11 Funktionen und Stetigkeit

11.1 Beispiele von Funktionen Für eine Menge $D \subset \mathbb{R}$ bezeichnen wir die Abbildungen $f : D \to \mathbb{R}$ als *Funktionen.* D heißt *Definitionsbereich*,

$$\mathcal{R}(f) = f(D) = \{y = f(x) \text{ für ein } x \in D\}$$

heißt *Wertebereich* der Funktion f. Gilt $f(x) = 0$, so heißt x *Nullstelle* von f. In den meisten Fällen ist D ein Intervall oder die Vereinigung von Intervallen.

Seien $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ reelle Zahlen. Dann heißt

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Polynom. Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der *Grad* von p und wir schreiben $\operatorname{grad} p = n$. Ein Polynom ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ definiert.

Sind $p(x)$ und $q(x)$ Polynome, so heißt $r(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$ *rationale Funktion.* Eine rationale Funktion ist außerhalb der Nullstellen des Nennerpolynoms $p(x)$ definiert.

Eine Funktion, die sich aus Wurzelausdrücken und rationalen Funktionen zusammensetzt, heißt *algebraische Funktion.* Ein Beispiel für eine algebraische Funktion ist $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Beim Definitionsbereich algebraischer Funktionen ist zu beachten, dass Wurzeln nur aus nichtnegativen Zahlen gezogen werden. In unserem Beispiel ist daher $D = [-1, 1]$.

Seien $I_1, \ldots, I_n$ disjunkte Intervalle und $D = \cup I_k$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit f konstant auf jedem I_k heißt *stückweise konstante Funktion.*

11.2 Grenzwerte von Funktionen Wir hatten bereits Häufungspunkte von Zahlenfolgen definiert. a hieß Häufungspunkt der Folge (a_n), wenn in jeder Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen. Diesen Begriff können wir auch auf Mengen reeller Zahlen übertragen. Ist $A \subset \mathbb{R}$, so heißt $a \in \mathbb{R}$ *Häufungspunkt von* A, wenn in jeder ε-Umgebung $B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ unendlich viele Punkte von A liegen.

Sei ξ Häufungspunkt des Definitionsbereichs D der Funktion f. Wir sagen, f *konvergiert gegen a für $x \to \xi$*,

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = a \quad \text{oder} \quad f(x) \to a \text{ für } x \to \xi,$$

wenn für alle Folgen (x_n) mit $x_n \to \xi$ und $x_n \neq \xi$ gilt $f(x_n) \to a$. Die Definition wird sinngemäß auch für die Werte $\xi = \pm\infty$ verwendet: Wir schreiben $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, wenn für jede Folge (x_n), die bestimmt gegen ∞ divergiert, gilt $\lim f(x_n) = a$.

Beispiel 11.1 Für $f(x) = \frac{x}{1+x}$ gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. □

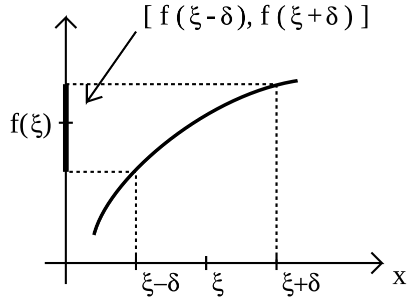
11.3 Stetigkeit von Funktionen Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f heißt *stetig* in $\xi \in D$, wenn für jede Folge (x_n) mit $x_n \to \xi$ gilt $f(x_n) \to f(\xi)$. f heißt *stetig in* D, wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.

Ist $\xi \in D$ Häufungspunkt von D, so ist die Stetigkeit von f äquivalent dazu, dass der Grenzwert $\lim_{x\to\xi} f(x)$ existiert und mit $f(\xi)$ übereinstimmt. Anschaulich kommen die Werte von $f(x)$ dem Wert $f(\xi)$ immer näher, wenn x dem Punkt ξ immer näher kommt. Diese Vorstellung lässt sich präzise fassen.

Satz 11.2 *Die Funktion f ist genau dann stetig in $\xi \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - \xi| < \delta$ folgt*

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Beweis: Sei f stetig in ξ. Angenommen, die Bedingung des Satzes ist nicht erfüllt. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $x_\delta \in D$ existiert mit $|x_\delta - \xi| < \delta$ und $|f(x_\delta) - f(\xi)| \geq \varepsilon$. Speziell können wir hier $\delta = \frac{1}{n}$ wählen und x_δ x_n nennen. Dann gilt $x_n \to \xi$, aber $f(x_n) \not\to f(\xi)$. Widerspruch!



Nun zeigen wir die umgekehrte Richtung. Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to \xi$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|x-\xi| < \delta$ gerade $|f(x)-f(\xi)| < \varepsilon$ impliziert. Wegen $x_n \to \xi$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - \xi| < \delta$ für alle $n \geq N$, daher $|f(x_n) - f(\xi)| < \varepsilon$. Damit ist $f(x_n) \to f(\xi)$ erfüllt. □

Beispiele 11.3 (i) Jede konstante Funktion ist stetig, denn wenn $f(x) = a$ für alle $x \in D$, so folgt aus $x_n \to \xi$, dass $a = f(x_n) = f(\xi)$.

(ii) Die Funktion $f(x) = x$ ist stetig, denn wenn $x_n \to \xi$, so trivialerweise $x_n = f(x_n) \to f(\xi) = \xi$.

(iii) Der Absolutbetrag $f(x) = |x|$ ist stetig. Er stimmt für $x \neq 0$ mit $-x$ oder x überein. Beide Funktionen sind nach (ii) stetig. Für $\xi = 0$ ist der Nachweis der Stetigkeit auch kein Problem: Ist $x_n \to 0$, so auch $|x_n| \to 0$.

