

## Тема 5. Основные законы распределения: нормальный закон.

### Практические задания для самостоятельного выполнения

Задания выполняются по вариантам. Формулировка задания общая для всех вариантов; конкретные условия, указанные в общей формулировке, выбираются согласно номеру вашего варианта и описанию задачи (для удобства представлены в отдельном файле).

Результаты выполнения задания необходимо представить в виде двух файлов:

- 1) ноутбук в формате *ipynb*, содержащий программный код, результаты его выполнения, а также все необходимые пояснения, выводы и комментарии (в текстовых ячейках);
- 2) файл в формате *pdf* (или *html*), полученный путем экспорта (или вывода на печать) ноутбука из п. 1.

Внимание: в названии файлов должна обязательно присутствовать фамилия автора. Безымянные работы проверяться не будут.

Обратите внимание, что все необходимые для выполнения задания программные конструкции рассмотрены в учебных ноутбуках, размещенных в системе LMS. После изучения этих материалов выполнение задания не потребует больших усилий.

Максимальная оценка за выполнение задания вне аудитории – 1 балл. Дополнительные баллы (от 0 до 4) можно будет получить на следующем практическом занятии по результатам тестирования.

Внимание: самостоятельное и вдумчивое выполнение задания серьезно повышает вероятность успешного прохождения теста (будет проверяться понимание работы принципов работы с инструментарием и, в частности, умение понимать программный код).

### Задание 1

1. По описанию случайной величины, данному в задаче, определить и записать в текстовой ячейке:
  - класс случайной величины;
  - закон распределения;
  - значение параметров закона распределения.
2. Создать случайную величину с данным распределением.
3. Для созданной случайной величины:
  - 1) построить график функции плотности распределения вероятностей;
  - 2) построить график функции распределения.

4. Для созданной случайной величины:

- 1) вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение;
- 2) вычислить указанные в задаче квантиль и вероятность;
- 3) дать интерпретацию полученным числовым значениям характеристик (записать в текстовой ячейке);
- 4) проверить правило «трех сигма». Для этого:
  - сгенерировать массив из не менее чем 300 значений случайной величины,
  - вычислить частоту попадания значений в интервал  $(m - 3\sigma; m + 3\sigma)$  как отношение количества попавших в интервал значений к общему количеству сгенерированных значений,
  - сравнить полученную частоту с теоретическим значением  $P(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma)$ ,
  - оценить выполнение правила «трех сигма» на основе проведенного сравнения, рассуждения и вывод записать в текстовой ячейке.

5. Изучить влияние значений параметров на характер закона распределения. Для этого:

- 1) на одном графике построить не менее трех функций плотности распределения вероятностей с разными значениями параметров;
- 2) то же самое проделать для функции распределения;
- 3) на основании полученных результатов сделать выводы (записать в текстовой ячейке) о влиянии значений параметров на характер закона распределения.

Внимание. Все выводимые числовые значения на консоли должны быть подписаны. Все графики должны иметь название и названия осей. В случае, когда на графике изображены несколько линий, каждая линия должна иметь свое оформление и к графику должна быть добавлена легенда.

## Задание 2

Центральная предельная теорема утверждает, что сумма достаточно большого количества независимых одинаково распределенных случайных величин будет иметь распределение, близкое к нормальному.

Для исследования–проверки работы центральной предельной теоремы будем использовать такую ее формулировку.

Пусть независимые случайные величины  $X_1, X_2, \dots, X_n$  имеют одно и тоже распределение (при этом неважно, дискретное или непрерывное) с математическим ожиданием  $M(X_k) = m$  и дисперсией  $D(X_k) = \sigma^2$ . Тогда случайная величина

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

имеет асимптотически нормальное распределение с параметрами  $M(\bar{X}) = m$  и  $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

1. Создать случайную величину с указанным законом распределения.
2. Сгенерировать выборку из 1000 значений случайной величины с этим распределением.
3. Построить гистограмму распределения значений выборки и график плотности распределения вашей случайной величины на одной координатной плоскости.

