12 Differentiation

Die Ableitung einer Funktion kann physikalisch als Momentangeschwindigkeit eines Massepunktes gedeutet werden (Newton) oder geometrisch als Steigung der Tangente (Leibniz).

12 Differentiation

Die Ableitung einer Funktion kann physikalisch als Momentangeschwindigkeit eines Massepunktes gedeutet werden (Newton) oder geometrisch als Steigung der Tangente (Leibniz).

Mit der Differentiation fängt die Analysis erst richtig an!

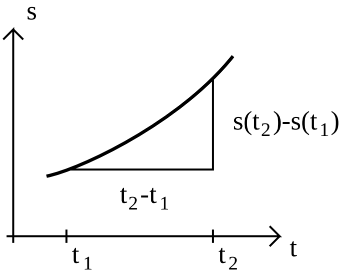
12 Differentiation

Die Ableitung einer Funktion kann physikalisch als Momentangeschwindigkeit eines Massepunktes gedeutet werden (Newton) oder geometrisch als Steigung der Tangente (Leibniz).

Mit der Differentiation fängt die Analysis erst richtig an!

Themen:

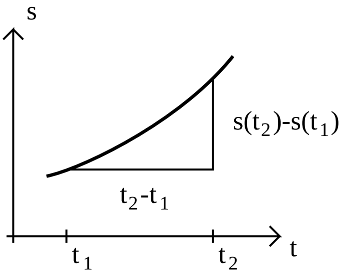
- Definition der Ableitung
- Regeln für die Differentiation
- Mittelwertsätze
- Höhere Ableitungen
- Extremwerte



Die Bewegung eines Massepunktes wird beschrieben durch eine Funktion $s(t)$, wobei

$$t = \text{Zeit}, \quad s(t) = \text{zurückgelegter Weg des Massepunktes.}$$

12.1 Definition der Differenzierbarkeit

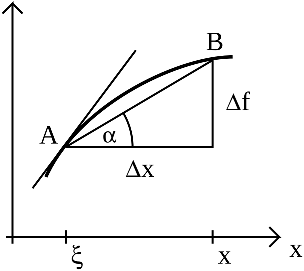


Die Bewegung eines Massepunktes wird beschrieben durch eine Funktion $s(t)$, wobei

$$t = \text{Zeit}, \quad s(t) = \text{zurückgelegter Weg des Massepunktes.}$$

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \text{Durchschnittsgeschwindigkeit in } (t_1, t_2).$$

Differenzenquotient

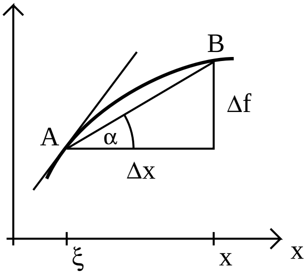


Für eine Funktion f heißt

$$m = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \tan \alpha$$

Differenzenquotient. Er gibt die *Steigung* m der Sekante durch die Punkte A und B an.

Differenzenquotient



Für eine Funktion f heißt

$$m = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \tan \alpha$$

Differenzenquotient. Er gibt die *Steigung* m der Sekante durch die Punkte A und B an.

Wandert nun x nach links zum Punkt ξ, so läuft B nach A und die Sekante geht in die Tangente im Punkt A über.

Definition der Ableitung

Sei f in einer Umgebung von $\xi \in \mathbb{R}$ definiert. f heißt in ξ *differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$f'(\xi) = \frac{df(\xi)}{dx} = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

existiert.

Definition der Ableitung

Sei f in einer Umgebung von $\xi \in \mathbb{R}$ definiert. f heißt in ξ *differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$f'(\xi) = \frac{df(\xi)}{dx} = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

existiert.

$f'(\xi)$ heißt *Ableitung* von f in ξ.

Beispiel

Für $f(x) = ax + b$ erhalten wir

$$f'(\xi) = \lim_{h \to 0} \frac{a(\xi + h) + b - (a\xi + b)}{h} = a.$$

Beispiel

Für $f(x) = ax + b$ erhalten wir

$$f'(\xi) = \lim_{h \to 0} \frac{a(\xi + h) + b - (a\xi + b)}{h} = a.$$

Interpretation: $f(x)$ ist die gleichförmige (unbeschleunigte) Bewegung eines Massepunkts, die Geschwindigkeit ist daher konstant.

Beispiel

Für $f(x) = ax + b$ erhalten wir

$$f'(\xi) = \lim_{h \to 0} \frac{a(\xi + h) + b - (a\xi + b)}{h} = a.$$

Interpretation: $f(x)$ ist die gleichförmige (unbeschleunigte) Bewegung eines Massepunkts, die Geschwindigkeit ist daher konstant.

Aufgabe Für $\xi > -1$ bestimme man die Ableitung von

$$f(x) = \frac{1}{1 + x}.$$

Die Tangentengleichung

Geometrisch ist $f'(\xi)$ die Steigung der Tangenten im Punkt $(\xi, f(\xi))$.

Die Tangentengleichung

Geometrisch ist $f'(\xi)$ die Steigung der Tangenten im Punkt $(\xi, f(\xi))$.

Die Tangente $y(x)$ läuft ebenfalls durch diesen Punkt und besitzt die gleiche Steigung wie f.

Die Tangentengleichung

Geometrisch ist $f'(\xi)$ die Steigung der Tangenten im Punkt $(\xi, f(\xi))$.

Die Tangente $y(x)$ läuft ebenfalls durch diesen Punkt und besitzt die gleiche Steigung wie f.

Aus $y(\xi) = f(\xi)$ und $y'(\xi) = f'(\xi)$ folgt die *Tangentengleichung*

$$y(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi).$$

Die Tangentengleichung

Geometrisch ist $f'(\xi)$ die Steigung der Tangenten im Punkt $(\xi, f(\xi))$.

Die Tangente $y(x)$ läuft ebenfalls durch diesen Punkt und besitzt die gleiche Steigung wie f.

Aus $y(\xi) = f(\xi)$ und $y'(\xi) = f'(\xi)$ folgt die *Tangentengleichung*

$$y(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi).$$

Aufgabe Man bestimme die Tangentengleichung von

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

im Punkt $(0, 1)$.

Einseitige Ableitungen

lassen sich analog zu einseitigen Grenzwerten definieren

$$f'_+(\xi) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \quad \text{(rechtsseitige Ableitung)}$$

$$f'_-(\xi) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \quad \text{(linksseitige Ableitung)}$$

Einseitige Ableitungen

lassen sich analog zu einseitigen Grenzwerten definieren

$$f'_+(\xi) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \quad \text{(rechtsseitige Ableitung)}$$

$$f'_-(\xi) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \quad \text{(linksseitige Ableitung)}$$

Wenn $f'_+(\xi)$ und $f'_-(\xi)$ existieren und übereinstimmen, ist f in ξ differenzierbar.

Beispiel

Für $f(x) = |x|$ erhalten wir

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{|h| - |0|}{h} = 1, \quad f'_-(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{|h| - |0|}{h} = -1.$$

Beispiel

Für $f(x) = |x|$ erhalten wir

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{|h| - |0|}{h} = 1, \quad f'_-(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{|h| - |0|}{h} = -1.$$

Da die einseitigen Ableitungen verschieden sind, ist $|x|$ im Nullpunkt nicht differenzierbar.

Lokale Lipschitzbedingung

Satz Sei f in ξ differenzierbar. Dann gilt eine *lokale Lipschitzbedingung*, nämlich

$$|f(x) - f(\xi)| \leq K|x - \xi|$$

für alle x in einer genügend kleinen Umgebung von ξ, also $x \in [\xi - h_0, \xi + h_0]$ für ein $h_0 > 0$.

