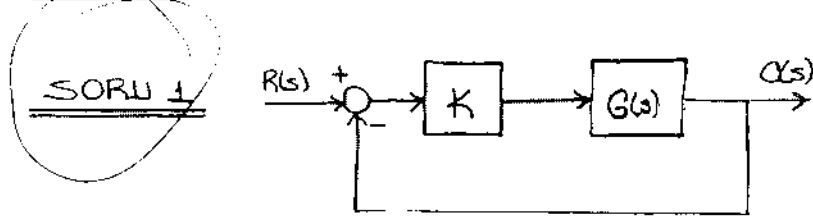


Uygulama 2



$$G(s) = \frac{s^2 - 2s + 2}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

- ① Yukarıda verilen birim geribeslemeli sistem için köklerin yer eğrisini çiziniz. $\frac{dG(s)}{ds} = 0$ için kökler $s_1 = -2,563$, $s_2 = -1,422$ ve $s_3 = -0,298$ olarak hesaplanmıştır. ② Routh-Hurwitz analizini kullanarak geribesleme sistemini kararlı yapacak K aralığını bulunuz.

- ③ Sistemin ~~iletirici~~ transfer fonksiyonu;
ileri yol x geri yol
(Açık çevrim transfer fonksiyonu)

$$K.G(s) = \frac{K(s^2 - 2s + 2)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$n = 4$ (sistemin derecesi, açık çevrim kutup sayısı)

$m = 2$ (açık çevrim sıfır sayısı)

kutuplar: 0, -1, -2, -3

sıfırlar: $1 \pm j$

Köklerin yer eğrisinin adım adım çizilmesi:

* İki sayı: 4 (Kapalı çevrim kutupların sayısı kadardır)

* Asimtot sayısı: $n - m = 2$

* Asimtot açısı: $\alpha = \frac{180(2k+1)}{n-m} = 90(2k+1)$,

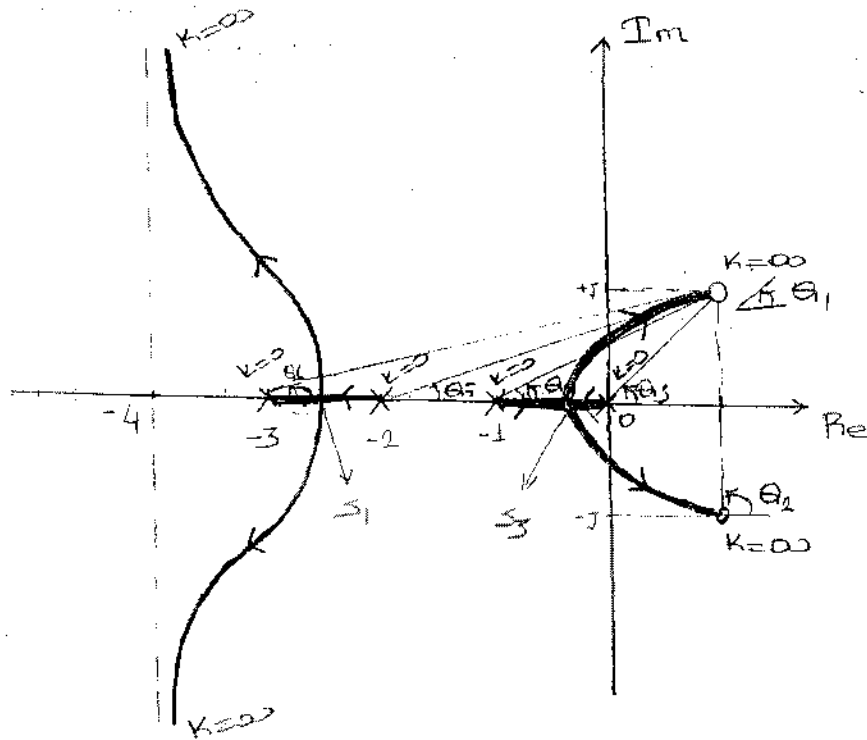
$k=0$ ve $k=-1$ 'de $\alpha = \pm 90^\circ$ 'lik iki asimtot vardır.