(iv) Die Signum-Funktion ist im Punkt 0 unstetig. Für Folgen (x_n) mit $x_n \nearrow 0$ folgt $f(x_n) \to -1$ und für Folgen mit $x_n \searrow 0$ gilt $f(x_n) \to 1$. Dagegen ist $f(0) = 0$. Dieses Argument kann auf alle Funktionen mit einer „Sprungstelle“ wie etwa stückweise konstante Funktionen übertragen werden.

(v) Die *Dirichlet-Funktion* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \text{ rational} \\ 0 & \text{für } x \text{ irrational} \end{cases}$$

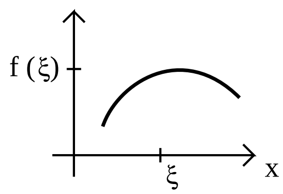
ist in jedem Punkt unstetig. Denn ist ξ irrational, so gibt es nach Abschnitt 4.3 eine Folge rationaler Zahlen (x_n) mit $x_n \to \xi$ und daher $1 = f(x_n) \not\to f(\xi) = 0$. Ist ξ dagegen rational, so ist beispielsweise $x_n = \xi + \sqrt{2}/n$ irrational mit $x_n \to \xi$ und es folgt $0 = f(x_n) \not\to f(\xi) = 1$.

(vi) Die Funktion $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \text{ irrational} \\ \frac{1}{k} & \text{für } x = \frac{k}{l} \text{ mit } k, l \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

ist in jedem rationalen Punkt unstetig. Denn wie in (v) gezeigt wurde, gibt es zu jeder rationalen Zahl ξ eine Folge von Irrationalzahlen (x_n) mit $x_n \to \xi$, aber $0 = f(x_n) \not\to f(\xi) > 0$. Ist ξ irrational, so brauchen wir nur eine Folge rationaler Zahlen $x_n = \frac{k_n}{l_n}$ zu betrachten mit $x_n \to \xi$. Da es nur endlich viele Zahlen der Form $\frac{k}{l}$ mit $k, l \leq K$ gibt, muss zwangsläufig k_n bestimmt gegen unendlich divergieren. Daher ist f in jedem irrationalen Punkt stetig. □

Anschaulich bedeutet die Stetigkeit einer Funktion, dass man ihren Graphen in einem Zug, ohne abzusetzen, zeichnen kann. Gilt für eine in ξ stetige Funktion f, dass $f(\xi) > 0$, so gibt es eine Umgebung $B_\varepsilon(\xi) = (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ mit $f(x) > 0$ für alle $x \in B_\varepsilon(\xi)$. Dies ist anschaulich klar, lässt sich aber auch leicht indirekt beweisen. Denn andernfalls gäbe es in jedem $B_{1/n}(\xi)$ ein x_n mit $f(x_n) \leq 0$. Diese x_n bilden eine Folge mit $x_n \to \xi$ und $f(x_n) \to f(\xi) > 0$, was einen Widerspruch bedeutet.



Wir nennen eine Funktion *von rechts stetig*, wenn die Einschränkung von f auf die Menge

$$D^+ = \{x \in D : x \geq \xi\}$$

in ξ stetig ist. In diesem Fall schreiben wir

$$f(\xi+) = f(\xi+0) = \lim_{x \to \xi+} f(x) = \lim_{x \searrow \xi} f(x).$$

Die Stetigkeit von links wird ganz analog definiert und bezeichnet.

Beispiel 11.4 Die Funktion $f(x) = [x]$ =größte ganze Zahl $\leq x$ ist für jedes $p \in \mathbb{Z}$ unstetig, wegen $f(p+) = p$ ist sie in jedem Punkt von rechts stetig. □

11.4 Stetigkeit und arithmetische Operationen

Satz 11.5 *Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so sind auch $\alpha f + \beta g$, fg und, sofern $g \neq 0$ in D, auch f/g stetig. Ist f auf dem Bildbereich von g definiert und stetig, so ist auch die Komposition $f \circ g(x) = f(g(x))$ stetig.*

Beweis: Ist $x_n \to \xi$, so gilt $f(x_n) \to f(\xi)$, $g(x_n) \to g(\xi)$. Aus den Regeln für die Konvergenz von Zahlenfolgen in Satz 10.4 folgt dann, dass auch $\alpha f(x_n) + \beta g(x_n) \to \alpha f(\xi) + \beta g(\xi)$, $f(x_n)g(x_n) \to f(\xi)g(\xi)$, $f(x_n)/g(x_n) \to f(\xi)/g(\xi)$.

Ist f auf dem Bildbereich von g stetig, so folgt aus $x_n \to \xi$, dass $g(x_n) \to g(\xi)$. Für die Folge $(g(x_n))$ können wir die Stetigkeit von f im Punkt $g(\xi)$ verwenden und erhalten $f(g(x_n)) \to f(g(\xi))$. □

Nach obigem Beispiel sind die Funktionen 1 und x stetig. Wenden wir auf diese Satz 11.5 an, so erhalten wir, dass alle Polynome und in ihrem Definitionsbereich auch alle rationalen Funktionen stetig sind.