Lokale Lipschitzbedingung

Satz Sei f in ξ differenzierbar. Dann gilt eine *lokale Lipschitzbedingung*, nämlich

$$|f(x) - f(\xi)| \leq K|x - \xi|$$

für alle x in einer genügend kleinen Umgebung von ξ, also $x \in [\xi - h_0, \xi + h_0]$ für ein $h_0 > 0$.

Insbesondere ist f stetig in ξ.

Satz Sei f in ξ differenzierbar. Dann gilt eine *lokale Lipschitzbedingung*, nämlich

$$|f(x) - f(\xi)| \leq K|x - \xi|$$

für alle x in einer genügend kleinen Umgebung von ξ, also $x \in [\xi - h_0, \xi + h_0]$ für ein $h_0 > 0$.

Insbesondere ist f stetig in ξ.

Ist $f'(\xi) > 0$, so gilt

$$f(\xi - h) < f(\xi) < f(\xi + h) \quad \text{für alle } 0 < h \leq h_0.$$

Beweis

Für x in einer genügend kleinen Umgebung von ξ folgt aus der Definition der Differenzierbarkeit

$$\left|\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\right| \leq |f'(\xi)|+1 = K.$$

Beweis

Für x in einer genügend kleinen Umgebung von ξ folgt aus der Definition der Differenzierbarkeit

$$\left|\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\right| \leq |f'(\xi)| + 1 = K.$$

Ist $f'(\xi) > 0$, so gilt für genügend kleine $|h|$

$$\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} > 0.$$

Hier können wir $+h$ und $-h$ einsetzen:

$$f(\xi-h) < f(\xi) < f(\xi+h) \quad \text{für alle } 0 < h \leq h_0.$$

12.2 Differenzierbarkeit und arithmetische Operationen

Satz Sind die Funktionen f, g in ξ differenzierbar, so sind für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auch die Funktionen $\alpha f + \beta g$ sowie fg und, falls $g \neq 0$, f/g in ξ differenzierbar.

Satz Sind die Funktionen f, g in ξ differenzierbar, so sind für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auch die Funktionen $\alpha f + \beta g$ sowie fg und, falls $g \neq 0$, f/g in ξ differenzierbar.

Für diese Ableitungen gilt

(a) $$(\alpha f + \beta g)'(\xi) = \alpha f'(\xi) + \beta g'(\xi), \qquad (\textit{Linearität}),$$

(b) $$(fg)'(\xi) = f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi) \qquad (\textit{Produktregel}),$$

(c) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)} \qquad (\textit{Quotientenregel}).$$

Beweis

(a) $$(\alpha f + \beta g)'(\xi) = \alpha f'(\xi) + \beta g'(\xi), \qquad (\textit{Linearität}),$$

Beweis

(a) $(\alpha f+\beta g)'(\xi)=\alpha f'(\xi)+\beta g'(\xi),\qquad$ (*Linearität*),

Die Linearität der Ableitung folgt aus der Linearität des Differenzenquotienten:

$$\frac{(\alpha f(\xi+h)+\beta g(\xi+h))-(\alpha f(\xi)+\beta g(\xi))}{h}$$

$$=\alpha\,\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}+\beta\,\frac{g(\xi+h))-g(\xi))}{h}$$

Beweis

(b) $\quad (fg)'(\xi) = f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi) \qquad$ (*Produktregel*),

Beweis

(b) $\quad (fg)'(\xi) = f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi) \qquad$ (*Produktregel*),

Es gilt

$$\frac{f(\xi+h)g(\xi+h) - f(\xi)g(\xi)}{h}$$

Beweis

(b) $\quad (fg)'(\xi) = f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi) \qquad$ (*Produktregel*),

Es gilt

$$\frac{f(\xi+h)g(\xi+h) - f(\xi)g(\xi)}{h}$$

$$= \frac{f(\xi+h)g(\xi+h) - f(\xi+h)g(\xi) + f(\xi+h)g(\xi) - f(\xi)g(\xi)}{h}$$

$$= f(\xi+h)\frac{g(\xi+h) - g(\xi)}{h} + g(\xi)\frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h}.$$

Beweis

(b) $(fg)'(\xi) = f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi) \qquad$ (*Produktregel*),

Es gilt

$$\frac{f(\xi+h)g(\xi+h) - f(\xi)g(\xi)}{h}$$

$$= \frac{f(\xi+h)g(\xi+h) - f(\xi+h)g(\xi) + f(\xi+h)g(\xi) - f(\xi)g(\xi)}{h}$$

$$= f(\xi+h)\frac{g(\xi+h) - g(\xi)}{h} + g(\xi)\frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h}.$$

Da f in ξ stetig ist, folgt die Behauptung durch Grenzübergang.

Beweis

(c) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)} \quad (\textit{Quotientenregel}).$$

Beweis

(c) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)} \quad (\textit{Quotientenregel}).$$

Nur für $f = 1$, der allgemeine Fall folgt dann aus der Produktregel.

Beweis

(c) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)} \quad (\textit{Quotientenregel}).$$

Nur für $f = 1$, der allgemeine Fall folgt dann aus der Produktregel.

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\Big(\frac{1}{g(\xi+h)} - \frac{1}{g(\xi)}\Big) &= \frac{1}{h}\,\frac{-g(\xi+h)+g(\xi)}{g(\xi+h)g(\xi)} \\ &= -\frac{1}{g(\xi+h)g(\xi)}\,\frac{-g(\xi+h)+g(\xi)}{h}. \end{aligned}$$

Beweis

(c) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)} \quad (\textit{Quotientenregel}).$$

Nur für $f = 1$, der allgemeine Fall folgt dann aus der Produktregel.

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\Big(\frac{1}{g(\xi+h)} - \frac{1}{g(\xi)}\Big) &= \frac{1}{h}\,\frac{-g(\xi+h)+g(\xi)}{g(\xi+h)g(\xi)} \\ &= -\frac{1}{g(\xi+h)g(\xi)}\,\frac{-g(\xi+h)+g(\xi)}{h}.\end{aligned}$$

Grenzübergang $h \to 0$ liefert Behauptung.

Anwendung

Zeige $(x^n)' = nx^{n-1}$ durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$.

$1' = 0$ und $x' = 1$ hatten wir schon gezeigt.

Anwendung

Zeige $(x^n)' = nx^{n-1}$ durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$.

$1' = 0$ und $x' = 1$ hatten wir schon gezeigt.

Induktionsannahme: $(x^n)' = nx^{n-1}$

Aus der Produktregel folgt dann

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + xnx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

Anwendung

Zeige $(x^n)' = nx^{n-1}$ durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$.

$1' = 0$ und $x' = 1$ hatten wir schon gezeigt.

Induktionsannahme: $(x^n)' = nx^{n-1}$

Aus der Produktregel folgt dann

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + xnx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

Zur Bestimmung der Ableitung von x^{-n} verwenden wir die Quotientenregel

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Anwendung

Zeige $(x^n)' = nx^{n-1}$ durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$.

$1' = 0$ und $x' = 1$ hatten wir schon gezeigt.

Induktionsannahme: $(x^n)' = nx^{n-1}$

Aus der Produktregel folgt dann

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + xnx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

Zur Bestimmung der Ableitung von x^{-n} verwenden wir die Quotientenregel

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Also: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

12.3 Kettenregel

Satz Seien I, J Intervalle mit $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ sowie $f(I) \subset J$.

12.3 Kettenregel

Satz Seien I, J Intervalle mit $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ sowie $f(I) \subset J$.