* Asimtotların reel eksenini kestiği noktalar

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m} = \frac{(0 - 1 - 2 - 3) - (1 + j)}{2} = -4$$

$$\sum p_i = \sum K.G(s) \text{ kutupları}$$

$$\sum z_i = \sum K.G(s) \text{ sıfırları}$$



* Kök yer eğrisinin reel eksenden ayrılma noktaları soruda verilen s_1 ve s_3 noktalarıdır. (s_2 noktası reel eksen üzerinde kök yer eğrisi üzerinde yer almadığından ayrılma noktası değildir.)

* Karmasık sıfır varma açısı:

$$\theta_1 + \theta_2 - (\theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6) = 180$$

$$\theta_1 + 90 - \left[45 + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \right] = 180$$

$$\theta_1 + 90 - [45 + 26.56 + 18.43 + 14.03] = 180$$

$$\theta_1 = 134.02^\circ$$

⑥ Routh-Hurwitz tablosu ile kararlılık analizi

Sistemin karakteristik polinomu;

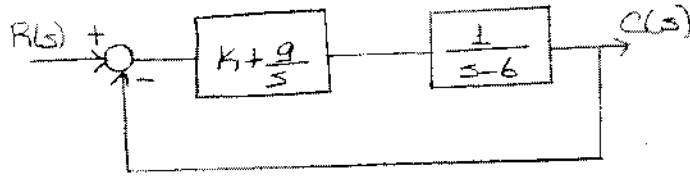
$$P_c(s) = s^4 + 6s^3 + (11+k)s^2 + (6-2k)s + 2k$$

s^4	1	$11+K$	$2K$	
s^3	6	$6-2K$		
s^2	$\frac{10+\frac{4K}{3}}$	$2K$		$\rightarrow 10+\frac{4K}{3} > 0 \Rightarrow K > -7,5$
s^1	$\frac{-4K^2-36K+90}{15+2K}$			$\rightarrow -4K^2-36K+90 > 0$
s^0	$2K$			$-11,03 < K < 2,038$

$\rightarrow 2K > 0 \Rightarrow K > 0$

$0 < K < 2,038$ olduğu için sistem karardır.

SORU 2



a) Birim geribildirimli sistemin kök yer eğrisini çiziniz.

b) Kök yer eğrisini kullanarak stabilite oranını $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ yaparak K değerini hesaplayınız.

$$T(s) = \frac{\left(K + \frac{9}{s}\right) \left(\frac{1}{s-6}\right)}{1 + \left(K + \frac{9}{s}\right) \left(\frac{1}{s-6}\right)} = \frac{Ks + 9}{s(s-6) + Ks + 9}$$

$$P_c(s) = s^2 - 6s + 9 + Ks = 0 \Rightarrow 1 + K \cdot \frac{s}{s^2 - 6s + 9} = 0$$

Köklerin yer eğrisini $GH'(s) = K \cdot \frac{s}{s^2 - 6s + 9}$ 'a göre çizeriz.

* $n=2$, $m=1$, kutuplar: $+3, +3$, sıfırlar: 0

* Kol sayısı: 2

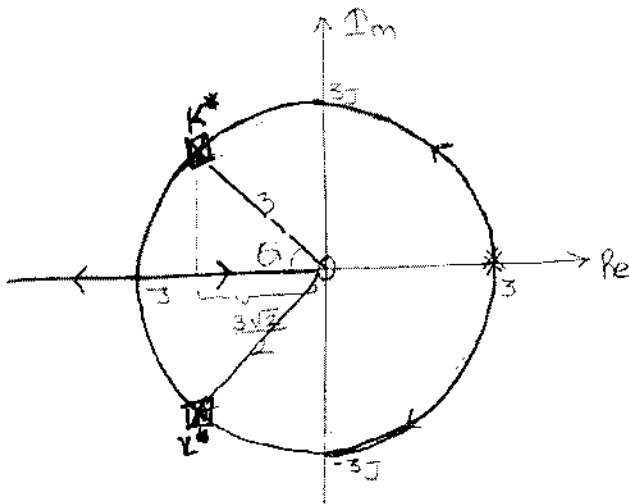
* Asimtot sayısı: $n-m=1$

* Asimtot açısı: $\alpha = \frac{180(2k+1)}{n-m} \Rightarrow \alpha = 180^\circ$

* Asimtot reel eksen üzerindedir.