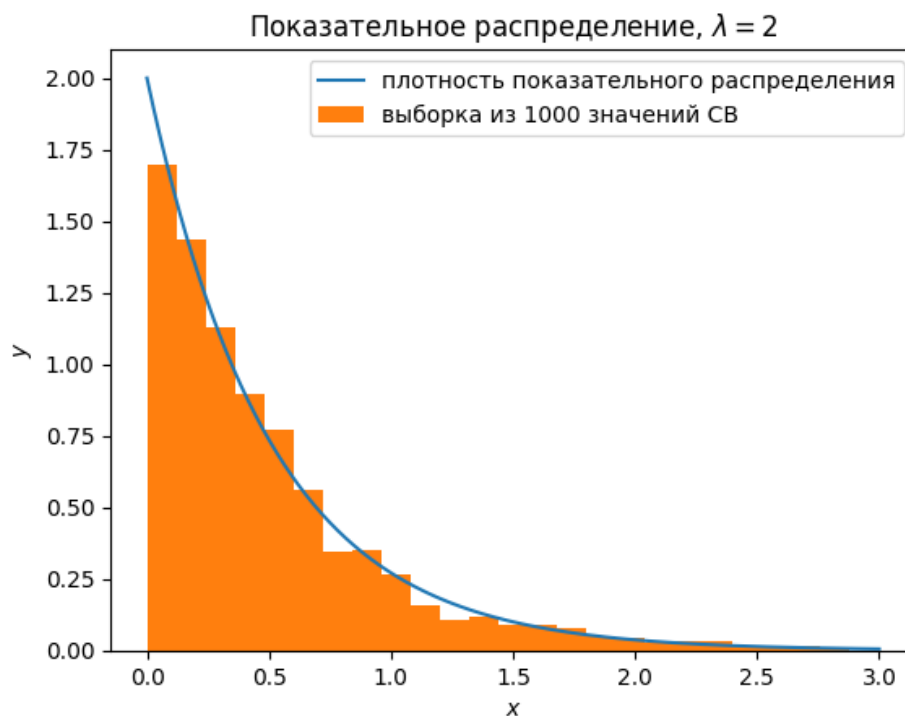
Указание. Для построения гистограммы используйте метод *hist* из библиотеки *matplotlib*

```
matplotlib.pyplot.hist(x, bins=n, range=(a,b),  
density=True, label='строка')
```

где *x* – массив значений случайной величины, *bins* – количество столбцов гистограммы, *a* и *b* – границы диапазона построения гистограммы, *строка* – текст для легенды.

[Документация метода hist](#)

Примерный результат первого шага:



4. Для четырех или более значений *n* (например, 5, 10, 50, 100 – подберите значения так, чтобы иллюстрация работы центральной предельной теоремы была как можно более наглядной) сгенерировать массивы из 1000 значений случайной величины

