

OXS - Uygulama II / Handen 11AK

- 1) a) Karakteristik polinomu $q(s) = 2s^4 + 10s^3 + 5,5s^2 + 5,5s + 10$ olarak verilen sistemin Routh-Hurwitz kararlılık ölçütüne göre inceleyerek sistemin kararlı olup olmadığını bulunuz. Sistem kararlı değil ise sağ yarı s -düzlemindeki sistem kutbu sayısını belirleyiniz ve nedenini açıklayınız.

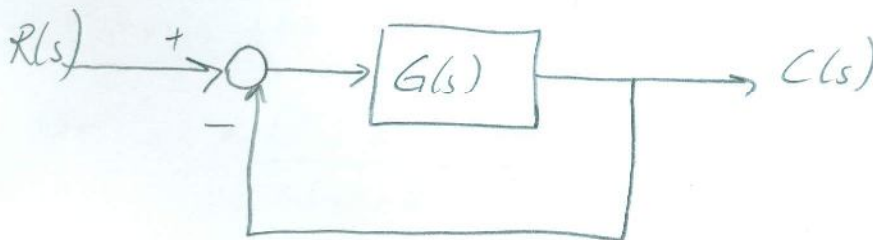
$$q(s) = 2s^4 + 10s^3 + 5,5s^2 + 5,5s + 10$$

s^4	2	5,5	10
s^3	10	5,5	
s^2	$\frac{55-11}{10} = 4,4$	10	
s^1	$\frac{4,4 \cdot 5,5 - 100}{4,4} = -17,23$		
s^0	10		

Sistem kararlı değil. İlk sütunda iki kere işaret değiştiğinden sağ yarı düzlemde iki kutup var.

- b) İleri yol transfer fonksiyonu $G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 11s + 30)}$ olarak

verilen birim geribeslemeli sistemi kararlı kılan K aralığını bulunuz.



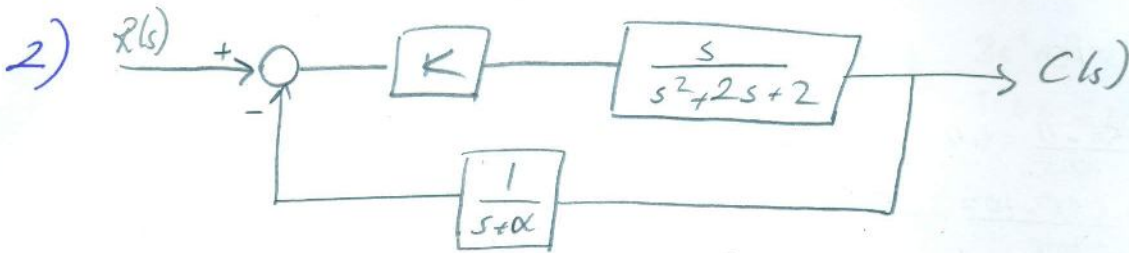
$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{s^3+11s^2+30s+K}$$

$$q(s) = s^3 + 11s^2 + 30s + K$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 30 \\ s^2 & 11 & K \\ s^1 & \frac{330-K}{11} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

$$\frac{330-K}{11} > 0 \quad \text{ve} \quad K > 0 \quad \text{olmalı}$$

$$\Rightarrow 0 < K < 330$$



a) Şekilde verilen kapalı çevrim sistemde $\alpha=3$ için K 'nin değişen pozitif değerlerine bağlı olarak kök eğrisini çizin.

($\frac{d}{ds}GH = 0$ yapan değerler $s_1 = 0,935$, $s_{2,3} = -1,717 \pm j0,511$ 'dir.)

