10.Übungsblatt Logik

Vormwald, Lukas Mehling, Noah Seewald, Gregor

Gruppe 1

1 Vertauschen von Quantoren

a) Linke und Rechte Seite des Pfeiles umformen, so dass beide in Skolemform vorliegen:
$L : \forall Y p_1(a, Y) \rightarrow$ nur von a abhängig.
$R : \forall Y p_1(f(Y), Y) \rightarrow$ nor von Y abhängig.
Da Y für Alle quantifiziert ist, haben wir hier eine Tautologie

b) $\mathcal{U}_{\mathcal{A}_1} = \{1\}$
$\mathcal{I}_{\mathcal{A}_1} = " = "$
Da auf der rechten Seite der Impplikation das Y für alle erfüllbar sein muss macht ein Universum mit nur einem Element Sinn.

c) $\mathcal{U}_{\mathcal{A}_2} = \mathbb{N}$
$\mathcal{U}_{\mathcal{A}_2} = " = "$
Es gibt keine natürliche Zahl die gleich einer anderen beliebigen Zahl ist.

d) $F = \exists X \forall Y p_1(X, Y) \wedge \exists X' \forall Y' \neg p_1(Y', X')$
$F_1 = \exists X \forall Y \exists X' \forall Y' p_1(X, Y) \wedge \neg p_1(Y', X')$
$\equiv \forall Y \exists X' \forall Y' p_1(a, Y) \wedge \neg p_1(Y', X')$
$F_2 \forall Y \forall Y' p_1(a, Y) \wedge p_1(Y', f(Y))$
da Y' für alle Quantifiziert wird enthält es a.
$\rightarrow$ eine auftretende Situation:$p_1(a, Y) \wedge \neg p_1(a, f(Y))$
Da $f(Y)$ mindestens einmal wahr sein muss (aus $\exists X$ entstanden) erhält man eine unerfüllbare Formel F_2, welche auch kein Modell besitzt. Da die Skolemform Erfüllbarkeitsäquivalent zur Ausgangsformel F ist besitzt auch F kein Modell.

2 Normalformen

a) $\forall X(\neg\exists Y p(X,Y) \vee \exists Y' p(Y',X))$
$\forall X(\forall Y \neg p(X,Y) \vee \exists Y' p(Y',X))$
$\forall X \forall Y \exists Y' (\neg p(X,Y) \vee p(Y',X))$

b) $\forall X \forall Y(\neg p(X,Y) \vee p(f(X,Y),X))$

c) $HU_H = \{a, p(a,a) f(a,a), p(f(a,a),a)...\}$

d) Ja, denn in dieser Definition ist p kommutativ.
Die in Teilaufgabe b) vorkommende Funktion $f(X,Y)$ kann wie folgt definiert werden:$f(X,Y) = X + Y$