Ist f an der Stelle ξ und g an der Stelle $f(\xi)$ differenzierbar, so ist auch $h = g \circ f$, $h(x) = g(f(x))$, an der Stelle ξ differenzierbar mit

$$h'(\xi) = g'\big(f(\xi)\big)f'(\xi) \quad \text{(Kettenregel).}$$

12.3 Kettenregel

Satz Seien I, J Intervalle mit $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ sowie $f(I) \subset J$.

Ist f an der Stelle ξ und g an der Stelle $f(\xi)$ differenzierbar, so ist auch $h = g \circ f$, $h(x) = g(f(x))$, an der Stelle ξ differenzierbar mit

$$h'(\xi) = g'\big(f(\xi)\big)f'(\xi) \quad \text{(Kettenregel).}$$

Faustregel: Äußere Ableitung $\times$ innerer Ableitung.

12.3 Kettenregel

Satz Seien I, J Intervalle mit $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ sowie $f(I) \subset J$.

Ist f an der Stelle ξ und g an der Stelle $f(\xi)$ differenzierbar, so ist auch $h = g \circ f$, $h(x) = g(f(x))$, an der Stelle ξ differenzierbar mit

$$h'(\xi) = g'\big(f(\xi)\big)f'(\xi) \quad \text{(Kettenregel).}$$

Faustregel: Äußere Ableitung $\times$ innerer Ableitung.

Genauer:

$$\frac{d}{dx}h(\xi) = \frac{d}{dy}g(y)\Big|_{y=f(\xi)}\frac{d}{dx}f(\xi).$$

Beweis der Kettenregel

Sei zunächst $f'(\xi) \neq 0$. Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to \xi$ und $x_n \neq \xi$.

Beweis der Kettenregel

Sei zunächst $f'(\xi) \neq 0$. Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to \xi$ und $x_n \neq \xi$.

Da f in ξ stetig ist,

$$y_n = f(x_n) \to y = f(\xi).$$

Beweis der Kettenregel

Sei zunächst $f'(\xi) \neq 0$. Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to \xi$ und $x_n \neq \xi$.

Da f in ξ stetig ist,

$$y_n = f(x_n) \to y = f(\xi).$$

Wegen $f'(\xi) \neq 0$ folgt aus einem Satz $y_n \neq y$ für genügend große n.

Beweis der Kettenregel

Sei zunächst $f'(\xi) \neq 0$. Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to \xi$ und $x_n \neq \xi$.

Da f in ξ stetig ist,

$$y_n = f(x_n) \to y = f(\xi).$$

Wegen $f'(\xi) \neq 0$ folgt aus einem Satz $y_n \neq y$ für genügend große n.

Durch Erweiterung des Differenzenquotienten um
$f(x_n) - f(\xi) = y_n - y$ erhalten wir

$$\frac{h(x_n) - h(\xi)}{x_n - \xi} = \frac{(g(y_n) - g(y))(f(x_n) - f(\xi))}{(y_n - y)(x_n - \xi)}$$

Beweis der Kettenregel

Sei zunächst $f'(\xi) \neq 0$. Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to \xi$ und $x_n \neq \xi$.

Da f in ξ stetig ist,

$$y_n = f(x_n) \to y = f(\xi).$$

Wegen $f'(\xi) \neq 0$ folgt aus einem Satz $y_n \neq y$ für genügend große n.

Durch Erweiterung des Differenzenquotienten um
$f(x_n) - f(\xi) = y_n - y$ erhalten wir

$$\frac{h(x_n) - h(\xi)}{x_n - \xi} = \frac{(g(y_n) - g(y))(f(x_n) - f(\xi))}{(y_n - y)(x_n - \xi)}$$

$$\to \ g'(y)\Big|_{y=f(\xi)} f'(\xi).$$

Beweis der Kettenregel

Ist $f'(\xi) = 0$, so erhalten wir aus der lokalen Lipschitzbedingung

$$\left|\frac{h(x) - h(\xi)}{x - \xi}\right| = \left|\frac{g(f(x)) - g(f(\xi))}{x - \xi}\right|$$

Beweis der Kettenregel

Ist $f'(\xi) = 0$, so erhalten wir aus der lokalen Lipschitzbedingung

$$\left|\frac{h(x) - h(\xi)}{x - \xi}\right| = \left|\frac{g(f(x)) - g(f(\xi))}{x - \xi}\right|$$

$$\leq K \left|\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}\right| \;\to\; 0 \quad \text{wegen } f'(\xi) = 0.$$

Beispiele

(i) Ist f differenzierbar, so bestimmen wir die Ableitung von f^n, indem wir $g(y) = y^n$ setzen. Aus der Kettenregel folgt dann

$$\frac{d}{dx} f^n(x) = \frac{d}{dy} y^n f'(x) = n f^{n-1}(x) f'(x).$$

Beispiele

(i) Ist f differenzierbar, so bestimmen wir die Ableitung von f^n, indem wir $g(y) = y^n$ setzen. Aus der Kettenregel folgt dann

$$\frac{d}{dx} f^n(x) = \frac{d}{dy} y^n f'(x) = n f^{n-1}(x) f'(x).$$

(ii) Die Ableitung von $\frac{1}{f}$ kann man ebenfalls aus der Kettenregel erschließen,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{d}{dy} y^{-1} f'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

Beispiele

(i) Ist f differenzierbar, so bestimmen wir die Ableitung von f^n, indem wir $g(y) = y^n$ setzen. Aus der Kettenregel folgt dann

$$\frac{d}{dx} f^n(x) = \frac{d}{dy} y^n f'(x) = n f^{n-1}(x) f'(x).$$

(ii) Die Ableitung von $\frac{1}{f}$ kann man ebenfalls aus der Kettenregel erschließen,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{d}{dy} y^{-1} f'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

Aufgabe Man bestimme die Ableitung von $h(g(f(x)))$.

Satz [Rolle] f sei im Intervall $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar mit $f(a) = f(b)$.

Satz [Rolle] f sei im Intervall $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar mit $f(a) = f(b)$.

Dann gibt es einen Punkt $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Satz [Rolle] f sei im Intervall $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar mit $f(a) = f(b)$.

Dann gibt es einen Punkt $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis Ist f konstant, so ist die Behauptung jedenfalls richtig. Ist f nicht konstant, so nimmt f in $\xi \in (a, b)$ das Maximum oder Minimum an.

Satz [Rolle] f sei im Intervall $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar mit $f(a) = f(b)$.

Dann gibt es einen Punkt $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis Ist f konstant, so ist die Behauptung jedenfalls richtig. Ist f nicht konstant, so nimmt f in $\xi \in (a, b)$ das Maximum oder Minimum an.

Ist ξ das Maximum, so gilt $f(\xi) \geq f(x)$ und

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0 \quad \text{für } x > \xi$$

also $f'_+(\xi) \leq 0$.

Satz [Rolle] f sei im Intervall $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar mit $f(a) = f(b)$.

Dann gibt es einen Punkt $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

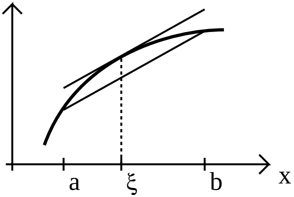
Beweis Ist f konstant, so ist die Behauptung jedenfalls richtig. Ist f nicht konstant, so nimmt f in $\xi \in (a, b)$ das Maximum oder Minimum an.

Ist ξ das Maximum, so gilt $f(\xi) \geq f(x)$ und

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0 \quad \text{für } x > \xi$$

also $f'_+(\xi) \leq 0$.

Genauso erhalte $f'_-(\xi) \geq 0$, also $f'(\xi) = 0$.



Satz f sei im Intervall $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Beweis

Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$g(x) = f(x) - \alpha(x - a), \quad \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis

Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$g(x) = f(x) - \alpha(x - a), \quad \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Es gilt $g(a) = g(b) = f(a)$.

