1. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6$ fonksiyonunun $[0, 1]$ aralığında tek kökü olduğu bilinmektedir.

   (a) İkiye bölme yöntemini kullanarak $f(x)$ fonksiyonunun kökü $[0, 1]$ aralığında 10^{-3} hassasiyetle kaç adımda bulunacağını hesaplayınız.

   (b) İkiye bölme yöntemi ile $f(x)$ fonksiyonunun kökünü $[0, 1]$ aralığında 10^{-3} hassasiyetle hesaplayınız. $n, a_n, b_n, c_n, |b_n - c_n|$ değerlerini ve $f(a_n)f(c_n)$ işlem sonucunun işaretini tablo halinde yazınız.

   (c) MATLAB programında `fzero()` fonksiyonunu kullanarak $f(x)$ fonksiyonunun kökünü $[0, 1]$ aralığında bulunuz ve ikiye bölme yöntemiyle hesapladığınız değeri bu sonuç ile karşılaştırınız.

Çözüm:

a.

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\log 2}$$

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{1}{10^{-3}}\right)}{\log 2} = 9.97 \sim n \to 10$$

b.

<u>$n = 1$:</u>

$$a_1 = 0,\ b_1 = 1,\ c_1 = 0.5$$

$|b_1 - c_1| = 0.5 > 10^{-3}$ olduğu için yönteme devam edilir.

<u>$n = 2$:</u>

$$f(a_1)f(c_1) = 3.75 > 0 \Longrightarrow a_2 = 0.5,\ b_2 = 1,\ c_2 = 0.75$$

$|b_2 - c_2| = 0.25 \nless 10^{-3}$.

<u>$n = 3$:</u>

$$f(a_2)f(c_2) = -0.61523 < 0 \Longrightarrow a_3 = 0.5,\ b_3 = 0.75,\ c_3 = 0.625$$

$|b_3 - c_3| = 0.125 \nless 10^{-3}$.

<u>$n = 4$:</u>

$$f(a_3)f(c_3) = -0.16235 < 0 \Longrightarrow a_4 = 0.5,\ b_4 = 0.625,\ c_4 = 0.5625$$

$|b_4 - c_4| = 0.0625 \nless 10^{-3}$.

<u>$n = 5$:</u>

$$f(a_4)f(c_4) = 0.101166 > 0 \Longrightarrow a_5 = 0.5625,\ b_5 = 0.625,\ c_5 = 0.59375$$

$|b_5 - c_5| = 0.03125 \not< 10^{-3}$.

<u>$n = 6$:</u>

$$f(a_5)f(c_5) = -0.00875 < 0 \Longrightarrow a_6 = 0.5625,\ b_6 = 0.59375,\ c_6 = 0.578125$$

$|b_6 - c_6| = 0.015625 \not< 10^{-3}$.

<u>$n = 7$:</u>

$$f(a_6)f(c_6) = 0.00851 > 0 \Longrightarrow a_7 = 0.578125,\ b_7 = 0.59375,\ c_7 = 0.5859375$$

$|b_7 - c_7| = 0.0078125 \not< 10^{-3}$.

<u>$n = 8$:</u>

$$f(a_7)f(c_7) = -5.42761 \times 10^{-5} < 0 \Longrightarrow a_8 = 0.578125,\ b_8 = 0.5859375,\ c_8 = 0.58203125$$

$|b_8 - c_8| = 0.00390625 \not< 10^{-3}$.

<u>$n = 9$:</u>

$$f(a_8)f(c_8) = 0.00135 > 0 \Longrightarrow a_9 = 0.58203125,\ b_9 = 0.5859375,\ c_9 = 0.583984375$$

$|b_9 - c_9| = 0.001953125 \not< 10^{-3}$.