$$GH(s) = \frac{Ks}{(s^2+2s+2)(s+3)}$$

$$n=3, \quad m=1$$

$$\text{kutuplar: } -3, -1 \pm j$$

$$\text{sıfırlar: } 0$$

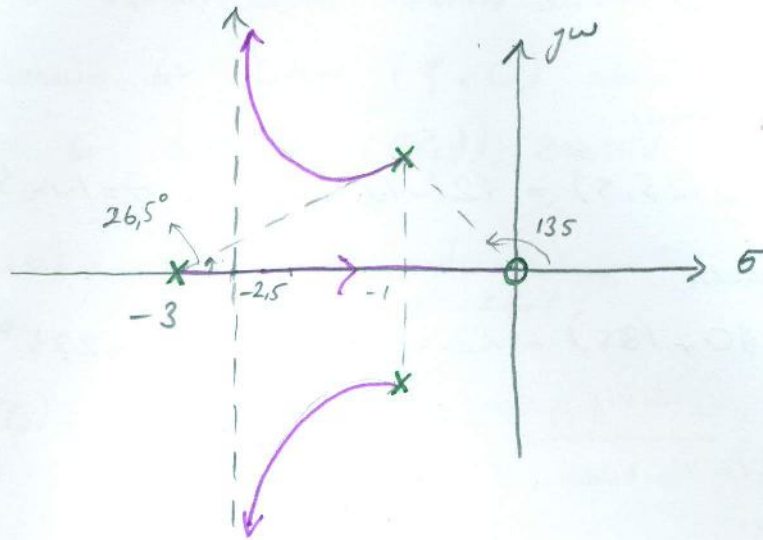
$$n-m=2 \text{ adet asimptot}$$

$$\theta_i = \frac{21+1}{3-1} \cdot 180 = 90^\circ, 270^\circ$$

$$\sigma = \frac{(-3-1-1)-(0)}{3-1} = -2,5$$

-1+j için çıkış açısı

$$135 - (\theta + 26,5 + 90) = (2+1)180 \Rightarrow \theta = 198,5$$



$\frac{d}{ds}GH=0$ için $s_{1,2,3}$ değerleri $1+GH=0$ karakteristik denklemini sağlamadığından kopma noktaları değildir.

b) Aynı sistemde $K=1$ için α 'nın değişen pozitif değerlerine bağlı olarak kök eğrini çiziniz.

$$\left(\frac{d}{ds}GH' = 0 \text{ için değerler: } s_{1,2} = -0,268 \pm j1,311 \quad s_{3,4} = -1,732 \pm j0,593 \right)$$

Not: Burada GH' α 'ya göre düzenlenmiş eşdeğer açık çevrim transfer fonksiyonudur.

$$GH(s) = \frac{s}{(s^2+2s+2)(s+\alpha)}$$

$$GH+1 = \frac{s}{(s^2+2s+2)(s+\alpha)} + 1 = 0$$

$$(s^2+2s+2)(s+\alpha) + s = s^3 + (2+\alpha)s^2 + (3+2\alpha)s + 2\alpha = 0$$

$$s^3 + 2s^2 + 3s + \alpha(s^2+2s+2) = 0$$

$$\alpha \frac{(s^2+2s+2)}{s^3+2s^2+3s} + 1 = 0$$

$$GH' = \alpha \frac{(s^2+2s+2)}{s(s^2+2s+3)}$$

→ $n=3$, $m=2$

→ kutuplar: $0, -1 \pm 1,44j$

→ sıfırlar: $-1 \pm j$

→ $n-m=1$ adet asimptot

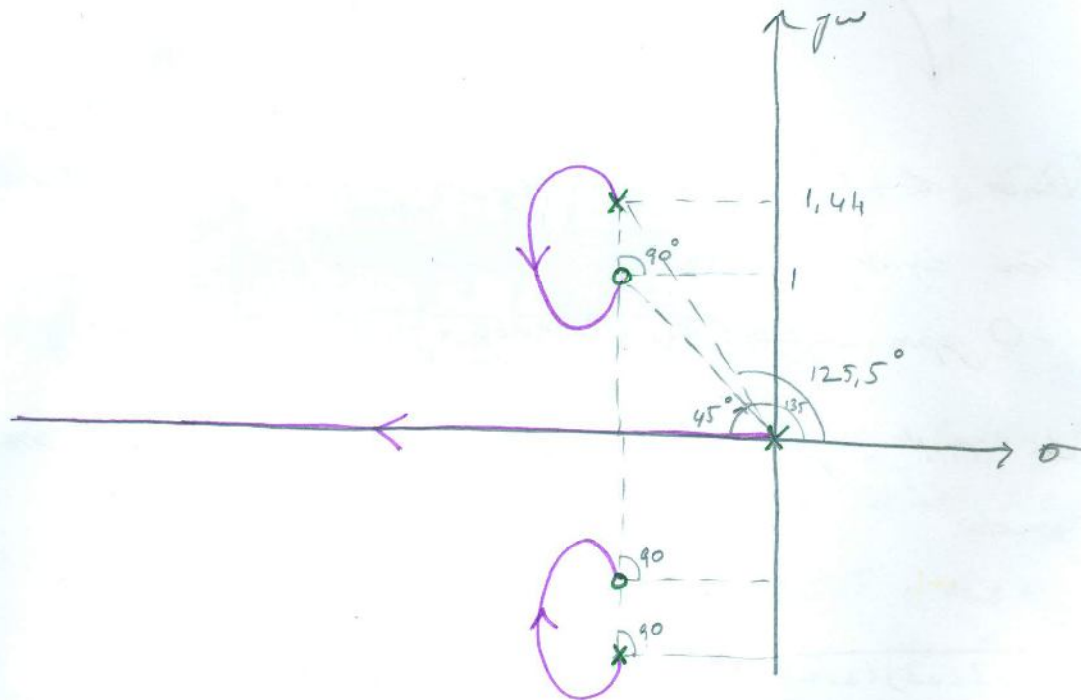
→ $\theta_i = \frac{2i+1}{3-2} \cdot 180 = 180^\circ$

