Mathematik für Informatiker 2
Übungsblatt 5

Lukas Vormwald   Noah Mehling   Gregor Seewald

Übung 5:Dienstag 12:00

Aufgabe 1

a)

$$
\begin{aligned}
f(x) =& 8x^7 + 2x + 10 \\
8x^7 + 2x + 10 \overset{!}{=}& 10 \\
8x^7 + 2x =& -10 \\
x =& -1
\end{aligned}
$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$f'(-2) = -1,018$ $f'(0) = 10$
negativ positv

$$\searrow \qquad \swarrow$$

Kein Terrassenpunkt $\rightarrow$ 1 Extremstelle bei $x = -1$

b)

$$
\begin{aligned}
f'(x) =& e^{-x^2} \cdot (-2)x \\
\underbrace{e^{-x^2}}_{\text{hat keine Nullstellen}} \cdot (-2)x \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow -2x \overset{!}{=}& 0 \\
x =& 0
\end{aligned}
$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$f'(-1) = 0,74$ $f'(1) = 0,74$
positiv negativ

$$\searrow \qquad \swarrow$$

Kein Terrassenpunkt $\rightarrow$ 1 Extremstelle bei $x = 0$

Aufgabe 3

a) Zu betrachten sind 3 Fälle:
$f(x) = 0$, Damit sind alle Funktionswerte $f(\phi) = f(x_1) = f(x_2)$. Somit sind diese Punkte relative Extrema der Funktion, jedoch kein striktes Extrema.
Ist $f(x_1 + \phi)$ für ein kleines ϕ negativ, so gilt aufgrund ger Stetigkeit: $\lim\limits_{x \to \phi} f(x_1) = f(\phi)$. Da dieser Funktionswert nun negativ ist und diese Bedingung ebenfalls für $f(x_2 - \phi)$ gelten muss, so muss die Funktion ein lokales Extrema aufweisen, da diese sonst die Definition der Stetigkeit verletzen würde.
Für $f(x_1 + \phi)$ positiv verlaüft der Beweis analog zu $f(x_1 + \phi)$ negativ.

b) Es gibt Drei Fälle zu betrachten:

1. f ist eine konstante Funktion. Dann ist $f'(x) = 0$ und besitzt somit unendlich viele Nullstellen in $\mathbb{R}$. Somit besitzt auch f höchstens unendlich viele Nullstellen $(\infty + 1)$.
2. f ist ein Polynom. Dann gilt nach dem Fundamentalsatz der Algebra, dass der Grad des Polynoms die maximale Anzahl an Nullstellen angibt. Da die Ableitung von Polynomen der Form $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ ist und somit auch der Grad der Ableitung der Funktion um 1 vermindert wird gilt die Aussage ebenfalls.
3. f ist eine trigonometrische Funktion: Da trigonometrische Funktionen ebenfalls unendlich viele Nullstellen aufweisen, gilt hier das selbe Argument wie bei 1.

Aufgabe 4

$$
\begin{array}{llllll}
f'(x) & = \frac{1}{1+x} & +2\cos(x) & -3 & -\frac{x}{2} & +x \cdot \frac{1}{2} \\
f'(0) & = 1 & +2 & -3 & -0 & +0 \\
= 3 & -3 & = 0 & & & \to \mathit{Extrapunkt?} \\
f''(x) & = \frac{-1}{(1+x)^2} & +2 \cdot (\sin(x)) & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & \\
f''(0) & = -1 & +0 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & = -1
\end{array}
$$

$\to$ kein Terassenpunkt bei $x = 0$, da zweite Ableitung $\neq 0 \to$ Extrempunkt bei $x = 0$

Aufgabe 5

Die Funktion muss mindestens ein globales Minimum aufweisen. Da die Funktion stetig ist gilt:
$\lim_{x \to \phi} f(x) = f(\phi)$. Wählt man als ϕ nun ∞, so muss auch der Funktionswert gegen ∞ konvergieren. Aufgrund der Bedingung der Angabe jedoch gegen $-\infty$ ebenfalls.
Nun existieren zwei Möglichkeiten:

1. Die gegebene Bedingung ist erfüllt, dann ist das gewählte $f(x)$ bereits das gesuchte Minimum.

2. eine der beiden Bedingungen ist verletzt. Dann ist es möglich, eine Umgebung $f(x + \phi)$ bei Verletzung des $\lim_{x \to +\infty}$, bzw. $f(x - \phi)$ bei Verletzung von $\lim_{x \to -\infty}$ zu wählenm bis die Teilfolge nicht mehr gegen $f(x)$ konvergiert (man betrachtet also $\lim_{x+\phi \to x} f(x)$). Dieser Wert entspricht dann Fall 1.