

10 Folgen und Reihen

Der Begriff der (reellen) Zahlenfolge ist für die Analysis grundlegend, weil hier exemplarisch der Begriff des Grenzwerts thematisiert wird.

10 Folgen und Reihen

Der Begriff der (reellen) Zahlenfolge ist für die Analysis grundlegend, weil hier exemplarisch der Begriff des Grenzwerts thematisiert wird.

Die Themen:

- ▶ Beschränkte und konvergente Folgen
- ▶ Monotone Folgen
- ▶ Häufungspunkte und Teilfolgen von Folgen
- ▶ Reihen

10.1 Definition und Beispiele

Eine Abbildung $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *(reelle) Zahlenfolge*.

10.1 Definition und Beispiele

Eine Abbildung $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *(reelle) Zahlenfolge*.

Statt $a(n)$ schreibe a_n . Die ganze Folge ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder einfach (a_n) .

10.1 Definition und Beispiele

Eine Abbildung $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *(reelle) Zahlenfolge*.

Statt $a(n)$ schreibe a_n . Die ganze Folge ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder einfach (a_n) .

Beachte: Zahlenfolgen sind immer *unendliche* Folgen.

10.1 Definition und Beispiele

Eine Abbildung $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *(reelle) Zahlenfolge*.

Statt $a(n)$ schreibe a_n . Die ganze Folge ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder einfach (a_n) .

Beachte: Zahlenfolgen sind immer *unendliche* Folgen.

Eher als die konkreten Werte der a_n interessiert uns das Verhalten der Folge für große n .

Beispiele

(i) $a_n = n$ oder $(a_n) = (1, 2, 3, \dots)$ ist die Folge der natürlichen Zahlen, deren Folgenglieder beliebig groß werden.

Beispiele

- (i) $a_n = n$ oder $(a_n) = (1, 2, 3, \dots)$ ist die Folge der natürlichen Zahlen, deren Folgenglieder beliebig groß werden.
- (ii) $a_n = 1/n$ oder $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ ist eine Folge, deren Glieder der Null beliebig nahe kommen.

Beispiele

(i) $a_n = n$ oder $(a_n) = (1, 2, 3, \dots)$ ist die Folge der natürlichen Zahlen, deren Folgenglieder beliebig groß werden.

(ii) $a_n = 1/n$ oder $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ ist eine Folge, deren Glieder der Null beliebig nahe kommen.

(iii) Die Folge

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n} \text{ oder } (a_n) = (0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \dots)$$

wechselt nach dem ersten Folgenglied das Vorzeichen.

Beispiele

(i) $a_n = n$ oder $(a_n) = (1, 2, 3, \dots)$ ist die Folge der natürlichen Zahlen, deren Folgenglieder beliebig groß werden.

(ii) $a_n = 1/n$ oder $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ ist eine Folge, deren Glieder der Null beliebig nahe kommen.

(iii) Die Folge

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n} \text{ oder } (a_n) = (0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \dots)$$

wechselt nach dem ersten Folgenglied das Vorzeichen.

Man sagt auch: Die Folge alterniert. Für große n wechselt sie zwischen Werten, die nahe bei ± 1 liegen.

10.2 Beschränktheit und Konvergenz von Zahlenfolgen

Die Folge heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl M gibt mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

10.2 Beschränktheit und Konvergenz von Zahlenfolgen

Die Folge heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl M gibt mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Alternativ: Es gibt ein M , so dass alle Folgenglieder im Intervall $[-M, M]$ liegen.

10.2 Beschränktheit und Konvergenz von Zahlenfolgen

Die Folge heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl M gibt mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Alternativ: Es gibt ein M , so dass alle Folgenglieder im Intervall $[-M, M]$ liegen.

Der Wertebereich M_a der Folge (a_n) ist

$$M_a = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

10.2 Beschränktheit und Konvergenz von Zahlenfolgen

Die Folge heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl M gibt mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Alternativ: Es gibt ein M , so dass alle Folgenglieder im Intervall $[-M, M]$ liegen.

Der Wertebereich M_a der Folge (a_n) ist

$$M_a = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

Als Menge ist M_a etwas anderes als die Folge.

Aber es gilt

$$M_a \text{ beschränkt} \quad \Leftrightarrow \quad (a_n) \text{ beschränkt.}$$

10.2 Beschränktheit und Konvergenz von Zahlenfolgen

Die Folge heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl M gibt mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Alternativ: Es gibt ein M , so dass alle Folgenglieder im Intervall $[-M, M]$ liegen.

Der Wertebereich M_a der Folge (a_n) ist

$$M_a = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

Als Menge ist M_a etwas anderes als die Folge.

Aber es gilt

$$M_a \text{ beschränkt} \quad \Leftrightarrow \quad (a_n) \text{ beschränkt.}$$

Ist M_a endlich, so ist die Folge beschränkt.

Konvergente Folgen

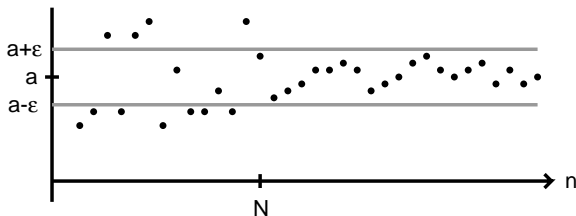
Eine Folge (a_n) *konvergiert gegen ein* $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Konvergente Folgen

Eine Folge (a_n) *konvergiert gegen ein* $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$



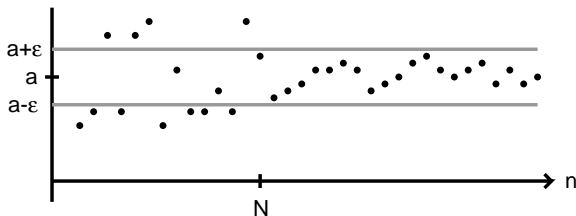
Ab einem Index N liegen alle Folgenglieder im Schlauch

$$B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x : |x - a| < \varepsilon\}.$$

Konvergente Folgen

Eine Folge (a_n) *konvergiert gegen ein* $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$



Ab einem Index N liegen alle Folgenglieder im Schlauch

$$B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x : |x - a| < \varepsilon\}.$$

$B_\varepsilon(a)$ heißt ε -Umgebung von a .

Konvergente Folgen

Eine Folge (a_n) *konvergiert gegen ein* $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Konvergente Folgen

Eine Folge (a_n) *konvergiert gegen ein* $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

a heißt dann *Grenzwert* oder *Limes* der Folge.

Konvergente Folgen

Eine Folge (a_n) *konvergiert gegen ein* $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

a heißt dann *Grenzwert* oder *Limes* der Folge.

Wir schreiben dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \rightarrow a \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Beispiele zur Konvergenz

(i) Die konstante Folge $a_n = 1$ konvergiert gegen $a = 1$ wegen

$$|a_n - a| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beispiele zur Konvergenz

(i) Die konstante Folge $a_n = 1$ konvergiert gegen $a = 1$ wegen

$$|a_n - a| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ konvergiert gegen $a = 0$.

Beispiele zur Konvergenz

(i) Die konstante Folge $a_n = 1$ konvergiert gegen $a = 1$ wegen

$$|a_n - a| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ konvergiert gegen $a = 0$.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Für $n \geq N$ gilt daher

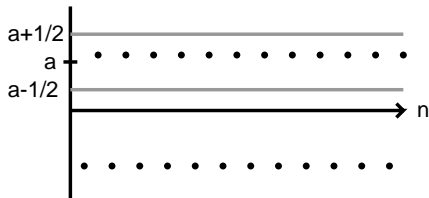
$$|a_n - a| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Beispiele zur Konvergenz

(iii) Die alternierende Folge $a_n = (-1)^n$ konvergiert nicht. Wir wählen $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Beispiele zur Konvergenz

(iii) Die alternierende Folge $a_n = (-1)^n$ konvergiert nicht. Wir wählen $\varepsilon = \frac{1}{2}$.



Gleichgültig, welches $a \in \mathbb{R}$ wir wählen, es liegen immer unendlich viele Folgenglieder außerhalb des Schlauchs.

