13 Weitere Themen der Analysis

13.1 Komplexe Wurzeln Mit Hilfe von Polarkoordinaten können wir die komplexen Wurzeln, also die Lösungen der Gleichung $z^n = \alpha$ für $\alpha \in \mathbb{C}$, leicht bestimmen. Ist $r = |\alpha| \neq 0$ und $\phi = \arg \alpha$, so lässt sich α in der Form

$$\alpha = r(\cos \phi + i \sin \phi)$$

schreiben. Da bei der komplexen Multiplikation die Beträge multipliziert und die Argumente addiert werden, haben wir genau n Lösungen, die alle den Betrag $\sqrt[n]{r}$ und die Argumente $(\phi + 2k\pi)/n$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ besitzen.

Die Lösungen von $z^n = 1$ werden *komplexe Einheitswurzeln* genannt,

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}.$$

Sie liegen auf dem komplexen Einheitskreis und bilden dort ein reguläres n-Eck.

Da man im Komplexen kein klares Verfahren hat, um die Wurzel eindeutig zu machen, ist man im Gegensatz zum Reellen übereingekommen, alle Lösungen von $z^n = \alpha$ als komplexe Wurzeln $\sqrt[n]{\alpha}$ zu bezeichnen.

Beispiel 13.1 Wir bestimmen alle Lösungen der Gleichung $z^6 - iz^3 = 1$. Mit $w = z^3$ folgt $w^2 - iw = 1$ und

$$(w - \frac{i}{2})^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; w_\pm = \frac{i}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Es gilt $w_\pm = \cos \phi_\pm + i \sin \phi_\pm$ mit $\phi_+ = \pi/6$ und $\phi_- = 5\pi/6$. Damit bekommen wir die 6 Lösungen

$$\cos\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right),\; \cos\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right),\; k = 1, 2, 3.$$

□

13.2 Polynome und Partialbruchzerlegung Für komplexe Zahlen $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ heißt

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 \tag{13.1}$$

(komplexes) Polynom. Ist $a_n \neq 0$, so heißt $\operatorname{grad} p = n$ der *Grad* von p.

Zunächst untersuchen wir die Division mit Rest, die auch als *Euklidischer Algorithmus* bezeichnet wird.

Satz 13.2 (Euklidischer Algorithmus) *Sei p ein Polynom vom Grad m und q ein Polynom vom Grad n mit $m \geq n$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome s und r mit $\operatorname{grad} s = m - n$ und $\operatorname{grad} r < n$ mit*

$$p = qs + r.$$

Beispiel 13.3 Sei

$$p(z) = iz^5 + z^3 - z^2 + 1, \quad q(z) = z^2 - 1.$$

Wir bringen zuerst den höchsten Koeffizienten von p zum Verschwinden,

$$p(z) - iz^3 q(z) = (1 - i)z^3 - z^2 + 1,$$

fahren auf diese Weise fort,

$$p(z) - iz^3 q(z) - (1 - i)zq(z) = -z^2 + (1 - i)z + 1,$$

und erhalten

$$s(z) = iz^3 + (1 + i)z - 1, \quad r(z) = (1 + i)z$$

□

Lemma 13.4 (a) *Sei p ein Polynom vom Grad n. Für jedes $\xi \in \mathbb{C}$ gibt es eindeutig bestimmte komplexe Zahlen $b_n, \ldots, b_0$, $b_n \neq 0$, mit*

$$p(z) = b_n(z-\xi)^n + b_{n-1}(z-\xi)^{n-1} + \ldots + b_1(z-\xi) + b_0. \tag{13.2}$$

In diesem Fall bezeichnen wir ξ als Entwicklungspunkt *des Polynoms p.*

(b) *Besitzt das Polynom p vom Grade n eine Nullstelle $\xi \in \mathbb{C}$, so gibt es ein eindeutiges Polynom q vom Grad $n-1$ mit*

$$p(z) = (z-\xi)q(z).$$

Beweis: (a) Wir multiplizieren die Darstellung (13.2) mit der binomischen Formel aus und vergleichen die Koeffizienten mit (13.1), was

$$b_k = \sum_{i=k}^{n} a_i \binom{i}{k} \xi^{i-k}, \quad \text{insbesondere } b_0 = p(\xi),\ b_n = a_n,$$

ergibt.

