2 Die natürlichen Zahlen und vollständige Induktion

Themen:

- Vollständige Induktion
- Varianten des Induktionsprinzips
- Induktion über den rekursiven Aufbau

2.1 Einführung

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

sind die *natürlichen Zahlen*.

2.1 Einführung

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

sind die *natürlichen Zahlen*.

Manche Autoren lassen die natürlichen Zahlen auch mit der Null beginnen, wir schreiben dafür

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

2.1 Einführung

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

sind die *natürlichen Zahlen*.

Manche Autoren lassen die natürlichen Zahlen auch mit der Null beginnen, wir schreiben dafür

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Die natürlichen Zahlen sind *induktiv geordnet*: Ausgehend von einem Anfang, 1 oder 0, erhält man alle natürlichen Zahlen durch den Nachfolger des Anfangs, den Nachfolger des Nachfolgers des Anfangs usw.

Vollständige Induktion – Ein Beispiel

Wir wollen die folgende Formel für die Summe der ersten n ungeraden Zahlen beweisen

$$(A_n) \quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wir wollen die folgende Formel für die Summe der ersten n ungeraden Zahlen beweisen

$$(A_n)\ \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

$n = 1:\ \ 1 = 1^2$
$n = 2:\ \ 1 + 3 = 4 = 2^2$
$n = 3:\ \ 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2.$

Vollständige Induktion – Ein Beispiel

Wir wollen die folgende Formel für die Summe der ersten n ungeraden Zahlen beweisen

$$(A_n)\ \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

$n = 1:\ 1 = 1^2$
$n = 2:\ 1 + 3 = 4 = 2^2$
$n = 3:\ 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2.$

Ein Physiker wäre damit schon zufrieden!

Prinzip der vollständigen Induktion

Wir können Aussagen $(A_1), (A_2), \ldots$ mit Hilfe des *Prinzips der vollständigen Induktion* beweisen. Dazu beweist man zwei Dinge:

(i) (A_1) (=Induktionsanfang oder Induktionsverankerung),

(ii) $(A_n) \;\Rightarrow\; (A_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (=Induktionsschritt).

Wir können Aussagen $(A_1), (A_2), \ldots$ mit Hilfe des *Prinzips der vollständigen Induktion* beweisen. Dazu beweist man zwei Dinge:

(i) (A_1) (=Induktionsanfang oder Induktionsverankerung),

(ii) $(A_n) \;\Rightarrow\; (A_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (=Induktionsschritt).

Der zweite Schritt lässt sich so interpretieren: Unter der Voraussetzung, dass wir schon wissen, dass die *Induktionsvoraussetzung* (A_n) richtig ist, können wir auch die Richtigkeit von (A_{n+1}) nachweisen.

Korrektheit der vollständigen Induktion

Wir wenden den modus ponens an:

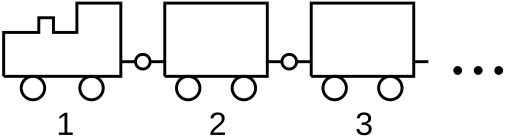
$$
\begin{array}{ll}
(A_1) & = \text{Induktionsanfang} \\
(A_1) \Rightarrow (A_2) & = \text{Induktionsschritt für } n = 1 \\
\hline
(A_2) &
\end{array}
$$

Wir wenden den modus ponens an:

$$
\begin{array}{ll}
(A_1) & = \text{Induktionsanfang} \\
(A_1) \;\Rightarrow\; (A_2) & = \text{Induktionsschritt für } n = 1 \\
\hline
(A_2) &
\end{array}
$$

Durch fortgesetzte Anwendung des modus ponens und unter Verwendung des Induktionsschritts für $n = 2, 3, \ldots$ erhält man die Wahrheit von $(A_3), (A_4), \ldots$.

Der Induktionszug



$(A_n) \Rightarrow (A_{n+1})$ bedeutet, dass Waggon $n+1$ an Waggon n gekoppelt ist. Fährt nun die Lokomotive los, so rollt der ganze Zug.

Zurück zum Beispiel

$$(A_n) \quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

(A_1) ist richtig (=Induktionsanfang).

Zurück zum Beispiel

$$(A_n) \quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

(A_1) ist richtig (=Induktionsanfang).

Induktionsschritt: Sei (A_n) richtig. Dann

$$\begin{aligned} & 1 + 3 + \ldots + (2n-1) + (2(n+1)-1) \\ & \qquad = \Big(1 + 3 + \ldots + (2n-1)\Big) + (2(n+1)-1) \end{aligned}$$

Zurück zum Beispiel

$$\begin{aligned} 1+3+\ldots+(2n-1)+(2(n+1)-1) \\ &= \big(1+3+\ldots+(2n-1)\big)+(2(n+1)-1) \end{aligned}$$

Zurück zum Beispiel

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \ldots + (2n-1) + (2(n+1)-1) \\ &= \Big(1 + 3 + \ldots + (2n-1)\Big) + (2(n+1)-1) \\ &= n^2 + (2(n+1)-1) \\ &= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2. \end{aligned}$$

Damit ist $(A_n) \Rightarrow (A_{n+1})$ bewiesen.

Langfassung des Beweises

$$
\begin{aligned}
1 &= 1^2\\
1+3 &= 4 = 2^2\\
1+3+5 &= (1+3)+5 = 4+5 = 9 = 3^2\\
1+3+5+7 &= (1+3+5)+7 = 9+7 = 16 = 4^2\\
1+3+5+7+9 &= (1+3+5+7)+9 = 16+9 = 25 = 5^2\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Im Induktionsschritt führen wir dies in einem Schritt aus.

Aufgabe

Man zeige, dass die vorletzte Ziffer von 3^n, $n \geq 1$, im Dezimalsystem geschrieben geradzahlig ist.

