

7 Lineare Gleichungssysteme und Determinanten

- ▶ Lineare Gleichungssysteme
- ▶ Gauß-Algorithmus
- ▶ Anwendungen
- ▶ Determinanten

7.1 Dreiecks- und Diagonalmatrizen

Linke untere bzw. rechte obere *Dreiecksmatrizen* sind quadratische Matrizen von der Gestalt

$$L = \begin{pmatrix} * & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & * & & \ddots \\ & & & & * \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} * & & & \\ & \ddots & & * \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & * \end{pmatrix}.$$

7.1 Dreiecks- und Diagonalmatrizen

Linke untere bzw. rechte obere *Dreiecksmatrizen* sind quadratische Matrizen von der Gestalt

$$L = \begin{pmatrix} * & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & * & \ddots & \\ & & & * \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} * & & & \\ & \ddots & * & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & * \end{pmatrix}.$$

$L = (l_{ij})$ ist linke untere Dreiecksmatrix $\Leftrightarrow l_{ij} = 0$ für $i < j$.

7.1 Dreiecks- und Diagonalmatrizen

Linke untere bzw. rechte obere *Dreiecksmatrizen* sind quadratische Matrizen von der Gestalt

$$L = \begin{pmatrix} * & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & * & \ddots & \\ & & & * \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} * & & & \\ & \ddots & * & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & * \end{pmatrix}.$$

$L = (l_{ij})$ ist linke untere Dreiecksmatrix $\Leftrightarrow l_{ij} = 0$ für $i < j$.

$R = (r_{ij})$ ist rechte obere Dreiecksmatrix $\Leftrightarrow r_{ij} = 0$ für $i > j$.

Dreiecksmatrizen

Der Raum der linken unteren bzw. rechten oberen Dreiecksmatrizen ist abgeschlossen gegenüber allen bisher definierten Operationen.

Dreiecksmatrizen

Der Raum der linken unteren bzw. rechten oberen Dreiecksmatrizen ist abgeschlossen gegenüber allen bisher definierten Operationen.

Sind L_1, L_2 linke untere Dreiecksmatrizen gleicher Dimension und $\alpha \in \mathbb{K}$, so sind auch

$$L_1 + L_2, \quad \alpha L, \quad L_1 L_2, \quad L_1^{-1} \text{ falls } L_1 \text{ regulär,}$$

linke untere Dreiecksmatrizen.

Regularität von Dreiecksmatrizen

Lemma Eine rechte obere (linke untere) Dreiecksmatrix ist genau dann regulär, wenn $r_{ii} \neq 0$ ($l_{ii} \neq 0$) für alle $1 \leq i \leq n$.

Beweis

Wir zeigen das nur für eine rechte obere Dreiecksmatrix.

Beweis

Wir zeigen das nur für eine rechte obere Dreiecksmatrix.

Ist $r_{11} = 0$, so ist die erste Spalte Null und die Matrix besitzt e_1 als nichttrivialen Vektor im Kern.

Beweis

Wir zeigen das nur für eine rechte obere Dreiecksmatrix.

Ist $r_{11} = 0$, so ist die erste Spalte Null und die Matrix besitzt e_1 als nichttrivialen Vektor im Kern.

Sei

$$r_{11}, \dots, r_{kk} \neq 0, \quad r_{k+1, k+1} = 0.$$

Wir zeigen das nur für eine rechte obere Dreiecksmatrix.

Ist $r_{11} = 0$, so ist die erste Spalte Null und die Matrix besitzt e_1 als nichttrivialen Vektor im Kern.

Sei

$$r_{11}, \dots, r_{kk} \neq 0, \quad r_{k+1, k+1} = 0.$$

Die Spaltenvektoren r_1, \dots, r_{k+1} sind l.a., denn diese Vektoren liegen de facto in einem \mathbb{K}^k , wenn man nur die oberen k Komponenten betrachtet.

Wir zeigen das nur für eine rechte obere Dreiecksmatrix.

Ist $r_{11} = 0$, so ist die erste Spalte Null und die Matrix besitzt e_1 als nichttrivialen Vektor im Kern.

Sei

$$r_{11}, \dots, r_{kk} \neq 0, \quad r_{k+1, k+1} = 0.$$

Die Spaltenvektoren r_1, \dots, r_{k+1} sind l.a., denn diese Vektoren liegen de facto in einem \mathbb{K}^k , wenn man nur die oberen k Komponenten betrachtet.

Die umgekehrte Richtung kommt später.

Diagonalmatrizen

Quadratische Matrizen $D = (d_{ij})$ mit $d_{ij} = 0$ für $i \neq j$ heißen *Diagonalmatrizen*.

Diagonalmatrizen

Quadratische Matrizen $D = (d_{ij})$ mit $d_{ij} = 0$ für $i \neq j$ heißen *Diagonalmatrizen*.

Wir schreiben auch kurz

$$\text{diag } D = (d_1, \dots, d_n).$$

Z.B.:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{diag } D = (d_1, d_2, d_3).$$

Diagonalmatrizen

Quadratische Matrizen $D = (d_{ij})$ mit $d_{ij} = 0$ für $i \neq j$ heißen *Diagonalmatrizen*.

Wir schreiben auch kurz

$$\text{diag } D = (d_1, \dots, d_n).$$

Z.B.:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{diag } D = (d_1, d_2, d_3).$$

Auch der Raum der Diagonalmatrizen ist abgeschlossen gegenüber Addition, Skalarmultiplikation und Matrizenmultiplikation.

Diagonalmatrizen

Quadratische Matrizen $D = (d_{ij})$ mit $d_{ij} = 0$ für $i \neq j$ heißen *Diagonalmatrizen*.

Wir schreiben auch kurz

$$\text{diag } D = (d_1, \dots, d_n).$$

Z.B.:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{diag } D = (d_1, d_2, d_3).$$

Auch der Raum der Diagonalmatrizen ist abgeschlossen gegenüber Addition, Skalarmultiplikation und Matrizenmultiplikation.

Das letzte Lemma gilt auch für Diagonalmatrizen, sind diese doch gleichzeitig rechte obere und linke untere Dreiecksmatrizen.

7.2 Problemstellung

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) über einem Körper \mathbb{K} besteht aus

- ▶ $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ = Systemmatrix,
- ▶ $b \in \mathbb{K}^m$ = rechte Seite.

7.2 Problemstellung

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) über einem Körper \mathbb{K} besteht aus

- ▶ $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ = Systemmatrix,
- ▶ $b \in \mathbb{K}^m$ = rechte Seite.

Gesucht wird ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$Ax = b.$$

$$Ax = b$$

oder ausgeschrieben

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m.$$

$$Ax = b$$

oder ausgeschrieben

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m.$$

Die Gleichungen müssen alle erfüllt sein, nur dann sprechen wir davon, dass das LGS lösbar ist.

Lösbarkeit, Lösungsmenge des LGS

Satz (a) Das Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn $b \in \text{Bild } A$.

Lösbarkeit, Lösungsmenge des LGS

Satz (a) Das Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn $b \in \text{Bild } A$.

(b) Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\text{rang } A = \text{rang } (A|b),$$

wobei die Matrix $(A|b) \in \mathbb{K}^{m \times (n+1)}$ von der Form $(a_1 | \dots | a_n | b)$ ist. Die Spalten von A werden durch b als Spalte $n + 1$ ergänzt.

Lösbarkeit, Lösungsmenge des LGS

Satz (a) Das Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn $b \in \text{Bild } A$.

(b) Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\text{rang } A = \text{rang } (A|b),$$

wobei die Matrix $(A|b) \in \mathbb{K}^{m \times (n+1)}$ von der Form $(a_1 | \dots | a_n | b)$ ist. Die Spalten von A werden durch b als Spalte $n + 1$ ergänzt.

(c) Ist das Gleichungssystem lösbar, so ist die Lösungsmenge von der Form

$$x + \text{Kern } A,$$

wobei x eine beliebige Lösung von $Ax = b$ ist.

Beweis (a)

Das Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn $b \in \text{Bild } A$.

Beweis (a)

Das Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn $b \in \text{Bild } A$.

Das Gleichungssystem wird durch eine Linearkombination der Form

$$\sum_{i=1}^n x_i a_i = b$$

gelöst.

Beweis (a)

Das Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn $b \in \text{Bild } A$.

Das Gleichungssystem wird durch eine Linearkombination der Form

$$\sum_{i=1}^n x_i a_i = b$$

gelöst.

$a_i \in \mathbb{R}^m$ sind die Spaltenvektoren von A .

Beweis (a)

Das Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn $b \in \text{Bild } A$.

Das Gleichungssystem wird durch eine Linearkombination der Form

$$\sum_{i=1}^n x_i a_i = b$$

gelöst.

$a_i \in \mathbb{R}^m$ sind die Spaltenvektoren von A .

Dies ist aber gleichbedeutend damit, dass $b \in \text{Bild } A$ ist.

Beweis (b)

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} (A|b),$$

wobei die Matrix $(A|b) \in \mathbb{K}^{m \times (n+1)}$ von der Form $(a_1 | \dots | a_n | b)$ ist. Die Spalten von A werden durch b als Spalte $n + 1$ ergänzt.

Beweis (b)

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} (A|b),$$

wobei die Matrix $(A|b) \in \mathbb{K}^{m \times (n+1)}$ von der Form $(a_1 | \dots | a_n | b)$ ist. Die Spalten von A werden durch b als Spalte $n + 1$ ergänzt.

Werden die Spaltenvektoren um den Vektor b ergänzt, dann vergrößert er $\operatorname{span} \{a_1, \dots, a_n\}$ oder er tut das nicht.

Beweis (b)

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} (A|b),$$

wobei die Matrix $(A|b) \in \mathbb{K}^{m \times (n+1)}$ von der Form $(a_1 | \dots | a_n | b)$ ist. Die Spalten von A werden durch b als Spalte $n+1$ ergänzt.