(b) Ist ξ eine Nullstelle, so folgt $b_0 = 0$ in der Darstellung (13.2). Wir können $z-\xi$ ausklammern, es verbleibt das gesuchte Polynom q. □

Das Lemma bleibt für reelle Polynome sinngemäß richtig. Insbesondere ist das Polynom q in (b) reell, wenn die Nullstelle ξ reell ist. Für reelle Polynome gilt $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$. Ist daher ξ Nullstelle des reellen Polynoms p, so ist auch $\overline{\xi}$ Nullstelle. Nichtreelle Nullstellen reeller Polynome treten also immer paarweise auf. Aus Lemma 13.4 erhalten wir daher

$$p(z) = (z-\xi)(z-\overline{\xi})q(z) = r(z)q(z),$$

wobei $r(z) = z^2 - 2\mathrm{Re}\,\xi z + |\xi|^2$ ein reelles quadratisches Polynom ist. Mit p und r ist damit auch q reell.

Im Reellen hat die Gleichung $x^2 = -1$ keine Lösung. Historisch gesehen wurden die komplexen Zahlen deshalb eingeführt, weil man glaubte, dass im Körper der komplexen Zahlen jedes Polynom eine Nullstelle besitzt. Dieser Glaube erwies sich erst relativ spät als begründet, als Gauß den folgenden Statz bewies.

Satz 13.5 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes nichtkonstante Polynom besitzt mindestens eine Nullstelle.*

Einen einfachen Beweis tragen wir in Abschnitt 13.5 nach.

Wenden wir den Fundamentalsatz und Lemma 13.4 sukzessive an, so hat jedes Polynom vom Grad n genau n Nullstellen und genügt der Darstellung

$$p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0 = a_n(z-\xi_1)\ldots(z-\xi_n).$$

Dabei können die Nullstellen ξ_i auch mehrfach auftreten.

Die wichtigste Anwendung des Hauptsatzes der Algebra ist eine Darstellung rationaler Funktionen, die *Partialbruchzerlegung* genannt wird. Ist $r(z) = q(z)/p(z)$ eine rationale Funktion, so können wir wegen des Euklidischen Algorithmus $m = \mathrm{grad}\, q < n = \mathrm{grad}\, p$ annehmen. Durch Kürzen des Bruches können wir ferner den höchsten Koeffizienten von p zu 1 normieren. Nach dem Fundamentalsatz hat p die Darstellung

$$p(z) = (z-\xi_1)^{l_1}(z-\xi_2)^{l_2}\ldots(z-\xi_k)^{l_k}$$

mit den Nullstellen $\xi_1, \ldots \xi_k$ und $\sum l_k = n$.

Satz 13.6 *Jede rationale Funktion $r(z) = q(z)/p(z)$ mit $m = \operatorname{grad} q < n = \operatorname{grad} p$ lässt sich eindeutig als Summe von Partialbrüchen schreiben,*

$$\frac{q(z)}{p(z)} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{a_{i1}}{z-\xi_i} + \frac{a_{i2}}{(z-\xi_i)^2} + \ldots + \frac{a_{il_i}}{(z-\xi_i)^{l_i}} \right).$$

Beweis: Wir verwenden vollständige Induktion über den Nennergrad n. Für $n = 1$ ist q konstant und daher nichts zu beweisen. Für den Induktionsschritt dürfen wir annehmen, dass es die behauptete Partialbruchzerlegung gibt für Polynome mit $n = \operatorname{grad} p > \operatorname{grad} q$. Sei also jetzt $r(z) = q(z)/p(z)$ mit $\operatorname{grad} p = n + 1 > \operatorname{grad} q$. Ist ξ eine l-fache Nullstelle von p, so

$$p(z) = (z-\xi)^l s(z) \quad \text{mit } s(\xi) \neq 0.$$

Es gilt

$$\frac{q(z)}{s(z)} - \frac{q(\xi)}{s(\xi)} = \frac{q(z)s(\xi) - s(z)q(\xi)}{s(z)s(\xi)} = \frac{(z-\xi)t(z)}{s(z)} \quad \text{mit } \operatorname{grad} t \leq n-1,$$

weil ξ Nullstelle von $q(z)s(\xi) - s(z)q(\xi)$ ist. Wir haben also

$$\frac{q(z)}{(z-\xi)^l s(z)} - \frac{q(\xi)}{(z-\xi)^l s(\xi)} = \frac{t(z)}{(z-\xi)^{l-1} s(z)}. \tag{13.3}$$

Wegen $\operatorname{grad}\left((z-\xi)^{l-1}s(z)\right) = n > \operatorname{grad} t(z)$ können wir auf der rechten Seite die Induktionsvoraussetzung anwenden und haben die Existenz der Partialbruchzerlegung bewiesen.