<u>$n = 10$:</u>

$$f(a_9)f(c_9) = 3.16880 \times 10^{-4} > 0 \Longrightarrow a_{10} = 0.583984375, b_{10} = 0.5859375, c_{10} = 0.5849609375$$

$|b_{10} - c_{10}| = 0.0009765625 < 10^{-3}$ olduğu için iterasyon sonlandırılır ve kök c_n teriminin son değeri olarak belirlenir.

$$x_y = 0.5849609375$$

$\mathbf{n}$	$\mathbf{a_n}$	$\mathbf{b_n}$	$\mathbf{c_n}$	$\mathbf{\lvert b_n - c_n \rvert}$	$\mathbf{sgn}\,[\mathbf{f(a_n)f(c_n)}]$
1	0	1	0.5	0.5	$+1$
2	0.5	1	0.75	0.25	-1
3	0.5	0.75	0.625	0.125	-1
4	0.5	0.625	0.5625	0.0625	$+1$
5	0.5625	0.625	0.59375	0.03125	-1
6	0.5625	0.59375	0.578125	0.015625	$+1$
7	0.578125	0.59375	0.5859375	0.0078125	-1
8	0.578125	0.5859375	0.58203125	0.00390625	$+1$
9	0.58203125	0.5859375	0.583984375	0.001953125	$+1$
10	0.583984375	0.5859375	0.5849609375	0.0009765625	iterasyon sonu

c.

```
>> format long
>> f = @(x) x^3-7*x^2+14*x-6;
>> x0 = [0 1];
>> fzero(f,x0)

ans =

0.585786437626905
```

$$x_g = 0.585786437626905$$

$$|x_g - x_y| = 8.255001269050766 \times 10^{-4} < 10^{-3}$$

2. $2\ln x = -2x^2$ denkleminin kökünü 10^{-8} hassasiyetle

   (a) Newton yöntemini kullanarak x_0=1 başlangıç değerinden hareketle bulunuz.

   (b) Sekant yöntemini kullanarak x_0=0.5, x_1=1 başlangıç değer çiftinden hareketle bulunuz.

Çözüm: Denklem kökü bulmak için $f(x) = 2\ln x + 2x^2$ fonksiyonu tanımlanır.

a.

Newton yöntemi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

iterasyon adımıyla uygulanır. Bu yüzden öncelikle $f(x)$ fonksiyonunun türevi bulunmalıdır.

$$f'(x) = \frac{2}{x} + 4x$$

$\underline{n = 0}$:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{2}{6} = 0.666666666666667$$

$|x_1 - x_0| = 0.333333333333333 > 10^{-8}$ olduğu için yönteme devam edilir.

$\underline{n = 1}$:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.666666666666667 - \frac{0.077958672672561}{5.666666666666666} = 0.652909253842097$$

$|x_2 - x_1| = 0.01375741282457 \not< 10^{-8}$.

<u>$n = 2$:</u>

$$x_3 = 0.652909253842097 - \frac{-5.32673851338927 \times 10^{-5}}{5.674849840475153} = 0.652918640413836$$

$|x_3 - x_2| = 9.386571738656535 \times 10^{-6} \not< 10^{-8}$.

<u>$n = 3$:</u>

$$x_4 = 0.652918640413836 - \frac{-3.046751739788078 \times 10^{-11}}{5.674843349013521} = 0.652918640419205$$

$|x_4 - x_3| = 5.368927524784795 \times 10^{-12} < 10^{-8}$ olduğu için iterasyon sonlandırılır ve kök x_n teriminin son değeri olarak belirlenir.

$$x_y = 0.652918640419205$$

$\mathbf{n}$	$\mathbf{x_n}$	$\mathbf{f(x_n)}$	$\mathbf{f'(x_n)}$	$\mathbf{\lvert x_{n-1} - x_n \rvert}$
0	1	2	6	$-$
1	0.666666666666667	0.077958672672561	5.666666666666666	0.333333333333333
2	0.652909253842097	-5.326738513389273e-5	5.674849840475153	0.01375741282457
3	0.652918640413836	-3.046751739788078e-11	5.674843349013521	9.386571738656535e-6
4	0.652918640419205	iterasyon sonu		5.368927524784795e-12

b.

Sekant yöntemi

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

iterasyon adımıyla uygulanır.