Werden die Spaltenvektoren um den Vektor b ergänzt, dann vergrößert er $\operatorname{span} \{a_1, \dots, a_n\}$ oder er tut das nicht.

Im ersten Fall ist

$$\dim \operatorname{Bild} (A|b) > \dim \operatorname{Bild} A \Rightarrow \operatorname{rang} (A|b) > \operatorname{rang} A \Rightarrow b \notin \operatorname{Bild} A.$$

Beweis (b)

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} (A|b),$$

wobei die Matrix $(A|b) \in \mathbb{K}^{m \times (n+1)}$ von der Form $(a_1 | \dots | a_n | b)$ ist. Die Spalten von A werden durch b als Spalte $n + 1$ ergänzt.

Werden die Spaltenvektoren um den Vektor b ergänzt, dann vergrößert er $\operatorname{span} \{a_1, \dots, a_n\}$ oder er tut das nicht.

Im ersten Fall ist

$$\dim \operatorname{Bild} (A|b) > \dim \operatorname{Bild} A \Rightarrow \operatorname{rang} (A|b) > \operatorname{rang} A \Rightarrow b \notin \operatorname{Bild} A.$$

Im zweiten Fall ist $\operatorname{rang} (A|b) = \operatorname{rang} A$ und b liegt in $\operatorname{Bild} A$.

Beweis (c)

Ist das Gleichungssystem lösbar, so ist die Lösungsmenge von der Form

$$x + \text{Kern } A,$$

wobei x eine beliebige Lösung von $Ax = b$ ist.

Beweis (c)

Ist das Gleichungssystem lösbar, so ist die Lösungsmenge von der Form

$$x + \text{Kern } A,$$

wobei x eine beliebige Lösung von $Ax = b$ ist.

Wir können auf eine Lösung x einen beliebigen Vektor $y \in \text{Kern } A$ addieren und es gilt

$$A(x + y) = Ax + Ay = b.$$

Beweis (c)

Ist das Gleichungssystem lösbar, so ist die Lösungsmenge von der Form

$$x + \text{Kern } A,$$

wobei x eine beliebige Lösung von $Ax = b$ ist.

Wir können auf eine Lösung x einen beliebigen Vektor $y \in \text{Kern } A$ addieren und es gilt

$$A(x + y) = Ax + Ay = b.$$

Haben wir zwei Lösungen x, x' , dann

$$Ax = Ax' = b \Rightarrow A(x - x') = 0.$$

Damit unterscheiden sich zwei Lösungen nur um einen Vektor im Kern.

Beweis (c)

Ist das Gleichungssystem lösbar, so ist die Lösungsmenge von der Form

$$x + \text{Kern } A,$$

wobei x eine beliebige Lösung von $Ax = b$ ist.

Wir können auf eine Lösung x einen beliebigen Vektor $y \in \text{Kern } A$ addieren und es gilt

$$A(x + y) = Ax + Ay = b.$$

Haben wir zwei Lösungen x, x' , dann

$$Ax = Ax' = b \Rightarrow A(x - x') = 0.$$

Damit unterscheiden sich zwei Lösungen nur um einen Vektor im Kern.

Die Lösungsmenge ist von der Form $x + \text{Kern } A$ wie angegeben.

Korollar Das LGS ist genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} (A|b) = n = \text{Anzahl der Spalten von } A.$$

Eindeutige Lösbarkeit

Korollar Das LGS ist genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$\text{rang } A = \text{rang } (A|b) = n = \text{Anzahl der Spalten von } A.$$

Beweis Das erste Gleichheitszeichen ist das Lösbarkeitskriterium aus dem letzten Satz.

Korollar Das LGS ist genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$\text{rang } A = \text{rang } (A|b) = n = \text{Anzahl der Spalten von } A.$$

Beweis Das erste Gleichheitszeichen ist das Lösbarkeitskriterium aus dem letzten Satz.

Wenn $\text{rang } A = n$, so folgt aus der Rangformel

$$\dim \text{Kern } A = 0 \Rightarrow \text{Kern } A = \{0\}.$$

7.3 Der Gauß-Algorithmus

Im Folgenden ist immer $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{K}^m$ und zu lösen ist das LGS

$$Ax = b \text{ für } x \in \mathbb{K}^n.$$

7.3 Der Gauß-Algorithmus

Im Folgenden ist immer $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{K}^m$ und zu lösen ist das LGS

$$Ax = b \text{ für } x \in \mathbb{K}^n.$$

Forme mittels regulären $B_i \in \mathbb{K}^{m \times m}$ das LGS um.

Es gilt ja

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad B_i Ax = B_i b.$$

7.3 Der Gauß-Algorithmus

Im Folgenden ist immer $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{K}^m$ und zu lösen ist das LGS

$$Ax = b \text{ für } x \in \mathbb{K}^n.$$

Forme mittels regulären $B_i \in \mathbb{K}^{m \times m}$ das LGS um.

Es gilt ja

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad B_i Ax = B_i b.$$

Die Lösungsmenge ändert sich nicht, sofern die Matrizen B_i regulär sind.

Zeilenstufenform (ZSF)

Ziel der Umformungen ist es, eine *Zeilenstufenform* (ZSF) für die umgeformte Matrix zu erreichen.

Zeilenstufenform (ZSF)

Ziel der Umformungen ist es, eine *Zeilenstufenform* (ZSF) für die umgeformte Matrix zu erreichen.

Dabei liegt eine Matrix in ZSF vor, wenn für alle $i = 1, \dots, m - 1$ gilt:

- ▶ *Zeile $i + 1$ besitzt mehr führende Nullen als Zeile i ,*
- ▶ *wenn allerdings Zeile i eine Nullzeile ist, muss auch Zeile $i + 1$ eine Nullzeile sein.*

Beispiele

In den folgenden Beispielen bezeichnen wir mit $*$ ein Element $\neq 0$ und mit a ein beliebiges Element.

Beispiele

In den folgenden Beispielen bezeichnen wir mit $*$ ein Element $\neq 0$ und mit a ein beliebiges Element.

Beispiele für Matrizen in ZFS sind:

$$A = \begin{pmatrix} * & a & a & a \\ 0 & a & * & a \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} * & a & a \\ 0 & * & a \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Reguläre rechte obere Dreiecksmatrix

$$R = \begin{pmatrix} * & a & a \\ 0 & * & a \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

R ist eine rechte obere Dreiecksmatrix mit nichtverschwindenden Diagonalelementen.

Reguläre rechte obere Dreiecksmatrix

$$R = \begin{pmatrix} * & a & a \\ 0 & * & a \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

R ist eine rechte obere Dreiecksmatrix mit nichtverschwindenden Diagonalelementen.

Die Lösung von $Rx = b$ bestimmt man von unten nach oben, beginnt also mit der n -ten Gleichung $r_{nn}x_n = b_n$.

Reguläre rechte obere Dreiecksmatrix

$$R = \begin{pmatrix} * & a & a \\ 0 & * & a \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

R ist eine rechte obere Dreiecksmatrix mit nichtverschwindenden Diagonalelementen.

Die Lösung von $Rx = b$ bestimmt man von unten nach oben, beginnt also mit der n -ten Gleichung $r_{nn}x_n = b_n$.

Daraus bestimmt man $x_n = b_n/r_{nn}$ und setzt diesen Wert in die oberen Gleichungen ein.

Reguläre rechte obere Dreiecksmatrix

$$R = \begin{pmatrix} * & a & a \\ 0 & * & a \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

R ist eine rechte obere Dreiecksmatrix mit nichtverschwindenden Diagonalelementen.

Die Lösung von $Rx = b$ bestimmt man von unten nach oben, beginnt also mit der n -ten Gleichung $r_{nn}x_n = b_n$.

Daraus bestimmt man $x_n = b_n/r_{nn}$ und setzt diesen Wert in die oberen Gleichungen ein.

Dann geht man zur Gleichung $n - 1$ und bestimmt daraus x_{n-1} .

Reguläre rechte obere Dreiecksmatrix

$$R = \begin{pmatrix} * & a & a \\ 0 & * & a \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

R ist eine rechte obere Dreiecksmatrix mit nichtverschwindenden Diagonalelementen.

Die Lösung von $Rx = b$ bestimmt man von unten nach oben, beginnt also mit der n -ten Gleichung $r_{nn}x_n = b_n$.

Daraus bestimmt man $x_n = b_n/r_{nn}$ und setzt diesen Wert in die oberen Gleichungen ein.

Dann geht man zur Gleichung $n - 1$ und bestimmt daraus x_{n-1} .

Wir können daher immer eindeutig lösen, eine solche Dreiecksmatrix ist also regulär.

Reguläre rechte obere Dreiecksmatrix

$$R = \begin{pmatrix} * & a & a \\ 0 & * & a \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Beim Gauß-Algorithmus für quadratische Matrizen erreicht man immer eine solche rechte obere Dreiecksmatrix, wenn die Ausgangsmatrix regulär ist.

Reguläre rechte obere Dreiecksmatrix

$$R = \begin{pmatrix} * & a & a \\ 0 & * & a \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Beim Gauß-Algorithmus für quadratische Matrizen erreicht man immer eine solche rechte obere Dreiecksmatrix, wenn die Ausgangsmatrix regulär ist.

Klar, bei einer allgemeinen Matrix in ZSF kann man ähnlich vorgehen.

