Kaynak: “Signals ans Systems”, Oppenheim and Willsky

Z dönüşümü

Hatırlatma:

z^n *girişi için sistem çıkışının*

$$y[n] = H(z)z^n,$$

şeklinde yazılabildiği önceki bölümlerde gösterilmişti.

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}.$$

Genel olarak x[n] işaretinin z dönüşümü,

$$\boxed{X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n},}$$

$$x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z).$$

$$z = re^{j\omega},$$

tanımı yapılırsa, AZFD den yararlanarak,

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n},$$

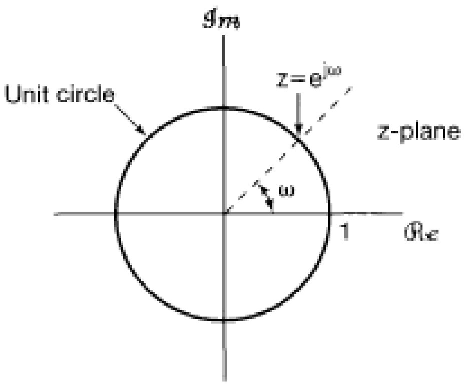
$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{x[n]r^{-n}\}e^{-j\omega n}.$$

$$X(re^{j\omega}) = \mathfrak{F}\{x[n]r^{-n}\}.$$

Kaynak: “Signals ans Systems”, Oppenheim and Willsky

AZFD –z dönüşümü arasındaki ilişki,

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \mathfrak{F}\{x[n]\}.$$



Z domeni

Örnek:

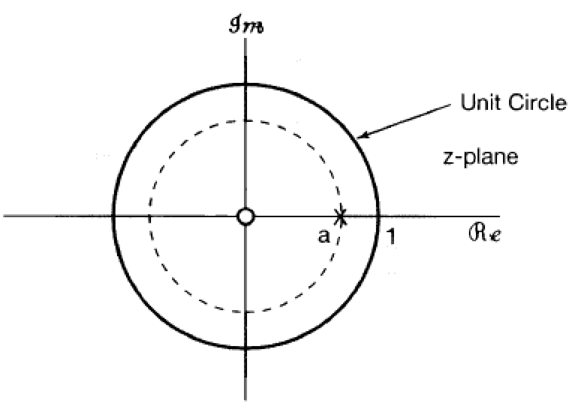
$x[n] = a^n u[n]$

şeklinde verilen işaretin z dönüşümünü bulalım.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n.$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \qquad |z| > |a|.$$

$0 < a < 1.$



Kaynak: “Signals ans Systems”, Oppenheim and Willsky

Örnek:

$$x[n] = -a^n u[-n-1].$$

şeklinde verilen işaretin z dönüşümünü bulalım.

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$$

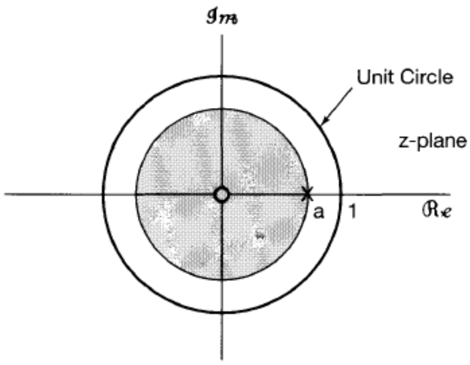
$$= -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n.$$

$|a^{-1} z| < 1$

$|z| < |a|$

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z} = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|.$$

$0 < a < 1.$



Kaynak: “Signals ans Systems”, Oppenheim and Willsky

Örnek:

$$x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

şeklinde verilen işaretin z dönüşümünü bulalım.

