EHB - 352

Sayısal Haberleşme

Temel Olasılık Kavramları

2022 Bahar

İbrahim Altunbaş-İTÜ

Tanım (Olasılık): Bir S uzayındaki her A olayına $P(A)$ gibi bir sayı bağlanan ve aşağıdaki aksiyomları gerçekleyen "beklenti ölçüsüne" olasılık denir:

$$P(A) \geq 0 \tag{1}$$

$$P(S) = 1 \tag{2}$$

$$A \cap B = \emptyset \text{ ise } (A \text{ ve } B \text{ ayrık olaylar ise}),\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{3}$$

Tanım (Rastlantı Değişkeni): Bir S uzayındaki herhangi bir olayı reel bir sayıya bağlayan fonksiyona rastlantı değişkeni denir.

Genellikle rastlantı değişkenleri büyük harflerle (örneğin X), bunların oldukları değerler ise küçük harflerle (örneğin x) gösterilir. Eğer bir rastlantı değişkeni sayılamayan sonsuz sayıda değer alıyorsa süreklidir. Eğer bir rastlantı değişkeni sonlu ya da sayılabilir sonsuz sayıda değer alıyorsa ayrıktır.

CDF

Bir rastlantı değişkeni, (birikimli) dağılım fonksiyonu (cumulative distribution function, cdf) veya (olasılık) yoğunluk fonksiyonu (probability density function, pdf) yardımı ile tanımlanabilir.

(Birikimli) Dağılım Fonksiyonu (cdf):

X rastlantı değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonu $F_X(x)$ veya kısaca $F(x)$ ile gösterilir ve

$$F(x) = P(X \leq x)$$

olarak tanımlanır.

Not: $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$, $F(x_1) \leq F(x_2)$ eğer $x_1 < x_2$ ise.

(Olasılık) Yoğunluk Fonksiyonu (pdf):

X rastlantı değişkeni sürekli ise, $P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx$ eşitliğini sağlayan $f_X(x)$ (veya kısaca $f(x)$) fonksiyonuna, X rastlantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyon denir.

Not:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

Ayrık PDF ve CDF

X rastlantı değişkeni ayrık ise ve x_i i. tamsayı değerlerini $P(X = x_i) = p(x_i)$ olasılıkları ile alıyorsa, $p(x_i)$ fonksiyonuna X rastlantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu denir. Gösterimde kimi zaman i indisi kullanılmaz.

Not:

$$p(x_i) \geq 0$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} p(x_i) = 1$$

$$p(x_i) = F(x_i) - F(x_i^-)$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i(x_i \leq x)} p(x_i)$$

Momentler - Mutlak Moment

Momentler:

Bir X rastlantı değişkeninin k. dereceden mutlak momenti (veya kısaca momenti) X^k'nın beklenen değeridir ($k > 0$) ve

$$\mathbb{E}[X^k] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx, & X \text{ sürekli ise} \\ \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i^k p(x_i), & X \text{ ayrık ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. $k = 1$ ise $\mathbb{E}[X]$, X'in ortalama değeri olarak da adlandırılır ve genellikle m_X veya m ile gösterilir.

Momentler - Merkezi Moment

Bir X rastlantı değişkeninin k. dereceden merkezi momenti $(X - m_X)^k$'nın beklenen değeridir ($k > 0$) ve

$$\mathbb{E}[(X - m_X)^k] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^k f(x)\, dx, & X \text{ sürekli ise} \\ \sum_{i=-\infty}^{\infty} (x_i - m_X)^k p(x_i), & X \text{ ayrık ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. $k = 2$ ise $\mathbb{E}[(X - m_X)^2]$, X'in varyansı (değişintisi) olarak da adlandırılır ve genellikle σ_X^2, σ^2 veya $Var(X)$ ile gösterilir.

Not:

1) $Var(X) = \sigma_X^2 = \mathbb{E}[(X - m_X)^2] = \mathbb{E}[X^2] - m_X^2$

2) $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$: Standart sapma

3) $Var(X) \geq 0$

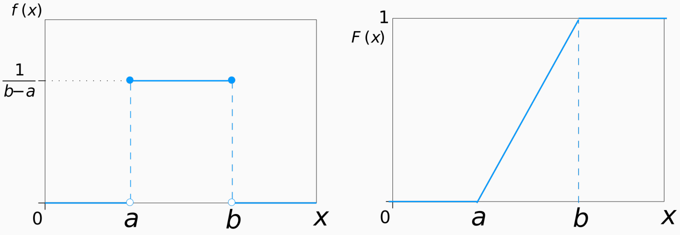
4) a ve b sabit sayılar ise, $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$, $Var(aX + b) = a^2\, Var(X)$

5) Herhangi iki X ve Y rastlantı değişkenleri için $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

Düzgün (Uniform) Dağılım

Düzgün dağılımlı X rastlantı değişkeninin pdf'si $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x \leq b \\ 0, & \text{dışında} \end{cases}$

ve cdf'si $F(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 0, & \text{dışında} \end{cases}$ şeklinde yazılabilir.

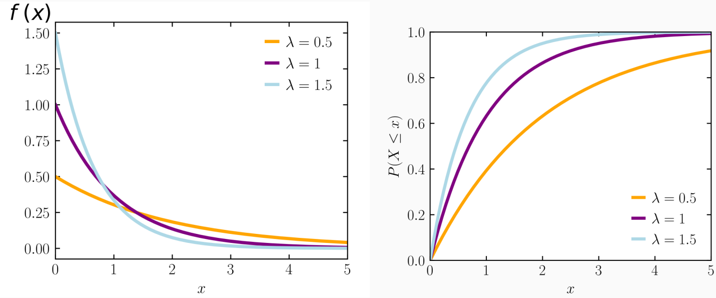


Şekil 1: Düzgün dağılımlı X değişkeninin pdf ve cdf'si.

$m_X = (a + b)/2$, $\sigma_X^2 = (b - a)^2/12$

Üstel (Exponensiyel) Dağılım

Üstel dağılımlı X rastlantı değişkeninin pdf'si $f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0,\ \lambda > 0$ ve cdf'si $F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x \geq 0$ şeklinde yazılabilir.

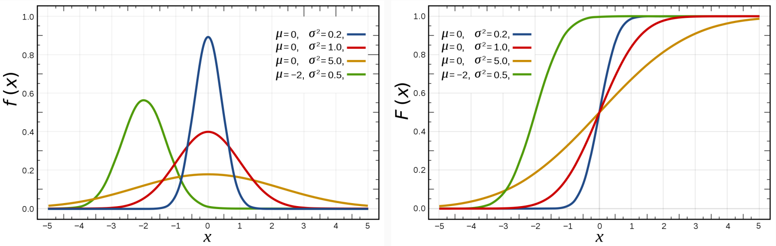


Şekil 2: Üstel dağılımlı X değişkeninin pdf ve cdf'si.

$m_X = 1/\lambda$, $\sigma_X^2 = 1/\lambda^2$

Gauss Dağılımı- Normal Dağılım

Gauss dağılımlı X rastlantı değişkeninin pdf’si $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ ve cdf’si $F(x) = 1 - Q\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ şeklinde yazılabilir.



Şekil 3: Düzgün dağılımlı X değişkeninin pdf ve cdf’si.

$m_X = \mu$, $\sigma_X^2 = \sigma^2$ (Bu dağılım kısaca $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ biçiminde gösterilir.)

$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2/2} du$