Konvergente Folgen

Eine Folge (a_n) *konvergiert gegen ein* $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Konvergente Folgen

Eine Folge (a_n) *konvergiert gegen ein* $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Man formuliere dies mit eigenen Worten.

Konvergente Folgen

Eine Folge (a_n) *konvergiert gegen ein* $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Man formuliere dies mit eigenen Worten.

Der Abstand zwischen a_n und a wird für große Indizes n beliebig klein.

Konvergente Folgen

Eine Folge (a_n) *konvergiert gegen ein* $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Man formuliere dies mit eigenen Worten.

Der Abstand zwischen a_n und a wird für große Indizes n beliebig klein.

Oder formal:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Konvergente Folgen

Eine Folge (a_n) konvergiert gegen ein $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Konvergente Folgen

Eine Folge (a_n) konvergiert gegen ein $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Eine Eigenschaft trifft für *fast alle* Folgenglieder zu, wenn sie für alle bis auf endlich viele Folgenglieder zutrifft.

Konvergente Folgen

Eine Folge (a_n) konvergiert gegen ein $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Eine Eigenschaft trifft für *fast alle* Folgenglieder zu, wenn sie für alle bis auf endlich viele Folgenglieder zutrifft.

Welche der folgenden Aussagen sind zu „ (a_n) konvergiert gegen a “ äquivalent?

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für fast alle Folgenglieder.

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n - a| < \frac{1}{m}$ für fast alle Folgenglieder.

Konvergente Folgen

Im Hinblick auf Konvergenz ist es gleichgültig, was eine Folge auf endlichen Abschnitten macht.

Konvergente Folgen

Im Hinblick auf Konvergenz ist es gleichgültig, was eine Folge auf endlichen Abschnitten macht.

Wir können das letzte Beispiel aus der vorigen Folie noch verschärfen. Sei (x_m) eine positive Nullfolge, also $x_m > 0$ und $x_m \rightarrow 0$. Ein Beispiel dafür ist $x_m = \frac{1}{m}$ wie in der letzten Folie. Dann:

Konvergente Folgen

Im Hinblick auf Konvergenz ist es gleichgültig, was eine Folge auf endlichen Abschnitten macht.

Wir können das letzte Beispiel aus der vorigen Folie noch verschärfen. Sei (x_m) eine positive Nullfolge, also $x_m > 0$ und $x_m \rightarrow 0$. Ein Beispiel dafür ist $x_m = \frac{1}{m}$ wie in der letzten Folie. Dann:

Eine Folge (a_n) konvergiert genau dann gegen a , wenn für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_n - a| < x_m$$

für fast alle Folgenglieder.

Konvergente Folgen

Im Hinblick auf Konvergenz ist es gleichgültig, was eine Folge auf endlichen Abschnitten macht.

Wir können das letzte Beispiel aus der vorigen Folie noch verschärfen. Sei (x_m) eine positive Nullfolge, also $x_m > 0$ und $x_m \rightarrow 0$. Ein Beispiel dafür ist $x_m = \frac{1}{m}$ wie in der letzten Folie. Dann:

Eine Folge (a_n) konvergiert genau dann gegen a , wenn für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_n - a| < x_m$$

für fast alle Folgenglieder.

Wir müssen durch unsere Definition nur garantieren, dass die Abstände der Folgenglieder zum Grenzwert beliebig klein werden.

10.3 Häufungspunkte von Folgen

Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ in jedem $B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ unendlich viele Folgenglieder liegen.

10.3 Häufungspunkte von Folgen

Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ in jedem $B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ unendlich viele Folgenglieder liegen.

Also: Konvergenz \Rightarrow fast alle Folgenglieder,
 Häufungspunkt \Rightarrow unendlich viele Folgenglieder.

10.3 Häufungspunkte von Folgen

Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ in jedem $B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ unendlich viele Folgenglieder liegen.

Also: Konvergenz \Rightarrow fast alle Folgenglieder,
 Häufungspunkt \Rightarrow unendlich viele Folgenglieder.

Beispiel Sei $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

10.3 Häufungspunkte von Folgen

Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ in jedem $B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ unendlich viele Folgenglieder liegen.

Also: Konvergenz \Rightarrow fast alle Folgenglieder,
 Häufungspunkt \Rightarrow unendlich viele Folgenglieder.

Beispiel Sei $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

Wegen $a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$ gilt $|a_{2n} - 1| \leq \frac{1}{2n}$.

10.3 Häufungspunkte von Folgen

Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ in jedem $B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ unendlich viele Folgenglieder liegen.

Also: Konvergenz \Rightarrow fast alle Folgenglieder,
 Häufungspunkt \Rightarrow unendlich viele Folgenglieder.

Beispiel Sei $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

Wegen $a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$ gilt $|a_{2n} - 1| \leq \frac{1}{2n}$.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es daher unendlich viele Folgenglieder, die in $B_\varepsilon(1)$ liegen. Damit ist 1 Häufungspunkt der Folge.

10.3 Häufungspunkte von Folgen

Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ in jedem $B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ unendlich viele Folgenglieder liegen.

Also: Konvergenz \Rightarrow fast alle Folgenglieder,
 Häufungspunkt \Rightarrow unendlich viele Folgenglieder.

Beispiel Sei $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

Wegen $a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$ gilt $|a_{2n} - 1| \leq \frac{1}{2n}$.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es daher unendlich viele Folgenglieder, die in $B_\varepsilon(1)$ liegen. Damit ist 1 Häufungspunkt der Folge.

Genauso erhält man mit $a_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}$, dass auch -1 Häufungspunkt der Folge ist.

10.3 Häufungspunkte von Folgen

Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ in jedem $B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ unendlich viele Folgenglieder liegen.

Also: Konvergenz \Rightarrow fast alle Folgenglieder,
 Häufungspunkt \Rightarrow unendlich viele Folgenglieder.

Beispiel Sei $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

Wegen $a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$ gilt $|a_{2n} - 1| \leq \frac{1}{2n}$.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es daher unendlich viele Folgenglieder, die in $B_\varepsilon(1)$ liegen. Damit ist 1 Häufungspunkt der Folge.

Genauso erhält man mit $a_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}$, dass auch -1 Häufungspunkt der Folge ist.

Einen Grenzwert besitzt die Folge nicht, weil weder in $B_1(1)$ noch in $B_1(-1)$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen.

Grenzwert und Häufungspunkt

Satz (a) Existiert der Grenzwert einer Folge, so ist er eindeutig bestimmt.

Grenzwert und Häufungspunkt

Satz (a) Existiert der Grenzwert einer Folge, so ist er eindeutig bestimmt.

(b) Eine konvergente Folge ist beschränkt und besitzt genau einen Häufungspunkt, nämlich den Grenzwert der Folge.

Grenzwert und Häufungspunkt

Satz (a) Existiert der Grenzwert einer Folge, so ist er eindeutig bestimmt.

(b) Eine konvergente Folge ist beschränkt und besitzt genau einen Häufungspunkt, nämlich den Grenzwert der Folge.

Beweis (a) Angenommen, für eine Folge (a_n) gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ mit $a \neq b$.

Grenzwert und Häufungspunkt

Satz (a) Existiert der Grenzwert einer Folge, so ist er eindeutig bestimmt.

(b) Eine konvergente Folge ist beschränkt und besitzt genau einen Häufungspunkt, nämlich den Grenzwert der Folge.

Beweis (a) Angenommen, für eine Folge (a_n) gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ mit $a \neq b$.

Für $0 < \varepsilon = |a - b|/2$ sind $B_\varepsilon(a)$ und $B_\varepsilon(b)$ disjunkt und können demnach nicht beide alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthalten.

Grenzwert und Häufungspunkt

Satz (a) Existiert der Grenzwert einer Folge, so ist er eindeutig bestimmt.

(b) Eine konvergente Folge ist beschränkt und besitzt genau einen Häufungspunkt, nämlich den Grenzwert der Folge.

Beweis (a) Angenommen, für eine Folge (a_n) gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ mit $a \neq b$.