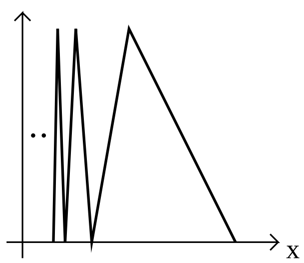
11.5 Gleichmäßige Stetigkeit Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig* in D, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x, y \in D \text{ mit } |x-y| < \delta.$$

Für festes x liefert diese Definition genau die Stetigkeit von f in x. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit folgt also die Stetigkeit von f in D. Die Bedingung der gleichmäßigen Stetigkeit ist aber stärker als die Stetigkeit von f in D, weil das zu findende $\delta > 0$ bei der gleichmäßigen Stetigkeit nicht von x und y abhängen darf. Wir können das auch formal darstellen:

$$\begin{aligned} f \text{ stetig in } D \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y\ \big(|x-y| < \delta\ \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big) \\ f \text{ gleichmäßig stetig in } D \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y\ \big(|x-y| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big) \end{aligned}$$

Beispiel 11.6 Sei $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ folgendermaßen definiert. Wir verbinden für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Punkte $(\frac{1}{2k-1}, 0)$ und $(\frac{1}{2k}, 1)$ durch eine Strecke und die Punkte $(\frac{1}{2k}, 1)$ und $(\frac{1}{2k+1}, 0)$ ebenfalls durch eine Strecke. Wir erhalten den nebenstehenden Graphen. f ist offenbar stetig, aber wir müssen das δ immer kleiner wählen, je näher wir mit dem x zur 0 kommen. f ist also nicht gleichmäßig stetig in D. □



Es ist keine Zufall, dass im obigen Beispiel das Definitionsintervall nach links offen war:

Satz 11.7 *Eine auf einem beschränkten und abgeschlossenen Intervall definierte stetige Funktion ist dort gleichmäßig stetig.*

Beweis: Angenommen, eine stetige Funktin f ist auf dem beschränkten und abgeschlossenen Intervall D stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Es gibt dann ein $\varepsilon_0 > 0$, für das wir kein zugehöriges $\delta > 0$ finden können. Zu jedem $\delta_n = \frac{1}{n}$ gibt es also Punkte $x_n, y_n \in D$ mit $|x_n - y_n| < 1/n$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine in D konvergente Teilfolge von (x_n), die wir der Einfachheit halber wieder mit (x_n) bezeichnen. Es gilt also $x_n \to \xi$ und wegen $|x_n - y_n| < 1/n$ auch $y_n \to \xi$. Wegen der Stetigkeit der Funktion f in ξ folgt $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$, was einen Widerspruch ergibt. □

11.6 Der Zwischenwertsatz

Satz 11.8 *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es zu jedem y im Intervall zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = y$.*

Wir beweisen den Zwischenwertsatz konstruktiv mit einem Verfahren zur Nullstellenbestimmung. Der allgemeine Fall folgt, indem wir für $F(x) = f(x) - y$ eine Nullstelle bestimmen.

Algorithmus 11.9 (Bisektionsverfahren) Sei $a < b$ und f stetig auf $[a,b]$ mit $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Mit den Startwerten $a_0 = a$ und $b_0 = b$ bestimmen wir Folgen (a_n), (b_n) durch:

Seien a_n, b_n bereits bestimmt. Setze $m = (a_n + b_n)/2$ sowie

$$f(m) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = a_n,\ b_{n+1} = m$$

$$f(m) < 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = m,\ b_{n+1} = b_n$$

Man bricht ab, wenn $|f(m)|$ kleiner als eine vorgegebene Schranke ist.

Für den Beweis des Zwischenwertsatzes brechen wir nicht ab. (a_n) ist dann eine monoton steigende Folge und (b_n) ist monoton fallend. Da zudem die Intervallänge in jedem Schritt halbiert wird, schachteln die beiden Folgen genau eine reelle Zahl x ein. Wegen der Stetigkeit von f gilt sowohl $f(x) = \lim f(a_n) \leq 0$ als auch $f(x) = \lim f(b_n) \geq 0$, also $f(x) = 0$.

Als Anwendung dieses Satzes beweisen wir: Jedes Polynom ungeraden Grades besitzt mindestens eine Nullstelle. Wir können den führenden Koeffizienten des Polynoms zu 1 normieren und haben

$$p(x) = x^n + q(x), \quad q(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Mit $r = 1 + |a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|$ folgt dann

$$\begin{aligned} |q(\pm r)| &\leq |a_{n-1}| r^{n-1} + \ldots + |a_1| r + |a_0| \\ &\leq (|a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|) r^{n-1} \\ &= (r-1) r^{n-1} < r^n. \end{aligned}$$

Es folgt $p(r) \geq r^n - |q(r)| > 0$ und, da n als ungerade vorausgesetzt wurde, $p(-r) \leq -r^n + |q(-r)| < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz besitzt p daher eine Nullstelle in $[-r, r]$.

11.7 Monotone Funktionen und Stetigkeit der Umkehrfunktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *monoton wachsend*, wenn für alle $x, y \in D$

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq f(y). \tag{11.1}$$

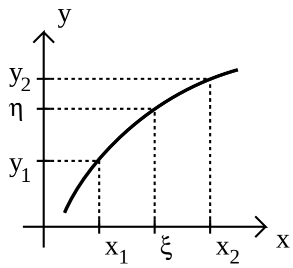
f heißt *streng monoton wachsend*, wenn in (11.1) „$\leq$“ ersetzt werden kann durch „$<$“. Die Begriffe „monoton fallend“ und „streng monoton fallend“ sind analog definiert.

Satz 11.10 *Ist $f[a,b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig mit $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ mit $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in [a,b]$ streng monoton wachsend und stetig.*

Beweis: Da f streng monoton wachsend ist, ist f injektiv. Ferner folgt aus dem Zwischenwertsatz 11.6, dass die Umkehrfunktion im angegebenen Bereich existiert. In die Beziehung

$$x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

setzen wir $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ ein und erhalten, dass auch f^{-1} streng monoton wachsend ist.