* Kök yer eğrisinin ayrılma ve kavuşma noktaları:

$$\frac{dGH'(s)}{ds} = \frac{(s^2 - 6s + 9) - s(2s - 6)}{(s^2 - 6s + 9)^2} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} s^2 = 9 \\ s_{1,2} = \pm 3 \end{array} \right.$$



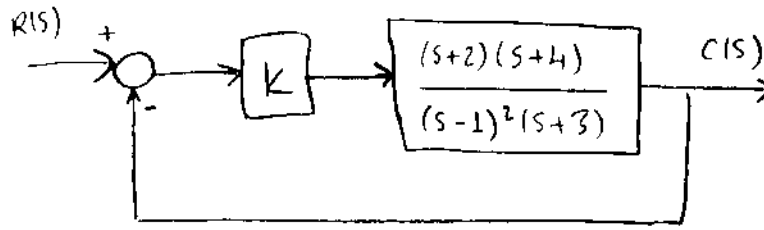
$$b) \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

genlik kriterinden

$$K^* = \frac{\left(\left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + 3 \right)^2 \right)^2}{3}$$

$$K^* = 10,24$$

SORU 3:



- a) Şekilde verilen kapalı çevrimli sistemin köklerinin yer eğrisini K'nın değişen pozitif değerlerine bağlı olarak çiziniz.
Sistemin K'nın hangi değerleri için kararlı olduğunu inceleyiniz

$$\left(\frac{dG_H(s)}{ds} = 0 \right) \text{ yapan değerler } s_1 = 1, s_2 = -7.799, s_{3,4} = -2.601 \pm j0.821 \text{ dir.}$$

- b) K'nın hangi değeri için sönüm oranı $\zeta = 0.4$ ve doğal frekans $\omega_n = 3.94 \text{ rad/s}$ olur?

Çözüm: a) Sistem mertebesi : $n=3$ (kol sayısı) \Rightarrow Kutuplar : 1, 1, -3

Açık çevrim t.f. sıfır sayısı : $m=2 \Rightarrow$ Sıfırlar : -2, -4

Asimptot sayısı : $n-m=1$

$$\text{''} \quad \alpha \text{ açısı : } \alpha = \frac{180(2k+1)}{n-m} = 180^\circ$$

$\Rightarrow +1$ 'deki kopma açıları:

$$\sum (\text{sıfırların } 0 \text{ noktasına olan açısı}) - \sum (\text{kutupların } 0 \text{ noktasına olan açısı}) = 180$$

$$(0+0) - (0+0+0) = -180 \Rightarrow \theta = \mp 90$$

\Rightarrow Karakteristik polinom:

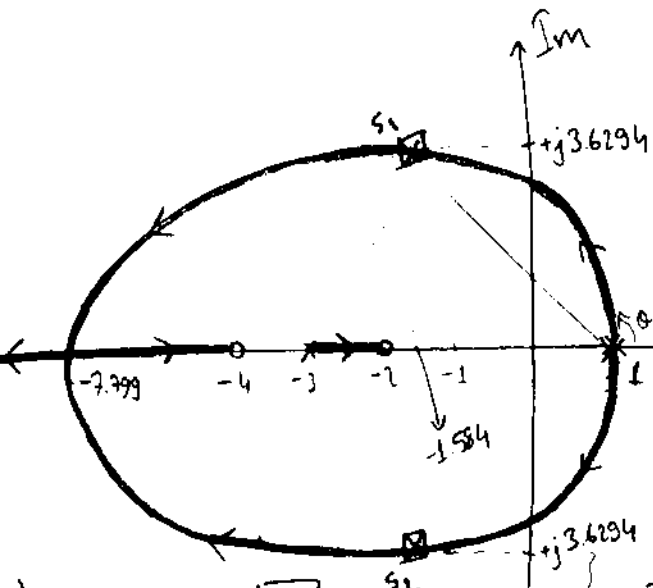
$$P_c(s) = (s-1)^2(s+3) + K(s+2)(s+4) \\ = s^3 + (K+1)s^2 + (6K-5)s + 8K+3$$

Routh Tablosu:

s^3	1	$6K-5$
s^2	$K+1$	$8K+3 \Rightarrow K > -1$
s^1	$\frac{(K+1)(6K-5)-8K+3}{K+1}$	$\Rightarrow K > 1.877$
s^0	$8K+3$	$\Rightarrow K > -0.375$

$K > 1.877$
için
Kapalı Çevrim
Sistem
Kararlıdır.

