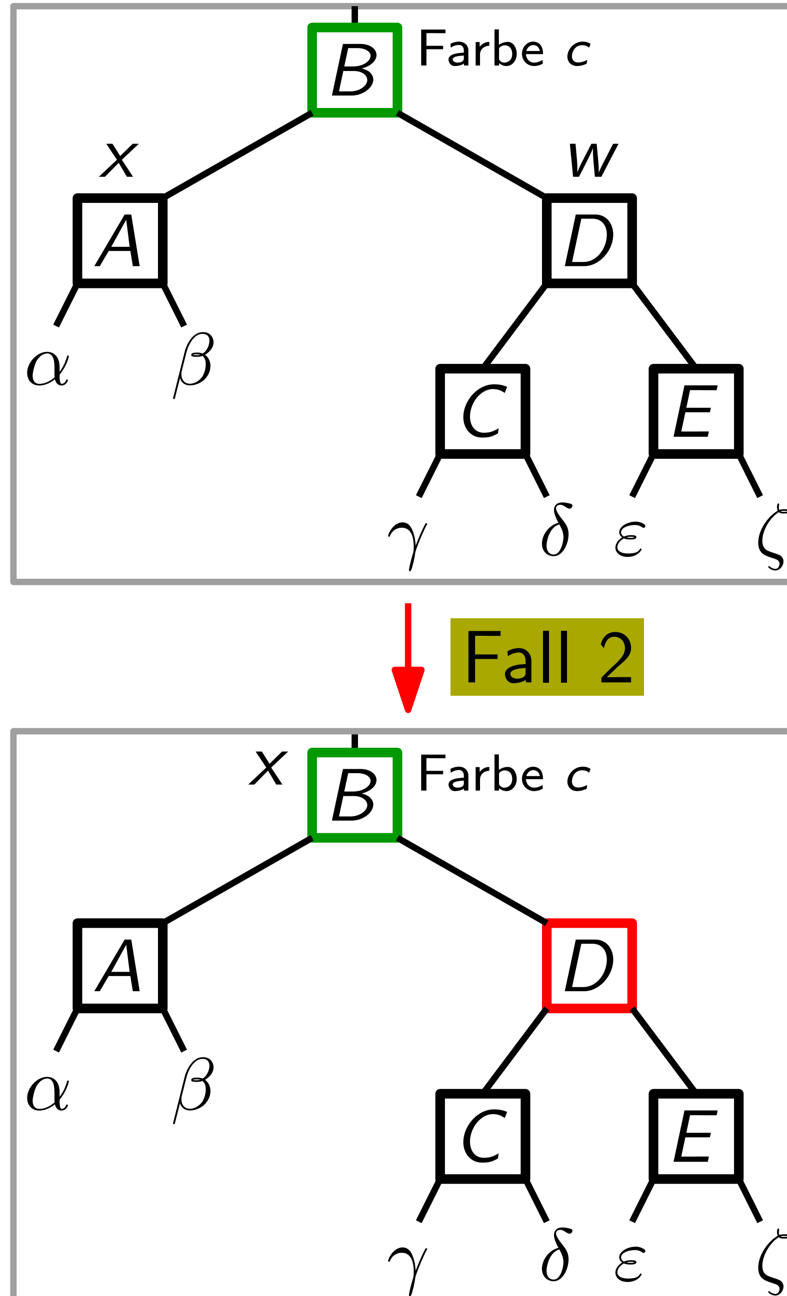


RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        w = x.p.right        // Schwester von x
        if w.color == red then
            w.color = black
            x.p.color = red
            LeftRotate(x.p)
            w = x.p.right
        if w.left.color == black and
           w.right.color == black then
            w.color = red
            x = x.p
        else // kommt gleich!!
    else // wie oben; nur left ↔ right
x.color = black
```

Ziel:
$w \to$ schwarz
ohne R-S-Eig.
zu verletzen.