Beweis

Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$g(x) = f(x) - \alpha(x - a), \quad \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Es gilt $g(a) = g(b) = f(a)$.

Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit
$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \alpha$, woraus die Behauptung folgt.

Eine andere Interpretation

Wir setzen $a = x$ und $b = x + h$. Dann besagt der Mittelwertsatz

$$f(x+h) - f(x) = hf'(\xi) \quad \text{für ein } \xi \text{ mit } x < \xi < x + h.$$

Eine andere Interpretation

Wir setzen $a = x$ und $b = x + h$. Dann besagt der Mittelwertsatz

$$f(x+h) - f(x) = hf'(\xi) \quad \text{für ein } \xi \text{ mit } x < \xi < x + h.$$

Der Mittelwertsatz quantifiziert die Stetigkeit: Die Werte $f(x+h)$ und $f(x)$ weichen nur wenig voneinander ab (=Stetigkeit), dies wird im Mittelwertsatz genauer beschrieben.

Monotonie

Aus dem Mittelwertsatz folgt für eine Funktion, deren Ableitung ein Vorzeichen auf einem Intervall hat:

$$
\begin{aligned}
f'(x) \geq 0 &\;\Leftrightarrow\; f \text{ ist monoton wachsend,} \\
f'(x) \leq 0 &\;\Leftrightarrow\; f \text{ ist monoton fallend,} \\
f'(x) > 0 &\;\Rightarrow\; f \text{ ist streng monoton wachsend,} \\
f'(x) < 0 &\;\Rightarrow\; f \text{ ist streng monoton fallend.}
\end{aligned}
$$

Monotonie

Aus dem Mittelwertsatz folgt für eine Funktion, deren Ableitung ein Vorzeichen auf einem Intervall hat:

$$
\begin{aligned}
f'(x) \geq 0 \;&\Leftrightarrow\; f \text{ ist monoton wachsend,}\\
f'(x) \leq 0 \;&\Leftrightarrow\; f \text{ ist monoton fallend,}\\
f'(x) > 0 \;&\Rightarrow\; f \text{ ist streng monoton wachsend,}\\
f'(x) < 0 \;&\Rightarrow\; f \text{ ist streng monoton fallend.}
\end{aligned}
$$

Beispiel $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend, erfüllt aber nicht $f'(x) > 0$ für alle x.

$f' = 0 \Rightarrow f$ konstant

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \;\text{ in } (a,b) \;&\Leftrightarrow\; f' \geq 0 \text{ und } f' \leq 0 \\ &\Leftrightarrow\; f \text{ monoton wachsend und } f \text{ monoton fallend} \\ &\Leftrightarrow\; f \text{ ist konstant in } (a,b). \end{aligned}$$

Satz Die Potenzreihe $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist im Inneren ihres Konvergenzbereichs $|x| < R$ differenzierbar und darf dort gliedweise differenziert werden,

$$p'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

12.5 Ableitung von Potenzreihen

Satz Die Potenzreihe $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist im Inneren ihres Konvergenzbereichs $|x| < R$ differenzierbar und darf dort gliedweise differenziert werden,

$$p'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Für die Exponentialfunktion folgt

$$\frac{d}{dx} e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = e^x.$$

Sinus und Cosinus

$$\sin' x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) x^{2n}}{(2n+1)!} = \cos x,$$

$$\cos' x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{(2n)!} = -\sin x.$$

12.6 Ableitung der Umkehrfunktion

Satz f sei im Intervall I stetig und streng monoton. Ist die Umkehrfunktion $\phi = f^{(-1)}$ in $a = f(\xi)$ differenzierbar mit $\phi'(a) \neq 0$, so ist f in ξ differenzierbar mit

$$f'(\xi) = \frac{1}{\phi'(a)} = \frac{1}{\phi'(f(\xi))}.$$

Beweis

Sei $x_n \to \xi$ mit $x_n \neq \xi$. Da f streng monoton ist, gilt $y_n = f(x_n) \neq f(\xi)$.

Beweis

Sei $x_n \to \xi$ mit $x_n \neq \xi$. Da f streng monoton ist, gilt $y_n = f(x_n) \neq f(\xi)$.

Mit $\lim y_n = a$ folgt

$$\frac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi} = \frac{y_n - a}{\phi(y_n) - \phi(a)} \;\to\; \frac{1}{\phi'(a)}.$$

Ableitung der Wurzel

$f(x) = \sqrt[n]{x}$ ist die Umkehrfunktion von $\phi(y) = y^n$. Daher

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{-1+1/n}.$$

Ableitung des Logarithmus

Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.
Daher für $x > 0$ und $y = \ln x$

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Ableitung der allgemeinen Potenz

Mit $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$ folgt damit für $x > 0$

$$(x^\alpha)' = \frac{d}{dx} \exp(\alpha \ln x) = \exp(\alpha \ln x) \cdot \frac{d}{dx} \alpha \ln x = \alpha x^\alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Gedächtnisstütze

$$f' = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

erinnert uns daran, dass die Ableitung aus dem Grenzübergang des Differenzenquotienten hervorgegangen ist.

Gedächtnisstütze

$$f' = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

erinnert uns daran, dass die Ableitung aus dem Grenzübergang des Differenzenquotienten hervorgegangen ist.

Wir können mit den Symbolen df und dx so rechnen wie mit reellen Zahlen:

Kettenregel $\quad z(y(x)) : \quad \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx}$

Umkehrfunktion $\quad x(y) : \quad \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{(y'(x)}\Big|_{x=x(y)}$

12.7 Höhere Ableitungen

Besitzt f eine Ableitung $f'(x)$, so ist auch f' eine Funktion in x, auf die die Definition der Ableitung angewendet werden kann.

12.7 Höhere Ableitungen

Besitzt f eine Ableitung $f'(x)$, so ist auch f' eine Funktion in x, auf die die Definition der Ableitung angewendet werden kann.

Für diese *höheren Ableitungen* schreiben wir

$$\frac{d}{dx}f = \frac{df}{dx} = f' = f^{(1)}, \quad \frac{d^n}{dx^n}f = f^{(n)} = \frac{d}{dx}f^{(n-1)}.$$

Beispiel

Für das Polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

erhalten wir

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 2 a_2 x + a_1,$$

$$p''(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \ldots + 2 a_2$$

Beispiel

Für das Polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

erhalten wir

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 2 a_2 x + a_1,$$

$$p''(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \ldots + 2 a_2$$

Schließlich $p^{(n)}(x) = n! a_n,\ p^{(n+1)}(x) = 0.$

Stetig differenzierbare Funktionen

Wir nennen eine Funktion *m-mal stetig differenzierbar*, wenn die Ableitungen bis zur Ordnung m existieren und stetig sind.

12.8 Der Satz von Taylor

Satz Sei I ein Intervall und f sei für ein $n \in \mathbb{N}_0$ auf I $n+1$-mal stetig differenzierbar.

Satz Sei I ein Intervall und f sei für ein $n \in \mathbb{N}_0$ auf I $n+1$-mal stetig differenzierbar.

Für $a, x \in I$ gilt die *Taylorentwicklung*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \dots$$
$$+ \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_n(x; a)$$

Satz Sei I ein Intervall und f sei für ein $n \in \mathbb{N}_0$ auf I $n+1$-mal stetig differenzierbar.

Für $a, x \in I$ gilt die *Taylorentwicklung*

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \ldots \\ & + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_n(x;a) \end{aligned}$$

mit dem *Restglied* nach *Lagrange*

$$R_n(x;a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad \text{für ein } \xi \in (a,x).$$

Beweis

Wir können $x > a$ annehmen, der Fall $x < a$ verläuft völlig analog.