Nun zeigen wir die Stetigkeit von f^{-1}. Sei zunächst $\eta = f(\xi)$ ein Punkt aus dem offenen Intervall (α, β). Aufgrund der strengen Monotonie von f ist dann $\xi \in (a,b)$. Für genügend kleines ε sind auch $x_1 = \xi - \varepsilon$, $x_2 = \xi + \varepsilon \in (a,b)$. Für $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ gilt $y_1 < \eta < y_2$. Daher gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$y_1 < \eta - \delta < \eta < \eta + \delta < y_2,$$

also

$$|y - \eta| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f^{-1}(y) - \xi| < \varepsilon.$$

Damit ist f^{-1} stetig in eta. Ist η ein Randpunkt, kann man mit halbseitigen Umgebungen entsprechend verfahren. □

Die Funktion $f(x) = x^n : [0,a] \to [0,a^n]$ ist für jedes $a > 0$ zwischen den angegebenen Bereichen bijektiv, stetig und streng monoton wachsend. Die Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$ ist damit ebenfalls stetig. Ferner sind alle algebraischen Funktionen als Kompositionen von Wurzel- und rationalen Funktionen mit Satz 11.5 in ihrem Definitionsbereich stetig.

11.8 Stetiges Bild eines beschränkten und abgeschlossenen Intervalls

Satz 11.11 (Weierstraß) *Das stetige Bild eines beschränkten und abgeschlossenen Intervalls ist wieder ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall, insbesondere nimmt jede stetige Funktion f auf einem beschränkten und abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ Maximum und Minimum an, es gibt also $\xi_1, \xi_2 \in [a,b]$ mit $f(\xi_1) \leq f(x) \leq f(\xi_2)$ für alle $x \in [a,b]$.*

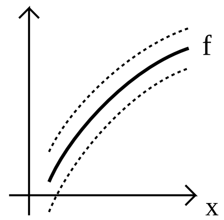
Beweis: Sei $d = \inf \mathcal{R}(f)$, wobei $d = -\infty$ gesetzt wird, falls die Bildmenge nach unten unbeschränkt ist. Nach Definition des Infimums gibt es eine Folge (x_n) mit $f(x_n) \to d$. Im Falle $d = -\infty$ ist damit gemeint, dass die Folge nach $-\infty$ bestimmt divergiert. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 11.11 gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}), die gegen ein $\xi_1 \in [a,b]$ konvergiert. Da f stetig ist, gilt $d = \lim f(x_{n_k}) = f(\xi_1)$. Damit ist d endlich und ξ_1 das gesuchte Minimum.

Da die Existenz des Maximums genauso bewiesen wird, können wir auf das Intervall $[\xi_1, \xi_2]$ den Zwischenwertsatz anwenden. Damit ist das Bild von f das ganze Intervall $[f(\xi_1), f(\xi_2)]$. □

Die Beispiele $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x \in (0,1]$ und $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$ zeigen, dass an der Voraussetzung, dass das zugrunde liegende Intervall abgeschlossen und beschränkt sein muss, nicht gerüttelt werden darf.

11.9 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen Seien $f_n : D \to \mathbb{R}$. Wir sagen, die Folge (f_n) *konvergiert punktweise gegen* $f : D \to \mathbb{R}$, wenn für alle $x \in D$ gilt $f_n(x) \to f(x)$. Die Folge (f_n) *konvergiert gleichmäßig gegen* f, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und für alle $x \in D$.

Wir können die punktweise Konvergenz auch mit Hilfe von ε und N definieren: $f_n \to f$ punktweise ist genau dann erfüllt, wenn es für alle $x \in D$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, das von ε und x abhängen darf, mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. In der gleichmäßigen Konvergenz darf das N dagegen *nicht* von x abhängen. Wir können uns die gleichmäßige Konvergenz daher so vorstellen, dass wir um f einen ε-Schlauch legen, in dem alle bis auf endlich viele f_n liegen müssen.



Beispiel 11.12 Sei $D = [0,1]$ und $f_n(x) = x^n$. Für $0 \le x < 1$ gilt $x^n \to 0$. Der punktweise Limes der Folge ist daher die Funktion f mit $f(x) = 0$ für $0 \le x < 1$ und $f(1) = 1$. Diese Konvergenz ist jedoch nicht gleichmäßig, denn wenn um die Grenzfunktion ein ε-Schlauch mit $\varepsilon \le \frac{1}{2}$ gelegt wird, so liegt kein f_n komplett in diesem Schlauch. □

Satz 11.13 *Der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist stetig.*

Beweis: Sei $\xi \in D$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ für alle $x \in D$. Da dieses f_n stetig ist, gibt es zu $\varepsilon/3$ ein $\delta > 0$ mit $|f_n(\xi) - f_n(x)| < \varepsilon/3$ für alle $x \in D$ mit $|x - \xi| < \delta$. Für diese x folgt

$$\begin{aligned} |f(\xi) - f(x)| &\le |f(\xi) - f_n(\xi)| + |f_n(\xi) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist f im Punkt ξ stetig. □

11.10 Anwendung der Stetigkeit auf die Konvergenz von Zahlenfolgen Wir können stetige Funktionen als konvergenzerhaltende Abbildungen ansehen, denn aus $x_n \to \xi$ folgt $f(x_n) \to f(\xi)$. Wir gewinnen dadurch neue Sätze über die Konvergenz von Zahlenfolgen. Ist beispielsweise $a_n \to a$ und $a_n \ge 0$, so gilt $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$.

Wir betrachten rekursiv definierte Folgen der Form

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad a_0 \in \mathbb{R} \text{ vorgegeben,} \tag{11.2}$$

mit stetigem f. Wenn (a_n) konvergiert,+ so kann man auf beiden Seiten von (11.2) zum Grenzwert übergehen und erhält $a = f(a)$, der Grenzwert ist also immer ein Fixpunkt von f.

Algorithmus 11.14 (Babylonisches Wurzelziehen) Sei $b > 0$. Für $a_0 > 0$ untersuchen wir die Folge

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{b}{2a_n}. \tag{11.3}$$

Ist $a_n = \sqrt{b}$, so ist auch $a_{n+1} = \sqrt{b}$ und die Folge stagniert.