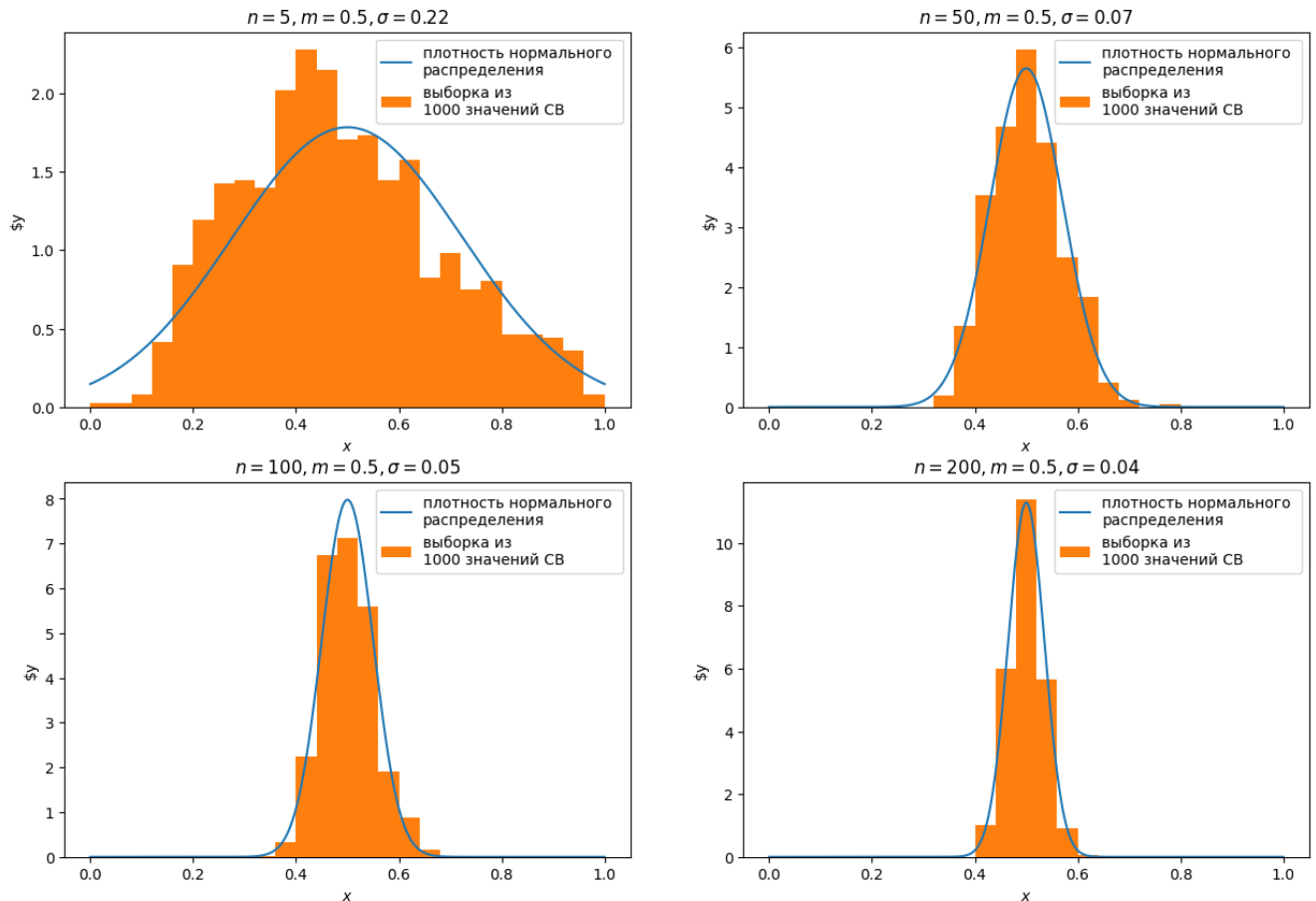
$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

где  $X_k$  – случайные величины с вашим распределением.

Указание. Для генерации массивов рекомендуется написать функцию с параметром *n*.

5. Для каждого значения  $n$  рассчитать значения параметров нормальных распределений, которыми, согласно центральной предельной теореме, приближается распределение случайной величины  $\bar{X}$ .
6. Для каждого значения  $n$  построить гистограмму распределения значений  $\bar{X}$  и график функции плотности нормального распределения с соответствующими параметрами.

Примерный результат четвертого шага:



7. На основе проведенного исследования, в текстовой ячейке:

- дать визуальную оценку схожести распределения  $\bar{X}$  и нормального распределения,
- ответить на вопрос: как влияет значение  $n$  на близость распределения  $\bar{X}$  к нормальному распределению?
- оценить, согласуются ли полученные результаты с утверждением центральной предельной теоремы.