Beweis

Wir können $x > a$ annehmen, der Fall $x < a$ verläuft völlig analog.

Setze

$$\begin{aligned} g(t) = & f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \dots \\ & - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - m\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

mit $t \in (a, x)$.

Beweis

Wir können $x > a$ annehmen, der Fall $x < a$ verläuft völlig analog.

Setze

$$\begin{aligned} g(t) = & f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \dots \\ & - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - m\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

mit $t \in (a, x)$.

Wir können m so wählen, dass $g(a) = 0$. Da auch $g(x) = 0$ gilt, gibt es nach dem Satz von Rolle ein $\xi \in (a, x)$ mit $g'(\xi) = 0$.

Beweis

$$
\begin{aligned}
g(t) =& f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \dots \\
& - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - m\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 =& g'(\xi) = 0 - f'(\xi) - f''(\xi)(x-\xi) + f'(\xi) - \frac{f'''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 \\
& + f''(\xi)(x-\xi) - \dots \\
& - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1} + m\frac{(x-\xi)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

Beweis

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \dots$$
$$- \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - m\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\begin{aligned} 0 =& g'(\xi) = 0 - f'(\xi) - f''(\xi)(x-\xi) + f'(\xi) - \frac{f'''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 \\ & + f''(\xi)(x-\xi) - \dots \\ & - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1} + m\frac{(x-\xi)^n}{n!} \\ =& - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + m\frac{(x-\xi)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Beweis

$$
\begin{aligned}
g(t) =& f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \dots \\
&- \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - m\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 =& g'(\xi) = 0 - f'(\xi) - f''(\xi)(x-\xi) + f'(\xi) - \frac{f'''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 \\
&+ f''(\xi)(x-\xi) - \dots \\
&- \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1} + m\frac{(x-\xi)^n}{n!} \\
=& - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + m\frac{(x-\xi)^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

Damit ist $m = f^{(n+1)}(\xi)$. Wir setzen in $g(t)$ den Wert $t = a$ ein und erhalten die behauptete Formel.

Spezialfall

ist $n = 1$

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(\xi),$$

also der Mittelwertsatz.

Das Taylor-Polynom

Schreibe

$$f(x) = T_n(x; a) + R_n(x; a)$$

mit

- $T_n(x; a)$ = Taylorpolynom vom Grade $\leq n$
- $R_n(x; a)$ = Restglied

Das Taylor-Polynom

Schreibe

$$f(x) = T_n(x;a) + R_n(x;a)$$

mit

- $T_n(x;a)$ = Taylorpolynom vom Grade $\leq n$
- $R_n(x;a)$ = Restglied

$$T_n(x;a) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i.$$

Das Taylor-Polynom

Schreibe

$$f(x) = T_n(x;a) + R_n(x;a)$$

mit

- $T_n(x;a) =$ Taylorpolynom vom Grade $\leq n$
- $R_n(x;a) =$ Restglied

$$T_n(x;a) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i.$$

Es gilt

$$f^{(i)}(a) = T_n^{(i)}(a;a), \quad i = 0, \ldots, n.$$

Das Taylor-Polynom

Schreibe

$$f(x) = T_n(x; a) + R_n(x; a)$$

mit

- $T_n(x; a) =$ Taylorpolynom vom Grade $\leq n$
- $R_n(x; a) =$ Restglied

$$T_n(x; a) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i.$$

Es gilt

$$f^{(i)}(a) = T_n^{(i)}(a; a), \quad i = 0, \ldots, n.$$

$T_1(x; a)$ ist daher die Tangentengleichung im Punkt $(a, f(a))$.

Das Taylor-Polynom

Schreibe

$$f(x) = T_n(x;a) + R_n(x;a)$$

mit

- $T_n(x;a)$ = Taylorpolynom vom Grade $\leq n$
- $R_n(x;a)$ = Restglied

$$T_n(x;a) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i.$$

Es gilt

$$f^{(i)}(a) = T_n^{(i)}(a;a), \quad i = 0, \ldots, n.$$

$T_1(x;a)$ ist daher die Tangentengleichung im Punkt $(a, f(a))$.

Idee also: T_n ist das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad $\leq n$, das sich im Punkt $(a, f(a))$ an f schmiegt.

Ist das Intervall I beschränkt und abgeschlossen, so ist die stetige Funktion $f^{(n+1)}$ beschränkt und das Restglied lässt sich in der Form

$$|R_n(x;a)| = \left|\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\right| \leq c|x-a|^{n+1}$$

abschätzen mit

Ist das Intervall I beschränkt und abgeschlossen, so ist die stetige Funktion $f^{(n+1)}$ beschränkt und das Restglied lässt sich in der Form

$$|R_n(x;a)| = \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \right| \le c|x-a|^{n+1}$$

abschätzen mit

$$c = \frac{\max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}.$$

Schreibweise mit h

Wir setzen $x = a + h$ und erhalten die Darstellung:

$$\begin{aligned} f(a+h) = & f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n \\ & + R_n(h; a) \end{aligned}$$

Schreibweise mit h

Wir setzen $x = a + h$ und erhalten die Darstellung:

$$\begin{aligned} f(a+h) =& f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2} f''(a)h^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)h^n \\ & + R_n(h;a) \end{aligned}$$

mit dem Restglied

$$R_n(h;a) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\xi) \quad \text{für ein } \xi \in (0,h).$$

Beispiel 1

Für kleines $|h|$ verwenden Ingenieure

$$\sqrt{1+h} \sim 1 + \frac{1}{2}h.$$

Beispiel 1

Für kleines $|h|$ verwenden Ingenieure

$$\sqrt{1+h} \sim 1 + \frac{1}{2}h.$$

Es gilt

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-1/2}, \quad (\sqrt{x})'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2}.$$

Beispiel 1

Für kleines $|h|$ verwenden Ingenieure

$$\sqrt{1+h} \sim 1 + \frac{1}{2}h.$$

Es gilt

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-1/2}, \quad (\sqrt{x})'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2}.$$

Nach Taylor daher

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}(1+\xi)^{-3/2}h^2.$$

Beispiel 1

Für kleines $|h|$ verwenden Ingenieure

$$\sqrt{1+h} \sim 1 + \frac{1}{2}h.$$

Es gilt

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-1/2}, \quad (\sqrt{x})'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2}.$$

Nach Taylor daher

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}(1+\xi)^{-3/2}h^2.$$

mit $0 < \xi < h$ für $h > 0$ und $h < \xi < 0$ für $h < 0$.

Beispiel 2

Es gilt

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\ln x)'' = -\frac{1}{x^2},$$

Beispiel 2

Es gilt

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\ln x)'' = -\frac{1}{x^2},$$

also

$$\ln(1+h) = \ln 1 + \frac{1}{1}h - \frac{1}{2}\frac{h^2}{(1+\xi)^2}.$$

Beispiel 2

Es gilt

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\ln x)'' = -\frac{1}{x^2},$$

also

$$\ln(1+h) = \ln 1 + \frac{1}{1}h - \frac{1}{2}\frac{h^2}{(1+\xi)^2}.$$

Da das Restglied ein Vorzeichen besitzt, erhalten wir die Ungleichung

$$\ln(1+h) \le h \quad \text{für } -1 < h < \infty.$$

Beispiel 3

Wir wollen die Funktion

$$f(x) = (2x + x^2)e^{-x}$$

durch das Taylorpolynom 2. Grades approximieren.