→ $-1 + 1,44j$ için çıkış açısı

$(90+90) - (\theta+90+125,5) = (2i+1)180 \Rightarrow \theta=144,5^\circ$

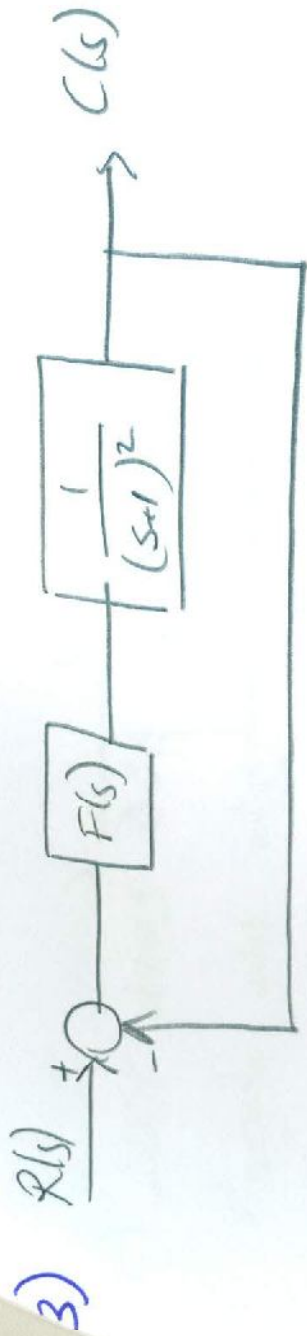
→ $-1+j$ için giriş açısı

$(\theta+90) - (270+90+135) = (2i+1)180 \Rightarrow \theta=225^\circ$



$\frac{dGH'}{ds} = 0$ için s değeri hesaplanabilir. $1+GH'$ karakteristik

denklemini sağlanmadığından hesaba katılmaz.



Yukarıda verilen kapalı geridönüm sistemin doğal frekansı $\omega_n = 1$ olan sönümsüz bir sistem ($\xi = 0$) stabilitesi için mümkün olduğunca basit bir kontrolör ($F(s)$) bulunuz.

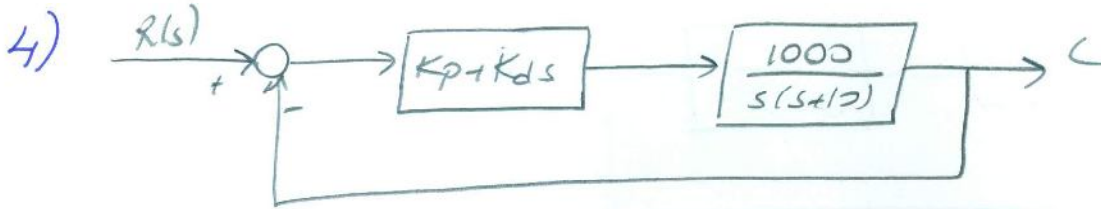
$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

$$T(s) = \frac{F(s) G(s)}{1 + F(s) G(s)} = \frac{F(s)}{s^2 + 2s + 1 + F(s)}$$

$$q(s) = s^2 + 2s + 1 + F(s)$$

$$q_i(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 1$$

$$q(s) = q_i(s) \Rightarrow F(s) = -2s$$



Hız hata katsayısını 1000 ve sönüm oranını $\zeta = 0,5$ yapan PD kontrolörünü bulunuz.