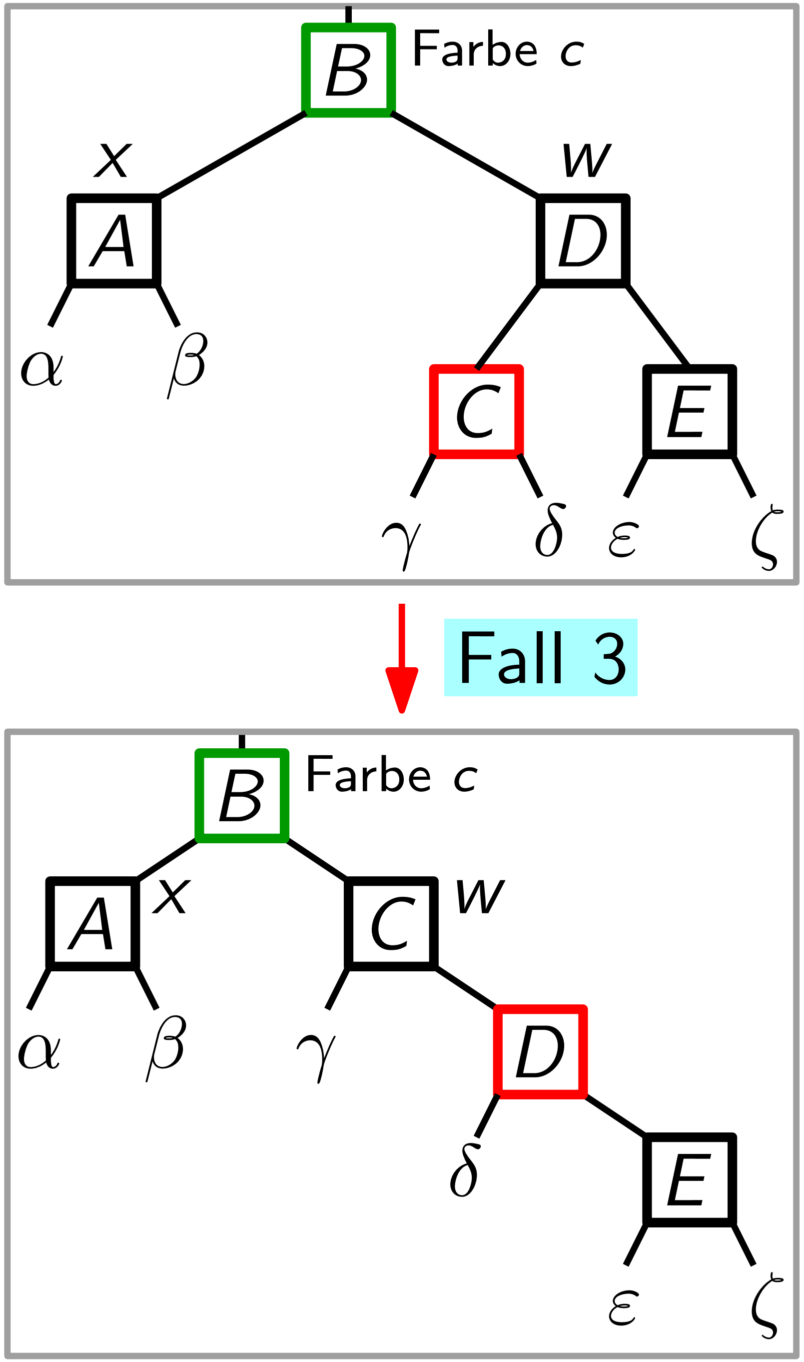
Schw. Einheit
raufschieben.



Bem.: Anz. der schw. Knoten (inkl. Extra-Einh. bei x) bleibt auf allen Pfaden gleich!

RBDeleteFixup (Forts.)

