ÖDEV 1

Yiğit Bektaş Gürsoy
040180063

1

a-) Zaman bölgesi Maxwell denklemleri

* $\nabla \times \bar{E} = \dfrac{-d\bar{B}}{dt}$ (Faraday Yasası)(3) * $\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \dfrac{d\bar{D}}{dt}$ (Ampere Yasası)(4)

* $\nabla \cdot \bar{D} = \rho$ (Gauss Yasası) (1) * $\nabla \cdot \bar{B} = 0$ (Manyetizma için Gauss Yasası) (2)

Maxwell denklemleri, elektrik ve manyetik alanların özelliklerini ve karşılıklı ilişkilerini tanımlayan dört denklemden oluşan bir kümeyi açıklar.

→ 1 numaralı denklem ρ elektrik yükünün dağılımını çevreleyen elektrik kuvvet alanını tanımlar.

→ 2 numaralı denklem manyetik alan çizgilerinin kapalı döngüler oluşturmak için kurulduğunu göstermektedir.

→ 3 numaralı denklem zamanla değişen bir manyetik alanın bir elektrik alanının etrafında kurulmasına nasıl sebep olacağını açıklar.

→ 4 numaralı denklem manyetik alanın zamanla değişen bir elektrik alanı veya bir iletkende akan bir elektrik akımı etrafında nasıl kurulduğunu açıklar.

b-) Faraday Yasası : $\nabla \times E = \dfrac{-dB}{dt} = -\mu \dfrac{dH}{dt}$

$$\nabla \times E = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \dfrac{d}{dx} & \dfrac{d}{dy} & \dfrac{d}{dz} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = e_x\left(\frac{dE_z}{dy} - \frac{dE_y}{dz}\right) - e_y\left(\frac{dE_z}{dx} - \frac{E_x}{dz}\right) + e_z\left(\frac{dE_y}{dx} - \frac{dE_x}{dy}\right)$$

$$= \mu\left(-\frac{dH_x}{dt} e_x - \frac{dH_y}{dt} e_y - \frac{dH_z}{dt} e_z\right)$$

$$\frac{dE_y}{dz} - \frac{dE_z}{dy} = \frac{dH_x}{dt} \cdot \mu$$

$$\frac{dE_x}{dz} - \frac{dE_z}{dx} = \frac{dH_y}{dt} \cdot \mu$$

$$\frac{dE_x}{dy} - \frac{dE_y}{dx} = \frac{dH_z}{dt} \mu$$

2-)

Yiğit Bektaş Gürsoy
040180063

a) $E = e_x E_x(z)$ Hemholtz denklemi indirgenirse

$$\rightarrow \frac{d^2 E_x(z)}{dx^2} + k^2 E_x(z) = 0$$

Kaynaksız ortam, çözümde herhangi bir etkisi yok. Bu ideal düzlem dalga çözümüdür.

Böylece; $\boxed{\nabla^2 E + k_0^2 E = 0}$

$r^2 e^{rz} + k^2 e^{rz} = 0 \Rightarrow (r^2 + k^2) e^{rz} = 0 \Rightarrow r = \pm jk$ $\quad e^{jk}$ ve e^{-jk} çözümleri var.

Genel çözüm $\Rightarrow E_x(z) = A e^{jkz} + B e^{-jkz}$

b) a şıkkında genel çözümü bulmuştuk.

$E_x(z) = A e^{jkz} + B e^{-jkz}$ ve $E_x(0) = 2$; $\frac{dE_x(0)}{dz} = 1$

$E_x(0) = A e^{jk0} + B e^{-jk0} = 2$

$E_x(0) = A + B = 2$

$A + B = 2$

$A - B = \frac{1}{jk}$

$2A = \frac{2jk+1}{jk}$

$\frac{dE_x(z)}{dz} = Ajk e^{jkz} - Bjk e^{jkz}$

$\frac{dE_z(0)}{dz} = Ajk - Bjk = 1$

$jk(A - B) = 1$

$A - B = \frac{1}{jk}$

$A = \frac{2jk+1}{2jk}$ (I)

$B = \frac{2jk-1}{2jk}$ (II)

$E_x(z) = \frac{2jk+1}{2jk} e^{jkz} + \frac{2jk-1}{2jk} e^{-jkz}$

$E_x(z) = e^{jkz} + \frac{1}{2jk} e^{jkz} + e^{-jkz} - \frac{1}{2jk} e^{-jkz}$

$= e^{jkz} - \frac{1}{2k} e^{j\pi/2 + jkz} + e^{-jkz} + \frac{1}{2k} e^{j\frac{\pi}{2} - jkz}$

zaman domeninde;