Zum Nachweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, dass es zwei Partialbruchzerlegungen mit Koeffizienten a_{ij} und b_{ij} gibt. Wir bilden die Differenz dieser Zerlegungen und erhalten eine Zerlegung der Nullfunktion mit Koeffizienten $a_{ij} - b_{ij}$. Diese multiplizieren wir mit $(z-\xi_j)^{l_j}$. Der Grenzwert $z \to \xi_j$ liefert dann $a_{il_j} = b_{il_j}$. Durch Multiplikation mit $(z-\xi_j)^{l_j - 1}$ lässt sich dieses Argument für die nächstniedrigere Potenz wiederholen. □

Bei der praktischen Durchführung der Partialbruchzerlegung setzt man wie im Satz angegeben an. Indem man die rechte Seite auf den Hauptnenner bringt, lassen sich die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung durch Koeffizientenvergleich bestimmen. Alternativ können wir einzelne Werte für z in den Ansatz einsetzen, was zu einem linearen Gleichungssystem für die gesuchten Koeffizienten führt. Dieses in jedem Fall mühsame Verfahren kann man sich etwas erleichtern, indem man beachtet, dass der höchste Koeffizient der Zerlegung in (13.3) durch $q(\xi)/s(\xi)$ gegeben ist.

Beispiel 13.7 Für $r(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)^2}$ setzen wir an

$$r(z) = \frac{a}{z} + \frac{b_2}{(z-1)^2} + \frac{b_1}{z-1}.$$

Die höchsten Koeffizienten erhalten wir aus (13.3) oder direkt durch folgende Überlegung. Um beispielsweise a zu bestimmen, multiplizieren wir obige Gleichung mit z und führen den Grenzübergang $z \to 0$ durch. Damit hängt die Berechnung von a nicht von den anderen Unbekannten ab und wir erhalten

$$a = \lim_{z\to 0} z r(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z+1}{(z-1)^2} = 1.$$

Auf die gleiche Weise gilt

$$b_2 = \lim_{z\to 1} (z-1)^2 r(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z+1}{z} = 2.$$

Da dieses Verfahren für den letzten Koeffizienten versagt, bestimmen wir ihn durch Einsetzen eines beliebigen z. Für $z = 2$ ist

$$b_1 = r(2) - \frac{a}{2} - b_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 2 = -1$$

und damit
$$\frac{z+1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1}.$$

□

Sind p, q reelle Polynome mit $n = \operatorname{grad} p > m = \operatorname{grad} q$, so lässt sich die Partialbruchzerlegung auch im Reellen durchführen, indem man komplex konjugierte Nullstellen von p zu einem reellen quadratischen Polynom zusammenfasst. Sind $\xi_1, \dots \xi_k$ die reellen Nullstellen von p, so gilt

$$\frac{q(z)}{p(z)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l_i} \frac{a_{ij}}{(z-\xi_i)^j} + \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{b_{ij} z + c_{ij}}{(z^2 + \alpha_i z + \beta_i)^j}.$$

In dieser Darstellung sind alle Größen reell. Die Polynome $z^2+\alpha_i z+\beta_i$ bestimmt man aus $(z-\xi)(z-\overline{\xi})$. Am einfachsten bestimmt man die reelle Partialbruchzerlegung, indem man erst die komplexe berechnet und dann die komplex konjugierten Terme zusammenfasst.

Beispiel 13.8 Für $r(z) = \dfrac{z^3}{(z^2+1)^2}$ setzen wir an

$$r(z) = \frac{a_2}{(z-i)^2} + \frac{a_1}{z-i} + \frac{b_2}{(z+i)^2} + \frac{b_1}{z+i}. \tag{13.4}$$

Die höchsten Koeffizienten bestimmen wir mit

$$a_2 = \lim_{z\to i} (z-i)^2 r(z) = \frac{i}{4}, \quad b_2 = \lim_{z\to -i} (z+i)^2 r(z) = -\frac{i}{4}.$$

Nun setzen wir $z = 0$ und $z = 2i$ in (13.4) ein und erhalten das lineare Gleichungssystem

$$-a_1 + b_1 = 0, \quad 3a_1 + b_1 = 2,$$

mit Lösung $a_1 = b_1 = 1/2$. Die komplexe Partialbruchzerlegung lautet dann

$$r(z) = \frac{i}{4(z-i)^2} - \frac{i}{4(z+i)^2} + \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{2(z+i)}.$$

Um auf die reelle Zerlegung zu kommen, addieren wir die komplex konjugierten Summanden gleicher Ordnung
$$r(x) = -\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1}.$$

□

13.3 Konvergenz komplexer Zahlenfolgen Der Kreis um $a \in \mathbb{C}$ mit Radius ε

$$B_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \varepsilon\} \subset \mathbb{C}$$

heißt *ε-Umgebung* von a. Eine Folge (z_n), $z_n \in \mathbb{C}$, *konvergiert gegen* $\xi \in \mathbb{C}$, wenn in jeder ε-Umgebung von ξ fast alle Folgenglieder liegen.