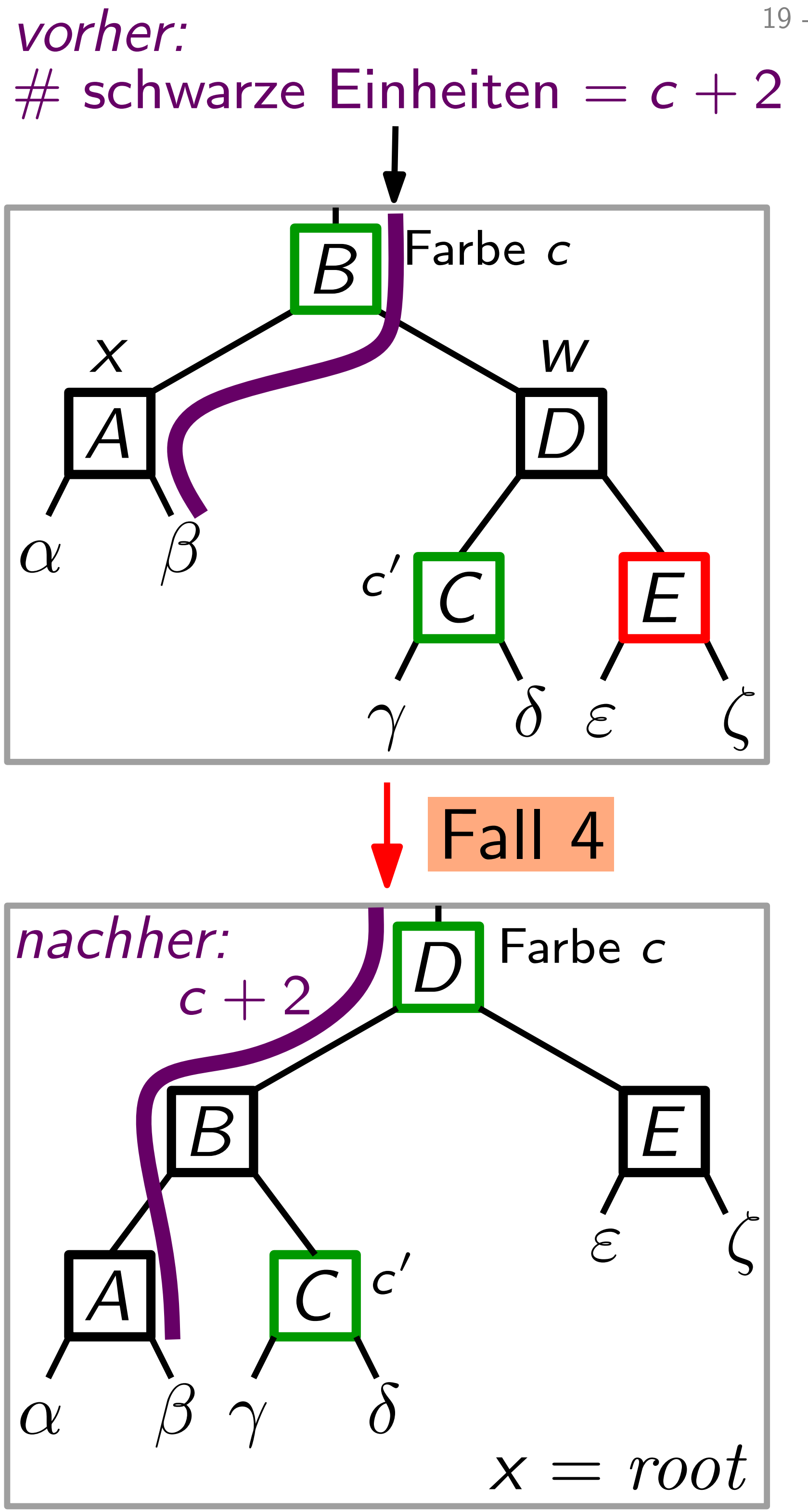
```
else
    if w.right.color == black then
        w.left.color = black
        w.color = red
        RightRotate(w)
        w = x.p.right
    w.color = x.p.color
    x.p.color = black
    w.right.color = black
    LeftRotate(x.p)
    x = root
```



RBDeleteFixup (Forts.)

else
  if $w.right.color == black$ **then**
    $w.left.color = black$
    $w.color = red$
    RightRotate(w)
    $w = x.p.right$
  $w.color = x.p.color$
  $x.p.color = black$
  $w.right.color = black$
  LeftRotate($x.p$)
  $x = root$

Bem.: Anz. der schwarzen Knoten (inkl. der Extra-Einheit bei x) bleibt auf allen Pfaden gleich!



RBDeleteFixup (Forts.)

