

1.

$$f(x) = \arctan(x^2 - x + 1)$$

fonksiyonu için  $x = 1$  noktasında

(a)  $h = 0.1, 0.5, 0.025, 0.0125, 0.00625$  adım aralıkları için ileri, geri ve merkezi fark formüllerini kullanarak  $D_h f(x)$  sayısal türevini hesaplayınız.

(b) (a) şıkkındaki adım aralıkları için  $D_h^{(2)} f(x)$  ikinci dereceden sayısal türevi hesaplayınız.

**Çözüm:**

$f(x)$  fonksiyonunun birinci ve ikinci dereceden türevlerinin  $x = 1$  noktasındaki gerçek değerleri şu şekildedir.

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2 - x + 1)^2 + 1} \frac{d(x^2 - x + 1)}{dx} = \frac{2x - 1}{(x^2 - x + 1)^2 + 1}$$
$$\Rightarrow f'(1) = 0.5$$

$$f''(x) = \frac{2 \left( (x^2 - x + 1)^2 + 1 \right) - 2(2x - 1)^2 (x^2 - x + 1)}{\left( (x^2 - x + 1)^2 + 1 \right)^2}$$
$$\Rightarrow f''(1) = 0.5$$

**a.**

İleri Fark Formülü:

$$D_h f(x) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

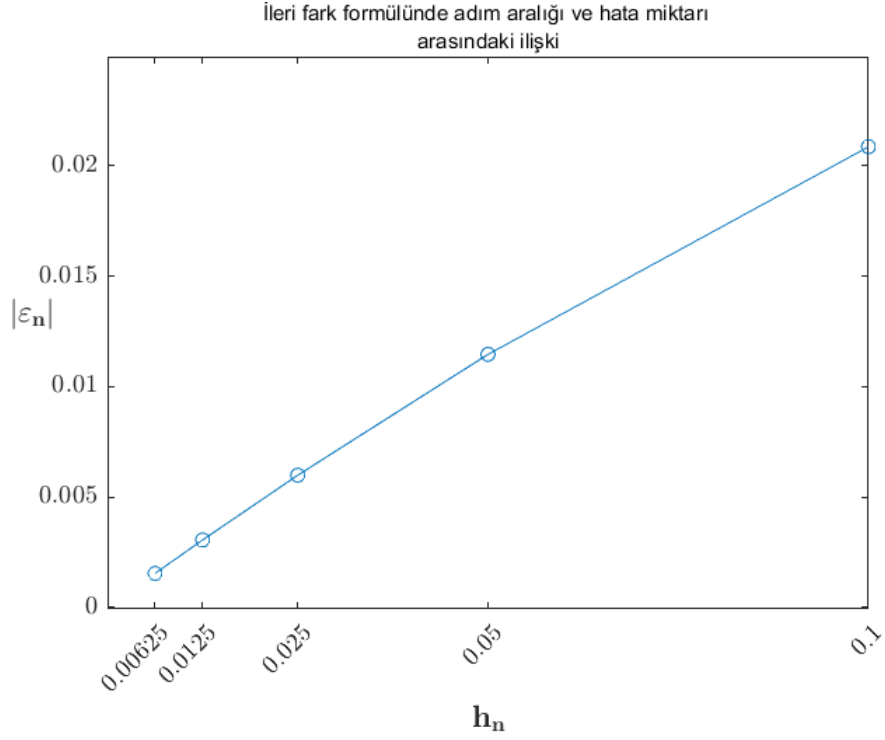
$$\Rightarrow D_h f(1) = \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$$

$$h = 0.1 \Rightarrow D_h f(1) \Big|_{h=0.1} = \frac{f(1 + 0.1) - f(1)}{0.1}$$

$$= \frac{f(1.1) - f(1)}{0.1} = 0.520855492141787$$

n	$h_n$	$D_{h_n}f(1)$	$\varepsilon_n = f'(1) - D_{h_n}f(1)$	$ \varepsilon_{n-1}/\varepsilon_n $
1	0.1	0.520855492141787	-0.020855492141787	-
2	0.05	0.511459730984485	-0.011459730984485	1.82
3	0.025	0.505989670987828	-0.005989670987828	1.91
4	0.0125	0.503059901319629	-0.003059901319629	1.96
5	0.00625	0.501546224301457	-0.001546224301457	1.98