Aufgabe

Man zeige, dass die vorletzte Ziffer von 3^n, $n \geq 1$, im Dezimalsystem geschrieben geradzahlig ist.

Beweis: Für $n = 1$ ist das der Fall (=Induktionsanfang).

Für den Induktionsschritt ist zu bemerken, dass im Dezimalsystem 3^n auf $1, 3, 9$ oder 7 endet. Mit 3 multipliziert liefern diese Endziffern den Übertrag 0 oder 2.

Lösung

Ist also die vorletzte Ziffer von 3^n geradzahlig, so ist das Dreifache der vorletzten Ziffer ebenfalls geradzahlig.

Lösung

Ist also die vorletzte Ziffer von 3^n geradzahlig, so ist das Dreifache der vorletzten Ziffer ebenfalls geradzahlig.

Dazu kommt ein geradzahliger Übertrag von der letzten Ziffer multipliziert mit 3. Damit ist auch die vorletzte Ziffer von 3^{n+1} geradzahlig.

Aufgabe

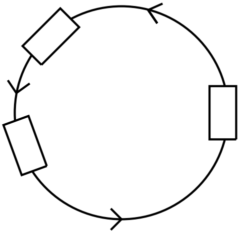
n Autos stehen auf einer Kreislinie. Die Autos besitzen zusammen so viel Benzin, um damit einmal um den Kreis herumzufahren. Zeigen Sie, dass es ein Auto gibt, das den Kreis einmal umrunden kann, wenn es das Benzin der Autos, bei denen es vorbeikommt, mitnehmen darf.

Aufgabe

n Autos stehen auf einer Kreislinie. Die Autos besitzen zusammen so viel Benzin, um damit einmal um den Kreis herumzufahren. Zeigen Sie, dass es ein Auto gibt, das den Kreis einmal umrunden kann, wenn es das Benzin der Autos, bei denen es vorbeikommt, mitnehmen darf.

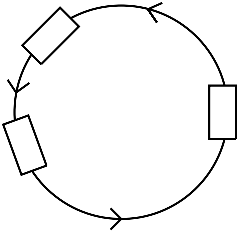
Hinweis: Der Einfachheit halber nehme man an, dass das Umrunden des Kreises eine Entfernungseinheit beträgt und dass man dazu eine Einheit Benzin benötigt. Das Auto i erhält t_i Benzin mit $\sum t_i = 1$.

Lösung



Beweis durch Induktion über n, die Zahl der Autos.

Lösung



Beweis durch Induktion über n, die Zahl der Autos.

$n = 1$: geschenkt.

Lösung

Mindestens ein Auto, sagen wir Nummer 1, erreicht mit seinem Benzin das nächste Auto; andernfalls wäre die Summe des Benzins nicht 1.

Wir entfernen dieses nächste Auto und geben sein Benzin dem Auto 1. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es nun ein Auto, das den Kreis umrunden kann. Dieses Auto kann den Kreis auch dann umrunden, wenn man die Ausgangssituation wieder herstellt.

2.2 Die Fibonacci-Zahlen

Die *Fibonacci-Zahlen* F_n sind definiert durch die Anfangsvorgaben

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1,$$

sowie durch die *Rekursion*

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

2.2 Die Fibonacci-Zahlen

Die *Fibonacci-Zahlen* F_n sind definiert durch die Anfangsvorgaben

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1,$$

sowie durch die *Rekursion*

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Jede Fibonacci-Zahl ist die Summe ihrer beiden Vorgänger:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5,\ F_6 = 8,$$

$$F_7 = 13,\ F_8 = 21,\ F_9 = 34,\ F_{10} = 55,\ F_{11} = 89,\ F_{12} = 144.$$

Modell einer Kaninchenpopulation

F_n sei die Zahl der Paare einer Kaninchenpopulation. Jedes Weibchen setzt jeden Monat ein neues Kaninchen in die Welt, das mit Verzögerung von einem Monat selbst geschlechtsreif wird.

Modell einer Kaninchenpopulation

F_n sei die Zahl der Paare einer Kaninchenpopulation. Jedes Weibchen setzt jeden Monat ein neues Kaninchen in die Welt, das mit Verzögerung von einem Monat selbst geschlechtsreif wird.

$$\begin{array}{ccccc} F_{n+1} & = & F_n & + & F_{n-1} \\ \text{Paare in } n+1 & & \text{Paare in } n & & \text{geschlechtsreife Paare in } n \end{array}$$

Wachstum einer Population

Wäre jedes Neugeborene sofort geschlechtsreif, hätten wir die Rekursion $G_{n+1} = 2G_n$, also $G_n = 2^n$.

Wachstum einer Population

Wäre jedes Neugeborene sofort geschlechtsreif, hätten wir die Rekursion $G_{n+1} = 2G_n$, also $G_n = 2^n$.

Aufgabe: Bestimme ein möglichst kleines a mit $F_n \leq a^n$.

Wachstum einer Population

Wäre jedes Neugeborene sofort geschlechtsreif, hätten wir die Rekursion $G_{n+1} = 2G_n$, also $G_n = 2^n$.

Aufgabe: Bestimme ein möglichst kleines a mit $F_n \leq a^n$.

a ist dann der Wachstumsfaktor der Population.

Wachstum der Kaninchen-Population

Idee: Zeige $F_n \leq a^n$ durch Induktion über n und benutze dabei (natürlich)

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

und die Induktionsvoraussetzung für F_n und F_{n-1}.

Idee: Zeige $F_n \leq a^n$ durch Induktion über n und benutze dabei (natürlich)

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

und die Induktionsvoraussetzung für F_n und F_{n-1}.

Der Induktionsanfang muss daher für $n = 0$ *und* $n = 1$ nachgewiesen werden.