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s (K_p + K_d s) \frac{1000}{s(s+10)}$$

$$K_v = 100 K_p = 1000$$

$$\Rightarrow K_p = 10 \text{ olur.}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1000 (K_p + K_d s)}{s^2 + (10 + 1000 K_d) s + 1000 K_p}$$

$$s^2 + (10 + 1000 K_d) s + 1000 K_p = s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2$$

$$1000 K_p = \omega_n^2 \Rightarrow K_p = 10 \text{ için } \omega_n = 100$$

$$10 + 1000 K_d = 2\zeta \omega_n \Rightarrow \omega_n = 100 \text{ için } K_d = 0,09 \text{ olur.}$$



5) 2008-2009 Güz 2. Vize 2. Soru

Aşağıda blok diyagramı verilen bir robot kolu sisteminde $F(s) = K_p$ ve $G(s) = \frac{s+10}{s(s+3)(s^2+4s+8)}$ olduğu bilinmektedir.

$$\frac{\partial G(s)}{\partial s} = 0 \text{ denklemlerini } s_1 = -12,78, s_2 = -1,273 \text{ ve}$$

$s_{3,4} = -1,97 \pm j1,01$ noktaları için seçilmektedir.



a) Sistemi karotek yapan K_p kazanç aralıklarını bulunuz.

$$T(s) = \frac{(s+10)K_p}{s^4 + 7s^3 + 20s^2 + (24+K_p)s + 10K_p}$$

$$P(s) = s^4 + 7s^3 + 20s^2 + (24+K_p)s + 10K_p$$

s^4	1	20	K_p
s^3	7	$24+K_p$	
s^2	$\frac{116-K_p}{7}$	$10K_p$	
s^1	$\frac{K_p^2 + 398K_p - 2784}{K_p - 116}$		
s^0	$10K_p$		

$$\frac{116-K_p}{7} > 0 \Rightarrow K_p < 116$$

$$\frac{K_p^2 + 398K_p - 2784}{K_p - 116} > 0 \Rightarrow -404,87 < K_p < 6,87$$

$$10K_p > 0 \Rightarrow K_p > 0$$

$$\boxed{0 < K_p < 6,87}$$

b) Kapalı çevrim sistem kutuplarının $K_p=0$ kazancının değerine göre nasıl değiştiğini inceleyiniz.

$$G(s) = \frac{s+10}{s(s+3)(s^2+4s+8)}$$

1) 4. dereceden sistem 4 kutup

2) Kutuplar ($K_p=0$): $s_1=0, s_2=-3, s_{3,4}=-2 \pm 2j$

Sıfırlar ($K_p=\infty$): $s_1=-10, s_{2,3,4}=\infty$

3) Kök eğrisi reel eksen göre simetrik.

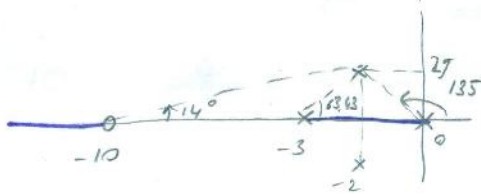
4) Asimptot açısı $n=4, m=1$

$$\theta_i = \frac{2i+1}{n-m} 180 = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$$

5) Asimptotların kesişim noktası

$$\sigma = \frac{-3-2-2-(-10)}{4-1} = 1$$

6) Gerçek eksendeki kök eğrisi



7) $s_3 = -2 + 2j$ için çıkış açısı

$$14 - (135 + 90 + 63.43 + \theta) = (2i+1)180 \Rightarrow \theta = 265.6^\circ$$

8) Kök eğrilerinin asal eksen kesişim noktaları

a) yukarıda elde edilen Routh tablosundan

$$\frac{116 - K_p s^2 + 10K_p}{7} = 0 \quad K_p = K_c = 6.876$$

$$K_p = 6.876 \Rightarrow 13.59 s^2 + 68.76 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm 2.17j$$

(Routh tablosunda

$$\left. \begin{array}{l} K_p^2 + 398K_p - 2784 = 0 \Rightarrow K_c = K_p = 6.876 \\ K_p - 116 \end{array} \right\}$$

3) Kopma noktaları

$$s_1 = -12,78 \quad s_2 = -1,273 \quad s_{3,4} = -1,97 \pm j1,01$$

6. bölümde elde edilen kök eğrisine bakılarak s_1 ve s_2 'nin pozitif kök eğrisi için kopma noktası olacağı görülür.