Äquivalenzumformungen: Typ I

Vertauschung zweier Zeilen i und j ,

Äquivalenzumformungen: Typ I

Vertauschung zweier Zeilen i und j ,

wird geleistet mit der Multiplikation von links mit der *Permutationsmatrix*

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} E_{i-1} & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & E_{j-i-1} & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & E_{m-i} \end{pmatrix}.$$

Äquivalenzumformungen: Typ I

Vertauschung zweier Zeilen i und j ,
wird geleistet mit der Multiplikation von links mit der
Permutationsmatrix

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} E_{i-1} & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & E_{j-i-1} & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & E_{m-i} \end{pmatrix}.$$

Anders ausgedrückt: In der Einheitsmatrix wird $d_{ii}, d_{jj} = 0$ gesetzt
sowie $d_{ij} = d_{ji} = 1$.

Äquivalenzumformungen: Typ I

Vertauschung zweier Zeilen i und j ,
wird geleistet mit der Multiplikation von links mit der
Permutationsmatrix

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} E_{i-1} & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & E_{j-i-1} & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & E_{m-i} \end{pmatrix}.$$

Anders ausgedrückt: In der Einheitsmatrix wird $d_{ii}, d_{jj} = 0$ gesetzt
sowie $d_{ji} = d_{ij} = 1$.

P_{ij} ist regulär, weil die Spalten von P_{ij} aus den kanonischen
Einheitsvektoren bestehen.

Äquivalenzumformungen: Typ II

Addition des α -fachen der Zeile j auf die Zeile $i > j$,

Äquivalenzumformungen: Typ II

Addition des α -fachen der Zeile j auf die Zeile $i > j$,
wird geleistet durch Multiplikation von links mit der Matrix

$$G_{ij,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha \text{ an Position } i,j.$$

Äquivalenzumformungen: Typ II

Addition des α -fachen der Zeile j auf die Zeile $i > j$,
wird geleistet durch Multiplikation von links mit der Matrix

$$G_{ij,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha \text{ an Position } i,j.$$

Als linke untere Dreiecksmatrix mit nichtverschwindenden Diagonalelementen ist $G_{ij,\alpha}$ nach einem Lemma regulär.

Äquivalenzumformungen: Typ II

Addition des α -fachen der Zeile j auf die Zeile $i > j$,
wird geleistet durch Multiplikation von links mit der Matrix

$$G_{ij,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha \text{ an Position } i,j.$$

Als linke untere Dreiecksmatrix mit nichtverschwindenden Diagonalelementen ist $G_{ij,\alpha}$ nach einem Lemma regulär.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \alpha + 11 & 2\alpha + 12 \end{pmatrix}$$

Gauß-Algorithmus

Wir erläutern den Gauß-Algorithmus an Hand des Beispiels in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Gauß-Algorithmus

Wir erläutern den Gauß-Algorithmus an Hand des Beispiels in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen simultan die beiden Gleichungssysteme

$$Ax_1 = b_1, \quad Ax_2 = b_2$$

lösen.

Gauß-Algorithmus

Wir erläutern den Gauß-Algorithmus an Hand des Beispiels in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen simultan die beiden Gleichungssysteme

$$Ax_1 = b_1, \quad Ax_2 = b_2$$

lösen.

Zur Durchführung des Gauß-Algorithmus schreiben wir die um die rechten Seiten erweiterte Matrix $(A|b_1|b_2) \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$ auf:

1. Spalte bearbeiten

$$(A|b_1|b_2) = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{array} \right).$$

1. Spalte bearbeiten

$$(A|b_1|b_2) = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{array} \right).$$

Wir nehmen uns Spalte für Spalte vor, um im unteren Bereich der Spalte möglichst viele Nullen zu produzieren.

1. Spalte bearbeiten

$$(A|b_1|b_2) = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{array} \right).$$

Wir nehmen uns Spalte für Spalte vor, um im unteren Bereich der Spalte möglichst viele Nullen zu produzieren.

Ist eine Spalte komplett Null, gehen wir zur nächsten über.

1. Spalte bearbeiten

$$(A|b_1|b_2) = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{array} \right).$$

Wir nehmen uns Spalte für Spalte vor, um im unteren Bereich der Spalte möglichst viele Nullen zu produzieren.

Ist eine Spalte komplett Null, gehen wir zur nächsten über.

Für die erste Spalte bedeutet diese Vorgehensweise, dass nach erfolgter Umformung höchstens $a_{11} \neq 0$ ist.

1. Spalte bearbeiten

$$(A|b_1|b_2) = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{array} \right).$$

Wir nehmen uns Spalte für Spalte vor, um im unteren Bereich der Spalte möglichst viele Nullen zu produzieren.

Ist eine Spalte komplett Null, gehen wir zur nächsten über.

Für die erste Spalte bedeutet diese Vorgehensweise, dass nach erfolgter Umformung höchstens $a_{11} \neq 0$ ist.

In unserem konkreten Fall müssen wir Zeile 2 oder Zeile 3 mit Zeile 1 vertauschen.

1. Spalte bearbeiten

$$(A|b_1|b_2) = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{array} \right).$$

In einem endlichen Körper wäre es gleichgültig, welche Zeile wir vertauschen.

1. Spalte bearbeiten

$$(A|b_1|b_2) = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{array} \right).$$

In einem endlichen Körper wäre es gleichgültig, welche Zeile wir vertauschen.

Bei Rechnung in \mathbb{R} oder \mathbb{C} durch ein Computerprogramm fallen Rundungsfehler an.

1. Spalte bearbeiten

$$(A|b_1|b_2) = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{array} \right).$$

In einem endlichen Körper wäre es gleichgültig, welche Zeile wir vertauschen.

Bei Rechnung in \mathbb{R} oder \mathbb{C} durch ein Computerprogramm fallen Rundungsfehler an.

In diesem Fall soll man das betragsmäßig größte Element der Spalte nach oben bringen. Wir tun das auch hier (=Typ I) und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \end{array} \right)$$

Nach Vertauschung der Zeilen 2 und 3 kommt die Elimination

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \end{array} \right).$$

Im nächsten Schritt ziehen wir das $1/2$ -fache der ersten Zeile von der zweiten ab (=Typ II).

Nach Vertauschung der Zeilen 2 und 3 kommt die Elimination

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \end{array} \right).$$

Im nächsten Schritt ziehen wir das 1/2-fache der ersten Zeile von der zweiten ab (=Typ II).

Weil man das betragsgrößte Element zur Elimination genommen hat, hält man die Elemente klein, die auf die zweite Zeile addiert werden.

2. Spalte bearbeiten

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

Da man die Nullen in der ersten Spalte erhalten möchte, wird nun mit dem zweiten Element in der zweiten Spalte eliminiert.

2. Spalte bearbeiten

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

Da man die Nullen in der ersten Spalte erhalten möchte, wird nun mit dem zweiten Element in der zweiten Spalte eliminiert.

Auch hier vertauschen wir die Zeile 2 mit 3, um das betragsgrößte Element nach oben zu bringen.

2. Spalte bearbeiten

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

Da man die Nullen in der ersten Spalte erhalten möchte, wird nun mit dem zweiten Element in der zweiten Spalte eliminiert.

Auch hier vertauschen wir die Zeile 2 mit 3, um das betragsgrößte Element nach oben zu bringen.

Schließlich wird die zweite Spalte eliminiert, indem das $-1/2$ -fache der zweiten Zeile auf die dritte Zeile addiert wird.

2. Spalte bearbeiten

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 5 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Schließlich wird die zweite Spalte eliminiert, indem das $-1/2$ -fache der zweiten Zeile auf die dritte Zeile addiert wird.

2. Spalte bearbeiten

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 5 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Schließlich wird die zweite Spalte eliminiert, indem das $-1/2$ -fache der zweiten Zeile auf die dritte Zeile addiert wird.

Da in der neuen Matrix $a_{33} = 0$ gilt, besitzt die Matrix nur Rang 2 und die beiden ersten Spalten bilden eine Basis des Bildes.

Bestimmung der Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Für das LGS $Ax_1 = b_1$ liegt die rechte Seite im Bild der ersten beiden Spaltenvektoren. Wir können daher $x_{1,3} = 0$ setzen und erhalten mit $x_{1,2} = x_{1,2} = 1$ eine Lösung.

Bestimmung der Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Bestimmung der Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Wegen $\text{rang } A = 2$ ist $\dim \text{Kern} = 1$.

Bestimmung der Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Wegen $\text{rang } A = 2$ ist $\dim \text{Kern} = 1$.

Da die dritte Spalte von den ersten beiden abhängig ist, gilt
 $a_3 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$.

Bestimmung der Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Wegen $\text{rang } A = 2$ ist $\dim \text{Kern} = 1$.

Da die dritte Spalte von den ersten beiden abhängig ist, gilt
 $a_3 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$.

Wir finden daher eine Kernfunktion, indem wir mit $y_{h,3} = 1$ eine Lösung des homogenen Problems $Ay_h = 0$ bestimmen.

Bestimmung der Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Wegen $\text{rang } A = 2$ ist $\dim \text{Kern} = 1$.

Da die dritte Spalte von den ersten beiden abhängig ist, gilt
 $a_3 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$.

Wir finden daher eine Kernfunktion, indem wir mit $y_{h,3} = 1$ eine Lösung des homogenen Problems $Ay_h = 0$ bestimmen.

Aus der zweiten Gleichung (mit rechter Seite 0) folgt $y_{h,2} = -2$ und aus der ersten schließlich $y_{h,1} = 4$. Der Lösungsraum ist daher

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$Ax_2 = b_2$ ist unlösbar

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Rang von ZSF-Matrizen

Satz Für eine ZSF-Matrix $Z \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt

$\text{rang } Z = \text{Anzahl der Zeilen mit nichtverschwindenden Elementen.}$

Beweis

Wir streichen aus Z alle Zeilen, die aus lauter Nullen bestehen.

Beweis

Wir streichen aus Z alle Zeilen, die aus lauter Nullen bestehen.

Es verbleibt eine Matrix $Z' \in \mathbb{K}^{r \times n}$, die den gleichen Rang wie Z besitzt.