$\mathbf{n}$	$\mathbf{x_n}$	$\mathbf{f(x_n)}$	$\mathbf{\lvert x_{n-1} - x_n \rvert}$
0	0.5	-0.136294361119891	$-$
1	1	2	0.5
2	0.653534991624348	0.00349756575073346	0.346465008375652
3	0.652928038120894	5.33304543935964e-5	0.000606953503454077
4	0.652918640067814	-1.99408745071850e-9	9.39805307997865e-6
5	0.652918640419205	iterasyon sonu	3.51390916364380e-10

3. $\mathrm{e}^x = 1/x$ denkleminin kökü $\alpha = 0.567143290409784$ olmak üzere, bu kökü sabit nokta iterasyonu ile bulmak için üç farklı iterasyon kuralı oluşturunuz. Bu kuralların yakınsamalarını kontrol ediniz. Yakınsayan kurallardan bir tanesini seçerek iterasyonu $x_0 = 1$ başlangıç değeri için ilk 10 adım için uygulayınız.

Çözüm:

$f(x) = \mathrm{e}^x - 1/x = 0$ denklemini sabit nokta iterasyonu ile çözebilmek için x yalnız bırakılarak $x = g(x)$ haline getirilmelidir.

$$x = \mathrm{e}^{-x} = g_1(x)$$
$$x^2\,\mathrm{e}^x = x^2\frac{1}{x} \Rightarrow x = x^2\,\mathrm{e}^x = g_2(x)$$
$$\ln\left(\mathrm{e}^x\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow x = -\ln x = g_3(x)$$

Yakınsamaları kontrol etmek için $|g'(\alpha)| < 1$ eşitsizliğine bakılır.

$$g_1'(x) = -\,\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow |g_1'(\alpha)| = 0.567143290409784 < 1 \rightarrow \text{yakınsar}$$
$$g_2'(x) = 2x\,\mathrm{e}^x + x^2\,\mathrm{e}^x \Rightarrow |g_2'(\alpha)| = 2.567143290409784 \not< 1 \rightarrow \text{ıraksar}$$
$$g_3'(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow |g_3'(\alpha)| = 1.763222834351897 \not< 1 \rightarrow \text{ıraksar}$$

Bu durumda

$$x_{n+1} = g_1(x_n) = \mathrm{e}^{-x_n}$$

iterasyon kuralı uygulanır.

$\underline{n = 0}$:

$$x_1 = g_1(x_0) = \mathrm{e}^{-1} = 0.367879441171442$$

$\underline{n = 1}$:

$$x_2 = g_1(x_1) = 0.692200627555346$$

$\underline{n = 2}$:

$$x_3 = g_1(x_2) = 0.500473500563637$$

$\underline{n = 3}$:

$$x_4 = g_1(x_3) = 0.606243535085597$$

$\underline{n = 4}$:

$$x_5 = g_1(x_4) = 0.545395785975027$$

$\underline{n = 5}$:

$$x_6 = g_1(x_5) = 0.579612335503379$$

<u>$n = 6$:</u>

$$x_7 = g_1(x_6) = 0.560115461361089$$

<u>$n = 7$:</u>

$$x_8 = g_1(x_7) = 0.571143115080177$$

<u>$n = 8$:</u>

$$x_9 = g_1(x_8) = 0.564879347391050$$

<u>$n = 9$:</u>

$$x_{10} = g_1(x_9) = 0.568428725029061$$

$\mathbf{n}$	$\mathbf{x_n}$	$\mathbf{\lvert x_n - x_{n-1} \rvert}$
0	1	$-$
1	0.367879441171442	0.432856709590216
2	0.692200627555346	0.199263849238342
3	0.500473500563637	0.125057337145562
4	0.606243535085597	0.0666697898461470
5	0.545395785975027	0.0391002446758133
6	0.579612335503379	0.0217475044347569
7	0.560115461361089	0.0124690450935949
8	0.571143115080177	0.00702782904869481
9	0.564879347391050	0.00399982467039306
10	0.568428725029061	0.00226394301873445