Induktionsanfang: $0 = F_0 \leq a^0 = 1$ und $1 = F_1 \leq a^1$ ist richtig für alle $a \geq 1$.

Induktionsanfang: $0 = F_0 \leq a^0 = 1$ und $1 = F_1 \leq a^1$ ist richtig für alle $a \geq 1$.

Induktionsschritt:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \overset{IV}{\leq} a^n + a^{n-1} \overset{!}{\leq} a^{n+1}.$$

Induktionsanfang: $0 = F_0 \leq a^0 = 1$ und $1 = F_1 \leq a^1$ ist richtig für alle $a \geq 1$.

Induktionsschritt:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \overset{IV}{\leq} a^n + a^{n-1} \overset{!}{\leq} a^{n+1}.$$

Wir müssen das minimale $a > 0$ finden mit

$$a^n + a^{n-1} \leq a^{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad a + 1 \leq a^2.$$

Wachstum der Kaninchen-Population

$$a^n + a^{n-1} \leq a^{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad a + 1 \leq a^2.$$

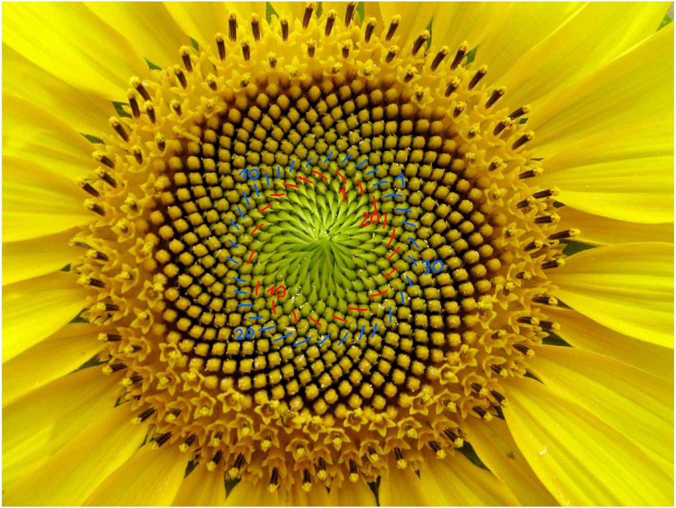
Wachstum der Kaninchen-Population

$$a^n + a^{n-1} \leq a^{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad a + 1 \leq a^2.$$

Das ist die größere der Lösungen der quadratischen Gleichung $a^2 = a + 1$, also

$$\Phi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = 1.618033\ldots,$$

Die Fibonacci-Zahlen in der Natur



34 blau
21 rot

2.3 Mächtigkeit der Potenzmenge

$\mathcal{P}(A) =$ Menge aller Teilmengen von A.

$\emptyset, A \in \mathcal{P}(A)$.

Hypothese

Bestimme die Anzahl der Teilmengen der Menge $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$!

Hypothese

Bestimme die Anzahl der Teilmengen der Menge $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$!

Klar, mit vollständige Induktion über n, aber *was* sollen wir beweisen?

Hypothese

Bestimme die Anzahl der Teilmengen der Menge $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$!

Klar, mit vollständige Induktion über n, aber *was* sollen wir beweisen?

Durch Probieren stellen wir zunächst eine Hypothese auf:

$$
\begin{array}{lll}
A_1: & \emptyset, \{1\} & 2 \\
A_2: & \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\} & 4 \\
A_3: & \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} & 8
\end{array}
$$

Die Vermutung ist also: A_n besitzt 2^n Teilmengen.

Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig (=Induktionsanfang).

Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig (=Induktionsanfang).

Sei 2^n die Anzahl der Teilmengen von A_n (=Induktionsvoraussetzung).

Strukturiere die zu zählenden Objekte, also die Teilmegen von A_{n+1}, nach dem Motto „Teile und Herrsche“:

$$\begin{aligned} \text{I}: &\quad \text{Teilmengen, die } n+1 \text{ nicht enthalten,} \\ \text{II}: &\quad \text{Teilmengen, die } n+1 \text{ enthalten.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: &\quad \text{Teilmengen, die } n+1 \text{ nicht enthalten,} \\ \mathrm{II}: &\quad \text{Teilmengen, die } n+1 \text{ enthalten.} \end{aligned}$$

Gruppe I enthält genau die Teilmengen von A_n, das sind nach Induktionsvoraussetzung 2^n.

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: &\quad \text{Teilmengen, die } n+1 \text{ nicht enthalten,} \\ \mathrm{II}: &\quad \text{Teilmengen, die } n+1 \text{ enthalten.} \end{aligned}$$

Gruppe I enthält genau die Teilmengen von A_n, das sind nach Induktionsvoraussetzung 2^n.

In den Teilmengen von Gruppe II können wir das Element $n+1$ weglassen und wir erhalten eine Teilmenge von A_n.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}: &\quad \text{Teilmengen, die } n+1 \text{ nicht enthalten,} \\
\mathrm{II}: &\quad \text{Teilmengen, die } n+1 \text{ enthalten.}
\end{aligned}
$$

Gruppe I enthält genau die Teilmengen von A_n, das sind nach Induktionsvoraussetzung 2^n.

In den Teilmengen von Gruppe II können wir das Element $n+1$ weglassen und wir erhalten eine Teilmenge von A_n.

Umgekehrt können wir jede Teilmenge von A_n durch Anfügen von $n+1$ zu einer Teilmenge von Gruppe II machen.

$$
\begin{aligned}
\text{I}: &\quad \text{Teilmengen, die } n+1 \text{ nicht enthalten,}\\
\text{II}: &\quad \text{Teilmengen, die } n+1 \text{ enthalten.}
\end{aligned}
$$

Gruppe I enthält genau die Teilmengen von A_n, das sind nach Induktionsvoraussetzung 2^n.