Für $0 < \varepsilon = |a - b|/2$ sind $B_\varepsilon(a)$ und $B_\varepsilon(b)$ disjunkt und können demnach nicht beide alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthalten.

(b) Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, so wählen wir in der Definition der Konvergenz $\varepsilon = 1$.

Grenzwert und Häufungspunkt

Satz (a) Existiert der Grenzwert einer Folge, so ist er eindeutig bestimmt.

(b) Eine konvergente Folge ist beschränkt und besitzt genau einen Häufungspunkt, nämlich den Grenzwert der Folge.

Beweis (a) Angenommen, für eine Folge (a_n) gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ mit $a \neq b$.

Für $0 < \varepsilon = |a - b|/2$ sind $B_\varepsilon(a)$ und $B_\varepsilon(b)$ disjunkt und können demnach nicht beide alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthalten.

(b) Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, so wählen wir in der Definition der Konvergenz $\varepsilon = 1$. Damit genügen alle bis auf endlich viele Folgenglieder der Abschätzung $|a_n| < |a| + 1$. Die übrigen Folgenglieder bilden eine endliche Menge. Endliche Mengen sind immer beschränkt.

Unabhängigkeit von endlichen Abschnitten

Die Begriffe Grenzwert, Häufungspunkt und Beschränktheit hängen nicht von endlichen Abschnitten der Folge ab.

Unabhängigkeit von endlichen Abschnitten

Die Begriffe Grenzwert, Häufungspunkt und Beschränktheit hängen nicht von endlichen Abschnitten der Folge ab.

Lassen wir endlich viele Folgenglieder weg oder fügen endlich viele Folgenglieder hinzu, so ändert das nichts an ihrem Grenzwert, an ihren Häufungspunkten oder an ihrer Beschränktheit.

10.4 Verträglichkeit mit den arithmetischen Operationen

Satz Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

10.4 Verträglichkeit mit den arithmetischen Operationen

Satz Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

Dann sind auch die Folgen $(a_n + b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ und, falls $b_n, b \neq 0$, auch (a_n/b_n) konvergent und es gilt

$$a_n + b_n \rightarrow a + b, \quad a_n b_n \rightarrow ab, \quad \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Beweis

$$a_n + b_n \rightarrow a + b:$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Definition der Konvergenz gibt es

$$N_1 \in \mathbb{N} \text{ mit } |a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_1,$$

$$N_2 \in \mathbb{N} \text{ mit } |b_n - b| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_2.$$

Beweis

$$a_n + b_n \rightarrow a + b:$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Definition der Konvergenz gibt es

$$N_1 \in \mathbb{N} \text{ mit } |a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_1,$$

$$N_2 \in \mathbb{N} \text{ mit } |b_n - b| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_2.$$

Für $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ sind dann beide Ungleichungen erfüllt. Für diese n folgt aus der Dreiecksungleichung

$$|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon.$$

Beweis

$$a_n + b_n \rightarrow a + b:$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Definition der Konvergenz gibt es

$$N_1 \in \mathbb{N} \text{ mit } |a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_1,$$

$$N_2 \in \mathbb{N} \text{ mit } |b_n - b| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_2.$$

Für $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ sind dann beide Ungleichungen erfüllt. Für diese n folgt aus der Dreiecksungleichung

$$|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon.$$

Damit liegen in jeder Umgebung $B_{2\varepsilon}(a + b)$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder, also $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$.

Beweis

$$a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b:$$

Da eine konvergente Folge beschränkt ist, gilt $|b_n| \leq M$. Aus der Dreiecksungleichung folgt für $n \geq \max\{N_1, N_2\}$

$$|a_n b_n - ab|$$

Beweis

$$a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b:$$

Da eine konvergente Folge beschränkt ist, gilt $|b_n| \leq M$. Aus der Dreiecksungleichung folgt für $n \geq \max\{N_1, N_2\}$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \\ &\leq |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab| \\ &\leq M|a_n - a| + |a| |b_n - b| < (M + |a|)\varepsilon, \end{aligned}$$

was $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$ impliziert.

Beweis

Für die Konvergenz des Quotienten genügt es $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ nachzuweisen. Die Aussage folgt dann aus der Konvergenz des Produkts.

Beweis

Für die Konvergenz des Quotienten genügt es $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ nachzuweisen. Die Aussage folgt dann aus der Konvergenz des Produkts.

Zu $\varepsilon = |b|/2$ gibt es ein N_3 mit

$$|b_n| = |b - b + b_n| \geq |b| - |b - b_n| > |b| - |b|/2 = |b|/2$$

für alle $n \geq N_3$.

Beweis

Für die Konvergenz des Quotienten genügt es $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ nachzuweisen. Die Aussage folgt dann aus der Konvergenz des Produkts.

Zu $\varepsilon = |b|/2$ gibt es ein N_3 mit

$$|b_n| = |b - b + b_n| \geq |b| - |b - b_n| > |b| - |b|/2 = |b|/2$$

für alle $n \geq N_3$.

Für $n \geq \max\{N_1, N_2, N_3\}$ gilt

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| \leq \frac{2}{|b|^2} |b_n - b|,$$

also $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$.

Beispiel

Für

$$a_n = \frac{2n^3 + 2n^2 + n}{n^3 + 1} = \frac{2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^3}}$$

Beispiel

Für

$$a_n = \frac{2n^3 + 2n^2 + n}{n^3 + 1} = \frac{2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^3}}$$

wenden wir den letzten Satz auf die Einzelteile in Zähler und Nenner an:

$$\frac{1}{n^k} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Zähler} \rightarrow 2, \text{ Nenner} \rightarrow 1.$$

Beispiel

Für

$$a_n = \frac{2n^3 + 2n^2 + n}{n^3 + 1} = \frac{2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^3}}$$

wenden wir den letzten Satz auf die Einzelteile in Zähler und Nenner an:

$$\frac{1}{n^k} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Zähler} \rightarrow 2, \text{ Nenner} \rightarrow 1.$$

Insgesamt daher $a_n \rightarrow 2$.

Beispiel

Für

$$a_n = \frac{2n^3 + 2n^2 + n}{n^3 + 1} = \frac{2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^3}}$$

wenden wir den letzten Satz auf die Einzelteile in Zähler und Nenner an:

$$\frac{1}{n^k} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Zähler} \rightarrow 2, \text{ Nenner} \rightarrow 1.$$

Insgesamt daher $a_n \rightarrow 2$.

Bei einer rationalen Funktion in n entscheiden nur die führenden Potenzen in Zähler und Nenner über das Konvergenzverhalten.

Bernoulli-Ungleichung

Satz Für jede reelle Zahl $a \geq -1$ und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(B_n) \qquad (1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Beweis

$n = 0$: $(1 + a)^0 = 1$ ist ok.

Beweis

$n = 0$: $(1 + a)^0 = 1$ ist ok.

Für $n \geq 0$ gilt unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung (B_n)

$$\begin{aligned}(1 + a)^{n+1} &= (1 + a)^n(1 + a) \\ &\geq (1 + na)(1 + a) = 1 + na + a + na^2\end{aligned}$$

Beweis

$n = 0$: $(1 + a)^0 = 1$ ist ok.

Für $n \geq 0$ gilt unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung (B_n)

$$\begin{aligned}(1 + a)^{n+1} &= (1 + a)^n(1 + a) \\ &\geq (1 + na)(1 + a) = 1 + na + a + na^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)a.\end{aligned}$$

10.5 Grenzwerte wichtiger Folgen

Für die geometrische Folge $a_n = q^n$ für $q \in \mathbb{R}$ gilt

$q^n \rightarrow 0$ falls $|q| < 1$, $|q|^n$ ist unbeschränkt für $|q| > 1$.