Wir streichen aus Z alle Zeilen, die aus lauter Nullen bestehen.

Es verbleibt eine Matrix $Z' \in \mathbb{K}^{r \times n}$, die den gleichen Rang wie Z besitzt.

Aus den Spalten von Z' wählen wir diejenigen aus, die ein nichtverschwindendes Element in einer Zeile haben, das führend in dieser Zeile ist.

Beweis

Wir streichen aus Z alle Zeilen, die aus lauter Nullen bestehen.

Es verbleibt eine Matrix $Z' \in \mathbb{K}^{r \times n}$, die den gleichen Rang wie Z besitzt.

Aus den Spalten von Z' wählen wir diejenigen aus, die ein nichtverschwindendes Element in einer Zeile haben, das führend in dieser Zeile ist.

Die zugehörige Zeile ist von der Form

$$(0, \dots, 0, *, a, \dots, a).$$

Beweis

Wir streichen aus Z alle Zeilen, die aus lauter Nullen bestehen.

Es verbleibt eine Matrix $Z' \in \mathbb{K}^{r \times n}$, die den gleichen Rang wie Z besitzt.

Aus den Spalten von Z' wählen wir diejenigen aus, die ein nichtverschwindendes Element in einer Zeile haben, das führend in dieser Zeile ist.

Die zugehörige Zeile ist von der Form

$$(0, \dots, 0, *, a, \dots, a).$$

$*$ ist dann das führende Element und die zugehörige Spalte wird ausgewählt.

Die zugehörige Zeile ist von der Form

$$(0, \dots, 0, *, a, \dots, a).$$

* ist dann das führende Element und die zugehörige Spalte wird ausgewählt.

Die zugehörige Zeile ist von der Form

$$(0, \dots, 0, *, a, \dots, a).$$

$*$ ist dann das führende Element und die zugehörige Spalte wird ausgewählt.

Es entsteht eine $(r \times r)$ -Matrix Z'' , die eine rechte obere Dreiecksmatrix ist mit nichtverschwindenden Elementen in der Hauptdiagonalen.

Die zugehörige Zeile ist von der Form

$$(0, \dots, 0, *, a, \dots, a).$$

$*$ ist dann das führende Element und die zugehörige Spalte wird ausgewählt.

Es entsteht eine $(r \times r)$ -Matrix Z'' , die eine rechte obere Dreiecksmatrix ist mit nichtverschwindenden Elementen in der Hauptdiagonalen.

Diese Matrix ist regulär, also ist $\text{rang } Z' \geq r$.

Die zugehörige Zeile ist von der Form

$$(0, \dots, 0, *, a, \dots, a).$$

$*$ ist dann das führende Element und die zugehörige Spalte wird ausgewählt.

Es entsteht eine $(r \times r)$ -Matrix Z'' , die eine rechte obere Dreiecksmatrix ist mit nichtverschwindenden Elementen in der Hauptdiagonalen.

Diese Matrix ist regulär, also ist $\text{rang } Z' \geq r$.

Die $(r \times n)$ -Matrix Z' kann aber höchstens Rang r haben, also ist $\text{rang } Z' = r$.

Beispiel

Wir betrachten in \mathbb{Z}_2 das lineare Gleichungssystem

$$Zx = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Z'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Wir betrachten in \mathbb{Z}_2 das lineare Gleichungssystem

$$Zx = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Z'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Hier liegt die Systemmatrix Z bereits in ZSF vor, rechts ist die Matrix Z'' aus dem Beweis des letzten Satzes angegeben, zusammen mit der Spaltennummer, die jeder Spaltenvektor in Z besitzt.

Beispiel

$$Zx = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Z'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Spalten der Matrix Z'' bilden eine Basis des Bildes.

Beispiel

$$Zx = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Z'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Spalten der Matrix Z'' bilden eine Basis des Bildes.

Im Allgemeinen ist das LGS bereits durch eine Linearkombination der Spalten von Z'' lösbar oder überhaupt unlösbar.

Beispiel

$$Zx = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Z'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Spalten der Matrix Z'' bilden eine Basis des Bildes.

Im Allgemeinen ist das LGS bereits durch eine Linearkombination der Spalten von Z'' lösbar oder überhaupt unlösbar.

Im vorliegenden Fall ist $\text{rang } Z = \text{rang } Z'' = 3$. Wir haben also Vollrang und das LGS ist für jede rechte Seite lösbar.

Beispiel

$$Zx = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Z'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Spalten der Matrix Z'' bilden eine Basis des Bildes.

Im Allgemeinen ist das LGS bereits durch eine Linearkombination der Spalten von Z'' lösbar oder überhaupt unlösbar.

Im vorliegenden Fall ist $\text{rang } Z = \text{rang } Z'' = 3$. Wir haben also Vollrang und das LGS ist für jede rechte Seite lösbar.

Das LGS $Z''y = b$ besitzt die eindeutige Lösung $y = (0, 1, 1)^T$.

Beispiel

$$Zx = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Z'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Spalten der Matrix Z'' bilden eine Basis des Bildes.

Im Allgemeinen ist das LGS bereits durch eine Linearkombination der Spalten von Z'' lösbar oder überhaupt unlösbar.

Im vorliegenden Fall ist $\text{rang } Z = \text{rang } Z'' = 3$. Wir haben also Vollrang und das LGS ist für jede rechte Seite lösbar.

Das LGS $Z''y = b$ besitzt die eindeutige Lösung $y = (0, 1, 1)^T$.

Wir müssen nun noch beachten, zu welchen Spalten von Z die Komponenten dieses Vektors gehören, und wir erhalten mit $x = (0, 0, 1, 1, 0, 0)^T$ eine Lösung von $Zx = b$.

Beispiel

$$Zx = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Z'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Nach der Rangformel benötigen wir drei linear unabhängige Kernfunktionen, die wir den Spaltenindizes von Z zuordnen, die nicht in Z'' auftreten.

Beispiel

$$Zx = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Z'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Nach der Rangformel benötigen wir drei linear unabhängige Kernfunktionen, die wir den Spaltenindizes von Z zuordnen, die nicht in Z'' auftreten.

In unserem Fall sind das 2, 5, 6.

Beispiel

$$Zx = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Z'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Nach der Rangformel benötigen wir drei linear unabhängige Kernfunktionen, die wir den Spaltenindizes von Z zuordnen, die nicht in Z'' auftreten.

In unserem Fall sind das 2, 5, 6.

Wir garantieren die lineare Unabhängigkeit der Kernfunktionen, indem wir eine dieser Komponenten = 1 setzen und die anderen = 0.

Beispiel

$$Zx = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Z'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Nach der Rangformel benötigen wir drei linear unabhängige Kernfunktionen, die wir den Spaltenindizes von Z zuordnen, die nicht in Z'' auftreten.

In unserem Fall sind das 2, 5, 6.

Wir garantieren die lineare Unabhängigkeit der Kernfunktionen, indem wir eine dieser Komponenten = 1 setzen und die anderen = 0.

Wir bringen die zugehörige Spalte von Z auf die andere Seite und lösen dann $Z''y_i = -z_i$ für $i = 2, 5, 6$.

Beispiel

$$Zx = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Z'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Wir bringen die zugehörige Spalte von Z auf die andere Seite und lösen dann $Z''y_i = -z_i$ für $i = 2, 5, 6$.

Beispiel

$$Zx = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Z'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Wir bringen die zugehörige Spalte von Z auf die andere Seite und lösen dann $Z''y_i = -z_i$ für $i = 2, 5, 6$.

Damit haben wir die rechten Seiten und Lösungen (man beachte $1 + 1 = 0$)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow y_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel

$$Zx = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Z'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow y_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel

$$Zx = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Z'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow y_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt erhalten wir die Lösungsmenge

$$\left\{ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

Testen auf linear Unabhängigkeit, Rangbestimmung

Sind die Vektoren

$$v_1, \dots, v_k \in \mathbb{K}^m$$

linear unabhängig?

Testen auf linear Unabhängigkeit, Rangbestimmung

Sind die Vektoren

$$v_1, \dots, v_k \in \mathbb{K}^m$$

linear unabhängig?

Wir stellen sie zu einer $(m \times k)$ -Matrix

$$V = (v_1 | v_2 | \dots | v_k)$$

zusammen.

Testen auf linear Unabhängigkeit, Rangbestimmung

Sind die Vektoren

$$v_1, \dots, v_k \in \mathbb{K}^m$$

linear unabhängig?

Wir stellen sie zu einer $(m \times k)$ -Matrix

$$V = (v_1 | v_2 | \dots | v_k)$$

zusammen.

Wir bringen sie auf ZSF und bestimmen den Rang der zugehörigen ZSF-Matrix mit dem letzten Satz.

Inverse einer Matrix

Wollen zur Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Inverse A^{-1} bestimmen.

Inverse einer Matrix

Wollen zur Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Inverse A^{-1} bestimmen.

Führen den simultanen Gauß-Algorithmus mit Matrix A und rechten Seiten e_1, \dots, e_n durch.

Inverse einer Matrix

Wollen zur Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Inverse A^{-1} bestimmen.

Führen den simultanen Gauß-Algorithmus mit Matrix A und rechten Seiten e_1, \dots, e_n durch.

Die Lösungen v_i mit $Av_i = e_i$ stellen wir (wie immer als Spaltenvektoren) zur Matrix

$$A^{-1} = (v_1 | \dots | v_n)$$

zusammen.

Inverse einer Matrix

Wollen zur Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Inverse A^{-1} bestimmen.

Führen den simultanen Gauß-Algorithmus mit Matrix A und rechten Seiten e_1, \dots, e_n durch.

Die Lösungen v_i mit $Av_i = e_i$ stellen wir (wie immer als Spaltenvektoren) zur Matrix

$$A^{-1} = (v_1 | \dots | v_n)$$

zusammen.