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} z^{-n} \\
&= 7\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] z^{-n} - 6\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] z^{-n} \\
&= 7\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n - 6\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n \\
&= \frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1-\frac{3}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} \\
&= \frac{z(z-\frac{3}{2})}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})}.
\end{aligned}$$

ifadenin yakınsama koşullarından YB belirlenir.

$$|(1/3)z^{-1}| < 1$$

$$|(1/2)z^{-1}| < 1$$

$$|z| > 1/3$$

$$|z| > 1/2.$$

Sonuç olarak YB,

$$|z| > 1/2.$$

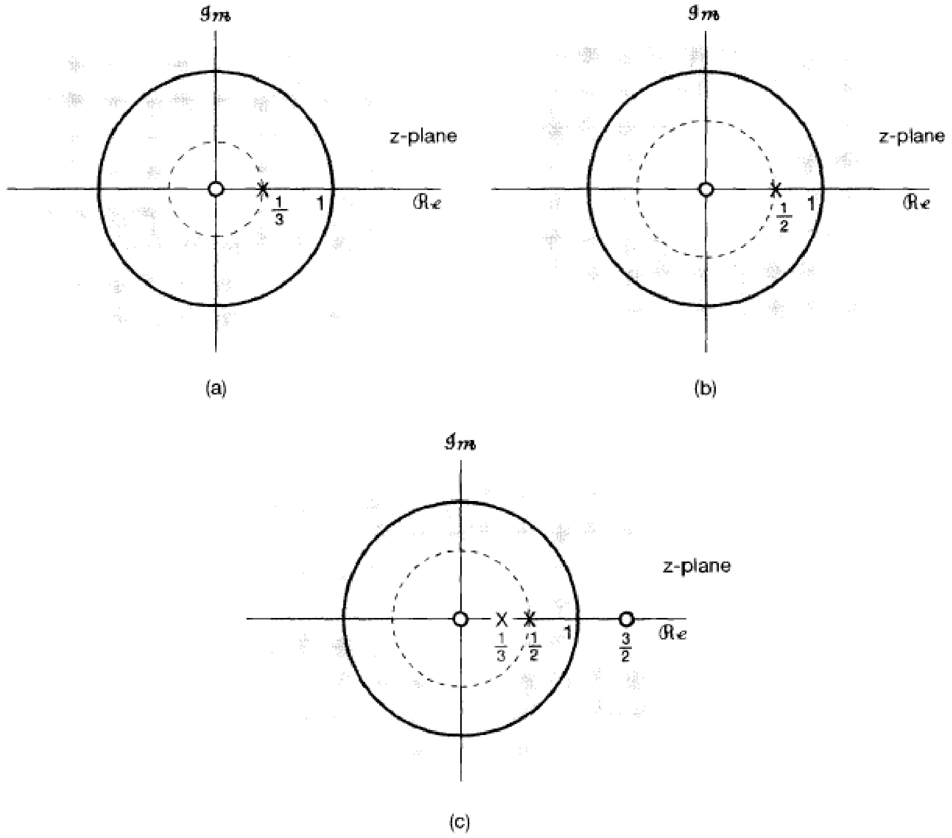
$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2},$$

Kaynak: “Signals ans Systems”, Oppenheim and Willsky

$$7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow}$$

$$\frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2},$$



(a) $1/(1-\frac{1}{3}z^{-1}), |z| > \frac{1}{3}$

(b) $1/(1-\frac{1}{2}z^{-1}), |z| > \frac{1}{2}$

(c) $7/(1-\frac{1}{3}z^{-1}) - 6/(1-\frac{1}{2}z^{-1}), |z| > \frac{1}{2}$

Kaynak: “Signals ans Systems”, Oppenheim and Willsky

Örnek:

$$x[n] = (\tfrac{1}{3})^n \sin(\tfrac{\pi}{4}n)u[n]$$
$$= \tfrac{1}{2j}(\tfrac{1}{3}e^{j\pi/4})^n u[n] - \tfrac{1}{2j}(\tfrac{1}{3}e^{-j\pi/4})^n u[n].$$

şeklinde verilen işaretin z dönüşümü bulunuz.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right)^n u[n] - \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right)^n u[n]\right\} z^{-n}$$
$$= \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}\right)^n - \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}\right)^n$$
$$= \frac{1}{2j}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}} - \frac{1}{2j}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}},$$