In den Teilmengen von Gruppe II können wir das Element $n+1$ weglassen und wir erhalten eine Teilmenge von A_n.

Umgekehrt können wir jede Teilmenge von A_n durch Anfügen von $n+1$ zu einer Teilmenge von Gruppe II machen.

Damit enthält auch Gruppe II genau 2^n Teilmengen, zusammen also $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Mächtigkeit der Potenzmenge

Satz Die Anzahl der Teilmengen einer n-elementigen Menge ist 2^n.

2.4 Permutationen und Fakultät

Eine *Permutation* von $(1, 2, \ldots, n)$ ist eine Umstellung der Zahlen $1, \ldots, n$.

2.4 Permutationen und Fakultät

Eine *Permutation* von $(1, 2, \ldots, n)$ ist eine Umstellung der Zahlen $1, \ldots, n$.

Beispielsweise besitzt $(1, 2, 3)$ die Permutationen

$$(1, 2, 3),\ (1, 3, 2),\ (2, 1, 3),\ (2, 3, 1),\ (3, 1, 2),\ (3, 2, 1).$$

Alternative Definition

Alternativ kann man die Permutationen als bijektive Abbildungen der Menge $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ in sich definieren.

Alternative Definition

Alternativ kann man die Permutationen als bijektive Abbildungen der Menge $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$ in sich definieren.

Beispielsweise gehört zur Permutation $(2, 3, 1)$ die Abbildung mit

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 1.$$

Alternative Definition

Alternativ kann man die Permutationen als bijektive Abbildungen der Menge $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$ in sich definieren.

Beispielsweise gehört zur Permutation $(2, 3, 1)$ die Abbildung mit

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 1.$$

Wir stellen uns dabei vor, dass $(\cdot, \cdot, \cdot)$ aus nummerierten Kästchen besteht, in denen wir die Werte von f hineinschreiben.

Fakultät

Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist $n!$ (gesprochen: n Fakultät) definiert durch

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Fakultät

Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist $n!$ (gesprochen: n Fakultät) definiert durch

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Die Fakultäten wachsen sehr schnell in n,

$$3! = 6, \ 4! = 24, \ 5! = 120, \ 6! = 720, \quad 20! = 2.43\ldots \times 10^{18}.$$

Fakultät

Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist $n!$ (gesprochen: n Fakultät) definiert durch

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Die Fakultäten wachsen sehr schnell in n,

$$3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120,\ 6! = 720, \quad 20! = 2.43\ldots \times 10^{18}.$$

Rein aus praktischen Gründen setzt man $0! = 1$.

Anzahl der Permutationen

Satz Die Anzahl der Permutationen von $(1, 2, \ldots, n)$ ist $n!$.

Man kann das durch vollständige Induktion über n beweisen.

Anzahl der Permutationen

Satz Die Anzahl der Permutationen von $(1, 2, \ldots, n)$ ist $n!$.

Man kann das durch vollständige Induktion über n beweisen.

Einfacher ist: Verteile die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ auf n nummerierte Kästchen.

Satz Die Anzahl der Permutationen von $(1, 2, \ldots, n)$ ist $n!$.

Man kann das durch vollständige Induktion über n beweisen.

Einfacher ist: Verteile die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ auf n nummerierte Kästchen.

Für die Zahl 1 hat man n Möglichkeiten, für die Zahl 2 sind es $n - 1$, für die letzte Zahl n verbleibt nur noch eine Möglichkeit.

2.5 Binomialkoeffizienten und binomische Formel

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sind die *Binomialkoeffizienten* folgendermaßen definiert

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{für } 0 \leq k \leq n.$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sind die *Binomialkoeffizienten* folgendermaßen definiert

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{für } 0 \leq k \leq n.$$

Spezialfälle:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1, \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1.$$

Lemma

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Beweis

Wir bringen die linke Seite auf den Hauptnenner,

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Beweis

Wir bringen die linke Seite auf den Hauptnenner,

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!\,k}{k!\,(n-k+1)!} + \frac{n!(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.$$

Pascalsches Dreieck

n=0						1					
n=1					1		1				
n=2				1		2		1			
n=3			1		3		3		1		
n=4		1		4		6		4		1	
n=5	1		5		10		10		5		1

Jede neue Zeile wird rechts und links um 1 ergänzt, was den Werten $\binom{n}{0}$ und $\binom{n}{n}$ entspricht, die übrigen Einträge erhält man aus dem Lemma, jeder Eintrag ist die Summe der links und rechts über ihm stehenden Zahlen.

Satz Die Zahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist $\binom{n}{k}$.

Beweis

Wir zeigen dies durch vollständige Induktion über n.

Beweis

Wir zeigen dies durch vollständige Induktion über n.

Für $n = 0$ ist die Behauptung richtig, denn die leere Menge enthält nur sich selbst als Teilmenge.

Beweis

Wir zeigen dies durch vollständige Induktion über n.

Für $n = 0$ ist die Behauptung richtig, denn die leere Menge enthält nur sich selbst als Teilmenge.

Die Behauptung ist auch richtig für $k = 0$ und $k = n$, in beiden Fällen haben wir nur eine Teilmenge, die leere Menge bzw. die Menge selbst.

Beweis

Wir zeigen dies durch vollständige Induktion über n.

Für $n = 0$ ist die Behauptung richtig, denn die leere Menge enthält nur sich selbst als Teilmenge.

Die Behauptung ist auch richtig für $k = 0$ und $k = n$, in beiden Fällen haben wir nur eine Teilmenge, die leere Menge bzw. die Menge selbst.