else

  if $w.right.color == black$ **then**

    $w.left.color = black$

    $w.color = red$

    RightRotate(w)

    $w = x.p.right$

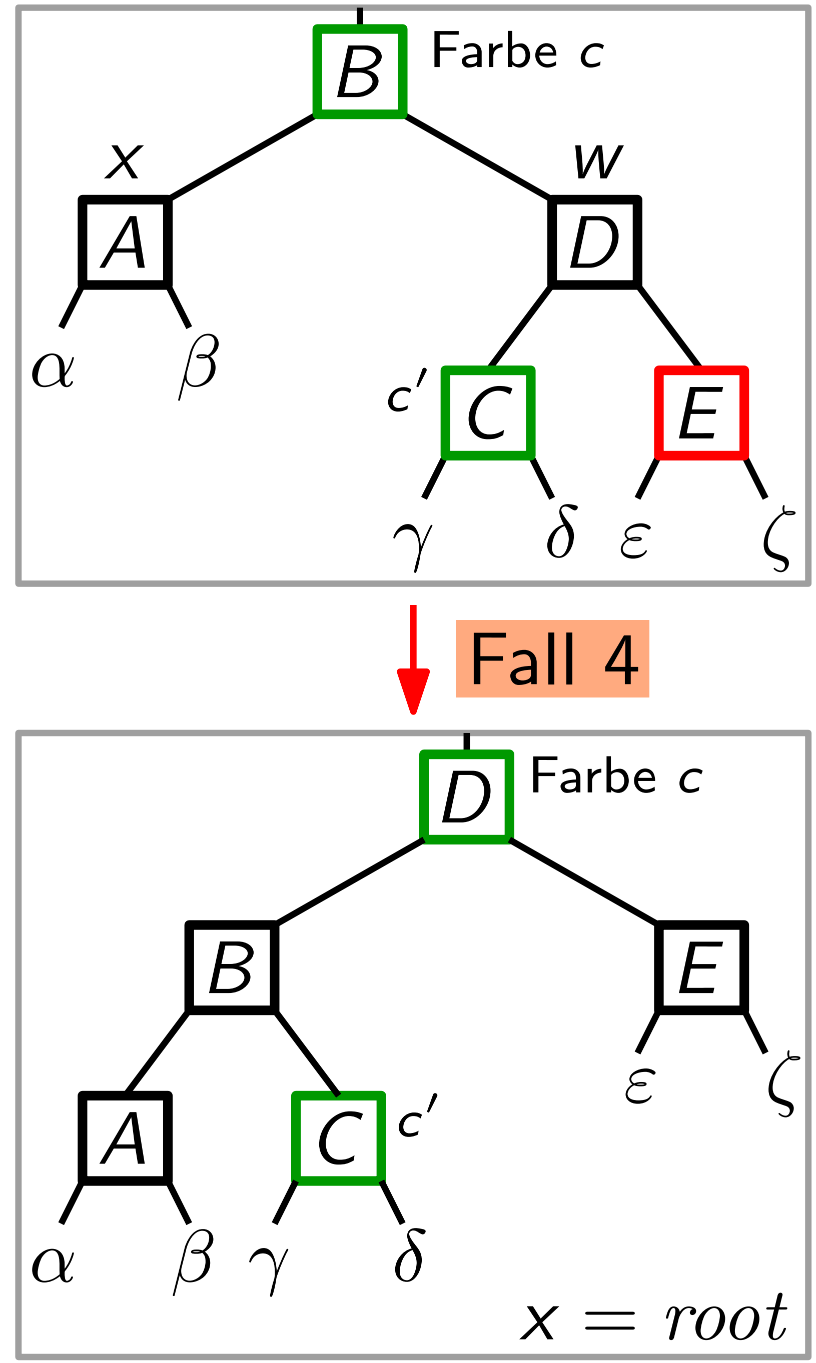
  $w.color = x.p.color$

  $x.p.color = black$

  $w.right.color = black$

  LeftRotate($x.p$)

  $x = root$



Laufzeit?

Fall 1: 1 Rotation + $O(1)$
Fall 2: $O(h)$ Umfärbungen
Fall 3: 1 Rotation + $O(1)$
Fall 4: 1 Rotation + $O(1)$

Zusammenfassung

$$\text{Laufzeit RBDelete} \in O(h) + \underbrace{\text{Laufzeit RBDeleteFixup}}_{O(h)} = O(h)$$

RBDelete erhält die Rot-Schwarz-Eigenschaften.

Also gilt (siehe Lemma): $h \in O(\log n)$

$$\Downarrow$$

$$\text{Laufzeit RBDelete} \in O(\log n)$$

Satz. Rot-Schwarz-Bäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $O(\log n)$ Zeit, wobei n die momentane Anz. der Schlüssel ist.