Sei also $0 < a_n \ne \sqrt{b}$. Aus $(a_n - \sqrt{b})^2 > 0$ erhalten wir $a_n^2 - 2a_n\sqrt{b} + b > 0$. In der letzten Ungleichung können wir durch $2a_n$ teilen,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{b}{2a_n} > \sqrt{b}.$$

Damit gilt für jeden Startwert $0 < a_0 \ne \sqrt{b}$, dass $a_n > \sqrt{b}$ für alle $n \ge 1$. Wir zeigen, dass die Folge (a_n) ab $n = 1$ streng monoton fallend ist. Aus $a_n > \sqrt{b}$ folgt $(a_n)^2 > b$ und

$$-a_n + \frac{b}{a_n} < 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} - a_n = -\frac{a_n}{2} + \frac{b}{2a_n} < 0.$$

Da die Folgenglieder nicht negativ werden können, ist die Folge monoton fallend und nach unten beschränkt. Sie besitzt daher einen eindeutigen Grenzwert $a > 0$. Da die rechte Seite als rationale Funktion in a_n stetig auf $D = \{x > 0\}$ ist, muss a ein Fixpunkt der Iterationsvorschrift sein, also $a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b/a$ und damit $a = \sqrt{b}$.

Dieses Verfahren wird wegen seiner Schnelligkeit noch heute in Computern für die Wurzelberechnung verwendet. Man sehe: Für $b = 2$ und $a_0 = 2$ ist $a_1 = 1.5$ und $a_2 = 1.416\ldots$. Der exakte Wert ist $\sqrt{2} = 1.414\ldots$. Man kann zeigen, dass sich bei vernünftigen Startwerten $a_0 \sim \sqrt{b}$ die Zahl der gültigen Stellen in jedem Schritt verdoppelt.

11.11 Potenzreihen Die wichtigsten Reihen der Analysis sind die *Potenzreihen*

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \quad a_n \in \mathbb{R}. \tag{11.4}$$

Da eine Potenzreihe für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Reihe ist, übertragen sich die Begriffe Konvergenz und absolute Konvergenz. Da die Konvergenz einer Reihe auf die Konvergenz der Partialsummen zurückgeführt wird, übernehmen wir auch den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz aus dem letzten Abschnitt.

Wir erinnern daran, dass wir mit $\limsup a_n$ den größten Häufungspunkt der Folge (a_n) bezeichnet haben. Ist die Folge nach oben beschränkt, so existiert der Limes Superior nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 11.11. Ist die Folge nach oben unbeschränkt, so schreiben wir $\limsup a_n = \infty$.

Satz 11.15 *Sei*

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

und $R = \frac{1}{L}$, wobei $1/0$ als $R = \infty$ und $1/\infty$ als $R = 0$ interpretiert wird. Dann ist die Reihe (11.4) für $|x| < R$ absolut konvergent und für $|x| > R$ divergent. Die Reihe konvergiert gleichmäßig in jedem Intervall $|x| \le r$ mit $r < R$. Über die Konvergenz für $|x| = R$ lässt sich keine allgemeine Ausage machen.

Existiert der Grenzwert

$$Q = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|},$$

so gilt $L = Q$.

Bemerkung 11.16 Nach Satz 11.13 ist $p(x)$ stetig für $|x| \le r$. Da $r < R$ beliebig gewählt werden kann, ist $p(x)$ für alle $|x| < R$ stetig. □

Beweis: Sei zunächst $0 < L < \infty$. Für die Konstante L' des Wurzelkriteriums gilt dann

$$L' = \limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup |x| \sqrt[n]{|a_n|} \begin{cases} < 1, & \text{falls } |x| < 1/L \\ > 1, & \text{falls } |x| > 1/L \end{cases}.$$

In beiden Fällen folgt Konvergenz oder Divergenz aus dem Wurzelkriterium. Ist $L = 0$, so ist das Wurzelkriterium für alle x erfüllt. Für $L = \infty$ liegt nur Konvergenz im Punkt 0 vor.

Für $|x| \le r < R$ lässt sich die Potenzreihe unabhängig von x durch die geometrische Reihe abschätzen. Damit ist die Konvergenz gleichmäßig.

Den zweiten Teil des Satzes beweist man genauso mit Hilfe des Quotientenkriteriums an Stelle des Wurzelkriteriums. □

Beispiele 11.17 (i) Nach (10.3) gilt für jedes $m \in \mathbb{Z}$ $\sqrt[n]{n^m} \to 1$. Die Potenzreihen $\sum n^m x^n$ haben daher alle den gleichen Konvergenzradius $R = 1$. Für $m = 0$ erhalten wir die geometrische Reihe, die für $x = \pm 1$ divergent ist. Für $m = -1$ ist für $x = 1$ die harmonische Reihe divergent, für $x = -1$ erhalten wir die konvergente alternierende harmonische Reihe. Über das Konvergenzverhalten am Rande lässt sich also in der Tat keine allgemeine Aussage machen.

(ii) Für die Reihe $\sum n! x^n$ folgt mit dem Wurzelkriterium $a_{n+1}/a_n = n + 1 \to \infty$. Der Konvergenzradius ist daher $R = 0$. □

11.12 Das Cauchy-Produkt von Potenzreihen Das Produkt zweier Potenzreihen ergibt sich dadurch, dass man jedes Glied der einen Reihe mit jedem Glied der anderen Reihe multipliziert und das Ergebnis nach Potenzen ordnet.

Satz 11.18 *Sind die Potenzreihen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ für $|x| < R$ konvergent, so ist auch das Produkt*

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0,$$

mindestens im Bereich $|x| < R$ konvergent.

Auf den etwas technischen Beweis soll verzichtet werden.

