Aufgabe 1

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funnktion.
Dann heißt x^* ein lokales Minimum von f falls es ein $r > 0$; so dass $f(x*) \leq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $||x - x^*|| < r$.
Analog (striktes) lokales Maximum, und globales Minimum
Wir fragen uns, was eine <u>notwendige</u> Optimalitätsbedingung für x^* lokales Minimum/Maximum ist.
Im eindimensionalen Fall ist dies $\underbrace{f'(x^*)}_{\frac{d}{dx}f(x^*)} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} = \nabla f(x^*) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx_1} f(x_1^*, ..., x_n^*) \\ \frac{d}{dx_2} f(x_1^*, ..., x_n^*) \\ ... \\ \frac{d}{dx_n} f(x_1^*, ..., x_n^*) \end{pmatrix}$$

z.B.
$f(x_1, x_2) = x_1^3 \cdot x_2^2$
$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 \cdot x_2^2 \\ 2x_1^3 \cdot x_2 \end{pmatrix}$
Nun bedeutet
$0 = \nabla f(x)$ dass $0 = 3x_1^2 \cdot x_2^2$ und $0 = 2x_1^3 \cdot x_2$
$\Rightarrow$ Lösungsmenge ist $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \begin{array}{r} x_1 = 0 \text{ oder} \\ x_2 = 0 \end{array} \right\}$
Nun zur Hinreichenden Bedingung für <u>M</u>inimum
In $1 - \lim f'(x^*) = 0$ und $f''(x^*) > 0$
In $n - limsitdies.$
$\nabla f(x^*) = 0$und die Matrix

$$\nabla^2 f(x^*) := \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{d}{dx_1}\frac{d}{dx_1} f(x^*) & ... & \frac{d}{dx_1}\frac{d}{dx_n} f(x^*) \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ \frac{d}{dx_n}\frac{d}{dx_1} f(x^*) & ... & \frac{d}{dx_n}\frac{d}{dx_n} f(x^*) \end{array} \right\}$$

ist positiv Definiert d.h. für alle
$v \in \mathbb{R}^n n \, \{0\} \, v^T \left(\nabla^2 f(x^*) v\right) > 0| \; \nabla^2$ ist falls f zweimal stetig differenzierbar symmetrisch.

Aufgabe: Bestimme die Minimierer x^* von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 3)^2$
Danach:
Gehe auf Wolframalpha.com und plotte die Funktion.

Lösung

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2\,(x_2 - 2) \\ 2\,(x_3 - 3) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 2 \\ x_3^* = 3 \end{array}$$