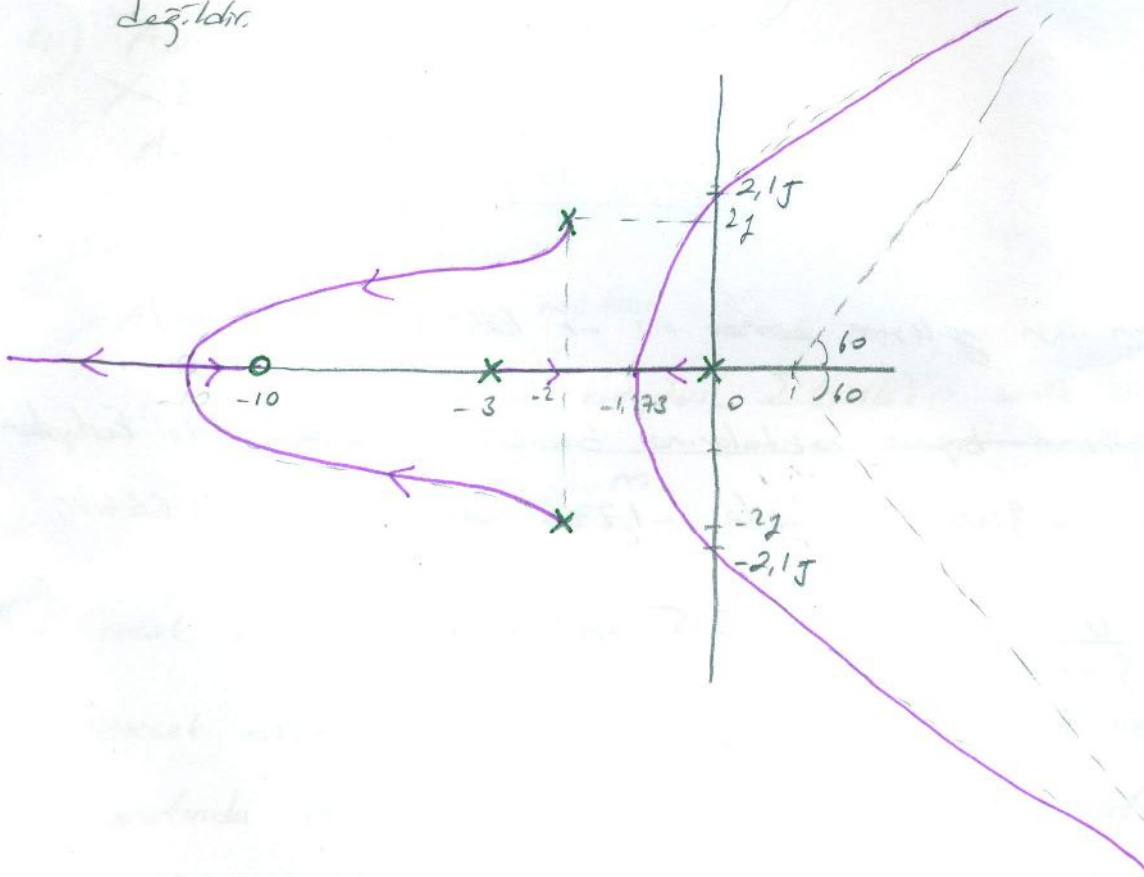
$s_{3,4}$ 'nın karakteristik denklemini sağlayan bir K_p var mı diye bakılabilir.

$$s^4 + 7s^3 + 20s^2 + (24 + K_p)s + 10K_p = 0$$

$$s_3 = -1,97 + j1,01j \text{ için}$$

$$-9,03152 + 6,03K + j(1,01K_p - 3,01475) = 0$$

denklemini sağlayan bir K_p değeri olmadığından $s_{3,4}$ kopma noktası değildir.



- c) Kapalı çevrim sisteminde %2 lik bord için yavaşlama zamanı 4 sn olacak şekilde ayarlanacak K_p değeri bulunuz.

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = 4 \Rightarrow \zeta \omega_n = 1$$

$$P_c(s) = (s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2)(s^2 + as + b)$$

$P_c(s)$ polinomu a zikinde bulunan karakteristik denkleme eşitlenirse

$$10 K_p = b \omega_n^2$$

$$24 + K_p = a \omega_n^2 + 2b$$

$$\omega_n^2 + 2a + b = 20$$

$$a + 2 = 7$$

$$a = 5$$

$$\omega_n^2 = 10 - b$$

$$K_p = \frac{b(10-b)}{10} = \frac{10b-b^2}{10}$$

$$24 + \frac{10b-b^2}{10} = 5(10-b) + 2b$$

$$\rightarrow b_1 = 8,17 \quad b_2 = 31,83$$

$$\omega_n^2 = 1,83$$

$$\omega_n^2 = -21,83 \quad \times$$

$$\boxed{K_p = 1,485}$$

- d) Bu sistem için yavaşlama zamanı en az kaç sn yapılabilir?

Kök eğrisinin köpme noktalarına bakılacak olursa bastırıcı kutuplar için $\sigma = -\zeta \omega_n$ en fazla -1,273 noktasına kadar sekelebilir.

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = \frac{4}{1,273} = 3,15 \text{ sn olur.}$$