Nach dem Prinzip „Teile und Herrsche“ strukturieren wir die k-elementigen Teilmengen der Menge $A_{n+1} = \{1, 2, \dots, n+1\}$ in zwei Gruppen:

I : k-elementige Teilmengen, die $n+1$ nicht enthalten,

II : k-elementige Teilmengen, die $n+1$ enthalten.

Beweis

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: &\quad k\text{-elementige Teilmengen, die } n+1 \text{ nicht enthalten,} \\ \mathrm{II}: &\quad k\text{-elementige Teilmengen, die } n+1 \text{ enthalten.} \end{aligned}$$

Beweis

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: &\quad k\text{-elementige Teilmengen, die } n+1 \text{ nicht enthalten,} \\ \mathrm{II}: &\quad k\text{-elementige Teilmengen, die } n+1 \text{ enthalten.} \end{aligned}$$

Gruppe I besteht genau aus den k-elementigen Teilmengen der Menge A_n, nach Induktionsvoraussetzung sind das $\binom{n}{k}$.

Beweis

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: &\quad k\text{-elementige Teilmengen, die } n+1 \text{ nicht enthalten,} \\ \mathrm{II}: &\quad k\text{-elementige Teilmengen, die } n+1 \text{ enthalten.} \end{aligned}$$

Gruppe I besteht genau aus den k-elementigen Teilmengen der Menge A_n, nach Induktionsvoraussetzung sind das $\binom{n}{k}$.

In den Teilmengen der Gruppe II können wir das Element $n+1$ weglassen und erhalten eine $k-1$-elementige Teilmenge von A_n.

Beweis

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: &\quad k\text{-elementige Teilmengen, die } n+1 \text{ nicht enthalten,} \\ \mathrm{II}: &\quad k\text{-elementige Teilmengen, die } n+1 \text{ enthalten.} \end{aligned}$$

Gruppe I besteht genau aus den k-elementigen Teilmengen der Menge A_n, nach Induktionsvoraussetzung sind das $\binom{n}{k}$.

In den Teilmengen der Gruppe II können wir das Element $n+1$ weglassen und erhalten eine $k-1$-elementige Teilmenge von A_n.

Umgekehrt können wir jede $k-1$-elementige Teilmenge von A_n um das Element $n+1$ ergänzen und erhalten eine Teilmenge von Gruppe II.

Beweis

$$\begin{aligned} \text{I} &: \quad k\text{-elementige Teilmengen, die } n+1 \text{ nicht enthalten,} \\ \text{II} &: \quad k\text{-elementige Teilmengen, die } n+1 \text{ enthalten.} \end{aligned}$$

Gruppe I besteht genau aus den k-elementigen Teilmengen der Menge A_n, nach Induktionsvoraussetzung sind das $\binom{n}{k}$.

In den Teilmengen der Gruppe II können wir das Element $n+1$ weglassen und erhalten eine $k-1$-elementige Teilmenge von A_n.

Umgekehrt können wir jede $k-1$-elementige Teilmenge von A_n um das Element $n+1$ ergänzen und erhalten eine Teilmenge von Gruppe II.

Nach Induktionsvoraussetzung ist die Zahl der Teilmengen in Gruppe II gerade $\binom{n}{k-1}$.

Beweis

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: &\quad k\text{-elementige Teilmengen, die } n+1 \text{ nicht enthalten,} \\ \mathrm{II}: &\quad k\text{-elementige Teilmengen, die } n+1 \text{ enthalten.} \end{aligned}$$

Gruppe I: $\binom{n}{k}$.

Gruppe II: $\binom{n}{k-1}$.

Beweis

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: &\quad k\text{-elementige Teilmengen, die } n+1 \text{ nicht enthalten,} \\ \mathrm{II}: &\quad k\text{-elementige Teilmengen, die } n+1 \text{ enthalten.} \end{aligned}$$

Gruppe I: $\binom{n}{k}$.

Gruppe II: $\binom{n}{k-1}$.

Für die Gesamtzahl der Teilmengen gilt daher mit obigem Lemma

$$\text{Gruppe I} + \text{Gruppe II} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Beispiel Lotto

Wir bestimmen die Anzahl der 6-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 49\}$:

Beispiel Lotto

Wir bestimmen die Anzahl der 6-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 49\}$:

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\,43!} = \frac{49 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6) \cdot 47 \cdot 46 \cdot (3 \cdot 5 \cdot 3) \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$= 49 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 3 \cdot 44 = 13\,983\,816.$$

Die Wahrscheinlichkeit für sechs Richtige ist daher ungefähr 1 : 14 Millionen.

Potenzen im kommutativen Ring

Wir betrachten nun einen kommutativen Ring $(R, 0, 1, +, \cdot)$.

Potenzen im kommutativen Ring

Wir betrachten nun einen kommutativen Ring $(R, 0, 1, +, \cdot)$.

Wir definieren Potenzen

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}, \quad a^0 = 1.$$

Potenzen im kommutativen Ring

Wir betrachten nun einen kommutativen Ring $(R, 0, 1, +, \cdot)$.

Wir definieren Potenzen

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}, \quad a^0 = 1.$$

Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ gelten die Potenzgesetze

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \quad a^n b^n = (ab)^n, \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Satz Für $a, b \in R$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die *binomische Formel*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Beweis

Verwenden Induktion über n. Für $n = 0$ ist die Formel richtig wegen $a^0 = b^0 = 1$.

Beweis

Verwenden Induktion über n. Für $n = 0$ ist die Formel richtig wegen $a^0 = b^0 = 1$.