10.5 Grenzwerte wichtiger Folgen

Für die geometrische Folge $a_n = q^n$ für $q \in \mathbb{R}$ gilt

$$q^n \rightarrow 0 \text{ falls } |q| < 1, \quad |q|^n \text{ ist unbeschränkt für } |q| > 1.$$

Ist nämlich $|q| = 1 + x$ mit $x > 0$, so folgt aus der Bernoulli-Ungleichung

$$|q|^n \geq 1 + nx.$$

10.5 Grenzwerte wichtiger Folgen

Für die geometrische Folge $a_n = q^n$ für $q \in \mathbb{R}$ gilt

$$q^n \rightarrow 0 \text{ falls } |q| < 1, \quad |q|^n \text{ ist unbeschränkt für } |q| > 1.$$

Ist nämlich $|q| = 1 + x$ mit $x > 0$, so folgt aus der Bernoulli-Ungleichung

$$|q|^n \geq 1 + nx.$$

Ist dagegen $|q| < 1$, so $|q|^{-1} = 1 + x$ und wie zuvor

$$|q|^{-n} \geq 1 + nx \quad \Rightarrow \quad |q|^n \leq \frac{1}{1 + nx} \rightarrow 0.$$

Die Geometrische Folge erschlägt (fast) alles

Man kann das letzte Beispiel noch verschärfen. Es gilt für beliebiges $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^m q^n = 0 \quad \text{falls } |q| < 1.$$

Die Geometrische Folge erschlägt (fast) alles

Man kann das letzte Beispiel noch verschärfen. Es gilt für beliebiges $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^m q^n = 0 \quad \text{falls } |q| < 1.$$

Anschaulich bedeutet dies, dass q^n „schneller“ gegen Null konvergiert als n^m gegen unendlich geht.

Die Geometrische Folge erschlägt (fast) alles

Man kann das letzte Beispiel noch verschärfen. Es gilt für beliebiges $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^m q^n = 0 \quad \text{falls } |q| < 1.$$

Anschaulich bedeutet dies, dass q^n „schneller“ gegen Null konvergiert als n^m gegen unendlich geht.

Der Beweis ist mit unseren bisherigen Mitteln nur sehr aufwendig zu erbringen und wird noch zurückgestellt.

$$\sqrt[n]{a}$$

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

für jede reelle Zahle $a > 0$.

$$\sqrt[n]{a}$$

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

für jede reelle Zahl $a > 0$.

Für den Beweis sei zunächst $a \geq 1$. Dann ist $b_n = \sqrt[n]{a} - 1 \geq 0$ und aus der Bernoulli-Ungleichung folgt

$$a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n.$$

$$\sqrt[n]{a}$$

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

für jede reelle Zahl $a > 0$.

Für den Beweis sei zunächst $a \geq 1$. Dann ist $b_n = \sqrt[n]{a} - 1 \geq 0$ und aus der Bernoulli-Ungleichung folgt

$$a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n.$$

Damit

$$b_n \leq \frac{a - 1}{n} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

$$\sqrt[n]{a}$$

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

für jede reelle Zahl $a > 0$.

Für den Beweis sei zunächst $a \geq 1$. Dann ist $b_n = \sqrt[n]{a} - 1 \geq 0$ und aus der Bernoulli-Ungleichung folgt

$$a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n.$$

Damit

$$b_n \leq \frac{a - 1}{n} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Für $0 < a < 1$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^{-1}} = 1$ und wegen $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\sqrt[n]{n}$$

Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

$$\sqrt[n]{n}$$

Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Analog zum vorigen Fall setzen wir $b_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Mit der binomischen Formel folgt für $n \geq 2$

$$n = (1 + b_n)^n \geq 1 + \binom{n}{2} b_n^2,$$

also $b_n^2 \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0$ und $b_n \rightarrow 0$.

$$\sqrt[n]{n}$$

Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Analog zum vorigen Fall setzen wir $b_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Mit der binomischen Formel folgt für $n \geq 2$

$$n = (1 + b_n)^n \geq 1 + \binom{n}{2} b_n^2,$$

also $b_n^2 \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0$ und $b_n \rightarrow 0$.

Aufgrund von $a_n b_n \rightarrow ab$ gilt für $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \dots \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

10.6 Konvergenz monotoner Folgen

Wir bezeichnen eine Folge (a_n) als *monoton wachsend* (*fallend*), wenn

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{bzw.} \quad a_n \geq a_{n+1} \quad \text{für alle } n.$$

10.6 Konvergenz monotoner Folgen

Wir bezeichnen eine Folge (a_n) als *monoton wachsend* (*fallend*), wenn

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{bzw.} \quad a_n \geq a_{n+1} \quad \text{für alle } n.$$

Eine Folge heißt *streng monoton wachsend* oder *fallend*, wenn für alle n die strikte Ungleichung erfüllt ist.

10.6 Konvergenz monotoner Folgen

Wir bezeichnen eine Folge (a_n) als *monoton wachsend (fallend)*, wenn

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{bzw.} \quad a_n \geq a_{n+1} \quad \text{für alle } n.$$

Eine Folge heißt *streng monoton wachsend* oder *fallend*, wenn für alle n die strikte Ungleichung erfüllt ist.

Konvergiert eine monoton wachsende Folge (a_n) gegen a , so schreiben wir $a_n \nearrow a$, konvergiert sie monoton fallend, so $a_n \searrow a$.

Satz über monotone Konvergenz

Satz Eine beschränkte, monoton wachsende oder fallende Folge ist konvergent.

Satz über monotone Konvergenz

Satz Eine beschränkte, monoton wachsende oder fallende Folge ist konvergent.

Beweis Sei (a_n) monoton wachsend und beschränkt. Dann ist die zugehörige Menge

$$M_a = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

nach oben beschränkt und besitzt ein Supremum a .

Satz über monotone Konvergenz

Satz Eine beschränkte, monoton wachsende oder fallende Folge ist konvergent.

Beweis Sei (a_n) monoton wachsend und beschränkt. Dann ist die zugehörige Menge

$$M_a = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

nach oben beschränkt und besitzt ein Supremum a .

Es gilt $a_n \leq a$.

Satz über monotone Konvergenz

Satz Eine beschränkte, monoton wachsende oder fallende Folge ist konvergent.

Beweis Sei (a_n) monoton wachsend und beschränkt. Dann ist die zugehörige Menge

$$M_a = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

nach oben beschränkt und besitzt ein Supremum a .

Es gilt $a_n \leq a$.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N + \varepsilon \geq a$, denn andernfalls wäre $a - \varepsilon$ ebenfalls eine obere Schranke.

Satz über monotone Konvergenz

Satz Eine beschränkte, monoton wachsende oder fallende Folge ist konvergent.

Beweis Sei (a_n) monoton wachsend und beschränkt. Dann ist die zugehörige Menge

$$M_a = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

nach oben beschränkt und besitzt ein Supremum a .

Es gilt $a_n \leq a$.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N + \varepsilon \geq a$, denn andernfalls wäre $a - \varepsilon$ ebenfalls eine obere Schranke.

Da die Folge monoton wachsend ist, gilt $0 \leq a - a_n \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und somit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Beispiel

Betrachte

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}, \quad a_0 = 0.$$

Beispiel

Betrachte

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}, \quad a_0 = 0.$$

Durch Induktion über n zeigen wir, dass die Folge streng monoton wachsend ist. Der Induktionsanfang $a_1 > a_0$ ist richtig.

Beispiel

Betrachte

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}, \quad a_0 = 0.$$

Durch Induktion über n zeigen wir, dass die Folge streng monoton wachsend ist. Der Induktionsanfang $a_1 > a_0$ ist richtig.

Ist $a_n > a_{n-1}$, so

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} > \sqrt{6 + a_{n-1}} = a_n.$$

Beispiel

Betrachte

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}, \quad a_0 = 0.$$

Durch Induktion über n zeigen wir, dass die Folge streng monoton wachsend ist. Der Induktionsanfang $a_1 > a_0$ ist richtig.

Ist $a_n > a_{n-1}$, so

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} > \sqrt{6 + a_{n-1}} = a_n.$$

Die Folge ist durch 3 nach oben beschränkt ist: Für a_0 ist das richtig.

Beispiel

Betrachte

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}, \quad a_0 = 0.$$

Durch Induktion über n zeigen wir, dass die Folge streng monoton wachsend ist. Der Induktionsanfang $a_1 > a_0$ ist richtig.