$$\left[ \varepsilon = -\frac{h}{2}f''(c), c \in (1, 1+h) \right]$$



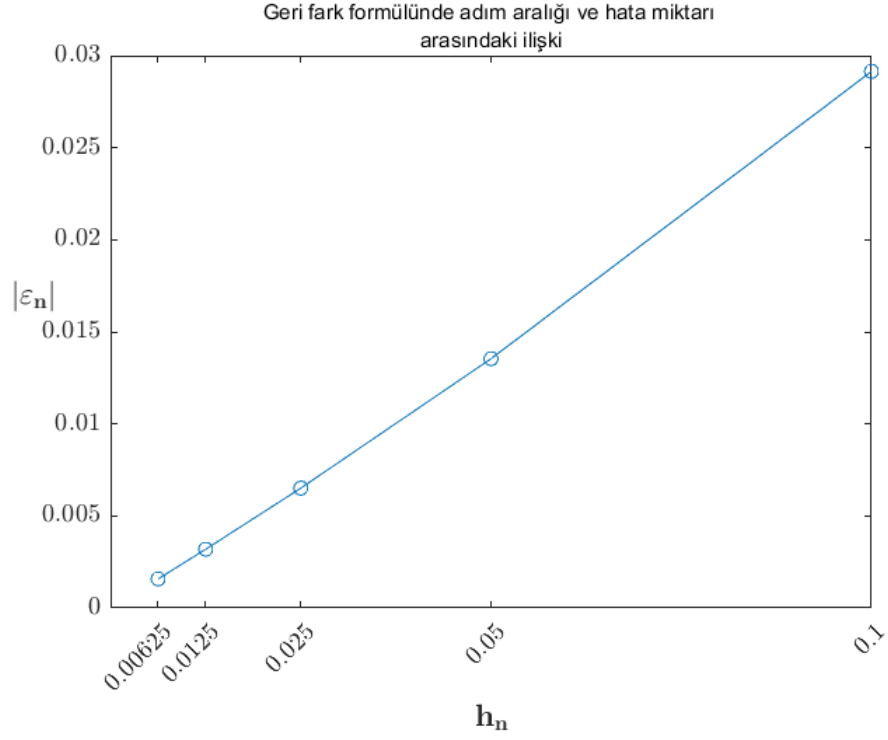
Geri Fark Formülü:

$$D_h f(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$\Rightarrow D_h f(1) = \frac{f(1) - f(1-h)}{h}$$

n	$h_n$	$D_{h_n}f(1)$	$\varepsilon_n = f'(1) - D_{h_n}f(1)$	$ \varepsilon_{n-1}/\varepsilon_n $
1	0.1	0.470855908802202	0.029144091197798	-
2	0.05	0.486459744005305	0.013540255994695	2.15
3	0.025	0.493489671394727	0.006510328605273	2.08
4	0.0125	0.496809901332345	0.003190098667655	2.04
5	0.00625	0.498421224301850	0.001578775698150	2.02

$$\left[ \varepsilon = -\frac{h}{2} f''(c), c \in (1-h, 1) \right]$$



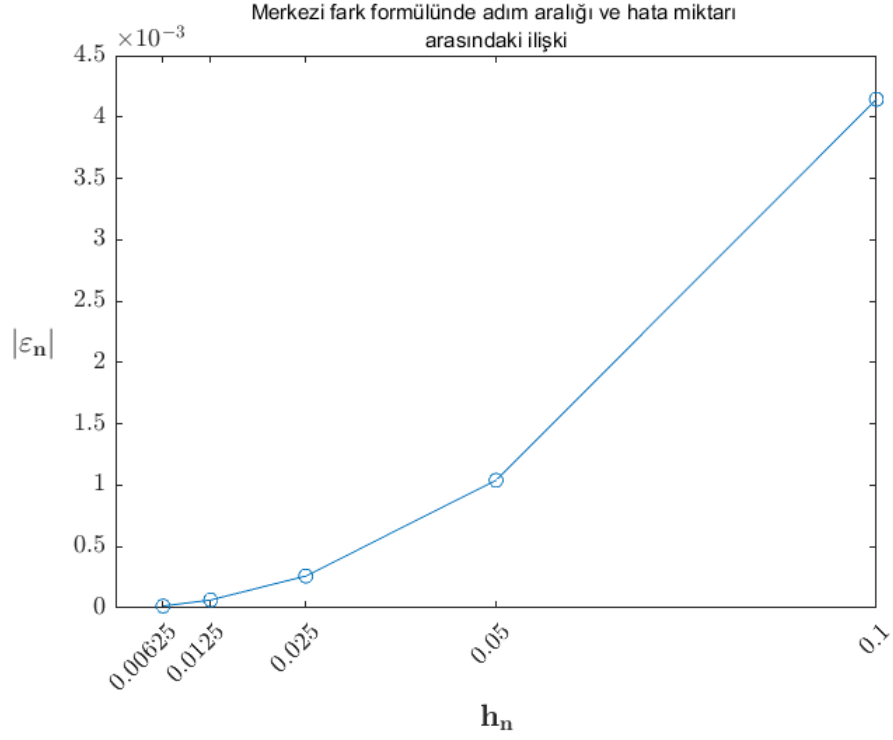
Merkezi Fark Formülü:

$$D_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$\Rightarrow D_h f(1) = \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h}$$

n	$h_n$	$D_{h_n} f(1)$	$\varepsilon_n = f'(1) - D_{h_n} f(1)$	$ \varepsilon_{n-1}/\varepsilon_n $
1	0.1	0.495855700471995	0.004144299528005	-
2	0.05	0.498959737494895	0.001040262505105	3.98
3	0.025	0.499739671191277	2.603288087228428e-4	4
4	0.0125	0.499934901325987	6.509867401316427e-5	4
5	0.00625	0.499983724301654	1.627569834639075e-5	4