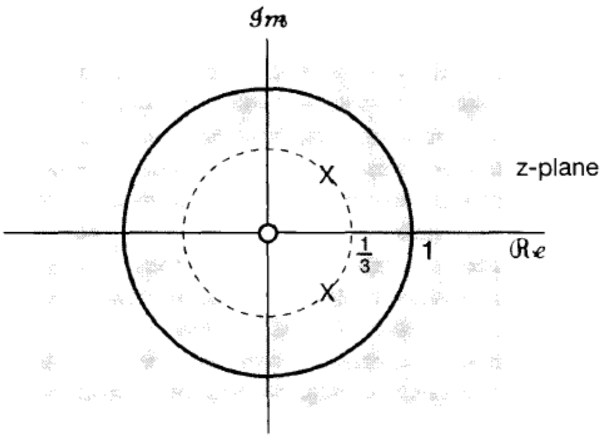
$$X(z) = \frac{\frac{1}{3\sqrt{2}}z}{(z-\frac{1}{3}e^{j\pi/4})(z-\frac{1}{3}e^{-j\pi/4})}$$

YB için,

$$|(1/3)e^{j\pi/4}z^{-1}| < 1$$

$$|(1/3)e^{-j\pi/4}z^{-1}| < 1$$

YB: $|z| > 1/3$



Kaynak: “Signals ans Systems”, Oppenheim and Willsky

Yakınsaklık Bölgesi (YB) özellikleri:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| r^{-n} < \infty.$$

- YB kutup içermez
- Sonlu uzunluklu işaret için YB tüm z düzlemidir. $z = 0$ ya da $z = \infty$ bölgeye dahil olmayabilir.

Örnek:

$$\delta[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n} = 1$$

YB tüm z düzlemidir.

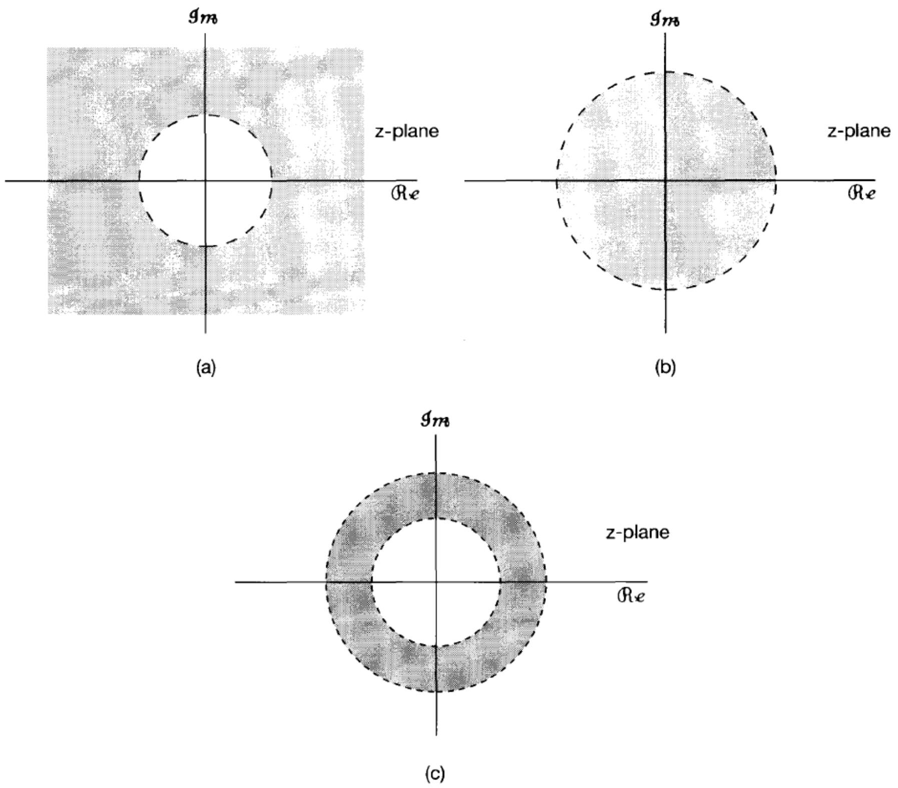
$$\delta[n-1] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n-1] z^{-n} = z^{-1}$$

YB $z = 0$ hariç tüm z düzlemidir.

$$\delta[n+1] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n+1] z^{-n} = z$$

YB sonsuzdaki kutup hariç tüm z bölgesidir.