Unter der Annahme, dass sie für n richtig ist, folgt

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i+1} b^i + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1}$$

Beweis

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i+1} b^i + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1}$$

Beweis

Mit Umnummerierung erhalten wir für den ersten Summanden

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i+1} b^{i} = a^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} a^{n-i} b^{i+1}.$$

Beweis

Mit Umnummerierung erhalten wir für den ersten Summanden

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i+1} b^{i} = a^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} a^{n-i} b^{i+1}.$$

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\binom{n}{i+1} + \binom{n}{i} \right) a^{n-i} b^{i+1} + b^{n+1}.$$

2.6 Modelle

Eine konkrete Menge (mit zugehörigen ausgezeichneten Elementen, Operationen und Relationen), in der die Axiome einer mathematischen Struktur gelten, heißt *Modell* dieser Struktur.

2.6 Modelle

Eine konkrete Menge (mit zugehörigen ausgezeichneten Elementen, Operationen und Relationen), in der die Axiome einer mathematischen Struktur gelten, heißt *Modell* dieser Struktur.

Alles, was wir als Beispiele von Gruppen bezeichnet haben, sind Modelle der Gruppe. Modelle sind daher konkret. Das Axiomensystem der Gruppe definiert gleichzeitig, was eine Gruppe ist.

2.6 Modelle

Eine konkrete Menge (mit zugehörigen ausgezeichneten Elementen, Operationen und Relationen), in der die Axiome einer mathematischen Struktur gelten, heißt *Modell* dieser Struktur.

Alles, was wir als Beispiele von Gruppen bezeichnet haben, sind Modelle der Gruppe. Modelle sind daher konkret. Das Axiomensystem der Gruppe definiert gleichzeitig, was eine Gruppe ist.

In der Mathematik gibt es zwei Arten von Strukturen:

1. Strukturen mit unterschiedlichen Modellen wie Gruppen, Ringe, Körper. Diese werden durch die jeweiligen Axiome definiert, die man kennen und für die Beweise nutzen muss.

2. „Eindeutige“ Strukturen, die im Wesentlichen nur ein Modell besitzen wie etwa die natürlichen Zahlen. Diese beginnen mit einer Wurzel, meist 0 oder 1 genannt, und bestehen aus den Nachfolgern der Wurzel. Abgesehen davon, dass man den Zahlen unterschiedliche Namen geben kann, ist diese Struktur immer dieselbe.

2. „Eindeutige“ Strukturen, die im Wesentlichen nur ein Modell besitzen wie etwa die natürlichen Zahlen. Diese beginnen mit einer Wurzel, meist 0 oder 1 genannt, und bestehen aus den Nachfolgern der Wurzel. Abgesehen davon, dass man den Zahlen unterschiedliche Namen geben kann, ist diese Struktur immer dieselbe.

Es gibt keine wirklich verschiedenen Modelle wie etwa bei den Gruppen. Weitere Strukturen dieses Typs sind die ganzen, die rationalen und die reellen Zahlen, die später eingeführt werden. Hier brauchen wir eigentlich keine Axiome, es ist legitim, sich einfach auf den Standpunkt zu stellen, dass man diese Strukturen kennt.

2.7 Die Peanoschen Axiome für die natürlichen Zahlen

Die Axiome für die natürlichen Zahlen müssen so formuliert werden, dass es nur ein einziges Modell gibt – eine sportliche Herausforderung, die der Mathematiker Giuseppe Peano Ende des 19. Jahrhunderts erfolgreich angenommen hat.

In moderner Schreibweise sind die natürlichen Zahlen eine Struktur $\mathbb{N} = (N, 1, f)$ mit dem ausgezeichneten Element 1 und einer einstelligen Abbildung $f : N \to N$, die als Nachfolger interpretiert wird.

In moderner Schreibweise sind die natürlichen Zahlen eine Struktur $\mathbb{N} = (N, 1, f)$ mit dem ausgezeichneten Element 1 und einer einstelligen Abbildung $f : N \to N$, die als Nachfolger interpretiert wird.

Die Axiome sind dann

(P1) Für alle m, n: Wenn $f(m) = f(n)$, so gilt $m = n$,

(P2) Es gibt kein $n \in N$ mit $f(n) = 1$,

(P3) Für alle Teilmengen $M \subset N$ gilt:

$$\text{Ist } 1 \in M \text{ und folgt aus } n \in M \text{, dass auch } f(n) \in M, \text{ so } M = N.$$

(P1) und (P2)

(P1) Für alle m, n: Wenn $f(m) = f(n)$, so gilt $m = n$.

(P1) und (P2)

(P1) Für alle m, n: Wenn $f(m) = f(n)$, so gilt $m = n$.

f ist injektiv.

(P1) und (P2)

(P1) Für alle m, n: Wenn $f(m) = f(n)$, so gilt $m = n$.

f ist injektiv.

(P2) Es gibt kein $n \in N$ mit $f(n) = 1$.

(P1) und (P2)

(P1) Für alle m, n: Wenn $f(m) = f(n)$, so gilt $m = n$.

f ist injektiv.

(P2) Es gibt kein $n \in N$ mit $f(n) = 1$.

Insbesondere ist f nicht surjektiv.

(P1) und (P2)

(P1) Für alle m, n: Wenn $f(m) = f(n)$, so gilt $m = n$.

f ist injektiv.

(P2) Es gibt kein $n \in N$ mit $f(n) = 1$.

Insbesondere ist f nicht surjektiv.

N kann keine endliche Menge sein, weil $f : N \to N$ injektiv und nicht surjektiv sein soll.

Ein Modell von (P1) und (P2)

$$N = N_1 \cup N_2,\ N_1 = \{1, 2, 3, \ldots\},\ N_2 = \{a, b\}.$$

Ein Modell von (P1) und (P2)

$N = N_1 \cup N_2$, $N_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $N_2 = \{a, b\}$.

$f(n) = n + 1$ für $n \in N_1$, $f(a) = b$, $f(b) = a$.

Ein Modell von (P1) und (P2)

$N = N_1 \cup N_2$, $N_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $N_2 = \{a, b\}$.