Ist $a_n > a_{n-1}$, so

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} > \sqrt{6 + a_{n-1}} = a_n.$$

Die Folge ist durch 3 nach oben beschränkt ist: Für a_0 ist das richtig.

Gilt $a_n < 3$, so

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} < \sqrt{6 + 3} = 3.$$

Beispiel

Betrachte

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}, \quad a_0 = 0.$$

Durch Induktion über n zeigen wir, dass die Folge streng monoton wachsend ist. Der Induktionsanfang $a_1 > a_0$ ist richtig.

Ist $a_n > a_{n-1}$, so

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} > \sqrt{6 + a_{n-1}} = a_n.$$

Die Folge ist durch 3 nach oben beschränkt ist: Für a_0 ist das richtig.

Gilt $a_n < 3$, so

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} < \sqrt{6 + 3} = 3.$$

Daher $a_n \nearrow a$.

10.7 Teilfolgen und der Satz von Bolzano-Weierstraß

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Für eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen heißt $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ *Teilfolge* von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

10.7 Teilfolgen und der Satz von Bolzano-Weierstraß

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Für eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen heißt $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ *Teilfolge* von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Eine Teilfolge besteht ebenfalls aus unendlich vielen Elementen und ist daher selber eine Folge.

Beispiel

Sei $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

Beispiel

Sei $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

Mit $n_k = 2k$ ist $a_{n_k} = 1 + \frac{1}{2k}$ eine Teilfolge, die gegen 1 konvergiert.

Beispiel

Sei $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

Mit $n_k = 2k$ ist $a_{n_k} = 1 + \frac{1}{2k}$ eine Teilfolge, die gegen 1 konvergiert.

Durch Auswahl einer Teilfolge können wir in diesem Beispiel einen Häufungspunkt zum Grenzwert der Teilfolge machen. Dass dies immer möglich ist, zeigt der folgende Satz.

Häufungspunkt \Rightarrow Teilfolge konvergent

Satz Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit einem Häufungspunkt a . Dann existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

Häufungspunkt \Rightarrow Teilfolge konvergent

Satz Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit einem Häufungspunkt a . Dann existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

Beweis Wir bestimmen die Folgenglieder a_{n_k} induktiv.

Häufungspunkt \Rightarrow Teilfolge konvergent

Satz Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit einem Häufungspunkt a . Dann existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

Beweis Wir bestimmen die Folgenglieder a_{n_k} induktiv.

Seien a_{n_1}, \dots, a_{n_k} mit $(n_i)_{i=1, \dots, k}$ streng monoton wachsend bereits konstruiert.

Häufungspunkt \Rightarrow Teilfolge konvergent

Satz Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit einem Häufungspunkt a . Dann existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

Beweis Wir bestimmen die Folgenglieder a_{n_k} induktiv.

Seien a_{n_1}, \dots, a_{n_k} mit $(n_i)_{i=1, \dots, k}$ streng monoton wachsend bereits konstruiert.

Zu $\varepsilon = 1/(k+1)$ liegen in $B_{1/(k+1)}(a)$ unendlich viele Folgenglieder.

Häufungspunkt \Rightarrow Teilfolge konvergent

Satz Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit einem Häufungspunkt a . Dann existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

Beweis Wir bestimmen die Folgenglieder a_{n_k} induktiv.

Seien a_{n_1}, \dots, a_{n_k} mit $(n_i)_{i=1, \dots, k}$ streng monoton wachsend bereits konstruiert.

Zu $\varepsilon = 1/(k+1)$ liegen in $B_{1/(k+1)}(a)$ unendlich viele Folgenglieder.

Aus diesen wählen wir ein beliebiges $a_{n_{k+1}}$ mit $n_{k+1} > n_k$ aus. Dann gilt $|a_{n_{k+1}} - a| < 1/(k+1)$, woraus $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ folgt.

Satz von Bolzano-Weierstraß

Satz Jede beschränkte Folge besitzt einen Häufungspunkt.

Satz von Bolzano-Weierstraß

Satz Jede beschränkte Folge besitzt einen Häufungspunkt.

Jede beschränkte Folge besitzt einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt.

Satz von Bolzano-Weierstraß

Satz Jede beschränkte Folge besitzt einen Häufungspunkt.

Jede beschränkte Folge besitzt einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt.

Beweis Sei $a_n \in (c, d)$ für alle n . Sei

$$M = \{x \in \mathbb{R} : a_n > x \text{ für höchstens endlich viele } n\}.$$

Satz von Bolzano-Weierstraß

Satz Jede beschränkte Folge besitzt einen Häufungspunkt.

Jede beschränkte Folge besitzt einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt.

Beweis Sei $a_n \in (c, d)$ für alle n . Sei

$$M = \{x \in \mathbb{R} : a_n > x \text{ für höchstens endlich viele } n\}.$$

M ist nichtleer, weil $d \in M$,

M ist nach unten beschränkt durch c .

Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß

Zeige: $a = \inf M$ ist Häufungspunkt und zwar der größte Häufungspunkt.

Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß

Zeige: $a = \inf M$ ist Häufungspunkt und zwar der größte Häufungspunkt.

Nach Definition des Infimums ist für beliebiges $\varepsilon > 0$:

$$a + \varepsilon \in M \text{ und } a - \varepsilon \notin M.$$

Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß

Zeige: $a = \inf M$ ist Häufungspunkt und zwar der größte Häufungspunkt.

Nach Definition des Infimums ist für beliebiges $\varepsilon > 0$:

$$a + \varepsilon \in M \text{ und } a - \varepsilon \notin M.$$

Es gibt daher höchstens endlich viele Folgenglieder mit $a_n > a + \varepsilon$ und es gibt unendlich viele Folgenglieder mit $a_n > a - \varepsilon$.

Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß

Zeige: $a = \inf M$ ist Häufungspunkt und zwar der größte Häufungspunkt.

Nach Definition des Infimums ist für beliebiges $\varepsilon > 0$:

$$a + \varepsilon \in M \text{ und } a - \varepsilon \notin M.$$

Es gibt daher höchstens endlich viele Folgenglieder mit $a_n > a + \varepsilon$ und es gibt unendlich viele Folgenglieder mit $a_n > a - \varepsilon$.

Daher ist a Häufungspunkt.

Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß

Zeige: $a = \inf M$ ist Häufungspunkt und zwar der größte Häufungspunkt.

Nach Definition des Infimums ist für beliebiges $\varepsilon > 0$:

$$a + \varepsilon \in M \text{ und } a - \varepsilon \notin M.$$

Es gibt daher höchstens endlich viele Folgenglieder mit $a_n > a + \varepsilon$ und es gibt unendlich viele Folgenglieder mit $a_n > a - \varepsilon$.

Daher ist a Häufungspunkt.

Angenommen, es gibt einen weiteren Häufungspunkt $b > a$. Dann wählt man einen Punkt ξ zwischen a und b . Da oberhalb von ξ nur endlich viele Folgenglieder liegen, kann b kein Häufungspunkt sein.

10.8 Das Cauchy-Kriterium

Eine Folge (a_n) heißt *Cauchy-Folge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq N.$$

10.8 Das Cauchy-Kriterium

Eine Folge (a_n) heißt *Cauchy-Folge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq N.$$

Satz Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

10.8 Das Cauchy-Kriterium

Eine Folge (a_n) heißt *Cauchy-Folge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq N.$$

Satz Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Der Begriff der Cauchy-Folge ist oft nützlich, weil in der Definition der Cauchy-Folge der Grenzwert nicht vorkommt.

Beweis des Satzes

Sei $a_n \rightarrow a$. Zu $\varepsilon > 0$ sei $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

Beweis des Satzes

Sei $a_n \rightarrow a$. Zu $\varepsilon > 0$ sei $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

Für $m, n \geq N$ folgt dann aus der Dreieckungleichung

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < 2\varepsilon.$$

Umgekehrte Richtung

Sei (a_n) eine Cauchy-Folge. Wähle in der Definition der Cauchy-Folge $\varepsilon = 1$ und erhalte für alle $n \geq N$

$$|a_n| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|.$$

Umgekehrte Richtung

Sei (a_n) eine Cauchy-Folge. Wähle in der Definition der Cauchy-Folge $\varepsilon = 1$ und erhalte für alle $n \geq N$

$$|a_n| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|.$$

Die Cauchy-Folge ist damit beschränkt,

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}.$$

Umgekehrte Richtung

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat die Folge daher eine konvergente Teilfolge $a_{n_k} \rightarrow a$ für $k \rightarrow \infty$.