(5)



$$s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm j \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n \\ = -1.584 \pm j 3.6294$$

$$K^* = \frac{\prod (\text{Kutupların } s_i \text{ e uzaklığı})}{\prod (\text{Sıfırların } s_i \text{ e uzaklığı})} \\ = \frac{(\sqrt{2.584^2 + 3.6294^2})^2 \sqrt{1.416^2 + 3.6294^2}}{\sqrt{0.416^2 + 3.6294^2} \sqrt{2.416^2 + 3.6294^2}} \\ \approx 4.85$$

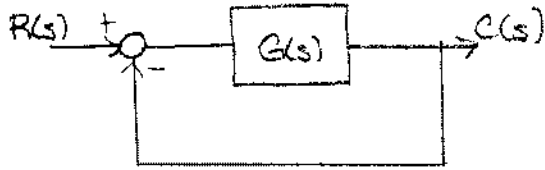
SORU 4 Karakteristik polinomu $q(s) = 2s^4 + 10s^3 + 5,5s^2 + 5,5s + 10$ olarak verilen sistemin Routh-Hurwitz kararlılık ölçütüne göre inceleyerek kararlı olup olmadığını bulunuz. Sistem kararlı değilse sağ yarı düzlemdeki sistem kutbu sayısını belirleyiniz ve nedenini açıklayınız.

$$q(s) = 2s^4 + 10s^3 + 5,5s^2 + 5,5s + 10$$

s^4	2	5,5	10
s^3	10	5,5	
s^2	$\frac{55-11}{10} = 4,4$	$\frac{100-0}{10} = 10$	
s^1	$\frac{4,4 \cdot 5,5 - 100}{4,4} = -17,27$		
s^0	10		

⇒ İlk sütunda negatif değer olduğu için sistem kararlı değildir, ve iki kere işaret değiştirdiği için sağ yarı düzlemde iki tane kutup vardır.

SORU 5 İleri yol transfer fonksiyonu $G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 11s + 30)}$ olarak verilen birim geribeslemeli sistemin K kararlılık aralığını belirleyiniz



$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 11s + 30)}$$

Kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$T(s) = \frac{K}{s^3 + 11s^2 + 30s + K}$$

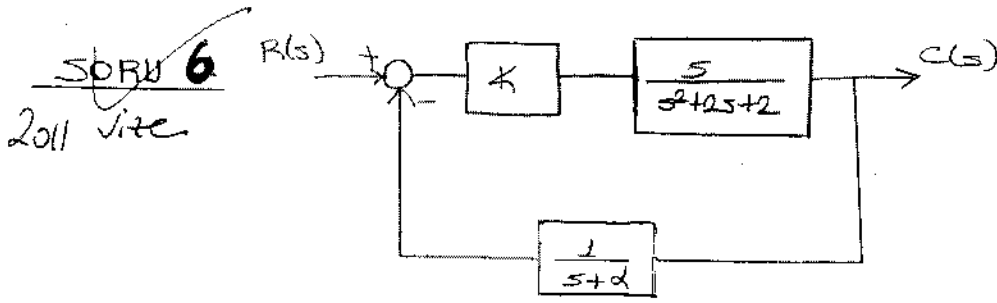
Karakteristik denklem:

$$P_c(s) = s^3 + 11s^2 + 30s + K$$

Routh Hurwitz Tablosu

s^3	1	30	
s^2	11	K	
s^1	$\frac{330-K}{11}$		$\rightarrow \frac{330-K}{11} > 0$
s^0	K		$\rightarrow K > 0$

$0 < K < 330$



a) Şekilde verilen kapalı çevrim sistemde $\alpha=3$ için K 'nin değişen pozitif değerlerine bağlı olarak kök eğrisini çiziniz. $\left(\frac{d}{ds} GH=0\right)$ yapan değerler $s_1=0,935$,
 $s_{2,3}=-1,717 \pm j0,511$

b) Aynı sistemde $K=1$ için α 'nın değişen pozitif değerlerine bağlı olarak kök eğrisini çiziniz. $\left(\frac{d}{ds} GH'=0\right)$ yapan değerler $s_{1,2}=-0,268 \pm j1,311$, $s_{3,4}=-1,732 \pm j0,593$