11.13 Die Exponentialfunktion Die Exponentialfunktion wird durch die Potenzreihe

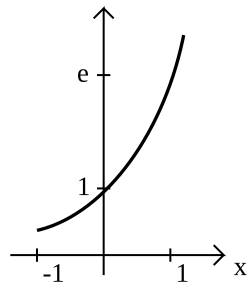
$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

dargestellt. Speziell bezeichnen wir

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

als *Eulersche Zahl*. Mit $a_n = \frac{1}{n!}$ folgt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}$$



Die Exponentialfunktion

und nach dem Quotientenkriterium in Satz 10.13 konvergiert die Reihe auf ganz $\mathbb{R}$ und stellt dort eine stetige Funktion dar. Eine alternative Darstellung der Exponentialfunktion und der Eulerschen Zahl ist gegeben durch

$$\exp(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \tag{11.5}$$

Dies folgt mit Hilfe der binomischen Formel

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k}$$

und wegen

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n \cdot n \ldots n} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

gilt

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \le \frac{1}{k!}, \quad \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \to \frac{1}{k!} \quad \text{für } n \to \infty.$$

Historisch trat die Eulersche Zahl zuerst im Zusammenhang mit der Definition $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ auf. Verzinsen wir einen Geldbetrag der Größe 1 in einem Jahr mit einem Zinssatz von 100%, so erhalten wir nach einem Jahr den Betrag 2. Erfolgt die Zinszahlung bei gleichem Zinssatz auch zwischenzeitlich, so verzinst sich das Kapital durch den Zinseszinseffekt besser. Bei monatlicher Zinszahlung bekommen wir $(1+\frac{1}{12})^{12} = 2,613\ldots$ Machen wir die Zeiträume der Verzinsung kürzer und kürzer, so erhalten wir bei kontinuierlicher Verzinsung $e = 2.71\ldots$ am Jahresende.

Satz 11.19 *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *ist bijektiv, streng monoton wachsend und genügt der Funktionalgleichung*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \quad \textit{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Wir bilden das Produkt $\exp x \exp y$, indem wir jeden Summanden mit jedem Summanden multiplizieren und das Ergebnis nach Potenzen ordnen,

$$\exp(x)\exp(y) = \sum d_n \quad \text{mit } d_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}\frac{y^{n-i}}{(n-i)!} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i} = \frac{1}{n!}(x+y)^n.$$

Aus der Definition der Exponentialfunktion folgt sofort, dass sie streng monoton wachsend für nichtnegative x ist. Ferner gilt $\exp(x) \geq 1+x$, daher $\lim_{x\to\infty}\exp(x) = \infty$. Für negative x erhalten wir die Behauptung aus

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) = 1,$$

also $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$. Damit gilt insbesondere $\lim_{x\to-\infty}\exp(x) = 0$. Wegen des Zwischenwertsatzes ist die Exponentialfunktion bijektiv zwischen den angegebenen Bereichen. □

Aus der Exponentialreihe erschließen wir ferner für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\exp(x)}{x^n} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\exp(-x)}{x^{-n}} = 0, \tag{11.6}$$

denn es gilt für $x > 0$

$$\exp(x) > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

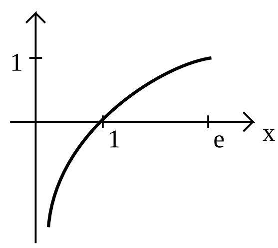
daher

$$\frac{\exp(x)}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!} \to \infty, \quad 0 < x^n\exp(-x) < \frac{(n+1)!}{x} \to 0 \quad \text{für } x \to \infty.$$

Kurz: Die Exponentialfunktion wächst für $x \to \infty$ schneller als jede Potenz und sie fällt für $x \to -\infty$ schneller gegen Null als jede negative Potenz.

11.14 Der Logarithmus Nach Satz 11.7 besitzt die Exponentialfunktion eine stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion, die wir als *(natürlichen) Logarithmus* ln bezeichnen. Es ist daher $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ und

$$y = \exp(x) \;\Leftrightarrow\; x = \ln y.$$



Der Logarithmus

Satz 11.20 *Der natürliche Logarithmus hat die Eigenschaft*

$$\ln xy = \ln x + \ln y \quad x, y \in \mathbb{R}_+. \tag{11.7}$$

Beweis: Es gilt

$$\exp(\ln(xy)) = xy = \exp(\ln x)\exp(\ln y) = \exp(\ln x + \ln y).$$

Da die Funktion exp bijektiv ist, folgt hieraus die Behauptung. □

Für jedes n gilt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}=0,\quad \lim_{x\searrow 0}\sqrt[n]{x}\ln x=0. \tag{11.8}$$

Wir beweisen dies, indem wir für $x>0$ $x=\exp(ny)$ mit $y\in\mathbb{R}$ setzen. Es gilt dann

$$\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}=\frac{ny}{\exp y}\to 0 \;\text{ für } y\to\infty,\qquad \sqrt[n]{x}\ln x=\exp(y)ny\to 0 \;\text{ für } y\to-\infty.$$

Also: Der Logarithmus geht für $x\to\infty$ langsamer gegen unendlich als jede Wurzel. Ferner ist die bestimmte Divergenz gegen $-\infty$ für $x\searrow 0$ nur schwach ausgeprägt.