Umgekehrte Richtung

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat die Folge daher eine konvergente Teilfolge $a_{n_k} \rightarrow a$ für $k \rightarrow \infty$.

Zeige $a_n \rightarrow a$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_m - a_n| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$.

Umgekehrte Richtung

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat die Folge daher eine konvergente Teilfolge $a_{n_k} \rightarrow a$ für $k \rightarrow \infty$.

Zeige $a_n \rightarrow a$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_m - a_n| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$.

Wegen der Konvergenz der Teilfolge gibt es ein $n_k \geq N$ mit $|a - a_{n_k}| < \varepsilon$.

Umgekehrte Richtung

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat die Folge daher eine konvergente Teilfolge $a_{n_k} \rightarrow a$ für $k \rightarrow \infty$.

Zeige $a_n \rightarrow a$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_m - a_n| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$.

Wegen der Konvergenz der Teilfolge gibt es ein $n_k \geq N$ mit $|a - a_{n_k}| < \varepsilon$.

Aus der Dreiecksungleichung folgt dann für alle $n \geq N$

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2\varepsilon$$

und damit die Konvergenz der gesamten Folge gegen a .

10.9 Limes superior, Limes inferior und bestimmte Divergenz

Wir bezeichnen den größten Häufungspunkt a^* einer beschränkten Folge (a_n) als *Limes superior* und den kleinsten Häufungspunkt a_* als *Limes inferior* der Folge und schreiben

$$a^* = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad a_* = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Bestimmte Divergenz

Eine Folge (a_n) *divergiert bestimmt gegen unendlich*, Schreibweise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, wenn:

Zu jedem $M \in \mathbb{R}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq M$ für alle $n \geq N$.

Bestimmte Divergenz

Eine Folge (a_n) *divergiert bestimmt gegen unendlich*, Schreibweise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, wenn:

Zu jedem $M \in \mathbb{R}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq M$ für alle $n \geq N$.

Die bestimmte Divergenz gegen $-\infty$ ist analog definiert.

Bestimmte Divergenz

Eine Folge (a_n) *divergiert bestimmt gegen unendlich*, Schreibweise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, wenn:

Zu jedem $M \in \mathbb{R}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq M$ für alle $n \geq N$.

Die bestimmte Divergenz gegen $-\infty$ ist analog definiert.

Beispielsweise gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$, aber $b_n = (-1)^n n$ divergiert nicht bestimmt.

Uneigentliche Häufungspunkte

(a_n) besitzt den *uneigentlichen Häufungspunkt* ∞ , wenn eine Teilfolge von (a_n) bestimmt gegen ∞ divergiert.

Uneigentliche Häufungspunkte

(a_n) besitzt den *uneigentlichen Häufungspunkt* ∞ , wenn eine Teilfolge von (a_n) bestimmt gegen ∞ divergiert.

Dies ist äquivalent zur Bedingung: Zu jedem $M \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq M$.

Schreibe dann auch $\limsup a_n = \infty$.

10.10 Definition und Beispiele von Reihen

Welchen „Wert“ hat eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

Ein typisches Beispiel ist die unendliche Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

10.10 Definition und Beispiele von Reihen

Welchen „Wert“ hat eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

Ein typisches Beispiel ist die unendliche Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Der Theologe Giordano Bruno hat sie als Modell für die Erschaffung der Welt aus dem Nichts angesehen:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0, \quad \text{aber} \quad 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1.$$

10.10 Definition und Beispiele von Reihen

Welchen „Wert“ hat eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

Ein typisches Beispiel ist die unendliche Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Der Theologe Giordano Bruno hat sie als Modell für die Erschaffung der Welt aus dem Nichts angesehen:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0, \quad \text{aber} \quad 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1.$$

Bruno ist später als Ketzer verbrannt worden, aber nicht deshalb.

Konvergenz von Reihen

Wir ordnen der Reihe die *Folge der Partialsummen* zu

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Konvergenz von Reihen

Wir ordnen der Reihe die *Folge der Partialsummen* zu

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Konvergiert die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen s , so nennen wir die Reihe *konvergent* mit Grenzwert s und schreiben $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Konvergenz von Reihen

Wir ordnen der Reihe die *Folge der Partialsummen* zu

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Konvergiert die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen s , so nennen wir die Reihe *konvergent* mit Grenzwert s und schreiben $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ansonsten ist die Reihe *divergent*. Im obigen Beispiel ist $(s_n) = (1, 0, 1, 0, \dots)$ und die Reihe ist nicht konvergent.

Konvergenz von Reihen

Wir ordnen der Reihe die *Folge der Partialsummen* zu

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Konvergiert die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen s , so nennen wir die Reihe *konvergent* mit Grenzwert s und schreiben $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ansonsten ist die Reihe *divergent*. Im obigen Beispiel ist $(s_n) = (1, 0, 1, 0, \dots)$ und die Reihe ist nicht konvergent.

Divergiert (s_n) bestimmt gegen unendlich, so schreiben wir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Reihe und Folge sind äquivalent

Ordne der Folge (s_n) eine Reihe zu

$$a_1 = s_1, \quad a_2 = s_2 - s_1, \quad a_3 = s_3 - s_2, \quad \dots$$

Reihe und Folge sind äquivalent

Ordne der Folge (s_n) eine Reihe zu

$$a_1 = s_1, \quad a_2 = s_2 - s_1, \quad a_3 = s_3 - s_2, \quad \dots$$

Die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum a_n$ ist also gerade (s_n) .

Reihe und Folge sind äquivalent

Ordne der Folge (s_n) eine Reihe zu

$$a_1 = s_1, \quad a_2 = s_2 - s_1, \quad a_3 = s_3 - s_2, \quad \dots$$

Die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum a_n$ ist also gerade (s_n) .

Die Begriffe „Reihe“ und „Folge“ sind damit vollständig äquivalent.

Reihe und Folge sind äquivalent

Ordne der Folge (s_n) eine Reihe zu

$$a_1 = s_1, \quad a_2 = s_2 - s_1, \quad a_3 = s_3 - s_2, \quad \dots$$

Die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum a_n$ ist also gerade (s_n) .

Die Begriffe „Reihe“ und „Folge“ sind damit vollständig äquivalent.

Z.B. ist die Summe zweier konvergenter Reihen wieder konvergent.

Geometrische Reihe

Die *geometrische Reihe* ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Geometrische Reihe

Die *geometrische Reihe* ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Für deren Partialsummen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gilt nach der geometrischen Summenformel

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

Geometrische Reihe

Die *geometrische Reihe* ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Für deren Partialsummen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gilt nach der geometrischen Summenformel

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

Daher ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{für } |q| < 1 \\ \infty & \text{für } q \geq 1 \end{cases}$$

Harmonische Reihe

Die *harmonische Reihe* ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

Harmonische Reihe

Die *harmonische Reihe* ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots\end{aligned}$$

Harmonische Reihe

Die *harmonische Reihe* ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots\end{aligned}$$

Damit gilt für die Folge der Partialsummen $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ und die Reihe divergiert bestimmt.

a_n Nullfolge

Notwendig für die Konvergenz einer Reihe ist, dass die (a_n) eine Nullfolge bilden, denn die Partialsummen können höchstens dann konvergieren, wenn $|s_n - s_{n+1}| \rightarrow 0$.

a_n Nullfolge

Notwendig für die Konvergenz einer Reihe ist, dass die (a_n) eine Nullfolge bilden, denn die Partialsummen können höchstens dann konvergieren, wenn $|s_n - s_{n+1}| \rightarrow 0$.

Aber: Die harmonische Reihe konvergiert trotzdem nicht.