Satz 13.9 *Mit $z_n = x_n + iy_n$ und $\xi = a + ib$ gilt $z_n \to \xi$ genau dann, wenn $x_n \to a$ und $y_n \to b$ in $\mathbb{R}$.*

Beweis: Für $z = x + iy$ gilt wegen $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$$|x|, |y| \le |z| \le |x| + |y|. \tag{13.5}$$

$z_n \to \xi$ ist äquivalent zu

$$|z_n - \xi| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Mit (13.5) folgt daraus auch $|x_n - a|, |y_n - b| < \varepsilon$ und damit $x_n \to a$ und $y_n \to b$.

Gilt umgekehrt $x_n \to a$ und $y_n \to b$, so folgt wieder aus (13.5) für genügend große n

$$|z_n - \xi| < 2\varepsilon,$$

was $z_n \to \xi$ impliziert. □

Für Reihen komplexer Zahlen wird Konvergenz wie im Reellen mit der Konvergenz der Partialsummen definiert. Entsprechend heißt $\sum z_n$ *absolut konvergent*, wenn $\sum |z_n|$ konvergiert. Nach dem letzten Satz ist dies äquivalent dazu, dass die beiden reellen Reihen $\sum \operatorname{Re} z_n$ und $\sum \operatorname{Im} z_n$ absolut konvergent sind. Daher bleiben Majoranten-, Wurzel- und Quotientenkriterium für die absolute Konvergenz komplexer Reihen gültig.

13.4 Stetigkeit Sei $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$. f heißt *stetig* in $\xi \in D$, wenn für alle Folgen (z_n) mit $z_n \in D$ und $z_n \to \xi$ gilt $f(z_n) \to \xi$. f heißt *stetig in* D, wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.

Wie im Reellen beweist man, dass auch das ε, δ-Kriterium äquivalent zur Stetigkeit ist: f ist genau dann stetig in $\xi \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $|f(z) - f(\xi)| < \varepsilon$ für alle z mit $|z - \xi| < \delta$.

Die aus dem Reellen bekannten Sätze über die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen bleiben mit gleichem Beweis richtig. Aus diesem Themenkreis benötigen wir nur den folgenden

Satz 13.10 *Die Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ seien stetig für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn $|f_n(z)| \leq a_n$ für alle $z \in D$ und die Reihe $\sum a_n$ konvergent ist, so konvergiert die Reihe $\sum f_n(z)$ gleichmäßig absolut gegen eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{C}$.*

13.5 Potenzreihen Die Konvergenz einer komplexen Potenzreihe

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C}$$

lässt sich leicht aus den Sätzen 13.10 und 11.15 ableiten. Wir benötigen eine konvergente Majorante, die sich aus dem Wurzel- oder Quotientenkriterium des Satzes 11.15 ableiten lässt. Satz 11.15 bleibt also für komplexe Potenzreihen gültig, insbesondere haben wir Konvergenz gegen eine stetige Grenzfunktion innerhalb eines Kreises vom Radius $\frac{1}{L}$ und Divergenz außerhalb dieses Kreises.

Jede reelle Potenzreihe $f(x) = \sum a_n x^n$ lässt sich auf die komplexe Zahlenebene mit gleichem Konvergenzradius fortsetzen, indem man einfach $x \in \mathbb{C}$ einsetzt. Auf diese Weise bekommen wir die komplexe Exponentialfunktion sowie den komplexen Sinus und Cosinus

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Indem wir iz in die Exponentialfunktion einsetzen, erhalten wir durch Koeffizientenvergleich die *Eulersche Gleichung*

(13.6) $$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

und damit zwei weitere wichtige Gleichungen

(13.7) $$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Die Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion

$$e^{z+w} = e^z e^w \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C}, \tag{13.8}$$

folgt mit gleichem Beweis wie im Reellen. Hieraus erhalten wir $e^z e^{-z} = 1$, insbesondere $e^z \neq 0$.