Mit Hilfe des Logarithmus wollen wir nun allgemeine Potenzen definieren. Für $a>0$ folgt aus der Additionseigenschaft (11.7) des Logarithmus $\ln a^n=n\ln a$. Wegen $\sqrt[n]{a}\dots\sqrt[n]{a}=a$ folgt auch $\ln\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\ln a$. Damit gilt $\ln a^r=r\ln a$ für alle rationalen r. Nehmen wir hier auf beiden Seiten die Exponentialfunktion, so gilt $a^r=\exp(r\ln a)$. Damit können wir unsere alte, nur für rationale r gültige Exponentiation auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen durch die Definition

$$a^x=\exp(x\ln a),\quad a,x\in\mathbb{R},\ a>0.$$

Entsprechend schreiben wir für $a=e$ kürzer e^x statt $\exp(x)$. Es gilt dann für $a,b>0$ und beliebige $x,y\in\mathbb{R}$

(i) $a^{x+y}=a^xa^y$,

(ii) $(a^x)^y=a^{xy}$,

(iii) $a^xb^x=(ab)^x$.

Die Beweise folgen aus der Definition. (i) erhalten wir mit

$$a^{x+y}=\exp((x+y)\ln a)=\exp(x\ln a)\exp(y\ln a)=a^xa^y,$$

(ii) mit

$$(a^x)^y=\exp(y\ln a^x)=\exp(xy\ln a)=a^{xy},$$

und (iii) mit

$$a^xb^x=\exp(x\ln a)\exp(x\ln b)=\exp(x\ln ab)=(ab)^x.$$

Beispiele 11.21 Die Logarithmus-Funktion ist ein wichtiges technisches Hilfsmittel, um das Verhalten komplizierter algebraischer Ausdrücke zu untersuchen.

(i) Zur Bestimmung des Grenzwertes der Folge $\sqrt[n]{n!}$ betrachten wir die Logarithmen der Folgenglieder

$$\ln\sqrt[n]{n!}=\frac{1}{n}(\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln n).$$

Die Logarithmen der Folgenglieder sind also Mittelwerte einer Folge, die bestimmt gegen unendlich divergiert. Damit divergieren auch die Mittelwerte und somit auch $\sqrt[n]{n!}$ bestimmt gegen unendlich.

(ii) Ein weiteres Beispiel ist das Verhalten der Funktion $x^{1/x}$ für $x\to\infty$. Der Logarithmus dieser Funktion ist $\ln x^{1/x}=\ln x/x\to 0$ für $x\to\infty$ nach (11.8), daher $x^{1/x}\to 1$ für $x\to\infty$. □

11.15 Hyperbelfunktionen Aus der Exponentialfunktion lassen sich weitere Funktionen ableiten

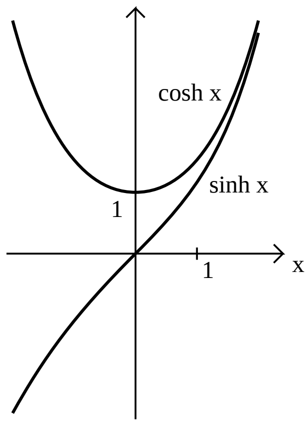
$$\begin{aligned}
\cosh(x) &= \tfrac{1}{2}(e^x+e^{-x}) && \text{(Cosinus hyperbolicus)},\\
\sinh(x) &= \tfrac{1}{2}(e^x-e^{-x}) && \text{(Sinus hyperbolicus)},\\
\tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} && \text{(Tangens hyperbolicus)},\\
\coth(x) &= \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} && \text{(Cotangens hyperbolicus)}.
\end{aligned}$$

Da sinh für $x = 0$ eine Nullstelle hat, ist coth nur für $x \neq 0$ definiert.

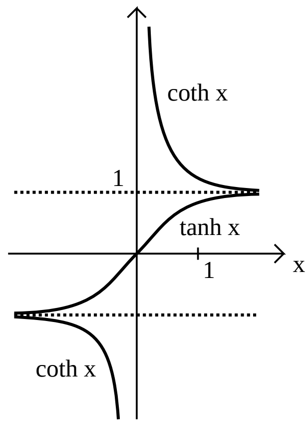
Direkt aus der Additionseigenschaft der Exponentialfunktion beweist man die *Additionstheoreme*

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y),$$

$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y).$$

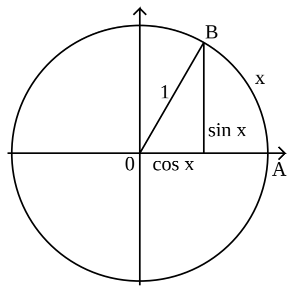


Die Hyperbelfunktionen $\sinh x$ und $\cosh x$



Die Hyperbelfunktionen $\tanh x$ und $\coth x$

11.16 Die Trigonometrischen Funktionen Die altbekannte Definition von Sinus und Cosinus findet man in der nebenstehenden Zeichnung. Der Punkt $(\sin x, \cos x)$ liegt auf dem Einheitskreis, x ist dabei die „Länge" des Kreisbogens von A nach B. Wenn wir einmal davon absehen, dass wir die Länge gekrümmter Kurven bisher nicht definiert haben, kann man aus der Zeichnung alle wichtigen Eigenschaften der beiden Winkelfunktionen ablesen. Ist $\pi = 3,1415\ldots$ die Länge des Halbkreises, so gilt



(11.9) $$\sin 0 = 0,\ \sin\frac{\pi}{2} = 1,\ \sin\pi = 0,\ \sin(x+2\pi) = \sin x,$$

(11.10) $$\cos 0 = 1,\ \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \cos\pi = 0,\ \cos(x+2\pi) = \cos x,$$

Da die Winkelfunktionen den Einheitskreis parametrisieren, gilt

(11.11) $$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Da diese Definition der Winkelfunktionen auf der geometrischen Anschauung beruht, lassen sich konkrete Werte wie beispielsweise cos 1 damit nicht berechnen. Wir verwenden daher Potenzreihen und setzen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Aus dem Quotientenkriterium in Satz 11.11 folgt, dass die beiden Reihen auf ganz $\mathbb{R}$ konvergent sind und dort stetige Funktionen darstellen. Wir müssen nun zeigen, dass für die so definierten Funktionen die Eigenschaften (11.9)-(11.11) gelten. Klar ist $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$. Wie das Additionstheorem für die Exponentialfunktion leitet man (11.11) sowie die *Additionstheoreme*

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y,$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y,$$

her.