Wie man aus der Regel Zeile mal Spalte erkennt, gilt nun in der Tat

$$AA^{-1} = E_n.$$

Zeilenrang=Spaltenrang

Wir bringen eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ auf ZSF, $Z = BA$ mit einer regulären $(m \times m)$ -Matrix B .

Zeilenrang=Spaltenrang

Wir bringen eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ auf ZSF, $Z = BA$ mit einer regulären $(m \times m)$ -Matrix B .

$$Z = \begin{pmatrix} * & a & a & a & a \\ 0 & 0 & * & a & a \\ 0 & 0 & 0 & * & a \end{pmatrix} \longrightarrow Z' = ZC = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix}$$

In der Beispielmatrix links bezeichnen die Sterne Elemente ungleich 0, die mit a bezeichneten Elemente sind beliebig.

Zeilenrang=Spaltenrang

Wir bringen eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ auf ZSF, $Z = BA$ mit einer regulären $(m \times m)$ -Matrix B .

$$Z = \begin{pmatrix} * & a & a & a & a \\ 0 & 0 & * & a & a \\ 0 & 0 & 0 & * & a \end{pmatrix} \longrightarrow Z' = ZC = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix}$$

In der Beispielmatrix links bezeichnen die Sterne Elemente ungleich 0, die mit a bezeichneten Elemente sind beliebig.

Wir arbeiten nun zeilenweise von oben nach unten und beginnen mit der ersten Zeile. Durch Addition eines Vielfachen der ersten Spalte auf die zweite Spalte erzielen wir auf der Position $(1, 2)$ eine Null.

Zeilenrang=Spaltenrang

Wir bringen eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ auf ZSF, $Z = BA$ mit einer regulären $(m \times m)$ -Matrix B .

$$Z = \begin{pmatrix} * & a & a & a & a \\ 0 & 0 & * & a & a \\ 0 & 0 & 0 & * & a \end{pmatrix} \longrightarrow Z' = ZC = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix}$$

In der Beispielmatrix links bezeichnen die Sterne Elemente ungleich 0, die mit a bezeichneten Elemente sind beliebig.

Wir arbeiten nun zeilenweise von oben nach unten und beginnen mit der ersten Zeile. Durch Addition eines Vielfachen der ersten Spalte auf die zweite Spalte erzielen wir auf der Position $(1, 2)$ eine Null.

Dies ist aber gleichbedeutend mit der Multiplikation einer Matrix vom Typ II von rechts.

Zeilenrang=Spaltenrang

$$Z = \begin{pmatrix} * & a & a & a & a \\ 0 & 0 & * & a & a \\ 0 & 0 & 0 & * & a \end{pmatrix} \longrightarrow Z' = ZC = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix}$$

Auf diese Weise erzeugen wir lauter Nullen rechts von * in der ersten Zeile.

Zeilenrang=Spaltenrang

$$Z = \begin{pmatrix} * & a & a & a & a \\ 0 & 0 & * & a & a \\ 0 & 0 & 0 & * & a \end{pmatrix} \longrightarrow Z' = ZC = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix}$$

Auf diese Weise erzeugen wir lauter Nullen rechts von $*$ in der ersten Zeile.

Für die übrigen Zeilen verfahren wir genauso und erhalten schließlich die Matrix Z' rechts.

Zeilenrang=Spaltenrang

$$Z = \begin{pmatrix} * & a & a & a & a \\ 0 & 0 & * & a & a \\ 0 & 0 & 0 & * & a \end{pmatrix} \longrightarrow Z' = ZC = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix}$$

Auf diese Weise erzeugen wir lauter Nullen rechts von $*$ in der ersten Zeile.

Für die übrigen Zeilen verfahren wir genauso und erhalten schließlich die Matrix Z' rechts.

Es gilt $Z' = ZC = BAC$ mit regulären Matrizen B, C , Nach einem Satz haben Z' und A den gleichen Rang.

Zeilenrang=Spaltenrang

$$Z = \begin{pmatrix} * & a & a & a & a \\ 0 & 0 & * & a & a \\ 0 & 0 & 0 & * & a \end{pmatrix} \longrightarrow Z' = ZC = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix}$$

Auf diese Weise erzeugen wir lauter Nullen rechts von $*$ in der ersten Zeile.

Für die übrigen Zeilen verfahren wir genauso und erhalten schließlich die Matrix Z' rechts.

Es gilt $Z' = ZC = BAC$ mit regulären Matrizen B, C , Nach einem Satz haben Z' und A den gleichen Rang.

Die Matrix Z'^T hat ebenfalls ZSF.

Zeilenrang=Spaltenrang

$$Z = \begin{pmatrix} * & a & a & a & a \\ 0 & 0 & * & a & a \\ 0 & 0 & 0 & * & a \end{pmatrix} \longrightarrow Z' = ZC = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix}$$

Auf diese Weise erzeugen wir lauter Nullen rechts von $*$ in der ersten Zeile.

Für die übrigen Zeilen verfahren wir genauso und erhalten schließlich die Matrix Z' rechts.

Es gilt $Z' = ZC = BAC$ mit regulären Matrizen B, C , Nach einem Satz haben Z' und A den gleichen Rang.

Die Matrix Z'^T hat ebenfalls ZSF.

Wende den Satz über den Rang von ZSF-Matrizen an!

Zeilenrang=Spaltenrang

Satz Für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt

$\text{rang } A = \text{Anzahl der l.u. Zeilen von } A = \text{Zeilenrang von } A,$

oder anders ausgedrückt $\text{rang } A = \text{rang } A^T.$

7.4 Permutationen

Eine *Permutation* π ist eine bijektive Abbildung der Menge $\{1, \dots, n\}$ auf sich selbst.

7.4 Permutationen

Eine *Permutation* π ist eine bijektive Abbildung der Menge $\{1, \dots, n\}$ auf sich selbst.

Statt $\pi(i) = a_i \in \{1, \dots, n\}$ schreiben wir kürzer (a_1, a_2, \dots, a_n) .

7.4 Permutationen

Eine *Permutation* π ist eine bijektive Abbildung der Menge $\{1, \dots, n\}$ auf sich selbst.

Statt $\pi(i) = a_i \in \{1, \dots, n\}$ schreiben wir kürzer (a_1, a_2, \dots, a_n) .

Beispielsweise wird die Permutation $\pi(1) = 2, \pi(2) = 3, \pi(3) = 1$ kurz $(2, 3, 1)$ geschrieben.

Elementare Permutation

Die Vertauschung zweier benachbarter Fächer nennen wir eine elementare Permutation.

Elementare Permutation

Die Vertauschung zweier benachbarter Fächer nennen wir eine elementare Permutation.

Jede Permutation lässt sich durch eine Folge elementarer Permutationen aus der Identität $(1, 2, \dots, n)$ erzeugen.

Elementare Permutation

Die Vertauschung zweier benachbarter Fächer nennen wir eine elementare Permutation.

Jede Permutation lässt sich durch eine Folge elementarer Permutationen aus der Identität $(1, 2, \dots, n)$ erzeugen.

Wir bringen als erstes das Element a_1 an die erste Position und verfahren mit den folgenden Elementen genauso.

Elementare Permutation

Die Vertauschung zweier benachbarter Fächer nennen wir eine elementare Permutation.

Jede Permutation lässt sich durch eine Folge elementarer Permutationen aus der Identität $(1, 2, \dots, n)$ erzeugen.

Wir bringen als erstes das Element a_1 an die erste Position und verfahren mit den folgenden Elementen genauso.

Beispielsweise erzeugen wir $(2, 4, 1, 3)$ durch

$$(1, 2, 3, 4) \rightarrow (2, 1, 3, 4) \rightarrow (2, 1, 4, 3) \rightarrow (2, 4, 1, 3).$$

Fehlstellen einer Permutation

Die Anzahl der *Fehlstellen* einer Permutation π ist

$$F(\pi) = |\{(i, j) : i < j \text{ und } \pi(i) > \pi(j) \text{ für } 1 \leq i < j \leq n\}|$$

Fehlstellen einer Permutation

Die Anzahl der *Fehlstellen* einer Permutation π ist

$$F(\pi) = |\{(i, j) : i < j \text{ und } \pi(i) > \pi(j) \text{ für } 1 \leq i < j \leq n\}|$$

Wie immer bezeichnen wir mit $|M|$ die Kardinalität der Menge M .

Fehlstellen einer Permutation

Die Anzahl der *Fehlstellen* einer Permutation π ist

$$F(\pi) = |\{(i, j) : i < j \text{ und } \pi(i) > \pi(j) \text{ für } 1 \leq i < j \leq n\}|$$

Wie immer bezeichnen wir mit $|M|$ die Kardinalität der Menge M .

Beispiel

$$F((1, 2, \dots, n)) = 0, \quad F((n, n-1, \dots, 1)) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

Signum oder Vorzeichen einer Permutation

Das *Signum* oder *Vorzeichen* einer Permutation π ist

$$\text{sign}(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } F(\pi) \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } F(\pi) \text{ ungerade} \end{cases} .$$

Signum oder Vorzeichen einer Permutation

Das *Signum* oder *Vorzeichen* einer Permutation π ist

$$\text{sign}(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } F(\pi) \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } F(\pi) \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Wir nennen eine Permutation gerade, wenn $\text{sign}(\pi) = 1$, andernfalls ungerade.

Signum oder Vorzeichen einer Permutation

Jede Permutation lässt sich auf vielfältige Weise durch Hintereinanderschaltung von einfachen Permutationen, bei denen nur $\pi(i)$ und $\pi(j)$ vertauscht werden, aus der Identität erzeugen.