Eine anschauliche Vorstellung vom Verhalten der komplexen Exponentialfunktion bekommen wir, indem wir in (13.6) ein reelles y einsetzen

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Für den Absolutbetrag von e^z ist daher nur der Realteil verantwortlich, der Imaginärteil bestimmt die Richtung von e^z. Die Exponentialfunktion ist damit 2π-periodisch in y-Richtung. Aus der letzten Gleichung erhalten wir eine elegante Version der Polardarstellung komplexer Zahlen

$$z = re^{i\phi}, \quad \text{mit } r = |z| \text{ und } \phi = \arg z.$$

Komplexe Multiplikation und Division lassen sich hiermit schön veranschaulichen,

$$zw = rse^{i(\phi+\psi)}, \quad \frac{z}{w} = \frac{r}{s}e^{i(\phi-\psi)}.$$

Für reelle ϕ notieren wir noch einige Folgerungen,

$$|e^{i\phi}| = 1, \quad e^{i\phi} = e^{i(\phi+2k\pi)} \text{ für } k \in \mathbb{Z}, \quad \overline{e^{i\phi}} = e^{-i\phi} = (e^{i\phi})^{-1}.$$

Die meisten Rechenregeln für die reellen trigonometrischen Funktionen lassen sich unter Verwendung der komplexen Beziehungen (13.7),(13.8) jetzt sehr viel einfacher herleiten. Die Additionstheoreme für Cosinus und Sinus erhält man aus

$$\cos(x+y) + i\sin(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} = \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \sin y - \cos x \cos y),$$

indem man hier Real- und Imaginärteile betrachtet.

Als letztes tragen wir den Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra nach. Mit $K_r(\xi)$ bezeichnen wir die Kreislinie um ξ mit Radius r. Für eine beliebige stetige Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die keine Nullstelle in $K_r(\xi)$ besitzt, definieren wir die *Drehungszahl* $d(K_r(\xi), f)$, indem wir gedanklich mit $f(z)$ den Kreis im Gegenuhrzeigersinn entlanglaufen und dabei beobachten, wie oft sich $f(z)$ um den Nullpunkt dreht. Beispielsweise umrundet $f(z) = z$ den Nullpunkt einmal, wenn wir den Kreis $K_1(0)$ entlanglaufen, also $d(K_1(0), z) = 1$. Aus der Darstellung

$$z^n = |z|^n e^{in\phi}, \quad \phi = \arg z,$$

erhalten wir $d(K_r(0), z^n) = n$ für alle $r > 0$.

Die Drehungszahl hängt stetig von f ab: Kleine Störungen von f verändern die Drehungszahl nicht. Das folgende Lemma ist daher anschaulich klar.

Lemma 13.11 *Ist $|f(z)| \geq a > 0$ und $|g(z)| \leq a/2$ auf $K_r(\xi)$, so gilt $d(K_r(\xi), f) = d(K_r(\xi), f+g)$.*

Ist

$$p(z) = z^n + q(z) \quad \text{mit } q(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$$

ein komplexes Polynom, so folgt mit

$$M = |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_0|$$

für $|z| = R \geq 1$ die Abschätzung $|q(z)| \leq MR^{n-1}$. Wegen $|z^n| = R^n$ gilt nach dem Lemma für genügend großes R folglich $d(K_R, p) = d(K_R, z^n) = n$.

Ist $\xi \in \mathbb{C}$ ein Punkt mit $a = |p(\xi)| > 0$, so gibt es wegen der Stetigkeit von p ein $\delta > 0$ mit $|p(z) - p(\xi| < a/2$ für alle z mit $|z - \xi| < \delta$. Daraus folgt aus dem Lemma $d(K_{\delta/2}(\xi), p) = d(K_{\delta/2}(\xi), p(\xi)) = 0$. Wir betrachten eine stetige Deformation, die den Kreis $K_R(0)$ in $K_{\delta/2}(\xi)$ überführt, beispielsweise kann man den Kreis zuerst auf den Radius $\delta/2$ schrumpfen lassen und ihn anschließend verschieben. Die Drehungszahl hängt stetig von einer solchen Deformation ab, ist aber immer ganzzahlig. Da sie im Verlauf der Deformation von n auf 0 springt, kann sie nicht immer definiert sein. Dies ist ist aber nur dann der Fall, wenn p eine Nullstelle besitzt.

Man kann dieses Argument noch etwas verfeinern und erhält dann: Die Drehungszahl liefert die Zahl der Nullstellen im umschlossenen Bereich.