Kaynak: “Signals ans Systems”, Oppenheim and Willsky



a)Sağ taraflı, b) sol taraflı, c) 2 taraflı işaret

Ters z dönüşümü

AZFD tanımından yararlanarak,

$$X(re^{j\omega}) = \mathfrak{F}\{x[n]r^{-n}\}$$

yazılabilir. Ters AZFD tanımından,

$$x[n]r^{-n} = \mathfrak{F}^{-1}\{X(re^{j\omega})\}$$

$$x[n] = r^n\mathfrak{F}^{-1}[X(re^{j\omega})]$$

$$x[n] = r^n\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Kaynak: “Signals ans Systems”, Oppenheim and Willsky

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})(re^{j\omega})^n d\omega$$

bulunur.

$$z = re^{j\omega}$$

$$dz = jre^{j\omega}d\omega = jzd\omega$$

Ters dönüşüm,

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz,}$$

elde edililir.

Örnek:

$$X(z) = \frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

şeklinde verilen z dönüşümüne karşı gelen zaman domeni işareti bulalım.

Kısmi kesirlere ayrıştırarak,

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n].$$

$$x_1[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4}$$

$$x_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$x_2[n] = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n],$$

Kaynak: “Signals ans Systems”, Oppenheim and Willsky

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Örnek:

Önceki örnek için farklı bir YB seçilmesi durumunda

$1/4 < |z| < 1/3$.

$$x_1[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4}$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{z} \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{3}$$

$$x_2[n] = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

bulunur.

Örnek:

Önceki örnek için farklı bir YB seçilmesi durumunda

$|z| < 1/4$

$$x_1[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{4}$$

$$x_1[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1]$$

$$x[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1].$$

Kaynak: “Signals ans Systems”, Oppenheim and Willsky

Örnek:

$$X(z) = 4z^2 + 2 + 3z^{-1},\ 0 < |z| < \infty.$$

$$x[n] = \begin{cases} 4, & n = -2 \\ 2, & n = 0 \\ 3, & n = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

$$x[n] = 4\delta[n+2] + 2\delta[n] + 3\delta[n-1]$$

Genel olarak

$$\delta[n+n_0] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} z^{n_0}$$

Z dönüşümünün özellikleri

Property	Signal	z-Transform	ROC
	$x[n]$ $x_1[n]$ $x_2[n]$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$	R R_1 R_2
Linearity	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	At least the intersection of R_1 and R_2
Time shifting	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R, except for the possible addition or deletion of the origin
Scaling in the z-domain	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{-j\omega_0}z)$	R
	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$z_0 R$
	$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$	Scaled version of R (i.e., $\|a\|R$ = the set of points $\{\|a\|z\}$ for z in R)
Time reversal	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	Inverted R (i.e., R^{-1} = the set of points z^{-1}, where z is in R)
Time expansion	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r], & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$ for some integer r	$X(z^k)$	$R^{1/k}$ (i.e., the set of points $z^{1/k}$, where z is in R)
Conjugation	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
Convolution	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	At least the intersection of R_1 and R_2
First difference	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	At least the intersection of R and $\|z\| > 0$
Accumulation	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$	At least the intersection of R and $\|z\| > 1$
Differentiation in the z-domain	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	R

Initial Value Theorem
If $x[n] = 0$ for $n < 0$, then
$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

Kaynak: “Signals ans Systems”, Oppenheim and Willsky

Dönüşüm çiftleri

Signal	Transform	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $u[n]$	$\dfrac{1}{1 - z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1 - z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	All z, except 0 (if $m > 0$) or ∞ (if $m < 0$)
5. $\alpha^n u[n]$	$\dfrac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
6. $-\alpha^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
7. $n\alpha^n u[n]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
8. $-n\alpha^n u[-n-1]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
9. $[\cos\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1 - [\cos\omega_0]z^{-1}}{1 - [2\cos\omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
10. $[\sin\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[\sin\omega_0]z^{-1}}{1 - [2\cos\omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
11. $[r^n\cos\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1 - [r\cos\omega_0]z^{-1}}{1 - [2r\cos\omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
12. $[r^n\sin\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[r\sin\omega_0]z^{-1}}{1 - [2r\cos\omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$

Kaynak: “Signals ans Systems”, Oppenheim and Willsky

Örnek:

Konvolüsyon özelliğini kullanarak,

$$y[n] = h[n] * x[n],$$

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1].$$

$$\delta[n] - \delta[n-1] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} 1 - z^{-1}$$

$$y[n] = [\delta[n] - \delta[n-1]] * x[n] = x[n] - x[n-1].$$

bulunur.