$Re = \{\vec{E}(x) \cdot e^{-jwt}\}$

$Re\{e^{jkz} \cdot e^{-jwt}\} = \cos(kz - wt)$ $\quad Re\{e^{j\pi/2 + jkz} \cdot e^{-jwt}\} = \cos(\pi/2 + kz - wt) = \sin(kz - wt)$

$Re\{e^{-jkz} \cdot e^{-jwt}\} = \cos(kz + wt)$ $\quad Re\{e^{j\pi/2 - jkz} \cdot e^{-jwt}\} = \cos(\pi/2 - kz - wt) = \sin(-kz - wt)$

$E_x(z) = \cos(kz - wt) + \cos(kz + wt) + \frac{1}{2k}[\sin(kz - wt) + \sin(-kz - wt)]$

c) $H = e_y H_y = e_y \frac{E_x(z)}{\eta}$ $\quad \frac{-d\,\mu H}{dt} = e_y\left(-k\sin(kz - wt) - k\sin(kz + wt) + \frac{\cos(kz - wt)}{2} - \frac{\cos(kz + wt)}{2}\right)$

$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{k}{w}\cos(kz - wt) - \frac{k}{w}\cos(kz - wt) + \frac{1}{2w}\sin(kz - wt) + \frac{1}{2w}\sin(kz + wt)\right)\vec{e_y}$

$\vec{H} = \frac{k}{\mu w}(\cos(kz - wt) - \cos(kz + wt)) + \frac{1}{2w}(\sin(kz - wt) + \sin(kz + wt))$

3-) $\vec{H} = \frac{1}{\eta} \vec{n} \times \vec{E}$,, $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{120\pi}{\sqrt{36}} = 20\pi$ //

Yiğit Bektaş Gürsoy
040180063

b) $k = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi\, m$ (Dalga boyu)

c) Dalga yayılma yönü : +y

$$v = v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{10^8}{2} = 5\times10^7 \,(m/s)$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 5\times10^7 = \frac{3\times10^8}{\sqrt{\varepsilon_r}} \Rightarrow \sqrt{\varepsilon_r} = \frac{3\times10^8}{5\times10^7} = 6 \quad , \varepsilon_r = 36$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{120\pi}{\sqrt{36}} = 20\pi \;//$$

d) $\vec{E} = -\eta\, \vec{n} \times \vec{H}$, $\vec{n} = \vec{e_y}$

Zaman $\vec{E} = -80\pi\, \vec{e_y} \times \vec{e_x} \sin(10^8 t - 2y) = +80\pi\, \vec{e_z} \sin(10^8 t - 2y)$

Fazör $= 80\pi\, \vec{e_z} \sin(10^8 t - 2y) = 80\pi\, \vec{e_z} \cos(10^8 t - \pi/2 - 2y)$

$$\vec{E}(y) = Re\left\{ e^{-j(\frac{\pi}{2} + 2y)} \cdot e^{+j10^8 t} \right\} = \vec{e_z}\, 80\pi(-j)\, e^{-j2y}$$

4-) $H(x,t) = 3\cos(2\times10^8 t + kx)\vec{e_y}$, $\varepsilon_r = 9$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 0$

a) $v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\times10^8}{3} = 10^8$ (m/s) $\quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ //

$\frac{2\times10^8}{k} = 10^8 \Rightarrow \frac{2\times10^8}{10^8} = 2$ // $\quad \omega = 2\times10^8 = \frac{2\pi}{T}$, $T = \frac{\pi}{10^8} s$ //

b) $\lambda = \pi$, $\frac{2\pi}{v_p} \Rightarrow \frac{2\times\pi}{10^8} = \frac{\pi}{5\times10^7}$

c) $\vec{E} = -\eta\, \vec{n} \times \vec{H} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{120\pi}{3} = 40\pi \quad \vec{n} = -x$

$$\vec{E} = -40\pi\, -\vec{e_x} \times 3\vec{e_y} \cos(2\times10^8 t + kx) = 120\pi\, \vec{e_z} \cos(2\times10^8 t + 2x) \;//$$

5-) $E(x,t) = 4\cos(4\pi 10^7 t + \beta z + \frac{\pi}{4})\, e_x$ V/m

Yiğit Bektaş Gürsoy
040180063

a) Dalganın ilerleme yönü : $\vec{e_x}$

Elektrik alan vektörünün yönü ; $-\vec{e_z}$

Manyetik alan vektörünün yönü ; $\vec{n} \times \vec{e_x} = -\vec{e_z} \times \vec{e_x} = -\vec{e_y}$

b) Faz sabiti : β

$\omega = 4\pi 10^7 \quad \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{c} = \frac{4\pi 10^7}{3\times 10^8} = \frac{4\pi}{30} = \frac{2\pi}{15}$