13.6 Taylorreihen Wir nennen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

Potenzreihe mit Entwicklungspunkt a. Da es sich hier um nichts weiter als die bereits bekannte Potenzreihe handelt, die lediglich um a verschoben ist, gelten die Sätze 11.15 und 12.10 sinngemäß. Mit

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

ist die Reihe konvergent in

$$D = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < R = \frac{1}{L}\}.$$

f kann in D unendlich oft gliedweise differenziert werden, insbesondere gilt

$$f^{(n)}(a) = n! a_n, \tag{13.9}$$

also

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{13.10}$$

Satz 13.12 *Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ in einer Umgebung von a konvergent. Dann stimmt das Taylorpolynom $T_n(x; a)$ mit dem n-ten Abschnitt der Reihe überein,*

$$T_n(x; a) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k.$$

Ist umgekehrt f unendlich oft differenzierbar mit $R_n(x; a) \to 0$ gleichmäßig in Umgebung von a, so läßt sich in dieser Umgebung f als Reihe (13.10) darstellen.

Der Beweis folgt unmittelbar aus (13.9) und (13.10).

Der Satz von Taylor gibt uns aufgrund des Restgliedes eine Fehlerabschätzung, wenn nur ein Reihenabschnitt ausgewertet werden soll. Als ein Beispiel wollen wir die Zahl e mit Hilfe von

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{e^\xi}{6!} = 2.716\ldots + \frac{e^\xi}{6!}, \quad \xi \in (0,1),$$

angenähert bestimmen. Wegen $e < 3$ gilt

$$\frac{e^\xi}{6!} \le \frac{e^1}{6!} \le \frac{3}{6!} = 0.00595\ldots,$$

also $|e - 2,716\ldots| \le 0.006$, der genaue Wert ist $e = 2,718\ldots$

Den Abschluß bildet die Potenzreihe des Logarithmus.

Satz 13.13 *Für $|x| < 1$ besitzt der Logarithmus die Reihendarstellung*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Beweis: Mit $\ln'(1+x) = 1/(1+x)$ können wir die höheren Ableitungen leicht bestimmen

$$\ln^{(n)}(1+x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Die angegebene Reihe errechnet sich damit aus (13.10) mit $a = 0$. Nach dem Wurzel- oder Quotientenkriterium ist die Reihe in der Tat für $|x| < 1$ konvergent. $\square$

13.7 Differenzengleichungen Am Beispiel der Fibonacci-Folge

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 3, \quad F_1 = F_2 = 1,$$

leiten wir ein allgemeines Verfahren für die explizite Bestimmung rekursiv definierter Folgen her. Dazu verwenden wir die Konvention, dass die Folge für alle $n \in \mathbb{Z}$ definiert ist mit $F_n = 0$ für $n \leq 0$. Ist $a(n)$ eine Aussage, die für alle $n \in \mathbb{Z}$ wahr oder falsch ist, so

$$[a(n)] = \begin{cases} 1 & \text{falls } a(n) \text{ wahr} \\ 0 & \text{falls } a(n) \text{ falsch} \end{cases}.$$

Die Fibonacci-Folge wird daher in der Form

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + [n = 1], \quad n \in \mathbb{Z},$$

geschrieben. Mit $F_n = 0$ für $n \leq 0$ folgt dann $F_1 = 1$ und $F_2 = 1$, wir erhalten also die Fibonacci-Folge zurück.

Im ersten Schritt des Verfahrens ordnen wir der Folge eine Potenzreihe

$$F(z) = \sum F_n z^n \tag{13.11}$$

zu, wobei die Summe sich hier wie im Folgenden über alle $n \in \mathbb{Z}$ erstreckt. Aus der Definitionsgleichung erhalten wir

$$F(z) = \sum F_{n-1} z^n + \sum F_{n-2} z^n + \sum [n = 1] z^n = zF(z) + z^2 F(z) + z,$$

daher

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}. \tag{13.12}$$

Man beachte, dass all diese Operationen rein formal, also ohne Konvergenzbetrachtungen durchgeführt werden. In dieser Hinsicht stellt das beschriebene Verfahren gar keine Anwendung der Analysis dar. Hier wie in den meisten Fällen lassen sich die Umformungen allerdings auch analytisch deuten: Wegen $F^n \leq 2^n$ hat die Reihe (13.11) einen positiven Konvergenzradius und ist die Taylorreihe der rationalen Funktion in (13.12).

$F(z)$ in in (13.12) heißt *erzeugende Funktion* der Potenzreihe (13.11).

Im zweiten Schritt wird für (13.12) eine Partialbruchzerlegung in etwas modifizierter Form durchgeführt. Wir verwenden dazu das folgende Lemma.

