Präsenz 8

Gregor Seewald

26. Juni 2019

Aufgabe: Wir haben eine Urne mit 3 schwarzen(s), 5 weißen(w) und 7 grünen/grauen(g) Kugeln.

a) Wir ziehen einmal:

   i) Was ist der Wahrscheinlichkeitsraum Ω_1 und was ist eine sinnvolle Annahme für ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_1?[Was ist $P(\{w\}), P(\{s\}), P(\{g\})$]

   ii) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit eine Schwarze oder eine Weiße Kugel zu ziehen?(Mit oben definiertem W-Maß.)

   iii) Modelliere das Problem aus $a)ii)$ mit Hilfe einer Zufallsvariable $-:$ $\{w, s, g\} \to \mathbb{R}$

b) Nun ziehen wir zweimal mit zurücklegen

   i) Was ist Wahrscheinlichkeitsraum Ω_2?
   Was ist sinnvolles Wahrscheinlichkeitsmaß P_2(basierend auf P_1?

   ii) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeitsma

      1) zwei weiße Kugeln zu ziehen
      2) eine weiße und eine schwarze zu ziehen
      3) keine weiße zu ziehen
      4) Sind die Ergebnisse 12 stochastisch unabhängig

   iii) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit

      1) als erstes eine Grüne zu ziehen
      2) als zweites eine WEiße zu ziehen
      3) Sind die Ereignisse 12 stochastisch unabhängig

c) Wo ist das Problem unendliches ziehen zu modellieren?

Lösung:

a) i) Der Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega_1 = \{s, w, g\}$
Um das Wahrscheinlichkeitsmaß zu definieren definiere die Zähldichte $f : \{s, w, g\} \to \mathbb{R}$ als $f(w) = \frac{3}{15}, f(s) = \frac{5}{15}, f(g) = \frac{7}{15}$ und definiere ein $A \in \{w, s, g\}$, $P : 2^\Omega \to [0, 1]$
$P_1(A) = \sum_{z \in A} f(z)$

ii)

$$\begin{aligned} P_1(\{w, s\}) &= P_1(\{w\}) + P_1(\{s\}) \\ &= f(w) + f(s) \\ &= \frac{3}{15} + \frac{5}{15} \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

b) i) Es ist

$$\begin{aligned} \Omega = \{\, & s, w, g^2 \\ = \{\, & (w, w), (w, s), (w, g), \\ & (s, w), (s, s), (s, g), \\ & (g, w), (g, s), (g, g) \end{aligned}$$

Ein sinnvolles Wahrscheinlichkeitsmaß ist gegeben durch:
$P(B) = \sum_{(Z_1, Z_2) \in B} P_1(\{Z_1\}) \cdot P_1(\{Z_2\})$

ii) 1) $P_2(\{(w, w)\}) = P_1(\{w\}) \cdot P_1(\{w\}) = \left(\frac{5}{15}\right)^2 = \frac{1}{9}$
2) $P_2(\{(w, s), (s, w)\}) = P_2(\{(w, s)\}) + P_2(\{(s, w)\}) = 2 \cdot P_1(\{s\}) \cdot P_1(\{w\}) = \frac{2}{15}$
3) $P_2(\{(s, s), (s, g), (g, s), (g, g)\}) = \frac{4}{9}$
4) Keine zwei weißen
$P_2(\{(w, w)\}^c) = 1 - P(\{(w, w)\})$