Beispiel 3

Wir wollen die Funktion

$$f(x) = (2x + x^2)e^{-x}$$

durch das Taylorpolynom 2. Grades approximieren.

$$f'(x) = -(2x + x^2)e^{-x} + (2 + 2x)e^{-x} = (2 - x^2)e^{-x}$$

Beispiel 3

Wir wollen die Funktion

$$f(x) = (2x + x^2)e^{-x}$$

durch das Taylorpolynom 2. Grades approximieren.

$$f'(x) = -(2x + x^2)e^{-x} + (2 + 2x)e^{-x} = (2 - x^2)e^{-x}$$

$$f''(x) = -(2 - x^2)e^{-x} - 2xe^{-x} = (-2 - 2x + x^2)e^{-x}$$

$$f'''(x) = -(-2 - 2x + x^2)e^{-x} + (-2 + 2x)e^{-x} = (4x - x^2)e^{-x}$$

Beispiel 3

Wir wollen die Funktion

$$f(x) = (2x + x^2)e^{-x}$$

durch das Taylorpolynom 2. Grades approximieren.

$$f'(x) = -(2x + x^2)e^{-x} + (2 + 2x)e^{-x} = (2 - x^2)e^{-x}$$

$$f''(x) = -(2 - x^2)e^{-x} - 2xe^{-x} = (-2 - 2x + x^2)e^{-x}$$

$$f'''(x) = -(-2 - 2x + x^2)e^{-x} + (-2 + 2x)e^{-x} = (4x - x^2)e^{-x}$$

Das Taylorpolynom 2. Ordnung mit Entwicklungspunkt $a = 0$:

$$T_2(x; 0) = 2x - x^2.$$

Beispiel 3

$$f'''(x) = (4x - x^2)e^{-x}$$

Beispiel 3

$$f'''(x) = (4x - x^2)e^{-x}$$

Schätze das Restglied auf dem Intervall $[0, 1]$ mit einem $\xi \in (0, x)$ ab:

$$|R_2(x; 0)| = \frac{x^3}{6}|f'''(\xi)| \leq \frac{x^3}{6}|4\xi - \xi^2|e^{-\xi}.$$

Beispiel 3

$$f'''(x) = (4x - x^2)e^{-x}$$

Schätze das Restglied auf dem Intervall $[0, 1]$ mit einem $\xi \in (0, x)$ ab:

$$|R_2(x; 0)| = \frac{x^3}{6}|f'''(\xi)| \leq \frac{x^3}{6}|4\xi - \xi^2|e^{-\xi}.$$

Es gilt $e^{-\xi} \leq 1$ auf dem Intervall $[0, x]$.

Beispiel 3

$$f'''(x) = (4x - x^2)e^{-x}$$

Schätze das Restglied auf dem Intervall $[0, 1]$ mit einem $\xi \in (0, x)$ ab:

$$|R_2(x; 0)| = \frac{x^3}{6}|f'''(\xi)| \le \frac{x^3}{6}|4\xi - \xi^2|e^{-\xi}.$$

Es gilt $e^{-\xi} \le 1$ auf dem Intervall $[0, x]$.

Die Funktion $g(\xi) = 4\xi - \xi^2$ ist auf dem Intervall $[0, 1]$ nichtnegativ und streng monoton steigend. Mit $0 \le g(\xi) \le g(x)$ folgt daher

$$|R_2(x; 0)| \le \frac{x^3}{6}(4x - x^2) \quad \text{für } 0 \le x \le 1.$$

12.9 Die Landauschen Symbole

Seien f, g in einer Umgebung des Punktes ξ definiert. Wir sagen f ist gleich groß O von g und schreiben

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to \xi,$$

12.9 Die Landauschen Symbole

Seien f, g in einer Umgebung des Punktes ξ definiert. Wir sagen f ist gleich groß O von g und schreiben

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to \xi,$$

wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M \quad \text{in einer Umgebung von } \xi.$$

12.9 Die Landauschen Symbole

Seien f, g in einer Umgebung des Punktes ξ definiert. Wir sagen f ist gleich groß O von g und schreiben

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to \xi,$$

wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M \quad \text{in einer Umgebung von } \xi.$$

Beispiel Wenn $\lim_{x\to\xi} g(x) = 0$, so

$f = O(g)$ $\quad$ f geht so schnell oder schneller gegen Null als g.

12.9 Die Landauschen Symbole

Seien f, g in einer Umgebung des Punktes ξ definiert. Wir sagen f ist gleich groß O von g und schreiben

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to \xi,$$

wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M \quad \text{in einer Umgebung von } \xi.$$

Beispiel Wenn $\lim_{x\to\xi} g(x) = 0$, so

$$f = O(g) \quad f \text{ geht so schnell oder schneller gegen Null als } g.$$

oder

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \ \text{ in einer Umgebung von } \xi$$

Die Landauschen Symbole

Wir sagen f ist gleich klein o von g und schreiben

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to \xi,$$

Die Landauschen Symbole

Wir sagen f ist gleich klein o von g und schreiben

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to \xi,$$

wenn

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Wir sagen f ist gleich klein o von g und schreiben

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to \xi,$$

wenn

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Beispiel Wenn $\lim_{x \to \xi} g(x) = 0$, so

$$f = o(g) \quad f \text{ geht schneller gegen Null als } g.$$

Die Landauschen Symbole

Man nennt O und o die *Landauschen Symbole*.

Man nennt O und o die *Landauschen Symbole*.

Die Bezeichnungen O und o werden sinngemäß auch für $\pm\infty$ angewendet.

Man nennt O und o die *Landauschen Symbole*.

Die Bezeichnungen O und o werden sinngemäß auch für $\pm\infty$ angewendet.

Beipiel $f(x) = O(x^n)$, $x \to \infty$, bedeutet

$$\exists M \quad \text{mit } |f(x)| \le Mx^n \quad \text{für genügend große } x.$$

Die Landauschen Symbole

Man nennt O und o die *Landauschen Symbole*.

Die Bezeichnungen O und o werden sinngemäß auch für $\pm\infty$ angewendet.

Beipiel $f(x) = O(x^n)$, $x \to \infty$, bedeutet

$$\exists M \quad \text{mit } |f(x)| \leq Mx^n \quad \text{für genügend große } x.$$

$f(x) = o(x^n)$, $x \to \infty$, bedeutet

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \quad \text{mit } |f(x)| \leq \varepsilon x^n \quad \text{für alle } x \geq K.$$

Beispiel Ableitung

Die Landauschen Symbole gestatten suggestive Schreibweisen, weil sie den Approximations- oder Wachstumsaspekt hervorheben.

Die Landauschen Symbole gestatten suggestive Schreibweisen, weil sie den Approximations- oder Wachstumsaspekt hervorheben.

Die Ableitung

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'(\xi)$$

Die Landauschen Symbole gestatten suggestive Schreibweisen, weil sie den Approximations- oder Wachstumsaspekt hervorheben.

Die Ableitung

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'(\xi)$$

lässt sich äquivalent schreiben

$$f(x) - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) + h(x)$$

mit einer Funktion $h(x) = o(|x - \xi|)$.

Beispiel Ableitung

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'(\xi)$$

Beispiel Ableitung

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'(\xi)$$

Oft schreibt man noch kürzer

$$f(x) - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) + o(|x - \xi|).$$

Beispiel Ableitung

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=f'(\xi)$$

Oft schreibt man noch kürzer

$$f(x)-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)+o(|x-\xi|).$$

Nachdem durch $x-\xi$ geteilt wird, geht der Term rechts immer noch gegen Null.