Lemma 13.14 *Das dem Polynom*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + 1, \quad a_n \neq 0,$$

zugeordnete reflektierte Polynom

$$p^R(z) = a_n + a_{n-1} z + \ldots + a_1 z^{n-1} + z^n$$

besitze die n Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$*. Dann gilt*

$$p(z) = (1 - \alpha_1 z)(1 - \alpha_2 z) \ldots (1 - \alpha_n z).$$

Beweis: Es gilt $p(z) = z^n p^R(\frac{1}{z})$. Durch Ausmultiplizieren erhalten wir

$$p(z) = z^n (\frac{1}{z} - \alpha_1) \ldots (\frac{1}{z} - \alpha_n) = (1 - \alpha_1 z) \ldots (1 - \alpha_n z).$$

□

Wir bestimmen die Partialbruchzerlegung von (13.12) in der Form

$$\frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{a}{1 - \phi z} + \frac{b}{1 - \hat{\phi} z}, \tag{13.13}$$

wobei nach dem Lemma ϕ und $\hat{\phi}$ die Nullstellen des reflektierten Polynoms $p^R(z) = z^2 - z - 1$ zu $p(z) = 1 - z - z^2$ sind. Für diese erhalten wir

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \hat{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Die Koeffizienten in (13.13) werden völlig analog zur üblichen Partialbruchzerlegung bestimmt. Wir multiplizieren mit $1 - \phi z$ und werten an der Stelle $z = 1/\phi$ aus

$$a = \frac{z}{1 - \hat{\phi} z}\Big|_{z=1/\phi} = \frac{1}{\phi - \hat{\phi}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Für b erhalten wir analog $b = -1/\sqrt{5}$, insgesamt

$$\sum F_n z^n = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}(1 - \phi z)} - \frac{1}{\sqrt{5}(1 - \hat{\phi} z)}. \tag{13.14}$$

Aus der geometrischen Reihe folgt für $\alpha \neq 0$

$$\frac{1}{1 - \alpha z} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^n$$

und daher mit Koeffizientenvergleich in (13.14)

$$F_n = \frac{\phi^n - \hat{\phi}^n}{\sqrt{5}}.$$

Dies ist die *Binetsche Darstellung* der Fibonacci-Zahlen, die aber bereits früher von L. Euler angegeben wurde.

Es dürfte klar sein, das mit dem hier beschriebenen Verfahren auch allgemeine Rekursionen angegangen werden können. Ist (f_n) eine beliebige Folge, so nennen wir

$$f(z) = \sum f_n z^n$$

die *zugeordente Potenzreihe*. Eine elementare Funktion mit Reihendarstellung f heißt *erzeugende Funktion*. Im Falle einfacher Rekursionsgleichungen wie der Fibonacci-Folge wird die erzeugende Funktion rational sein und wir können Partialbruchzerlegung verwenden. Treten im Nennerpolynom mehrfache Nullstellen auf, so entstehen Terme der Form

$$\frac{1}{(1-\alpha z)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} \alpha^n z^n, \tag{13.15}$$

was man mit Induktion über m beweist.

Beispiel 13.15 Wir bestimmen die Lösung der Rekursion

$$f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2} + (-1)^n,\ n \geq 2, \quad f_0 = f_1 = 1.$$

In diesem Fall ist bereits $f_0 = 1$, was nichts ausmacht, wenn wir die Rekursion so umschreiben, dass sie für alle $n \in \mathbb{Z}$ richtig ist. Wir setzen

$$f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2} + (-1)^n[n \geq 0] + [n = 1].$$

und aus $f_{-2} = f_{-1} = 0$ folgt $f_0 = 1$, $f_1 = 1$. Damit wird die Folge für alle $n \in \mathbb{Z}$ korrekt dargestellt. Für die zugeordnete Reihe gilt

$$\begin{aligned} f(z) = \sum f_n z^n &= \sum f_{n-1} z^n + 2 \sum f_{n-2} z^n + \sum (-1)^n z^n [n \geq 0] + \sum z^n [n = 1] \\ &= z f(z) + 2z^2 f(z) + \frac{1}{1+z} + z, \end{aligned}$$

daher

$$f(z) = \frac{1 + z(1+z)}{(1+z)(1-z-2z^2)} = \frac{1+z+z^2}{(1-2z)(1+z)^2}.$$

In

$$f(z) = \frac{a}{1-2z} + \frac{b}{1+z} + \frac{c}{(1+z)^2}$$

erhalten wir

$$a = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{9}{4}} = \frac{7}{9}, \quad c = \frac{1-1+1}{1+2} = \frac{1}{3}.$$