Not: Burada GH' α 'ya göre düzenlenmiş esdeğer açık çevrim t.f.'dir.

a) $GH = \frac{K \cdot 5}{(s^2+2s+2)(s+3)}$ (açık çevrim transfer fonksiyonu)

$n=3$ (kutup sayısı), kutuplar: $-3, -1 \pm j$
 $m=1$ (sıfır sayısı), sıfırlar: 0

Kol sayısı: 3, Asimtot: $n-m=2$ tane

Asimtot açısı: $\alpha = \frac{180 \cdot (2k+1)}{n-m} = 90^\circ, 270^\circ$

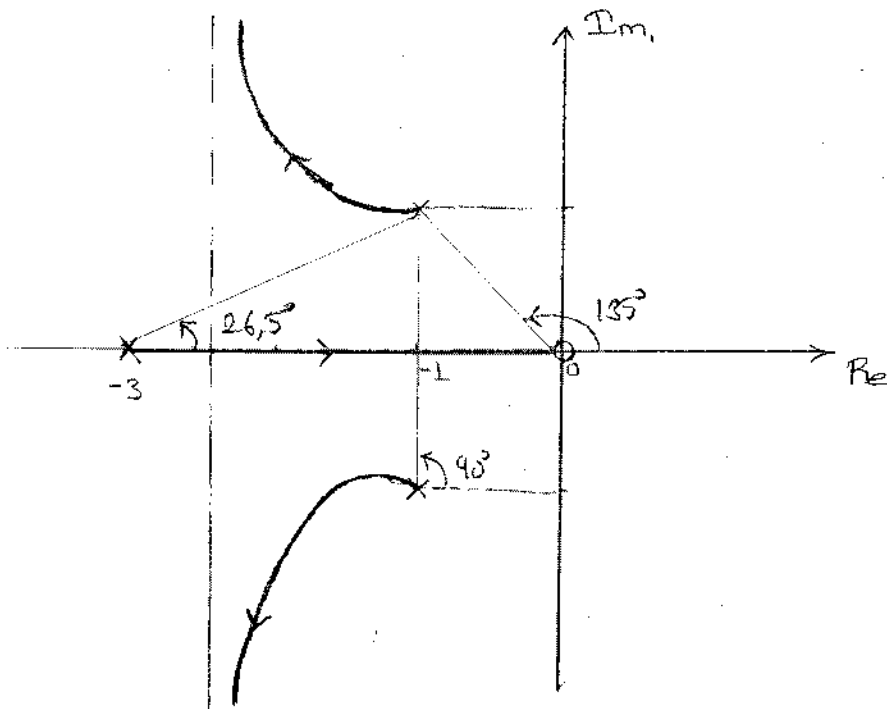
Asimtotun reel eksen kesme noktası

$\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{(-3-1-j) - (0)}{3-1} = -2,5$

$-1+j$ için çıkış açısı

$(135^\circ) - (\theta + 26,5 + 90) = (2j+1) \cdot 180$

$\theta = 198,5$



$$b) \quad G_H' = \frac{s}{(s^2+2s+1)(s+1)} \quad G_H' + 1 = \frac{s}{(s^2+2s+1)(s+1)} + 1 = 0$$

$$(s^2+2s+1)(s+1) + s = 0$$

$$s^3 + (2+1)s^2 + (1+2)s + 1 = 0$$

$$s^3 + 2s^2 + 3s + 1 = 0$$

$$\frac{s(s^2+2s+1)}{s^3+2s^2+3s} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad G_H' = \frac{s(s^2+2s+1)}{s(s^2+2s+3)}$$

$$n=3, \quad m=2$$

$$\text{zeros: } 0, -1 \pm j1$$

$$\text{poles: } -1 \pm j1$$

$$n-m=1 \quad \text{asymptote}$$

$$\alpha = \frac{180(2k+1)}{n-m} = 180^\circ$$

$-1 + 1,41z$ için çıkış açısı

$$(90 + 90) - (\theta + 90 + 125,5) = (2L + 1) 180$$

$$\theta = 164,5^\circ$$

$-1 + z$ için giriş açısı

$$(\theta + 90) - (270 + 90 + 135) = (2L + 2) 180$$

$$\theta = 225^\circ$$