Wir definieren $\frac{\pi}{2}$ als erste positive Nullstelle des Cosinus. Die Cosinus-Reihe ist alternierend und es gilt

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!} > \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } 0 < x \leq 3.$$

Die Absolutbeträge der Glieder sind daher ab $n = 1$ streng monoton fallend und nach dem Leibniz-Kriterium ist

$$C_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = C_4(x) \quad \text{für } 0 < x \leq 3.$$

Die Unterfunktion C_2 besitzt daher eine Nullstelle für $\alpha = \sqrt{2}$, die Oberfunktion C_4 für $\beta = \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}$. Damit gilt

$$1,4 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < 1,6.$$

Mit den Additionstheoremen und (11.11) gilt dann $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ und

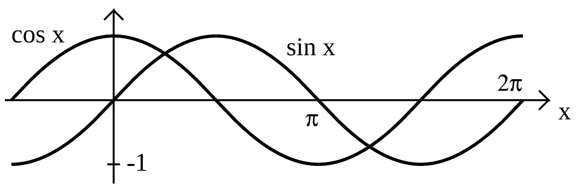
$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x, \quad \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x. \tag{11.12}$$

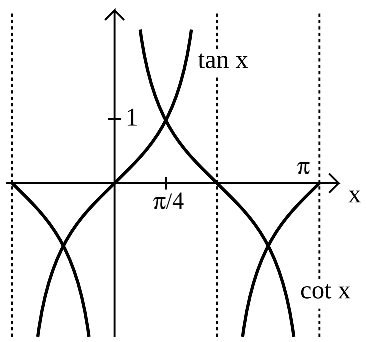
Wenden wir diese Beziehungen sukzessive an, haben wir (11.9) und (11.10) vollständig bewiesen. Es fehlt allerdings noch, dass $\frac{\pi}{2}$ tatsächlich der Länge des Viertelkreises entspricht.

Nun untersuchen wir das Monotonieverhalten von Sinus und Cosinus. Aufgrund der Definition von $\pi/2$ als erster Nullstelle des Cosinus ist $\cos x > 0$ in $[0, \pi/2)$. Wegen $\sin \pi/2 = 1$ und $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ muss wegen des Zwischenwertsatzes auch $\sin x > 0$ in $(0, \pi/2)$ gelten. Aus dem Additionstheorem des Cosinus folgt daher für $0 \leq x < x + y \leq \pi/2$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \leq \cos x \cos y < \cos x.$$

Der Cosinus ist also im Intervall $[0, \pi/2]$ streng monoton fallend und entsprechen ist der Sinus in diesem Intervall streng monoton wachsend. Zusammen mit (11.12) haben wir einen vollständigen Überblick über das Monotonieverhalten der beiden trigonometrischen Funktionen.





Wir definieren *Tangens* und *Cotangens* durch

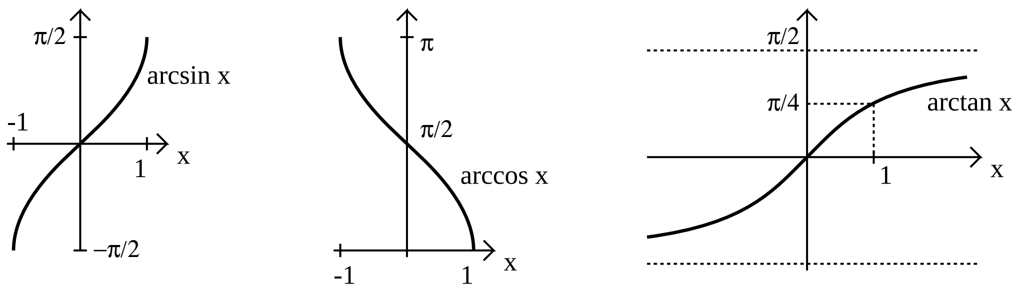
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{für } x \neq (2k+1)\tfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z},$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{für } x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Beide Funktionen sind π-periodisch.

Die *Arcusfunktionen* sind Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen. Da diese allesamt periodisch sind, müssen sie auf ein Intervall eingeschränkt werden, auf dem sie streng monoton sind. Bei allen vier trigonometrischen Funktionen hat man sich dabei auf ein Intervall geeinigt und spricht vom *Hauptwert* der Umkehrfunktion.

Der Sinus bildet das Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ bijektiv auf das Intervall $[-1, 1]$ ab. Für $y \in [-1, 1]$ bezeichnen wir die Lösung $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ von $\sin x = y$ als *Arcussinus* von y und schreiben $y = \arcsin x$. Der Arcussinus ist also auf dem Intervall $[-1, 1]$ definiert, stetig und streng monoton steigend. Selbstverständlich hat die Gleichung $\sin x = y$ unendlich viele Lösungen, die als *Nebenwerte* des Arcussinus bezeichnet werden und besonders gekennzeichnet werden müssen.



Auf die gleiche Weise definiert man die Hauptwerte der anderen Winkelfunktionen durch mehr oder weniger willkürliche Festlegung des Definitionsbereichs und kommt dann zu

$$\begin{aligned}
y &= \arcsin x, & |y| &\le \tfrac{\pi}{2}, & &(|x| \le 1),\\
y &= \arccos x, & 0 &\le y \le \pi, & &(|x| \le 1),\\
y &= \arctan x, & |y| &\le \tfrac{\pi}{2}, & &(x \in \mathbb{R}),\\
y &= \operatorname{arccot} x, & 0 &\le y \le \pi, & &(x \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$