Signum oder Vorzeichen einer Permutation

Jede Permutation lässt sich auf vielfältige Weise durch Hintereinanderschaltung von einfachen Permutationen, bei denen nur $\pi(i)$ und $\pi(j)$ vertauscht werden, aus der Identität erzeugen.

Bei einer geraden Permutation brauchen wir immer eine gerade Zahl von einfachen Permutationen, um sie zu erzeugen.

Signum oder Vorzeichen einer Permutation

Jede Permutation lässt sich auf vielfältige Weise durch Hintereinanderschaltung von einfachen Permutationen, bei denen nur $\pi(i)$ und $\pi(j)$ vertauscht werden, aus der Identität erzeugen.

Bei einer geraden Permutation brauchen wir immer eine gerade Zahl von einfachen Permutationen, um sie zu erzeugen.

Jede einfache Permutation lässt sich nur durch eine ungerade Zahl von elementaren Permutationen erzeugen.

Signum oder Vorzeichen einer Permutation

Jede Permutation lässt sich auf vielfältige Weise durch Hintereinanderschaltung von einfachen Permutationen, bei denen nur $\pi(i)$ und $\pi(j)$ vertauscht werden, aus der Identität erzeugen.

Bei einer geraden Permutation brauchen wir immer eine gerade Zahl von einfachen Permutationen, um sie zu erzeugen.

Jede einfache Permutation lässt sich nur durch eine ungerade Zahl von elementaren Permutationen erzeugen.

Bei einer elementaren Permutation ändert sich die Anzahl der Fehlstellen um ± 1 , gleiches gilt demnach auch für eine einfache Permutation.

7.5 Determinanten

Die Determinante ist eine Abbildung $\det : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$.

7.5 Determinanten

Die Determinante ist eine Abbildung $\det : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$.

Historisch gesehen hat es verschiedene äquivalente Definitionen gegeben.

7.5 Determinanten

Die Determinante ist eine Abbildung $\det : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$.

Historisch gesehen hat es verschiedene äquivalente Definitionen gegeben.

Diese stammt von Leibniz:

$$\det A = \sum_{\pi} \operatorname{sign}(\pi) \prod_{i=1}^n a_{i \pi(i)}.$$

In jedem einzelnen Summanden kommt aus jeder Zeile und jeder Spalte der Matrix nur ein Element vor.

Determinante von (2×2) -Matrizen

Bei $n = 2$ gibt es nur zwei Permutationen, nämlich die Identität mit positivem Signum und die Vertauschung von 1 und 2 mit negativem Signum.

Determinante von (2×2) -Matrizen

Bei $n = 2$ gibt es nur zwei Permutationen, nämlich die Identität mit positivem Signum und die Vertauschung von 1 und 2 mit negativem Signum.

Daher gilt für $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Determinante von (3×3) -Matrizen

Für $n = 3$ gilt

- ▶ $(1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3)$ haben negatives Signum,
- ▶ $(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ haben positives Signum.

Determinante von (3×3) -Matrizen

Für $n = 3$ gilt

- ▶ $(1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3)$ haben negatives Signum,
- ▶ $(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ haben positives Signum.

Für eine (3×3) -Matrix gilt daher

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Determinante von Dreiecksmatrizen

Es gilt offenbar $\det E_n = 1$. Für eine rechte obere (oder linke untere) Dreiecksmatrix $R = (r_{ij})$ gilt

$$\det R = \prod_{i=1}^n r_{ii}$$

Determinante von Dreiecksmatrizen

Es gilt offenbar $\det E_n = 1$. Für eine rechte obere (oder linke untere) Dreiecksmatrix $R = (r_{ij})$ gilt

$$\det R = \prod_{i=1}^n r_{ii}$$

- ▶ nur Permutationen mit $\pi(1) = 1$ liefern nichtverschwindende Werte,

Determinante von Dreiecksmatrizen

Es gilt offenbar $\det E_n = 1$. Für eine rechte obere (oder linke untere) Dreiecksmatrix $R = (r_{ij})$ gilt

$$\det R = \prod_{i=1}^n r_{ii}$$

- ▶ nur Permutationen mit $\pi(1) = 1$ liefern nichtverschwindende Werte,
- ▶ $\pi(2) = 1$ ist durch $\pi(1)$ schon vergeben,
- ▶ bleibt also nur $\pi(2) = 2$, um etwas Nichtverschwindendes zu erreichen.

Entwicklungssatz von Laplace

Für eine $(n \times n)$ -Matrix A bezeichnen wir mit $A_{ij} \in \mathbb{K}^{(n-1) \times (n-1)}$ die Matrix, die aus A durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte hervorgeht.

Entwicklungssatz von Laplace

Für eine $(n \times n)$ -Matrix A bezeichnen wir mit $A_{ij} \in \mathbb{K}^{(n-1) \times (n-1)}$ die Matrix, die aus A durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte hervorgeht.

Satz Die Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ lässt sich mit den folgenden Formeln nach einer Zeile oder einer Spalte „entwickeln“

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad (\text{Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile})$$

Entwicklungssatz von Laplace

Für eine $(n \times n)$ -Matrix A bezeichnen wir mit $A_{ij} \in \mathbb{K}^{(n-1) \times (n-1)}$ die Matrix, die aus A durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte hervorgeht.

Satz Die Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ lässt sich mit den folgenden Formeln nach einer Zeile oder einer Spalte „entwickeln“

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad (\text{Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile})$$

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad (\text{Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte}).$$

Beweis

Ein richtiger Satz ist das eigentlich nicht: Man stellt in der Leibnizschen Definition der Determinante nur fest, in welchen Summanden das Element a_{ij} vorkommt.

Beweis

Ein richtiger Satz ist das eigentlich nicht: Man stellt in der Leibnizschen Definition der Determinante nur fest, in welchen Summanden das Element a_{ij} vorkommt.

Der Rechenaufwand zur Berechnung der Determinante nach der Laplace-Formel ist genauso gewaltig wie nach der Definition.

Beispiel $n = 3$

Für $n = 3$ erhalten wir bei Entwicklung nach der ersten Spalte

$$\det A = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Beispiel $n = 3$

Für $n = 3$ erhalten wir bei Entwicklung nach der ersten Spalte

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) \\ &\quad + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}).\end{aligned}$$

Alternierende Multilinearform

Satz Die Determinante ist eine *alternierende Multilinearform* in den Spalten von A . Das heißt:

Alternierende Multilinearform

Satz Die Determinante ist eine *alternierende Multilinearform* in den Spalten von A . Das heißt:

(a) Ist $b \in \mathbb{K}^{n,1}$ ein beliebiger Spaltenvektor, so gilt

$$\det(a_1 | \dots | a_{i-1} | a_i + b | a_{i+1} | \dots) = \det A + \det(a_1 | \dots | a_{i-1} | b | a_{i+1} | \dots).$$

Alternierende Multilinearform

Satz Die Determinante ist eine *alternierende Multilinearform* in den Spalten von A . Das heißt:

(a) Ist $b \in \mathbb{K}^{n,1}$ ein beliebiger Spaltenvektor, so gilt

$$\det(a_1 | \dots | a_{i-1} | a_i + b | a_{i+1} | \dots) = \det A + \det(a_1 | \dots | a_{i-1} | b | a_{i+1} | \dots).$$

(b) Für $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$\det(a_1 | \dots | a_{i-1} | \alpha a_i | a_{i+1} | \dots) = \alpha \det A.$$

Alternierende Multilinearform

Satz Die Determinante ist eine *alternierende Multilinearform* in den Spalten von A . Das heißt:

(a) Ist $b \in \mathbb{K}^{n,1}$ ein beliebiger Spaltenvektor, so gilt

$$\det(a_1 | \dots | a_{i-1} | a_i + b | a_{i+1} | \dots) = \det A + \det(a_1 | \dots | a_{i-1} | b | a_{i+1} | \dots).$$

(b) Für $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$\det(a_1 | \dots | a_{i-1} | \alpha a_i | a_{i+1} | \dots) = \alpha \det A.$$

(c) Besitzt A zwei identische Spalten, so gilt $\det A = 0$.

Beweis (a)

Ist $b \in \mathbb{K}^{n,1}$ ein beliebiger Spaltenvektor, so gilt

$$\det(a_1 | \dots | a_{i-1} | a_i + b | a_{i+1} | \dots) = \det A + \det(a_1 | \dots | a_{i-1} | b | a_{i+1} | \dots).$$

Beweis (a)

Ist $b \in \mathbb{K}^{n,1}$ ein beliebiger Spaltenvektor, so gilt

$$\det(a_1 | \dots | a_{i-1} | a_i + b | a_{i+1} | \dots) = \det A + \det(a_1 | \dots | a_{i-1} | b | a_{i+1} | \dots).$$

In der Definition der Determinante kommt in jedem Summanden genau ein Element der i -ten Spalte vor.

Beweis (a)

Ist $b \in \mathbb{K}^{n,1}$ ein beliebiger Spaltenvektor, so gilt

$$\det(a_1 | \dots | a_{i-1} | a_i + b | a_{i+1} | \dots) = \det A + \det(a_1 | \dots | a_{i-1} | b | a_{i+1} | \dots).$$

In der Definition der Determinante kommt in jedem Summanden genau ein Element der i -ten Spalte vor.

Wenn also die i -te Spalte durch $a_i + b$ ersetzt wird, ist dieses Element von der Form $a_{ij} + b_j$ und kann mit dem Distributivgesetz auseinandergezogen werden.

Beweis (b)

Für $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$\det(a_1 | \dots | a_{i-1} | \alpha a_i | a_{i+1} | \dots) = \alpha \det A.$$

Wird die i -te Spalte durch αa_i ersetzt, erscheint in jedem Summanden ein αa_{ij} an Stelle von a_{ij} .

