Mathematatik für Informatiker 2
Übungsblatt 5

Lukas Vormwald Noah Mehling Gregor Seewald

Übung 5:Dienstag 12:00

Aufgabe 1

a)

$$
\begin{aligned}
f(x) =& 8x^7 + 2x + 10 \\
8x^7 + 2x + 10 \overset{!}{=}& 10 \\
8x^7 + 2x =& -10 \\
x =& -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\swarrow & \searrow \\
f'(-2) = -1,018 & f'(0) = 10 \\
\text{negativ} & \text{positv} \\
\searrow & \swarrow
\end{array}
$$

Kein Terrassenpunkt $\rightarrow$ 1 Extremstelle bei $x = -1$

b)

$$
\begin{aligned}
f'(x) =& e^{-x^2} \cdot (-2)x \\
\underbrace{e^{-x^2}}_{\text{hat keine Nullstellen}} \cdot (-2)x \overset{!}{=}& 0 \Leftrightarrow -2x \overset{!}{=} 0 \\
x =& 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\swarrow & \searrow \\
f'(-1) = 0,74 & f'(1) = 0,74 \\
\text{positiv} & \text{negativ} \\
\searrow & \swarrow
\end{array}
$$

Kein Terrassenpunkt $\rightarrow$ 1 Extremstelle bei $x = 0$

Aufgabe 2

Sowohl $\sin(x)$ als auch $e^{(-x)}$ sind stetig, somit ist auch $\sin(x) - e^{(-x)}$ stetig.

$$f(0) = \sin(0) - e^0 = 0 - 1 = -1$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - e^{\left(-\frac{\pi}{2}\right)}1 > 1 - e^0 = 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$$

Somit hat die Funktion nach dem Mittelwertsatz mindestens eine Nullstelle in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow$ Zeigen, dass genau eine Ableitung positiv ist:

$$f'(x) = \cos(x) - e^{(-x)} \cdot (-1) = \cos(x) + e^{-x}$$

Da e^{-x} immer positiv ist und der Cosinus im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ zwischen $[1, 0]$ schwankt. ist die Ableitung im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ nur positiv. Somit ist $f(x)$ im Intervall streng monoton steigend und kann nur eine Nullstelle im Intervall haben.

Aufgabe 3

a) Zu betrachten sind 3 Fälle:
$f(x) = 0$, Damit sind alle Funktionswerte $f(\phi) = f(x_1) = f(x_2)$. Somit sind diese Punkte relative Extrema der Funktion, jedoch kein striktes Extrema.
Ist $f(x_1 + \phi)$ für ein kleines ϕ negativ, so gilt aufgrund ger Stetigkeit: $\lim\limits_{x \to \phi} f(x_1) = f(\phi)$. Da dieser Funktionswert nun negativ ist und diese Bedingung ebenfalls für $f(x_2 - \phi)$ gelten muss, so muss die Funktion ein lokales Extrema aufweisen, da diese sonst die Definition der Stetigkeit verletzen würde.
Für $f(x_1 + \phi)$ positiv verlaüft der Beweis analog zu $f(x_1 + \phi)$ negativ.

b) Es gibt Drei Fälle zu betrachten:

1. f ist eine konstante Funktion. Dann ist $f'(x) = 0$ und besitzt somit unendlich viele Nullstellen in $\mathbb{R}$. Somit besitzt auch f höchstens unendlich viele Nullstellen $(\infty + 1)$.
2. f ist ein Polynom. Dann gilt nach dem Fundamentalsatz der Algebra, dass der Grad des Polynoms die maximale Anzahl an Nullstellen angibt. Da die Ableitung von Polynomen der Form $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ ist und somit auch der Grad der Ableitung der Funktion um 1 vermindert wird gilt die Aussage ebenfalls.

3. f ist eine trigonometrische Funktion: Da trigonometrische Funktionen ebenfalls unendlich viele Nullstellen aufweisen, gilt hier das selbe Argument wie bei 1.

Aufgabe 4

$f'(x)$	$= \frac{1}{1+x}$	$+2\cos(x)$	-3	$-\frac{x}{2}$	$+x \cdot \frac{1}{2}$	
$f'(0)$	$= 1$	$+2$	-3	-0	$+0$	
$= 3$	-3	$= 0$			$\rightarrow$ *Extrapunkt?*	
$f''(x)$	$= \frac{-1}{(1+x)^2}$	$+2 \cdot (\sin(x))$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$		
$f''(0)$	$= -1$	$+0$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$= -1$	

$\rightarrow$ kein Terassenpunkt bei $x = 0$, da zweite Ableitung $\neq 0 \rightarrow$ Extrempunkt bei $x = 0$

Aufgabe 5

Die Funktion muss mindestens ein globales Minimum aufweisen. Da die Funktion stetig ist gilt:
$\lim\limits_{x \to \phi} f(x) = f(\phi)$. Wählt man als ϕ nun ∞, so muss auch der Funktionswert gegen ∞ konvergieren. Aufgrund der Bedingung der Angabe jedoch gegen $-\infty$ ebenfalls.
Nun existieren zwei Möglichkeiten:

1. Die gegebene Bedingung ist erfüllt, dann ist das gewählte $f(x)$ bereits das gesuchte Minimum.

2. eine der beiden Bedingungen ist verletzt. Dann ist es möglich, eine Umgebung $f(x+\phi)$ bei Verletzung des $\lim\limits_{x \to +\infty}$, bzw. $f(x-\phi)$ bei Verletzung von $\lim\limits_{x \to -\infty}$ zu wählenm bis die Teilfolge nicht mehr gegen $f(x)$ konvergiert (man betrachtet also $\lim\limits_{x+\phi \to x} f(x)$). Dieser Wert entspricht dann Fall 1.