Beispiel Restglied

Wenn es in der Taylorentwicklung nicht auf die explizite Gestalt des Restglieds ankommt, verwendet man auch die Schreibweise

$$f(x) = T_n(x; a) + O(|x - a|^{n+1}).$$

Beispiel Restglied

Wenn es in der Taylorentwicklung nicht auf die explizite Gestalt des Restglieds ankommt, verwendet man auch die Schreibweise

$$f(x) = T_n(x;a) + O(|x-a|^{n+1}).$$

wegen

$$|R_n(x;a)| = \left|\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\right| \leq c|x-a|^{n+1}$$

Beispiel Restglied

Wenn es in der Taylorentwicklung nicht auf die explizite Gestalt des Restglieds ankommt, verwendet man auch die Schreibweise

$$f(x) = T_n(x; a) + O(|x - a|^{n+1}).$$

wegen

$$|R_n(x; a)| = \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \right| \leq c|x - a|^{n+1}$$

Das Taylorpolynom approximiert f bis auf einen Fehler der Ordnung $O(|x - a|^{n+1})$.

Unbestimmte Ausdrücke der Form

$$\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{mit } f(x), g(x) \to 0 \text{ für } x \to \xi$$

Unbestimmte Ausdrücke der Form

$$\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{mit } f(x), g(x) \to 0 \text{ für } x \to \xi$$

untersucht man am besten mit Hilfe der Taylorentwicklung um den Punkt ξ unter Verwendung der Landauschen Symbole.

Unbestimmte Ausdrücke der Form

$$\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{mit } f(x), g(x) \to 0 \text{ für } x \to \xi$$

untersucht man am besten mit Hilfe der Taylorentwicklung um den Punkt ξ unter Verwendung der Landauschen Symbole.

Beispiel Für $\sin x / x$ ist $\sin x = x + O(x^3)$ und daher

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x + O(x^3)}{x} = 1.$$

Beispiel

Wir bestimmen für $a \in \mathbb{R}$

$$L(a) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x \sin x}{\sqrt{1 - x^2} + ax^2 - 1} \quad = „\frac{0}{0}“.$$

Beispiel

Wir bestimmen für $a \in \mathbb{R}$

$$L(a) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x \sin x}{\sqrt{1 - x^2} + ax^2 - 1} \qquad = „\frac{0}{0}“.$$

Zähler: Für die Exponentialfunktion verwenden wir

$$e^{-t} = 1 - t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$$

Beispiel

Wir bestimmen für $a \in \mathbb{R}$

$$L(a) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x \sin x}{\sqrt{1 - x^2} + ax^2 - 1} \quad = „\frac{0}{0}“.$$

Zähler: Für die Exponentialfunktion verwenden wir

$$e^{-t} = 1 - t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$$

sowie für den sinus

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5).$$

Beispiel

$$L(a) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x \sin x}{\sqrt{1 - x^2} + ax^2 - 1} \quad = „\frac{0}{0}“.$$

Beispiel

$$L(a) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x\sin x}{\sqrt{1-x^2} + ax^2 - 1} \quad = „\frac{0}{0}“.$$

Zähler:

$$\begin{aligned} &e^{-x^2} - 1 + x\sin x \\ &\quad = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + O(x^6) - 1 + x(x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)) \end{aligned}$$

Beispiel

$$L(a) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x \sin x}{\sqrt{1 - x^2} + ax^2 - 1} \quad = „\frac{0}{0}“.$$

Zähler:

$$\begin{aligned} & e^{-x^2} - 1 + x \sin x \\ &= 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + O(x^6) - 1 + x(x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)) \\ &= \frac{1}{3}x^4 + O(x^6). \end{aligned}$$

Beispiel

$$L(a) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x \sin x}{\sqrt{1 - x^2} + ax^2 - 1}.$$

Nenner: Für den Wurzelausdruck liefert Taylorentwicklung

$$\sqrt{1 + t} = 1 + \frac{1}{2} t - \frac{1}{8} t^2 + O(t^3),$$

Beispiel

$$L(a) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x \sin x}{\sqrt{1 - x^2} + ax^2 - 1}.$$

Nenner: Für den Wurzelausdruck liefert Taylorentwicklung

$$\sqrt{1 + t} = 1 + \frac{1}{2} t - \frac{1}{8} t^2 + O(t^3),$$

für den Nenner gilt daher

$$1 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 + O(x^6) + ax^2 - 1 = (a - \frac{1}{2}) x^2 - \frac{1}{8} x^4 + O(x^6).$$

Beispiel

$$L(a) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x \sin x}{\sqrt{1 - x^2} + ax^2 - 1}.$$

Nenner: Für den Wurzelausdruck liefert Taylorentwicklung

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3),$$

für den Nenner gilt daher

$$1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + O(x^6) + ax^2 - 1 = (a - \frac{1}{2})x^2 - \frac{1}{8}x^4 + O(x^6).$$

Der Zähler war $= \frac{1}{3}x^4 + O(x^6)$.

Beispiel

$$L(a) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x \sin x}{\sqrt{1 - x^2} + ax^2 - 1}.$$

Nenner: Für den Wurzelausdruck liefert Taylorentwicklung

$$\sqrt{1 + t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3),$$

für den Nenner gilt daher

$$1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + O(x^6) + ax^2 - 1 = (a - \frac{1}{2})x^2 - \frac{1}{8}x^4 + O(x^6).$$

Der Zähler war $= \frac{1}{3}x^4 + O(x^6)$.

Damit ist $L(a) = 0$ für $a \neq \frac{1}{2}$ und $L(a) = \frac{8}{3}$ für $a = \frac{1}{2}$.

12.10 Relative Extrema

Eine Funktion f sei in einer Umgebung des Punktes ξ definiert.

12.10 Relative Extrema

Eine Funktion f sei in einer Umgebung des Punktes ξ definiert.

ξ heißt *relatives Minimum* von f, wenn es eine Umgebung U von ξ gibt mit

$$f(\xi) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in U.$$

12.10 Relative Extrema

Eine Funktion f sei in einer Umgebung des Punktes ξ definiert.

ξ heißt *relatives Minimum* von f, wenn es eine Umgebung U von ξ gibt mit

$$f(\xi) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in U.$$

In einem *relativen Maximum* gilt analog $f(\xi) \geq f(x)$.

Eine Funktion f sei in einer Umgebung des Punktes ξ definiert.

ξ heißt *relatives Minimum* von f, wenn es eine Umgebung U von ξ gibt mit

$$f(\xi) \leq f(x) \ \text{ für alle } x \in U.$$

In einem *relativen Maximum* gilt analog $f(\xi) \geq f(x)$.

Ein Minimum oder Maximum heißt *strikt*, wenn statt $\leq$ oder $\geq$ die strikte Ungleichung gilt. Zu beachten ist bei dieser Definition, dass f mindestens in einem Intervall $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ definiert sein muss.

Notwendige Bedingungen für einen Extremwert

Satz Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ besitze in $\xi \in (a, b)$ ein relatives Minimum oder Maximum.

(a) Ist $f \in C^1$, so gilt $f'(\xi) = 0$.

Satz Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ besitze in $\xi \in (a, b)$ ein relatives Minimum oder Maximum.

(a) Ist $f \in C^1$, so gilt $f'(\xi) = 0$.

(b) Ist $f \in C^2$, so gilt zusätzlich

$$f''(\xi) \geq 0 \text{ falls } \xi \text{ Minimum}, \quad f''(\xi) \leq 0 \text{ falls } \xi \text{ Maximum}.$$

Beweis

(a) Ist $f \in C^1$, so gilt $f'(\xi) = 0$.

Beweis

(a) Ist $f \in C^1$, so gilt $f'(\xi) = 0$.

Sei ξ ein relatives Minimum. Für $h > 0$ gilt dann

$$\frac{1}{h}(f(\xi + h) - f(\xi)) \geq 0, \quad \frac{1}{-h}(f(\xi - h) - f(\xi)) \leq 0.$$

Beweis

(a) Ist $f \in C^1$, so gilt $f'(\xi) = 0$.