Beweis (c)

Besitzt A zwei identische Spalten, so gilt $\det A = 0$.

Beweis (c)

Besitzt A zwei identische Spalten, so gilt $\det A = 0$.

Wir verwenden Induktion über n . Für $n = 2$ ist die Behauptung richtig.

Beweis (c)

Besitzt A zwei identische Spalten, so gilt $\det A = 0$.

Wir verwenden Induktion über n . Für $n = 2$ ist die Behauptung richtig.

Für den Schluss $n \rightarrow n + 1$ entwickeln wir die Determinante mit Laplaceschen Entwicklungssatz nach der ersten Zeile.

Beweis (c)

Besitzt A zwei identische Spalten, so gilt $\det A = 0$.

Wir verwenden Induktion über n . Für $n = 2$ ist die Behauptung richtig.

Für den Schluss $n \rightarrow n + 1$ entwickeln wir die Determinante mit Laplaceschen Entwicklungssatz nach der ersten Zeile.

Enthält $A_{1,j}$ die beiden identischen Spalten, so verschwindet ihre Determinante nach Induktionsvoraussetzung.

Beweis (c)

Besitzt A zwei identische Spalten, so gilt $\det A = 0$.

Wir verwenden Induktion über n . Für $n = 2$ ist die Behauptung richtig.

Für den Schluss $n \rightarrow n + 1$ entwickeln wir die Determinante mit Laplaceschen Entwicklungssatz nach der ersten Zeile.

Enthält $A_{1,l}$ die beiden identischen Spalten, so verschwindet ihre Determinante nach Induktionsvoraussetzung.

Sind l, l' die beiden identischen Spalten, so besitzen $(-1)^{l+1} \det A_{l,1}$ und $(-1)^{l'+1} \det A_{l',1}$ entgegengesetztes Vorzeichen.

Auch multilinear in den Zeilen

Bemerkung Die Determinante ist ebenso eine alternierende Multilinearform in den Zeilen der Matrix.

Auch multilinear in den Zeilen

Bemerkung Die Determinante ist ebenso eine alternierende Multilinearform in den Zeilen der Matrix.

Die Aussagen (a)-(c) im letzten Satz bleiben richtig, wenn man das Wort Spalte durch Zeile ersetzt. Die Beweise sind genauso einfach.

Vertauschung von Zeilen oder Spalten

Bemerkung In einer alternierenden Multilinearform wechselt das Vorzeichen, wenn die Komponenten vertauscht werden. Daher der Name!

Vertauschung von Zeilen oder Spalten

Bemerkung In einer alternierenden Multilinearform wechselt das Vorzeichen, wenn die Komponenten vertauscht werden. Daher der Name!

Entsteht A' aus A durch Vertauschung zweier Zeilen oder Spalten, so gilt $\det A = -\det A'$.

Vertauschung von Zeilen oder Spalten

Bemerkung In einer alternierenden Multilinearform wechselt das Vorzeichen, wenn die Komponenten vertauscht werden. Daher der Name!

Entsteht A' aus A durch Vertauschung zweier Zeilen oder Spalten, so gilt $\det A = -\det A'$.

Zu beweisen brauchen wir dieses Prinzip nur für eine alternierende Multilinearform $a(v_1, v_2)$ in zwei Komponenten. Es gilt

$$0 = a(v_1 + v_2, v_1 + v_2) = a(v_1 + v_2, v_1) + a(v_1 + v_2, v_2)$$

Vertauschung von Zeilen oder Spalten

Bemerkung In einer alternierenden Multilinearform wechselt das Vorzeichen, wenn die Komponenten vertauscht werden. Daher der Name!

Entsteht A' aus A durch Vertauschung zweier Zeilen oder Spalten, so gilt $\det A = -\det A'$.

Zu beweisen brauchen wir dieses Prinzip nur für eine alternierende Multilinearform $a(v_1, v_2)$ in zwei Komponenten. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= a(v_1 + v_2, v_1 + v_2) = a(v_1 + v_2, v_1) + a(v_1 + v_2, v_2) \\ &= a(v_1, v_1) + a(v_2, v_1) + a(v_1, v_2) + a(v_2, v_2) = a(v_2, v_1) + a(v_1, v_2) \end{aligned}$$

Vorsicht

Man beachte, dass bei αA das α in jeder Zeile erscheint, daher

$$\det \alpha A = \alpha^n \det A.$$

Multiplikationssatz für Determinanten

Satz Für $(n \times n)$ -Matrizen A, B gilt $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Beweis

Seien $A = (a_{ik})$, $B = (b_{kj})$, $C = (c_{ij})$ mit $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$. Mit der Definition der Determinante gilt dann

$$\begin{aligned}\det AB &= \sum_{\pi} \operatorname{sign}(\pi) c_{1\pi(1)} \cdot \dots \cdot c_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi} \operatorname{sign}(\pi) \left(\sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} b_{j_1\pi(1)} \right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{j_n=1}^n a_{1j_n} b_{j_n\pi(n)} \right)\end{aligned}$$

Beweis

Seien $A = (a_{ik})$, $B = (b_{kj})$, $C = (c_{ij})$ mit $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$. Mit der Definition der Determinante gilt dann

$$\begin{aligned}\det AB &= \sum_{\pi} \operatorname{sign}(\pi) c_{1\pi(1)} \cdot \dots \cdot c_{n\pi(n)} \\&= \sum_{\pi} \operatorname{sign}(\pi) \left(\sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} b_{j_1\pi(1)} \right) \dots \left(\sum_{j_n=1}^n a_{nj_n} b_{j_n\pi(n)} \right) \\&= \sum_{\pi} \operatorname{sign}(\pi) \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq n} a_{1j_1} \dots a_{nj_n} b_{j_1\pi(1)} \dots b_{j_n\pi(n)} \\&= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq n} a_{1j_1} \dots a_{nj_n} \cdot \left[\sum_{\pi} \operatorname{sign}(\pi) b_{j_1\pi(1)} \dots b_{j_n\pi(n)} \right]\end{aligned}$$

$$\det AB = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq n} a_{1j_1} \dots a_{nj_n} \cdot \left[\sum_{\pi} \operatorname{sign}(\pi) b_{j_1 \pi(1)} \dots b_{j_n \pi(n)} \right]$$

Den Ausdruck in den eckigen Klammern können wir interpretieren als die Determinante der Matrix, die in der ersten Zeile die Zeile j_1 von B , in der zweiten Zeile die Zeile j_2 von B besitzt, oder allgemein: In der i -ten Zeile steht die Zeile j_i .

$$\det AB = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq n} a_{1j_1} \dots a_{nj_n} \cdot \left[\sum_{\pi} \operatorname{sign}(\pi) b_{j_1 \pi(1)} \dots b_{j_n \pi(n)} \right]$$

Den Ausdruck in den eckigen Klammern können wir interpretieren als die Determinante der Matrix, die in der ersten Zeile die Zeile j_1 von B , in der zweiten Zeile die Zeile j_2 von B besitzt, oder allgemein: In der i -ten Zeile steht die Zeile j_i .

Bezeichnen wir diese Matrix mit $B(j_1, \dots, j_n)$, so ist

$$\det AB = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq n} a_{1j_1} \dots a_{nj_n} \cdot \det B(j_1, \dots, j_n).$$

Beweis

$$\det AB = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq n} a_{1j_1} \dots a_{nj_n} \cdot \det B(j_1, \dots, j_n).$$

$B(j_1, \dots, j_n) = 0$, wenn Zeilen mehrfach auftreten.

Beweis

$$\det AB = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq n} a_{1j_1} \dots a_{nj_n} \cdot \det B(j_1, \dots, j_n).$$

$B(j_1, \dots, j_n) = 0$, wenn Zeilen mehrfach auftreten.

Brauchen daher nur über alle Permutationen der Zahlen $1, \dots, n$ zu summieren

$$\det AB = \sum_{\pi} a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)} \cdot \det B(\pi(1), \dots, \pi(n)).$$

Beweis

$$\det AB = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq n} a_{1j_1} \dots a_{nj_n} \cdot \det B(j_1, \dots, j_n).$$

$B(j_1, \dots, j_n) = 0$, wenn Zeilen mehrfach auftreten.

Brauchen daher nur über alle Permutationen der Zahlen $1, \dots, n$ zu summieren

$$\det AB = \sum_{\pi} a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)} \cdot \det B(\pi(1), \dots, \pi(n)).$$

Die Matrix $B(\pi(1), \dots, \pi(n))$ geht aus einer Permutation der Zeilen von B hervor. Daher

$$\det B(\pi(1), \dots, \pi(n)) = \operatorname{sign} \pi \det B.$$

Beweis

$$\det AB = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq n} a_{1j_1} \dots a_{nj_n} \cdot \det B(j_1, \dots, j_n).$$

$B(j_1, \dots, j_n) = 0$, wenn Zeilen mehrfach auftreten.

Brauchen daher nur über alle Permutationen der Zahlen $1, \dots, n$ zu summieren

$$\det AB = \sum_{\pi} a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)} \cdot \det B(\pi(1), \dots, \pi(n)).$$

Die Matrix $B(\pi(1), \dots, \pi(n))$ geht aus einer Permutation der Zeilen von B hervor. Daher

$$\det B(\pi(1), \dots, \pi(n)) = \operatorname{sign} \pi \det B.$$

$$\det AB = \sum_{\pi} a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)} \cdot \operatorname{sign} \pi \det B. = \det A \cdot \det B.$$

Korollar Für eine reguläre Matrix gilt

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Korollar Für eine reguläre Matrix gilt

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Beweis Nach der Multiplikationsformel gilt

$$1 = \det E_n = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}.$$

Berechnung der Determinante

Im Gauß-Algorithmus hatten wir die Matrix A durch eine Folge von Umformungen auf eine rechte obere Dreiecksmatrix gebracht.