$f(n) = n + 1$ für $n \in N_1$, $f(a) = b$, $f(b) = a$.

f ist injektiv, 1 ist nicht Nachfolger einer Zahl, d.h. (P1) und (P2) sind erfüllt.

Ein Modell von (P1) und (P2)

$N = N_1 \cup N_2$, $N_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $N_2 = \{a, b\}$.

$f(n) = n + 1$ für $n \in N_1$, $f(a) = b$, $f(b) = a$.

f ist injektiv, 1 ist nicht Nachfolger einer Zahl, d.h. (P1) und (P2) sind erfüllt.

Setze in (P3) $M = N_1$. Dann gilt

$$1 \in M, \quad n \in M \Rightarrow f(n) \in M,$$

aber $M \neq N$.

Ein Modell von (P1) und (P2)

$N = N_1 \cup N_2$, $N_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $N_2 = \{a, b\}$.

$f(n) = n + 1$ für $n \in N_1$, $f(a) = b$, $f(b) = a$.

f ist injektiv, 1 ist nicht Nachfolger einer Zahl, d.h. (P1) und (P2) sind erfüllt.

Setze in (P3) $M = N_1$. Dann gilt

$$1 \in M, \quad n \in M \Rightarrow f(n) \in M,$$

aber $M \neq N$.

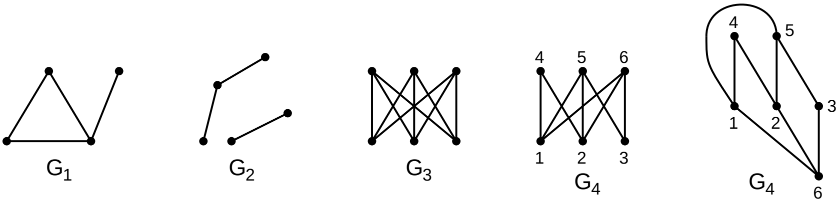
(P3) besagt daher, dass N nur aus $1, f(1), f(f(1)), \ldots$ bestehen soll. Unter allen Modellen von (P1),(P2) wird also das minimale Modell ausgewählt.

Ein *(ungerichteter) Graph* besteht aus einer *Knotenmenge V* (engl. vertex) und einer Kantenmenge E (engl. edge). Anschaulich verbindet eine Kante zwei verschiedene Knoten, wobei es auf die geometrische Form der Kanten meist nicht ankommt.

Eigenschaften von Graphen

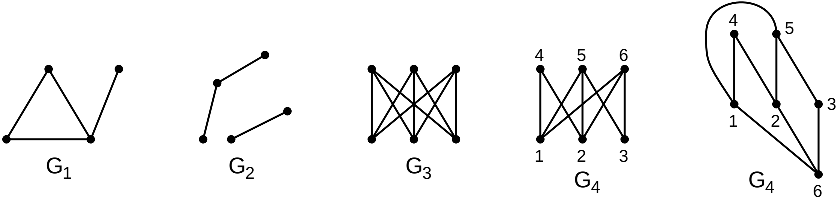
- Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn je zwei Knoten durch einen Kantenzug miteinander verbunden werden können.
- Ein Graph heißt *planar*, wenn er auf der Ebene so gezeichnet werden kann, dass seine Kanten sich nicht überkreuzen.
- Ein Graph heißt *nichtleer*, wenn er mindestens einen Knoten besitzt.

Beispiele von Graphen



G_2 ist nicht zusammenhängend, die anderen Graphen aber schon.

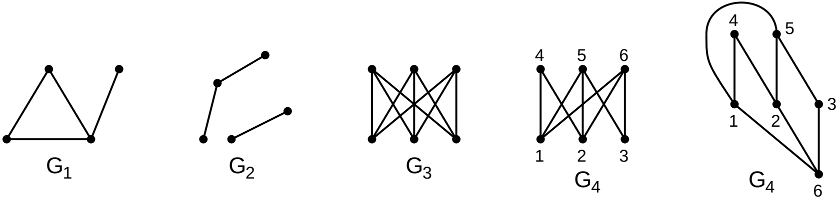
Beispiele von Graphen



G_2 ist nicht zusammenhängend, die anderen Graphen aber schon.

G_4 ist planar, weil er kreuzungsfrei gezeichnet werden *kann*.

Beispiele von Graphen



G_2 ist nicht zusammenhängend, die anderen Graphen aber schon.

G_4 ist planar, weil er kreuzungsfrei gezeichnet werden *kann*.

Ein zusammenhängender, planarer Graph unterteilt die Ebene in f Flächen, wobei die Außenfläche mitgezählt wird.

Eulersche Polyederformel

Satz Sei G ein nichtleerer, planarer, zusammenhängender Graph mit f Flächen, e Kanten und v Knoten. Dann gilt

$$v - e + f = 2.$$

Beweis

Der Induktionsanfang ist der Graph, der nur aus einem Knoten besteht. In diesem Fall ist $v = 1$, $e = 0$ und $f = 1$, also $v - e + f = 2$.

Beweis

Der Induktionsanfang ist der Graph, der nur aus einem Knoten besteht. In diesem Fall ist $v = 1$, $e = 0$ und $f = 1$, also $v - e + f = 2$.

Zum Zeichnen des Graphen benötigen wir die Operationen:

1. Setzen eines neuen Knotens und Verbinden dieses Knotens mit einem alten Knoten. In diesem Fall ändert sich v um $+1$ und e um $+1$.

Beweis

Der Induktionsanfang ist der Graph, der nur aus einem Knoten besteht. In diesem Fall ist $v = 1$, $e = 0$ und $f = 1$, also $v - e + f = 2$.