$$\left[ \varepsilon = -\frac{h^2}{6} f'''(c), c \in (1-h, 1+h) \right]$$



**b.** İkinci dereceden sayısal türev formülü şu şekildedir.

$$D_h^{(2)} f(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

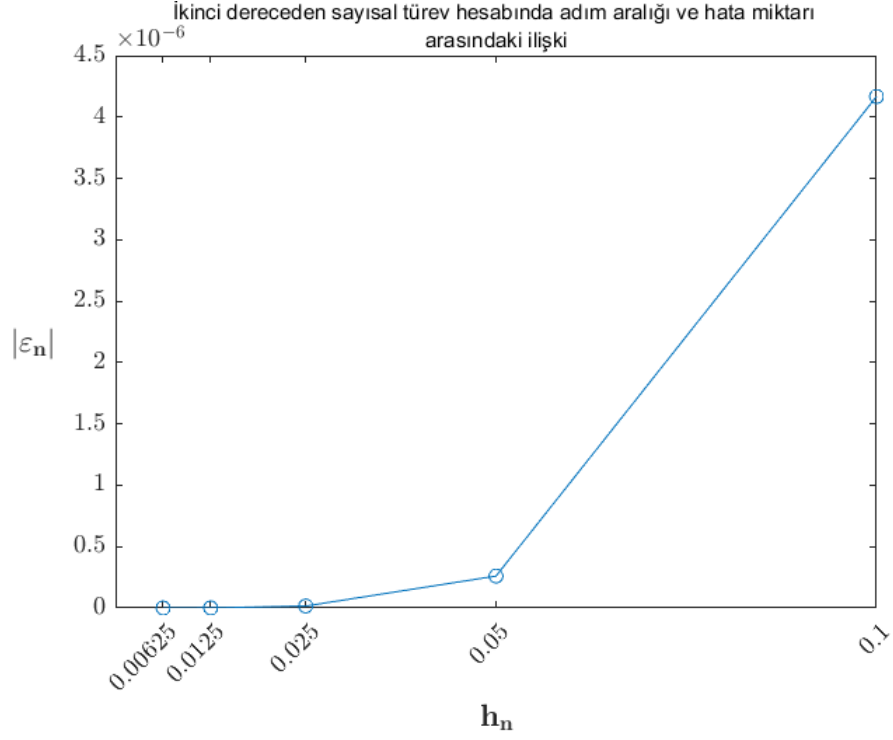
$$\Rightarrow D_h^{(2)} f(1) = \frac{f(1+h) - 2f(1) + f(1-h)}{h^2}$$

$$h = 0.1 \Rightarrow D_h^{(2)} f(1) \Big|_{h=0.1} = \frac{f(1+0.1) - 2f(1) + f(1-0.1)}{(0.1)^2}$$

$$= \frac{f(1.1) - 2f(1) + f(0.9)}{0.01} = 0.499995833395850$$

<b>n</b>	<b><math>h_n</math></b>	<b><math>D_{h_n}^{(2)} f(1)</math></b>	<b><math>\varepsilon_n = f''(1) - D_{h_n}^{(2)} f(1)</math></b>	<b><math> \varepsilon_{n-1}/\varepsilon_n </math></b>
1	0.1	0.499995833395850	4.166604150257491e-6	-
2	0.05	0.499999739583590	2.604164103248152e-7	16
3	0.025	0.499999983724031	1.627596912801010e-8	16
4	0.0125	0.499999998982758	1.017241513245892e-9	16
5	0.00625	0.499999999937017	6.298261912007774e-11	16.15

$$\left[ \varepsilon = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(c), c \in (1-h, 1+h) \right]$$



2. Bir koşucunun belirli zamanlardaki bulunduğu konum bilgileri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

<b>t</b>	0	0.5	1	1.5	2
<b>x</b>	0	3.65	6.8	9.9	12.15

Bu durumda  $t = 0.5$  ve  $t = 1.25$  anındaki hızları tahmin ediniz.

**Çözüm:**

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$x'(0.5) \approx \frac{x(1) - x(0)}{2 \times 0.5} = \frac{6.8 - 0}{1} = 6.8 \quad (\text{merkezi fark formülü ile})$$

$$x'(0.5) \approx \frac{x(1) - x(0.5)}{0.5} = \frac{6.8 - 3.65}{0.5} = 6.3 \quad (\text{ileri fark formülü ile})$$

$$x'(0.5) \approx \frac{x(0.5) - x(0)}{0.5} = \frac{3.65 - 0}{0.5} = 7.3 \quad (\text{geri fark formülü ile})$$

$$x'(1.25) \approx \frac{x(1.5) - x(1)}{2 \times 0.25} = \frac{9.9 - 6.8}{0.5} = 6.2 \quad (\text{merkezi fark formülü ile})$$

$x(1.25)$  bilinmediği için ileri ve geri fark formülleri kullanılamaz.  $h$  adım aralığı seçilen veriye göre belirlenir.