Berechnung der Determinante

Im Gauß-Algorithmus hatten wir die Matrix A durch eine Folge von Umformungen auf eine rechte obere Dreiecksmatrix gebracht.

Genauer gibt es Permutationsmatrizen P_k und Eliminationsmatrizen G_k für $k = 1, \dots, n-1$ mit

$$R = G_{n-1}P_{n-1} \dots G_1P_1A.$$

Berechnung der Determinante

$$R = G_{n-1}P_{n-1} \dots G_1P_1A$$

Mit der Matrix P_k wird die k -te Zeile mit einer anderen Zeile vertauscht oder es ist $P_k = E_n$, wenn keine Vertauschung notwendig ist.

Berechnung der Determinante

$$R = G_{n-1}P_{n-1} \dots G_1P_1A$$

Mit der Matrix P_k wird die k -te Zeile mit einer anderen Zeile vertauscht oder es ist $P_k = E_n$, wenn keine Vertauschung notwendig ist.

Die Anzahl der echten Vertauschungen sei l .

Berechnung der Determinante

$$R = G_{n-1}P_{n-1} \dots G_1P_1A$$

Mit der Matrix P_k wird die k -te Zeile mit einer anderen Zeile vertauscht oder es ist $P_k = E_n$, wenn keine Vertauschung notwendig ist.

Die Anzahl der echten Vertauschungen sei l .

G_k ist ein Produkt von Matrizen $G_{ik,\alpha}$, um die k -te Spalte zu eliminieren.

Berechnung der Determinante

$$R = G_{n-1}P_{n-1} \dots G_1P_1A$$

Mit der Matrix P_k wird die k -te Zeile mit einer anderen Zeile vertauscht oder es ist $P_k = E_n$, wenn keine Vertauschung notwendig ist.

Die Anzahl der echten Vertauschungen sei l .

G_k ist ein Produkt von Matrizen $G_{ik,\alpha}$, um die k -te Spalte zu eliminieren.

Die $G_{i,k,\alpha}$ sind linke untere Dreiecksmatrizen mit lauter Einsen in der Hauptdiagonalen, daher $\det G_k = 1$.

Berechnung der Determinante

$$R = G_{n-1}P_{n-1} \dots G_1P_1A$$

Mit der Matrix P_k wird die k -te Zeile mit einer anderen Zeile vertauscht oder es ist $P_k = E_n$, wenn keine Vertauschung notwendig ist.

Die Anzahl der echten Vertauschungen sei l .

G_k ist ein Produkt von Matrizen $G_{ik,\alpha}$, um die k -te Spalte zu eliminieren.

Die $G_{i,k,\alpha}$ sind linke untere Dreiecksmatrizen mit lauter Einsen in der Hauptdiagonalen, daher $\det G_k = 1$.

Aus dem Multiplikationssatz für Determinanten folgt daher

$$\det A = (-1)^l \det R = (-1)^l \prod_{i=1}^n r_{ii}.$$

Die wichtigsten Eigenschaften der Determinante

Satz (a) Eine Matrix ist genau dann regulär, wenn $\det A \neq 0$.

Die wichtigsten Eigenschaften der Determinante

Satz (a) Eine Matrix ist genau dann regulär, wenn $\det A \neq 0$.

(b) Es gilt $\det A = \det A^T$.

Die wichtigsten Eigenschaften der Determinante

Satz (a) Eine Matrix ist genau dann regulär, wenn $\det A \neq 0$.

(b) Es gilt $\det A = \det A^T$.

(c) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so $\det \bar{A} = \overline{\det A}$.

Die wichtigsten Eigenschaften der Determinante

Satz (a) Eine Matrix ist genau dann regulär, wenn $\det A \neq 0$.

(b) Es gilt $\det A = \det A^T$.

(c) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so $\det \bar{A} = \overline{\det A}$.

(d) Entsteht A' aus A , indem zwei Zeilen oder zwei Spalten von A vertauscht werden, so gilt $\det A' = -\det A$.

Beweis

Aus

$$\det A = (-1)^I \det R$$

folgt (a).

Beweis

Aus

$$\det A = (-1)^l \det R$$

folgt (a).

Aus

$$R = G_{n-1}P_{n-1} \dots G_1P_1A$$

folgt (b) durch transponieren.

7.6 Adjunkte und Cramersche Regeln

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

7.6 Adjunkte und Cramersche Regeln

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Wie zuvor:

A_{ij} = Matrix in $\mathbb{K}^{(n-1) \times (n-1)}$, in A werden Zeile i und Spalte j gestrichen

7.6 Adjunkte und Cramersche Regeln

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Wie zuvor:

A_{ij} = Matrix in $\mathbb{K}^{(n-1) \times (n-1)}$, in A werden Zeile i und Spalte j gestrichen

Das Element

$$\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$$

heißt (i, j) -ter Komplementärwert der Matrix A .

7.6 Adjunkte und Cramersche Regeln

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Wie zuvor:

A_{ij} = Matrix in $\mathbb{K}^{(n-1) \times (n-1)}$, in A werden Zeile i und Spalte j gestrichen

Das Element

$$\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$$

heißt (i, j) -ter Komplementärwert der Matrix A .

A_{ji} ist kein Schreibfehler!

7.6 Adjunkte und Cramersche Regeln

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Wie zuvor:

A_{ij} = Matrix in $\mathbb{K}^{(n-1) \times (n-1)}$, in A werden Zeile i und Spalte j gestrichen

Das Element

$$\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$$

heißt (i, j) -ter Komplementärwert der Matrix A .

A_{ji} ist kein Schreibfehler!

Die Matrix

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \dots & \hat{a}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{a}_{n1} & \dots & \hat{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

Heißt *Komplementärmatrix* oder *Adjunkte* zu A .

\hat{A} ist „Vorform“ der Inversen

Lemma Es gilt

$$\hat{A}A = A\hat{A} = \begin{pmatrix} \det A & & \\ & \ddots & \\ & & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot E_n.$$

Beweis

Aus der Definition der \hat{a}_{jk} erhalten wir

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{a}_{jk} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{ij} \det A_{kj} = \det A'.$$

Aus der Definition der \hat{a}_{jk} erhalten wir

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{a}_{jk} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{ij} \det A_{kj} = \det A'.$$

A' geht aus A hervor, indem die k -te Zeile von A durch die i -te Zeile von A ersetzt wird. Das folgt aus dem Laplaceschen Entwicklungssatz.

Aus der Definition der \hat{a}_{jk} erhalten wir

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{a}_{jk} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{ij} \det A_{kj} = \det A'.$$

A' geht aus A hervor, indem die k -te Zeile von A durch die i -te Zeile von A ersetzt wird. Das folgt aus dem Laplaceschen Entwicklungssatz.

Für $k = i$ wurde an der Matrix nichts verändert und es gilt $\det A' = \det A$.

Aus der Definition der \hat{a}_{jk} erhalten wir

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{a}_{jk} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{ij} \det A_{kj} = \det A'.$$

A' geht aus A hervor, indem die k -te Zeile von A durch die i -te Zeile von A ersetzt wird. Das folgt aus dem Laplaceschen Entwicklungssatz.

Für $k = i$ wurde an der Matrix nichts verändert und es gilt $\det A' = \det A$.

Andernfalls besitzt A' zwei gleiche Zeilen und ihre Determinante verschwindet.

Cramersche Regeln

Satz Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär.

(a) Für die Inverse von A gilt

$$A^{-1} = \frac{\hat{A}}{\det A}.$$

Cramersche Regeln

Satz Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär.

(a) Für die Inverse von A gilt

$$A^{-1} = \frac{\hat{A}}{\det A}.$$

(b) Für die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ gilt

$$x_i = \frac{\det(a_1 | \dots | a_{i-1} | b | a_{i+1} | \dots | a_n)}{\det A}.$$

Beweis (b)

Für die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ gilt

$$x_i = \frac{\det(a_1 | \dots | a_{i-1} | b | a_{i+1} | \dots | a_n)}{\det A}.$$

Beweis (b)

Für die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ gilt

$$x_i = \frac{\det(a_1 | \dots | a_{i-1} | b | a_{i+1} | \dots | a_n)}{\det A}.$$

Es gilt

$$x = A^{-1}b = \frac{\hat{A}b}{\det A}.$$

Beweis (b)

Für die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ gilt

$$x_i = \frac{\det(a_1 | \dots | a_{i-1} | b | a_{i+1} | \dots | a_n)}{\det A}.$$

Es gilt

$$x = A^{-1}b = \frac{\hat{A}b}{\det A}.$$

Der i -te Eintrag von $\hat{A}b$ ist

$$\sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij} b_j = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} b_j \det A_{ji}.$$

Beweis (b)

Für die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ gilt

$$x_i = \frac{\det(a_1 | \dots | a_{i-1} | b | a_{i+1} | \dots | a_n)}{\det A}.$$

Es gilt

$$x = A^{-1}b = \frac{\hat{A}b}{\det A}.$$

Der i -te Eintrag von $\hat{A}b$ ist

$$\sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij} b_j = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} b_j \det A_{ji}.$$

Die letzte Summe ist gleich der behaupteten Determinante nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz.

Cramerschen Regeln

Die Cramerschen Regeln dienen theoretischen Zwecken, weil sie erlauben, die Inverse und die Lösung eines LGS geschlossen hinzuschreiben.

Cramerschen Regeln

Die Cramerschen Regeln dienen theoretischen Zwecken, weil sie erlauben, die Inverse und die Lösung eines LGS geschlossen hinzuschreiben.

Für $n > 2$ sind sie aber viel zu aufwendig.

Inverse einer (2×2) -Matrix

Für $n = 2$ bekommt man für die Inverse eine Formel, die man auswendig können sollte,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\hat{A}}{\det A} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

