Zum Beweisen

Seien A und B zwei Aussagen gegeben. Wir wollwn $A \Rightarrow B$ zeigen. Dazu gibt es drei Beweis Arten.

Direkter Beweis

$A \Rightarrow ... \Rightarrow ... \Rightarrow B$

Kontraposition

$\neg B \Rightarrow ... \Rightarrow ... \Rightarrow \neg A$

Widerspruchs Beweis

$A \wedge \neg B \Rightarrow ... \Rightarrow ... \Rightarrow \lightning$

0.1 Bsp

Satz aus der Vorlesung:
Sind f, g differenzierbare Funktionen, dann sind auch $f+g, f-g, f \cdot g, f \circ g$ differenzierbar, sowie $\frac{f}{g}$ falls $g(x) > 0 \forall x$
Aufgabe:
Sei $f, g : (0, \infty) \to (0, \infty)$.
Zeige f und g differenzierbar ist äquivalent zu $f + g^2$ und $f - g^2$ differenzierbar.
Beweis: Wir zeigen zwei Richtungen:
„$\Rightarrow$“Sind f und g differenzierbar, so ist nach dem Satz aus der Vorlesung auch g^2 sowie sowie $f + g^2$ und $f - g^2$ differenzierbar „$\Leftarrow$“Sind nun $f + g^2$ und $f - g^2$ differenzierbar, so sind auch $\frac{1}{2}\left(f + g^2\right) + \frac{1}{2}\left(f - g^2\right) = f$ und $\frac{1}{2}\left(f + g^2\right) - \frac{1}{2}\left(f - g^2\right) = g^2$ differenzierbar.
Da nach der Vorlesung die Wurzelfunktion differenzierbar und $g\left(x\right) > 0$ ist auch $\sqrt{g\left(x\right)} = g\left(x\right)$ differenzierbar.

Stetig differenzierbare Funktion

$C^n\left((a, b)\right) = \left\{f : (a, b) \to \mathbb{R} | f \text{ ist } n \text{ mal differenzierbar und } f^{(i)} \text{ ist stetig in } (a, b)\right\}$
$C^n\left([a, b]\right) = \left\{f : (a, b) \to \mathbb{R} | f \text{ ist } n \text{ mal stetig differenzierbar in } (a, b) \text{ und } f^{(i)},\ i = 0, ..., n \text{ ist stetig i}\right.$

1 ’

Aufgabe mit dem Taylor

a) Zeige:
   $u'(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + o(h)$
   d.h.: Es gib $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
   $u'(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + r(h)$
   wobei $\frac{r(h)}{h} \to 0$ für $h \to 0$

b) Zeige $u'(x) = \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} + o(h^2)$

c) Zeige $-u''(x) = \frac{2u(x)-u(x+h)-u(x-h)}{h^2} + o(h^2)$

1.1 Lösung

a) Mit dem Satz von Taylor folgt:
   $u(x+h) = u(x) + u'(x)h + o(h) \Leftrightarrow u'(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + o(h)$

b)

c) Mit dem Satz von Taylor folgt:
   $u(x+h) = u(x) + u'(x)h + \frac{1}{2}u''(x)h^2$
   $u(x-h) = u(x) - u'(x)h + \frac{1}{2}u''(x)(-h)^2 + o(h^2) = u(x) - u'(x)h + \frac{1}{2}u''(x)h^2 + o(h^2)$
   Subtrahieren liefert:
   $u(x+h) - u(x-h) = 0 + 2u'(x)h + 0 + o(h^2) \Leftrightarrow b$
   Addieren liefert c)
   $\frac{2r(h)}{h^2} \to 0$
   $o(h^2) \pm o(h^2) = o(h^2)$