10.11 Alternierende Reihen

Satz (Leibniz-Kriterium] Sind die Reihenglieder von der Form

$a_n = (-1)^n b_n$ und (b_n) ist eine streng monoton fallende Nullfolge,

so ist die Reihe $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ konvergent.

10.11 Alternierende Reihen

Satz (Leibniz-Kriterium] Sind die Reihenglieder von der Form

$a_n = (-1)^n b_n$ und (b_n) ist eine streng monoton fallende Nullfolge,

so ist die Reihe $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ konvergent.

Für den Reihenrest gilt

$$r_l = \sum_{n=l+1}^{\infty} a_n = \theta a_{l+1} \quad \text{mit } 0 < \theta < 1.$$

Beweis

Die Reihe beginne bei $n = 0$. Dann ist $a_0 = b_0 > 0$.

Beweis

Die Reihe beginne bei $n = 0$. Dann ist $a_0 = b_0 > 0$.

Wir erhalten für die ungeraden Partialsummen

$$s_{2n+1} = (b_0 - b_1) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_{2n} - b_{2n+1}).$$

Beweis

Die Reihe beginne bei $n = 0$. Dann ist $a_0 = b_0 > 0$.

Wir erhalten für die ungeraden Partialsummen

$$s_{2n+1} = (b_0 - b_1) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_{2n} - b_{2n+1}).$$

(s_{2n+1}) ist monoton wachsend.

Beweis

Die Reihe beginne bei $n = 0$. Dann ist $a_0 = b_0 > 0$.

Wir erhalten für die ungeraden Partialsummen

$$s_{2n+1} = (b_0 - b_1) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_{2n} - b_{2n+1}).$$

(s_{2n+1}) ist monoton wachsend.

Entsprechend sind die geraden Partialsummen

$$s_{2n} = b_0 - (b_1 - b_2) - \dots - (b_{2n-1} - b_{2n})$$

monoton fallend.

Beweis

Die Reihe beginne bei $n = 0$. Dann ist $a_0 = b_0 > 0$.

Wir erhalten für die ungeraden Partialsummen

$$s_{2n+1} = (b_0 - b_1) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_{2n} - b_{2n+1}).$$

(s_{2n+1}) ist monoton wachsend.

Entsprechend sind die geraden Partialsummen

$$s_{2n} = b_0 - (b_1 - b_2) - \dots - (b_{2n-1} - b_{2n})$$

monoton fallend.

Wegen $a_{2n+1} < 0$ gilt

$$0 < s_{2n+1} < s_{2n} < b_0.$$

Beweis

Die Reihe beginne bei $n = 0$. Dann ist $a_0 = b_0 > 0$.

Wir erhalten für die ungeraden Partialsummen

$$s_{2n+1} = (b_0 - b_1) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_{2n} - b_{2n+1}).$$

(s_{2n+1}) ist monoton wachsend.

Entsprechend sind die geraden Partialsummen

$$s_{2n} = b_0 - (b_1 - b_2) - \dots - (b_{2n-1} - b_{2n})$$

monoton fallend.

Wegen $a_{2n+1} < 0$ gilt

$$0 < s_{2n+1} < s_{2n} < b_0.$$

Die monotonen und beschränkten Folgen (s_{2n+1}) und (s_{2n}) haben einen Grenzwert.

Beweis

$$0 < s_{2n+1} < s_{2n} < b_0, \quad |s_{2n+1} - s_{2n}| \rightarrow 0.$$

Beweis

$$0 < s_{2n+1} < s_{2n} < b_0, \quad |s_{2n+1} - s_{2n}| \rightarrow 0.$$

Die monotonen und beschränkten Folgen (s_{2n+1}) und (s_{2n}) haben den gleichen Grenzwert.

Beweis

$$0 < s_{2n+1} < s_{2n} < b_0, \quad |s_{2n+1} - s_{2n}| \rightarrow 0.$$

Die monotonen und beschränkten Folgen (s_{2n+1}) und (s_{2n}) haben den gleichen Grenzwert.

Damit ist dieser Grenzwert s auch Grenzwert der Reihe. Es gilt

$$0 < s < b_0 = a_0 \Rightarrow s = \theta a_0 \text{ für } 0 < \theta < 1.$$

Beweis

$$0 < s_{2n+1} < s_{2n} < b_0, \quad |s_{2n+1} - s_{2n}| \rightarrow 0.$$

Die monotonen und beschränkten Folgen (s_{2n+1}) und (s_{2n}) haben den gleichen Grenzwert.

Damit ist dieser Grenzwert s auch Grenzwert der Reihe. Es gilt

$$0 < s < b_0 = a_0 \Rightarrow s = \theta a_0 \text{ für } 0 < \theta < 1.$$

Die gleiche Überlegung können wir für den Reihenrest machen, der ja wiederum eine alternierende Reihe ist. Damit ist auch die Fehlerabschätzung bewiesen.

Bemerkung

Der Satz ist nicht richtig, wenn (b_n) eine nichtnegative Nullfolge ist, die Monotonie ist wesentlich.

Beispiel

Leibniz hat bewiesen, dass

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Beispiel

Leibniz hat bewiesen, dass

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Das können wir im Moment nicht nachvollziehen, aber wir können das Ergebnis mit Hilfe der Fehlerabschätzung für den Reihenrest überprüfen.

Beispiel

Leibniz hat bewiesen, dass

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Das können wir im Moment nicht nachvollziehen, aber wir können das Ergebnis mit Hilfe der Fehlerabschätzung für den Reihenrest überprüfen.

In der ersten Zeile führen wir die Partialsummen s_n auf und in der zweiten die vom Satz garantierte Abschätzung für den Reihenrest, also $|a_{n+1}|$, der exakte Wert ist $\frac{\pi}{4} = 0.785\dots$

s_n	1.00	0.666	0.866	0.723	0.834	0.734
$ r_n \leq$	0.333	0.200	0.143	0.111	0.100	0.083

Zur Berechnung einer Milliarde Stellen von π ist dieses Verfahren offenbar nicht geeignet.

10.12 Absolute Konvergenz von Reihen und Cauchy-Kriterium

Nach dem Leibniz-Kriterium ist die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergent, aber sie ist nicht robust gegen eine veränderte Auswertung.

10.12 Absolute Konvergenz von Reihen und Cauchy-Kriterium

Nach dem Leibniz-Kriterium ist die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergent, aber sie ist nicht robust gegen eine veränderte Auswertung.

Wir können versuchen, zunächst die Teilreihe der positiven Gliedern auszurechnen und darauf die Reihe mit den negativen Gliedern aufzuaddieren.

10.12 Absolute Konvergenz von Reihen und Cauchy-Kriterium

Nach dem Leibniz-Kriterium ist die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergent, aber sie ist nicht robust gegen eine veränderte Auswertung.

Wir können versuchen, zunächst die Teilreihe der positiven Gliedern auszurechnen und darauf die Reihe mit den negativen Gliedern aufzuaddieren.

Es gilt aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) + \dots$$

10.12 Absolute Konvergenz von Reihen und Cauchy-Kriterium

Nach dem Leibniz-Kriterium ist die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergent, aber sie ist nicht robust gegen eine veränderte Auswertung.

Wir können versuchen, zunächst die Teilreihe der positiven Gliedern auszurechnen und darauf die Reihe mit den negativen Gliedern aufzuaddieren.

Es gilt aber

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} &= 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + \dots \end{aligned}$$

und die Teilreihe ist divergent.

Absolute Konvergenz von Reihen

Wir nennen eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

Absolute Konvergenz von Reihen

Wir nennen eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

Zum Beispiel ist die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ absolut konvergent für alle $|q| < 1$.

Cauchy-Kriterium für Reihen

Die Folge der Partialsummen einer Reihe ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Cauchy-Kriterium für Reihen

Die Folge der Partialsummen einer Reihe ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Angewendet auf Reihen sieht das folgendermaßen aus: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq m \geq N$ gilt

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon.$$

Cauchy-Kriterium für Reihen

Die Folge der Partialsummen einer Reihe ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Angewendet auf Reihen sieht das folgendermaßen aus: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq m \geq N$ gilt

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon.$$

Man nennt diese Bedingung *Cauchy-Kriterium für Reihen*.