Zum Zeichnen des Graphen benötigen wir die Operationen:

1. Setzen eines neuen Knotens und Verbinden dieses Knotens mit einem alten Knoten. In diesem Fall ändert sich v um $+1$ und e um $+1$.

2. Verbinden zweier Knoten. Hier ändert sich e um $+1$ und f um $+1$.

Beweis

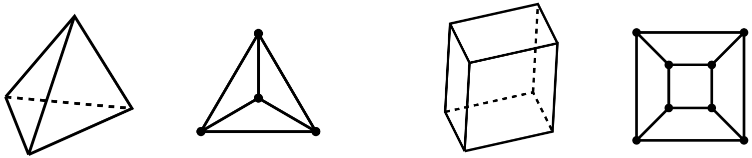
Wir können jeden nichtleeren, planaren, zusammenhängenden Graphen beginnend mit dem Graphen, der nur aus einem Knoten besteht, mit den beiden genannten Operationen aufbauen.

Beweis

Wir können jeden nichtleeren, planaren, zusammenhängenden Graphen beginnend mit dem Graphen, der nur aus einem Knoten besteht, mit den beiden genannten Operationen aufbauen.

Die Beziehung $v - e + f = 2$ ist für den Anfangsgraphen richtig und bleibt nach jedem Schritt bestehen.

Warum Polyederformel?



Für einen Polyeder mit v Knoten, e Kanten und f Seitenflächen ist die Eulersche Polyederformel ebenso richtig.

Folgerungen

Die vollständige Induktion ist ein Beweisprinzip, das für alle rekursiv aufgebauten Strukturen geeignet ist:

Folgerungen

Die vollständige Induktion ist ein Beweisprinzip, das für alle rekursiv aufgebauten Strukturen geeignet ist:

Natürliche Zahlen, zusammenhängende Graphen, rekursiv definierte Folgen usw.

Folgerungen

Die vollständige Induktion ist ein Beweisprinzip, das für alle rekursiv aufgebauten Strukturen geeignet ist:

Natürliche Zahlen, zusammenhängende Graphen, rekursiv definierte Folgen usw.

Beim Induktionsanfang müssen alle „Wurzeln“ der rekursiven Struktur berücksichtigt werden. Beispiel: Bei den Fibonacci-Zahlen sind das F_0 und F_1.

Invariante

Man nennt $v - e + f = 2$ eine *Invariante*, weil sie sich nicht ändert, wenn man einen Graphen verändert, so lange er nichtleer, zusammenhängend und planar bleibt.

Beispiel

Es gibt 11 rote, 4 blaue und und 6 gelbe Chamäleons.

Beispiel

Es gibt 11 rote, 4 blaue und und 6 gelbe Chamäleons.

Treffen zwei Chamäleons verschiedener Farbe aufeinander, so nehmen sie die dritte Farbe an. Z.B. entstehen aus einem roten und einem blauen Chamäleon zwei gelbe.

Beispiel

Es gibt 11 rote, 4 blaue und und 6 gelbe Chamäleons.

Treffen zwei Chamäleons verschiedener Farbe aufeinander, so nehmen sie die dritte Farbe an. Z.B. entstehen aus einem roten und einem blauen Chamäleon zwei gelbe.

Ist es möglich, dass am Ende alle Chamäleons die gleiche Farbe besitzen?

Beispiel

Wir schreiben rote, blaue und gelbe Chamäleons als 3-tupel (r, b, g). Den beschriebenen Farbwechseln entsprechen dann die drei Operationen

$$(r, b, g) \to (r-1, b-1, g+2), \quad (r, b, g) \to (r-1, b+2, g-1),$$

$$(r, b, g) \to (r+2, b-1, g-1).$$

Beispiel

Wir suchen eine Invariante, die nur 2 Farben betrifft:

$$(r,b) \to (r-1, b-1), \quad (r,b) \to (r-1, b+2), \quad (r,b) \to (r+2, b-1).$$

Beispiel

Wir suchen eine Invariante, die nur 2 Farben betrifft:

$$(r,b) \to (r{-}1, b{-}1), \quad (r,b) \to (r{-}1, b{+}2), \quad (r,b) \to (r{+}2, b{-}1).$$

Die Differenz $r - b$ bleibt gleich oder verändert sich um ± 3.

Beispiel

Wir suchen eine Invariante, die nur 2 Farben betrifft:

$$(r, b) \to (r-1, b-1), \quad (r, b) \to (r-1, b+2), \quad (r, b) \to (r+2, b-1).$$

Die Differenz $r - b$ bleibt gleich oder verändert sich um ± 3.

Bei $r = 11$, $b = 4$ erhalten wir $11 - 4 = 7$.

Beispiel

Wir suchen eine Invariante, die nur 2 Farben betrifft:

$$(r, b) \to (r{-}1, b{-}1), \quad (r, b) \to (r{-}1, b{+}2), \quad (r, b) \to (r{+}2, b{-}1).$$

Die Differenz $r - b$ bleibt gleich oder verändert sich um ± 3.

Bei $r = 11$, $b = 4$ erhalten wir $11 - 4 = 7$.

Ist die geforderte Endposition $r = 21$, so ist $21 - 0 = 21$.

Beispiel

Wir suchen eine Invariante, die nur 2 Farben betrifft:

$$(r, b) \to (r-1, b-1), \quad (r, b) \to (r-1, b+2), \quad (r, b) \to (r+2, b-1).$$

Die Differenz $r - b$ bleibt gleich oder verändert sich um ± 3.

Bei $r = 11$, $b = 4$ erhalten wir $11 - 4 = 7$.

Ist die geforderte Endposition $r = 21$, so ist $21 - 0 = 21$.

Ist sie $g = 21$, so $0 - 0 = 0$. Man kann also die Endposition mit 21 gleichfarbigen Chamäleons nicht erreichen.