Örnek:

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

şeklinde verilen z dönüşümüne karşı düşen zaman domeni işareti türev özelliğinden yararlanarak bulalım.

$$a^n u[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$$na^n u[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1 - az^{-1}}\right) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

Kaynak: “Signals ans Systems”, Oppenheim and Willsky

LZD sistemlerin z domeni analizi

Konvolüsyon özelliğinden yararlanarak, sistem çıkışı z domeninde,

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

Nedensellik:

YB sistem kutuplarının belirlediği en dış çemberin dışındaki bölge olmalıdır. (pay derecesi, paydadan büyük olamaz)

Örnek:

$$H(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + z}{z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}}$$

şeklinde transfer fonksiyonu verilen sistem nedensel değildir.

Örnek:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \quad |z| > 2$$

şeklinde transfer fonksiyonu verilen sistem nedenseldir.

$$h[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right]u[n]$$

Kararlılık:

YB birim çemberi içermelidir (AZFD tanımlıdır)

Örnek:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \quad |z| > 2$$

sistem kararlı değildir. Ancak farklı bir YB seçilmesi durumunda,

$$1/2 < |z| < 2.$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2^n u[-n-1]$$

şeklinde impuls cevabı bulunan sistem kararlı olacaktır.

YB $|z| < 1/2$ seçilmesi durumunda,

$$h[n] = -\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right]u[-n-1].$$

Sistem kararlı değil, nedensel değil

- *Sistemin aynı anda hem nedensel , hem de kararlı olması için kutuplar birim çember içerisinde olmalıdır.*

LZD sistemlerin fark denklemi gösterilimi

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

şeklinde verilen fark denklemi için 2 tarafın da z dönüşümü alınarak,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

Sistemin transfer fonksiyonu,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}.$$

bulunur.

Kaynak: “Signals ans Systems”, Oppenheim and Willsky

Örnek:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1]$$

şeklinde fark denklemiyle tanımlanan sistemin impuls cevabını bulalım. Fark denkleminde 2 tarafın da z dönüşümü alınarak,

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = X(z) + \frac{1}{3}z^{-1}X(z)$$

$$Y(z) = X(z)\left[\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

YB 2 farklı şekillde seçilebilir.

$|z| > 1/2$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

Sistem nedensel ve kararlı olacaktır.

$|z| < 1/2$

$$h[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[-n]$$

Sistem nedensel değil, kararlı değil.

Unilateral (Tek taraflı z dönüşümü)

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$x[n] \stackrel{\mathcal{UZ}}{\longleftrightarrow} \mathcal{X}(z) = \mathcal{UZ}\{x[n]\}$$

Örnek:

$$x[n] = a^n u[n]$$

şeklinde verilen işaret sağ taraflı olduğundan çift taraflı (bilateral) ve tek taraflı (unilateral) z dönüşümleri aynıdır.

$$\mathcal{X}(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \qquad |z| > |a|$$

Örnek:

$$x[n] = a^{n+1} u[n+1]$$

şeklinde verilen işaret için

$$x[-1] = 1 \neq 0$$

olduğundan tek taraflı ve çift taraflı dönüşümler farklı çıkacaktır.

$$X(z) = \frac{z}{1 - az^{-1}}, \qquad |z| > |a|$$

Tek yanlı(unilateral) dönüşüm,

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} z^{-n}$$

$$\mathcal{X}(z) = \frac{a}{1 - az^{-1}}, \qquad |z| > |a|$$

bulunur.