Cauchy-Kriterium für Reihen

Die Folge der Partialsummen einer Reihe ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Angewendet auf Reihen sieht das folgendermaßen aus: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq m \geq N$ gilt

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon.$$

Man nennt diese Bedingung *Cauchy-Kriterium für Reihen*.

Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent,

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k|.$$

Cauchy-Kriterium für Reihen

Die Folge der Partialsummen einer Reihe ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Angewendet auf Reihen sieht das folgendermaßen aus: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq m \geq N$ gilt

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon.$$

Man nennt diese Bedingung *Cauchy-Kriterium für Reihen*.

Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent,

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k|.$$

Die Abschätzung

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

folgt aus der analogen Abschätzung für die Partialsummen.

Umordnung von Reihen

Eine absolut konvergente Reihe kann man beliebig umordnen, also die Reihe in beliebiger Reihenfolge auswerten, ohne den Grenzwert zu verändern.

10.13 Kriterien für die absolute Konvergenz von Reihen

Satz (a) *Majorantenkriterium*: Ist $|a_n| \leq c_n$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

10.13 Kriterien für die absolute Konvergenz von Reihen

Satz (a) *Majorantenkriterium*: Ist $|a_n| \leq c_n$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(b) *Quotientenkriterium*: Sei $a_n \neq 0$. Existiert eine Zahl q mit $0 < q < 1$ und

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \quad \text{für fast alle } n,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

10.13 Kriterien für die absolute Konvergenz von Reihen

Satz (a) *Majorantenkriterium*: Ist $|a_n| \leq c_n$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(b) *Quotientenkriterium*: Sei $a_n \neq 0$. Existiert eine Zahl q mit $0 < q < 1$ und

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \quad \text{für fast alle } n,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Ist dagegen

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \quad \text{für fast alle } n,$$

so ist die Reihe divergent.

10.13 Kriterien für die absolute Konvergenz von Reihen

(c) *Wurzelkriterium*: Existiert eine Zahl q mit $0 < q < 1$ und

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \quad \text{für fast alle } n,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

10.13 Kriterien für die absolute Konvergenz von Reihen

(c) *Wurzelkriterium*: Existiert eine Zahl q mit $0 < q < 1$ und

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \quad \text{für fast alle } n,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Ist dagegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \quad \text{für unendlich viele } n,$$

so ist die Reihe divergent.

Beweis (a)

Majorantenkriterium: Ist $|a_n| \leq c_n$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Beweis (a)

Majorantenkriterium: Ist $|a_n| \leq c_n$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Es ist klar, dass die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ beschränkt bleibt, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert.

Beweis (b)

Quotientenkriterium: Sei $a_n \neq 0$. Existiert eine Zahl q mit $0 < q < 1$ und

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \quad \text{für fast alle } n,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Beweis (b)

Quotientenkriterium: Sei $a_n \neq 0$. Existiert eine Zahl q mit $0 < q < 1$ und

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \quad \text{für fast alle } n,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Da das Weglassen von endlich vielen Gliedern nichts am Konvergenzverhalten einer Reihe ändert, können wir annehmen, dass die Bedingung für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist.

Beweis (b)

Quotientenkriterium: Sei $a_n \neq 0$. Existiert eine Zahl q mit $0 < q < 1$ und

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \quad \text{für fast alle } n,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Da das Weglassen von endlich vielen Gliedern nichts am Konvergenzverhalten einer Reihe ändert, können wir annehmen, dass die Bedingung für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist.

$$|a_{n+1}| \leq q|a_n| \Rightarrow |a_n| \leq q^n|a_0|.$$

Damit ist $c_n = q^n|a_0|$ wegen $0 < q < 1$ eine konvergente Majorante der Reihe.

Beweis (b)

Ist dagegen

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \quad \text{für fast alle } n,$$

so ist die Reihe divergent.

Beweis (b)

Ist dagegen

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \quad \text{für fast alle } n,$$

so ist die Reihe divergent.

Ist $|a_{n+1}| \geq |a_n|$, so folgt entsprechend $|a_n| \geq |a_0|$ für alle n . Damit ist die Folge (a_n) keine Nullfolge und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist nicht konvergent.

Beweis (c)

Wurzelkriterium: Existiert eine Zahl q mit $0 < q < 1$ und

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \quad \text{für fast alle } n,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Ist dagegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \quad \text{für unendlich viele } n,$$

so ist die Reihe divergent.

Beweis (c)

Wurzelkriterium: Existiert eine Zahl q mit $0 < q < 1$ und

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \quad \text{für fast alle } n,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Ist dagegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \quad \text{für unendlich viele } n,$$

so ist die Reihe divergent.

Für fast alle Folgenglieder gilt $|a_n| \leq q^n$, die Behauptung folgt wieder aus der Konvergenz der geometrischen Reihe. Aus der zweiten Bedingung folgt $|a_n| \geq 1$ für unendlich viele n . Damit ist (a_n) keine Nullfolge.

Vorsicht!

Für die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1, \quad \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \quad \text{für alle } n,$$

aber die harmonische Reihe ist divergent.

Vorsicht!

Für die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1, \quad \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \quad \text{für alle } n,$$

aber die harmonische Reihe ist divergent.

Sowohl im Quotienten- als auch im Wurzelkriterium ist es wesentlich, dass das $q < 1$ unabhängig von n gewählt werden kann.

Beispiel (i)

$\sum_{n=1}^{\infty} n^m q^n$ ist absolut konvergent für $m \in \mathbb{N}_0$ und $|q| < 1$.

Beispiel (i)

$\sum_{n=1}^{\infty} n^m q^n$ ist absolut konvergent für $m \in \mathbb{N}_0$ und $|q| < 1$.

Nach einem alten Beispiel gilt $\sqrt[n]{n^m} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$ und

$$\sqrt[n]{n^m |q|^n} = \sqrt[n]{n^m} |q| \leq (1 + \varepsilon) |q| \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon).$$

Beispiel (i)

$\sum_{n=1}^{\infty} n^m q^n$ ist absolut konvergent für $m \in \mathbb{N}_0$ und $|q| < 1$.

Nach einem alten Beispiel gilt $\sqrt[n]{n^m} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$ und

$$\sqrt[n]{n^m |q|^n} = \sqrt[n]{n^m} |q| \leq (1 + \varepsilon) |q| \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon).$$

Wir wählen hier ε so klein, dass $(1 + \varepsilon)|q| < 1$ und haben damit das Wurzelkriterium erfüllt.

Beispiel (i)

$\sum_{n=1}^{\infty} n^m q^n$ ist absolut konvergent für $m \in \mathbb{N}_0$ und $|q| < 1$.

Nach einem alten Beispiel gilt $\sqrt[n]{n^m} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$ und

$$\sqrt[n]{n^m |q|^n} = \sqrt[n]{n^m} |q| \leq (1 + \varepsilon) |q| \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon).$$

Wir wählen hier ε so klein, dass $(1 + \varepsilon)|q| < 1$ und haben damit das Wurzelkriterium erfüllt.

Da die Glieder einer konvergenten Reihe eine Nullfolge bilden, haben wir auch $\lim_{n \rightarrow \infty} n^m q^n = 0$ gezeigt.

Beispiel (ii)

Ein typisches Beispiel für die Anwendung des Quotientenkriteriums ist die Reihe $\sum \frac{q^n}{n!}$. Mit

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|q|^{n+1} n!}{(n+1)! |q|^n} = \frac{|q|}{n+1}$$

haben wir das Quotientenkriterium für alle $q \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Beispiel (iii)

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ist konvergent, aber sowohl das Wurzel- als auch das Quotientenkriterium versagen.

Beispiel (iii)

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ist konvergent, aber sowohl das Wurzel- als auch das Quotientenkriterium versagen.

Beide Kriterien beruhen ja auf einer Majorisierung durch die geometrische Reihe, was ein ziemlich grober Klotz ist.