Sei ξ ein relatives Minimum. Für $h > 0$ gilt dann

$$\frac{1}{h}(f(\xi + h) - f(\xi)) \geq 0, \quad \frac{1}{-h}(f(\xi - h) - f(\xi)) \leq 0.$$

Durch Grenzübergang folgt $f'(\xi) = 0$.

Beweis

(b) Ist $f \in C^2$, so gilt zusätzlich

$$f''(\xi) \geq 0 \;\text{ falls } \xi \text{ Minimum}, \quad f''(\xi) \leq 0 \;\text{ falls } \xi \text{ Maximum}.$$

Beweis

(b) Ist $f \in C^2$, so gilt zusätzlich

$$f''(\xi) \geq 0 \;\text{ falls } \xi \text{ Minimum}, \quad f''(\xi) \leq 0 \;\text{ falls } \xi \text{ Maximum}.$$

Für ein relatives Minimum ξ gilt nach (a) $f'(\xi) = 0$.

Beweis

(b) Ist $f \in C^2$, so gilt zusätzlich

$$f''(\xi) \geq 0 \ \text{ falls } \xi \text{ Minimum}, \quad f''(\xi) \leq 0 \ \text{ falls } \xi \text{ Maximum}.$$

Für ein relatives Minimum ξ gilt nach (a) $f'(\xi) = 0$.

Die Taylor-Entwicklung für $n = 1$ lautet daher

$$f(x) = f(\xi) + \frac{1}{2} f''(a)(x - \xi)^2, \quad a \in (x, \xi),$$

Beweis

(b) Ist $f \in C^2$, so gilt zusätzlich

$$f''(\xi) \geq 0 \ \text{ falls } \xi \text{ Minimum}, \quad f''(\xi) \leq 0 \ \text{ falls } \xi \text{ Maximum}.$$

Für ein relatives Minimum ξ gilt nach (a) $f'(\xi) = 0$.

Die Taylor-Entwicklung für $n = 1$ lautet daher

$$f(x) = f(\xi) + \frac{1}{2} f''(a)(x - \xi)^2, \quad a \in (x, \xi),$$

daher

$$0 \leq f(x) - f(\xi) = \frac{1}{2} f''(a)(x - \xi)^2, \quad a \in (x, \xi).$$

$x = x_n \to \xi$ liefert die Behauptung.

Hinreichende Bedingung für einen Extremwert

Satz Für die Funktion $f \in C^2(a, b)$ seien in $\xi \in (a, b)$ die Bedingungen $f'(\xi) = 0$ sowie $f''(\xi) > 0$ ($f''(\xi) < 0$) erfüllt.

Satz Für die Funktion $f \in C^2(a, b)$ seien in $\xi \in (a, b)$ die Bedingungen $f'(\xi) = 0$ sowie $f''(\xi) > 0$ ($f''(\xi) < 0$) erfüllt.

Dann besitzt f in ξ ein striktes relatives Minimum (Maximum).

Beweis

Wegen $f'(\xi) = 0$ lautet die Taylor-Entwicklung

$$f(x) - f(\xi) = \frac{1}{2} f''(a)(x - \xi)^2, \quad a \in (x, \xi).$$

Beweis

Wegen $f'(\xi) = 0$ lautet die Taylor-Entwicklung

$$f(x) - f(\xi) = \frac{1}{2} f''(a)(x - \xi)^2, \quad a \in (x, \xi).$$

Ist nun $f''(\xi) > 0$, so ist wegen der Stetigkeit von f'' auch $f''(a) > 0$ für alle a in einer genügend kleinen Umgebung von ξ.

Einseitige Extremwerte

Extremwerte am Rande des Definitionsintervalls nennt man *einseitige Extremwerte*.

Einseitige Extremwerte

Extremwerte am Rande des Definitionsintervalls nennt man *einseitige Extremwerte*.

Bei diesen gibt es nur notwendige und hinreichende Bedingungen erster Ordnung, also nur für die erste Ableitung von f.

Extremwerte am Rande des Definitionsintervalls nennt man *einseitige Extremwerte*.

Bei diesen gibt es nur notwendige und hinreichende Bedingungen erster Ordnung, also nur für die erste Ableitung von f.

Besitzt $f \in C^1([a,b])$ ein Minimum an der Stelle a, so folgt für $h > 0$ $f(a+h) - f(a) \geq 0$ und damit $f'(a) \geq 0$.

Extremwerte am Rande des Definitionsintervalls nennt man *einseitige Extremwerte*.

Bei diesen gibt es nur notwendige und hinreichende Bedingungen erster Ordnung, also nur für die erste Ableitung von f.

Besitzt $f \in C^1([a, b])$ ein Minimum an der Stelle a, so folgt für $h > 0$ $f(a + h) - f(a) \geq 0$ und damit $f'(a) \geq 0$.

Gilt $f'(a) > 0$, so folgt aus dem Differenzenquotienten, dass f in a ein striktes relatives Minimum besitzt.

Extremwerte am Rande des Definitionsintervalls nennt man *einseitige Extremwerte*.

Bei diesen gibt es nur notwendige und hinreichende Bedingungen erster Ordnung, also nur für die erste Ableitung von f.

Besitzt $f \in C^1([a,b])$ ein Minimum an der Stelle a, so folgt für $h > 0$ $f(a+h) - f(a) \geq 0$ und damit $f'(a) \geq 0$.

Gilt $f'(a) > 0$, so folgt aus dem Differenzenquotienten, dass f in a ein striktes relatives Minimum besitzt.

Beachte: Die Vorzeichen für den rechten Randpunkt kehren sich um.

Bestimmung der globalen Extremwerte

Bei der Bestimmung der globalen Extremwerte einer differenzierbaren Funktion sind alle Nullstellen der ersten Ableitungen und die Randpunkte zu untersuchen.

Bestimmung der globalen Extremwerte

Bei der Bestimmung der globalen Extremwerte einer differenzierbaren Funktion sind alle Nullstellen der ersten Ableitungen und die Randpunkte zu untersuchen.

Bei unbeschränktem Definitionsbereich zusätzlich das Verhalten im Unendlichen.

Beispiel

Sei

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad \text{in } I = (-1, \infty).$$

Beispiel

Sei

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad \text{in } I = (-1, \infty).$$

Es gilt für $x > -1$

$$f'(x) = \frac{2x}{x+1} - \frac{x^2}{(x+1)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x(x+1) - x^2 = 0$$

mit einziger Lösung $x = 0$ in I.

Beispiel

Sei

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad \text{in } I = (-1, \infty).$$

Es gilt für $x > -1$

$$f'(x) = \frac{2x}{x+1} - \frac{x^2}{(x+1)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x(x+1) - x^2 = 0$$

mit einziger Lösung $x = 0$ in I.

Da $f' < 0$ in $(-1, 0)$ und $f' > 0$ in $(0, \infty)$, ist f streng monoton fallend in $(-1, 0)$ und streng monoton wachsend in $(0, \infty)$.

Beispiel

Sei

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad \text{in } I = (-1, \infty).$$

Es gilt für $x > -1$

$$f'(x) = \frac{2x}{x+1} - \frac{x^2}{(x+1)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x(x+1) - x^2 = 0$$

mit einziger Lösung $x = 0$ in I.

Da $f' < 0$ in $(-1, 0)$ und $f' > 0$ in $(0, \infty)$, ist f streng monoton fallend in $(-1, 0)$ und streng monoton wachsend in $(0, \infty)$.

$x = 0$ ist daher das globale Minimum. Klar ist

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$