Durch Einsetzen von beispielsweise $z = 0$ folgt $b = -\frac{1}{9}$ und mit (13.15)

$$f_n = \frac{7}{9} 2^n - \frac{1}{9}(-1)^n + \frac{1}{3}(n+1)(-1)^n = \frac{7}{9} 2^n + \left(\frac{1}{3} n + \frac{2}{9}\right)(-1)^n.$$

□

Wir betrachten nun einen Spezialfall, nämlich die *homogene lineare Differenzengleichung der Ordnung k*

$$f_n = a_{k-1} f_{n-1} + \ldots + a_1 f_{n-k+1} + a_0 f_{n-k}. \tag{13.16}$$

In diesem Fall benötigen wir k Anfangswerte, beispielsweise die Kenntnis von $f_0, \ldots, f_{k-1}$, um die Rekursion starten zu können. Wir setzen $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{C}$ voraus und betrachten die Lösungsmenge ebenfalls in $\mathbb{C}$. Die Menge der Lösungen von (13.16) bilden dann einen linearen Vektorraum über $\mathbb{C}$, denn wenn wir zwei Lösungen addieren oder eine Lösung mit einer komplexen Zahl multiplizieren, erhalten wir ebenfalls eine Lösung. Da wir $f_0, \ldots, f_{k-1}$ frei wählen können und bei jeder Wahl genau eine Lösung bekommen, ist die Dimension dieses Vektorraums genau k. Um eine Basis des Lösungsraums zu konstruieren, untersuchen wir den Ansatz $f_n = \alpha^n$ mit einer komplexen Zahl α.

Setzen wir dies ein und teilen durch α^{n-k}, so erfüllt f_n genau dann die Rekursionsgleichung, wenn α Nullstelle des *charakteristischen Polynoms*

$$q(\alpha) = \alpha^k - a_{k-1}\alpha^{k-1} - \ldots - a_1\alpha - a_0$$

ist. q stimmt mit dem zuvor als p^R bezeichneten Polynom überein. Sind die Nullstellen $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ von q alle verschieden, so ist die allgemeine Lösung der Rekursion (13.16)

$$f_n = c_1\alpha_1^n + \ldots + c_k\alpha_k^n, \quad c_j \in \mathbb{C}. \tag{13.17}$$

Die Konstanten $c_1, \ldots, c_k$ werden aus den Anfangsbedingungen für die f_n bestimmt.

Ist α_j eine r-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms mit $r > 1$, so lässt sich leicht nachrechnen, dass $f_n = c_{j,1}\alpha_j^n$, $c_{j,2}n\alpha_j^n, \ldots, c_{j,r}n^{r-1}\alpha_j^n$ ebenfalls Lösungen der Rekursion sind. Da ein Polynom vom Grade k genau k Nullstellen besitzt, haben wir also immer k partikuläre Lösungen, deren Konstanten aus den k Anfangsbedingungen bestimmt werden können.

Beispiele 13.16 (i) Für die Fibonacci-Folge ist das charakteristische Polynom $p(\alpha) = \alpha^2 - \alpha - 1$ mit den bekannten Nullstellen $\alpha_1 = \phi$, $\alpha_2 = \hat{\phi}$. In der allgemeinen Lösung

$$f_n = c_1\phi^n + c_2\hat{\phi}^n$$

liefern die Anfangsbedingungen $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ das lineare Gleichungssystem

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1\phi + c_2\hat{\phi} = 1,$$

mit Lösung $c_1 = -c_2 = 1/\sqrt{5}$.

(ii) Das oben behandelte Beispiel

$$f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2} + (-1)^n,\ n \geq 2, \quad f_0 = f_1 = 1.$$

ist nicht von der Form (13.16). Wir können die Rekursion erneut auf f_{n-1} anwenden und erhalten

$$f_n = (f_{n-2} + 2f_{n-3} + (-1)^{n-1}) + 2f_{n-2} + (-1)^n = 3f_{n-2} + 2f_{n-3}.$$

Das charakteristische Polynom

$$p(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha - 2 = (\alpha - 2)(\alpha + 1)^2$$

hat für $\alpha_2 = -1$ eine doppelte Nullstelle. Das führt auf die allgemeine Lösung

$$f_n = c_1 2^n + c_2(-1)^n + c_3 n(-1)^n.$$

Aus der Anfangsbedingung $f_0 = f_1 = 1$, $f_2 = 4$, erhalten wir wie oben $c_1 = 7/9$, $c_2 = 2/9$, $c_3 = 1/3$. □