$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{15}} = 15m$

c) Fazör bölgesi $\quad 4\cos(4\pi 10^7 t + \frac{2\pi}{15} z + \frac{\pi}{4})e_x = 4\cos(-4\pi 10^7 t - \frac{2\pi}{15} z - \frac{\pi}{4})e_x$

$Re\{\underbrace{e^{-j(\frac{2\pi}{15}z + \frac{\pi}{4})}}_{\text{Fazör}} \cdot \underbrace{e^{-j4\pi 10^7 t}}_{e^{-j\omega t}}\}$ $\quad$ Fazör $= \vec{e_x} 4 e^{-j(\frac{2\pi}{15}z + \frac{\pi}{4})}$

$= \vec{e_x} 4 e^{-j\frac{2\pi}{15}z}(0{,}707 - j0{,}707)$

$\vec{H} = \frac{1}{\eta}\vec{n} \times \vec{E} \Rightarrow \quad \frac{\omega}{k} = V_p \quad \frac{\cancel{4}\pi 10^7}{\frac{\cancel{2\pi}}{15}} = 3\times 10^8$ m/s

$\frac{c}{V_p} = \frac{3\times 10^8}{3\times 10^8} = \sqrt{\varepsilon_r} \quad \varepsilon_r = 1 \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{120\pi}{1}$

$\vec{H} = \frac{1}{120\pi} \cdot -\vec{e_z} \times e_x\, 4\cos(4\pi 10^7 t + \frac{2\pi}{15}z + \frac{\pi}{4}) = \frac{\vec{e_y}}{\cancel{120\pi}\ 30\pi} 4\cos(4\pi 10^7 t + \frac{2\pi z}{15} + \frac{\pi}{4})$

d) $\vec{E} = \eta\vec{H} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$: Ortamın karakteristik empedansı

$\vec{H} = \frac{-\vec{E}}{\eta}$

I) $\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{d\vec{H}}{dt} = -j\omega\mu\vec{H} \quad$ III) $\nabla . \vec{E} = 0$

II) $\nabla \times \vec{H} = \varepsilon\frac{d\vec{E}}{dt} = j\omega\varepsilon\vec{E} \quad$ IV) $\nabla . \vec{H} = 0$

İspat yapmak için curl ve diverjansdan faydalanabiliriz.

$\nabla \times \vec{E} = \eta(\nabla \times \vec{H}) = \eta(j\omega\varepsilon\vec{E})$

$= -j\omega\varepsilon\eta^2(-\frac{\vec{E}}{\eta}) \rightarrow -j\omega\varepsilon\frac{\mu}{\varepsilon}(-\frac{E}{\eta}) = -j\omega\mu\vec{H}$

I numaralı denklemi sağladı.

ilk ifadeyi $-j\omega\mu\vec{H}$ eşitlemek için $\vec{H} = \frac{-\vec{E}}{\eta}$ ifadesini parenteze alarak $\vec{H}$ ifadesini elde ederiz.

Yiğit Bektaş Gürsoy
040190063

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \Rightarrow \eta^2 = \frac{\mu}{\varepsilon}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \nabla \times \left(\frac{-\vec{E}}{\eta}\right) = \frac{-1}{\eta}(\nabla \times \vec{E}) = -\frac{1}{\eta}(-j\omega\mu\vec{H})$$

Sağ taraf $j\omega\varepsilon\vec{E}$ şeklinde olursa yazılan denkleme eşit olacak. $\vec{E} = \eta\vec{H}$ olduğunu biliyoruz, parenteze alarak $\vec{E}$ ifadesini elde ederim.

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{-1}{\eta}(-j\omega\mu H) = j\omega\mu\frac{1}{\eta^2}(\eta\vec{H}) = j\omega\mu\frac{1}{\eta^2}\vec{E} = j\omega\mu\frac{\varepsilon}{\mu}\vec{E} = j\omega\varepsilon\vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \eta(\underbrace{\nabla \cdot \vec{H}}_{0}) = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{H} = \frac{-1}{\eta}(\underbrace{\nabla \cdot \vec{E}}_{0}) = 0$$

III ve IV numaralı maxwell denklemlerinden bu eşitlikler 0 değerini alır. Sonuç olarak yukarıdaki tüm denklemler sağlandı.