Örnek:

$$\mathcal{X}(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}$$

Şeklinde verilen tek taraflı z dönüşümüne karşı düşen zaman domeni işaret,

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad \text{for} \quad n \geq 0.$$

Tek Yanlı (Unilateral) z dönüşümünün özellikleri

Property	Signal	Unilateral z-Transform
—	$x[n]$	$\mathcal{X}(z)$
—	$x_1[n]$	$\mathcal{X}_1(z)$
—	$x_2[n]$	$\mathcal{X}_2(z)$
Linearity	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$a\mathcal{X}_1(z) + b\mathcal{X}_2(z)$
Time delay	$x[n-1]$	$z^{-1}\mathcal{X}(z) + x[-1]$
Time advance	$x[n+1]$	$z\mathcal{X}(z) - zx[0]$
Scaling in the z-domain	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$\mathcal{X}(e^{-j\omega_0}z)$
	$z_0^n x[n]$	$\mathcal{X}(z/z_0)$
	$a^n x[n]$	$\mathcal{X}(a^{-1}z)$
Time expansion	$x_k[n] = \begin{cases} x[m], & n = mk \\ 0, & n \neq mk \end{cases}$ for any m	$\mathcal{X}(z^k)$
Conjugation	$x^*[n]$	$\mathcal{X}^*(z^*)$
Convolution (assuming that $x_1[n]$ and $x_2[n]$ are identically zero for $n < 0$)	$x_1[n] * x_2[n]$	$\mathcal{X}_1(z)\mathcal{X}_2(z)$
First difference	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})\mathcal{X}(z) - x[-1]$
Accumulation	$\sum_{k=0}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}\mathcal{X}(z)$
Differentiation in the z-domain	$nx[n]$	$-z\frac{d\mathcal{X}(z)}{dz}$

Initial Value Theorem

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} \mathcal{X}(z)$$

Kaynak: “Signals ans Systems”, Oppenheim and Willsky

Unilateral z dönüşümü başlangıç koşulları sıfırdan farklı olan sistemleri analizi için kullanılır. Unilateral z dönüşümü için zamanda öteleme özelliği,

$$y[n] = x[n-1]$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n-1]z^{-n} \\ &= x[-1] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n-1]z^{-n} \\ &= x[-1] + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-(n+1)},\end{aligned}$$

$$\mathcal{Y}(z) = x[-1] + z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n},$$

$$\mathcal{Y}(z) = x[-1] + z^{-1}\mathcal{X}(z)$$

$$w[n] = y[n-1] = x[n-2]$$

$$\mathcal{W}(z) = x[-2] + x[-1]z^{-1} + z^{-2}\mathcal{X}(z)$$

Benzer şekilde,

$$x[n+1] \overset{uz}{\longleftrightarrow} z\mathcal{X}(z) - zx[0]$$

bulunabilir.

Örnek:

$$y[n] + 3y[n-1] = x[n]$$

şeklinde fark denklemi ve

$$y[-1] = \beta$$

başlangıç koşulu ile tanımlanan sisteme,

$$x[n] = \alpha u[n]$$

giriş işareti uygulanması durumunda, sistem çıkışını bulalım.

Kaynak: “Signals ans Systems”, Oppenheim and Willsky

Unilateral z dönüşümü kullanılarak,

$$\mathcal{Y}(z) + 3\beta + 3z^{-1}\mathcal{Y}(z) = \frac{\alpha}{1 - z^{-1}}$$

$$\mathcal{Y}(z) = -\frac{3\beta}{1 + 3z^{-1}} + \frac{\alpha}{(1 + 3z^{-1})(1 - z^{-1})}.$$

bulunur.

$\alpha = 8$, $\beta = 1$

seçimi için

$$\mathcal{Y}(z) = \frac{3}{1 + 3z^{-1}} + \frac{2}{1 - z^{-1}}$$

çıkış işareti

$$y[n] = [3(-3)^n + 2]u[n]$$

bulunur.

Sistem dinlemede olsa idi (sıfır başlangıç koşulları)

Sistemin transfer fonksiyonu,

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1}{1 + 3z^{-1}}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}(z) = \mathcal{H}(z)\mathcal{X}(z) &= \frac{\alpha}{(1 + 3z^{-1})(1 - z^{-1})} \\ &= \frac{(3/4)\alpha}{1 + 3z^{-1}} + \frac{(1/4)\alpha}{1 - z^{-1}}.\end{aligned}$$

ifadesinden ters dönüşüm alınarak, sistem çıkışı,

$$y[n] = \alpha\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)(-3)^n\right]u[n]$$

bulunur.