Analog Haberleşme

Prof. Dr. İbrahim Altunbaş

1 Frekans Modülasyonu (FM)

$x(t) = 10\cos 2\pi 100t$ işareti frekansı 1 MHz olan bir taşıyıcının frekansını modüle etmektedir. Modülasyon indeksi $\beta = 3$ ve modüle edilmemiş normalize taşıyıcı gücü 2 W olarak verilmiştir.

a) k_f modülatör sabitini bularak, frekans modülasyonlu işaretin ifadesini yazınız.

b) Maksimum faz sapmasını, maksimum frekans sapmasını ve $t = 1/120$ sn'deki ani frekans sapmasını bulunuz.

c) Birinci üst yan bandın tepe genliğini bulunuz.

d) FM işaretin frekans ve güç spektrumunu çiziniz.

e) Carson kuralına göre iletim band genişliğini ve iletim bandındaki ortalama normalize gücü hesaplayınız. İletim bandındaki gücün toplam güce oranını (P_{iletim}/P_T) bulunuz ve sonucu yorumlayınız.

f) İletim band genişliğini %25 azaltmak için, giriş işaretinin tepe genliği kaç Volta düşürülmelidir? Bu durumda P_{iletim}/P_T oranını bulunuz.

1.1 Cevap:

a) $x_c(t) = A\cos\left(\omega_c t + k_f \int x(\tau)d\tau\right)$ ve mesaj işareti $x(t) = 10\cos 2\pi 100t$ ise $x_c(t)$ ifadesinde genel bir periyodik mesaj işareti ($a\cos 2\pi f_m t$) koyarsak $x_c(t) = A\cos\left(2\pi f_c t + k_f \int_0^t a\cos 2\pi f_m \tau d\tau\right) = A\cos\left(2\pi f_c t + \beta \sin 2\pi f_m t\right)$ olur. Buradan $\beta = \Delta f / f_m$ ve $\Delta f = k_f a/(2\pi)$ olur.

$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{k_f a}{2\pi f_m} = \frac{k_f 10}{2\pi 100} = 3$ olduğu biliniyorsa $k_f = 60\pi$'dir.

$P_c = \frac{A^2}{2} = 2$ W ise $A = 2$ Volt olur.

Frekans modülasyonlu işaretin ifadesi $x_c(t) = 2\cos\left(\underbrace{2\pi 10^6 t + 3\sin 2\pi 100t}_{\theta(t)}\right)$ olur.

b) $\theta(t) = 2\pi 10^6 + \phi(t)$ olmak üzere burada $\phi(t)$ faz sapması (Sadece faz demek daha doğru) olarak tanımlanır.

Biliyoruz ki $-1 \leq \sin 2\pi 100t \leq 1$ yani maksimum faz sapması $[\phi(t)]_{maks} = 3$ radyan olur.

Ani açısal frekans $\phi_a(t)$'yi bulmak için türevi alınarak sıfıra eşitlenirse $\frac{d\theta(t)}{dt} = 2\pi 10^6 + 600\pi\cos(2\pi 100t) = 2\pi f_a(t)$ bulunur. Burada $f_a(t)$ ani frekanstır ve $f_a(t) = 10^6 + \underbrace{300\cos 2\pi 100t}_{\text{Ani frekans sapması}}$ olarak bulunur. Ani frekansın maksimum 300 Hz olacağı görülmektedir.

Maksimum frekans sapması diğer bir yolla $\Delta f = \frac{k_f a}{2\pi} = \frac{60\pi 10}{2\pi} = 300$ Hz olarak bulunur.

$t = 1/120$ sn'deki ani frekans sapması $|300\cos\left(\frac{2\pi 100}{120}\right)| = 150$ Hz'dir.

c)

$$x_c(t) = Re\{A\exp(j(\omega_c t + \beta\sin(\omega_m t)))\} = A\sum_n J_n(\beta)\cos(\omega_c t + n\omega_m t)$$

elde edilir.

Birinci üst yan bandın tepe genliği $AJ_n(\beta)|_{n=1,\ \beta=3} = 2\underbrace{(0.34)}_{J_1(3)} = 0.68$'dir.

d)

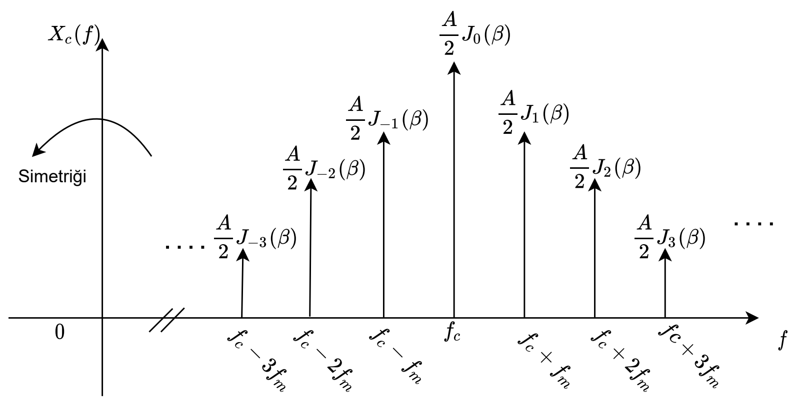
Zaman bölgesindeki işaret

$$x_c(t) = A\sum_n J_n(\beta)\cos(\omega_c t + n\omega_m t)$$

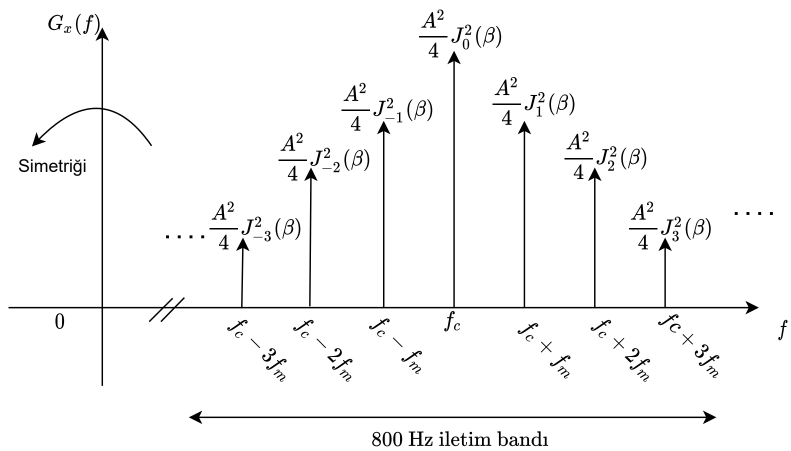
ise Fourier dönüşümü ve güç spektrumunun matematiksel ifadesi

$$X_c(f) = \frac{A}{2}\sum_n J_n(\beta)[\delta(f-(f_c+nf_m)) + \delta(f+(f_c+nf_m))]$$
$$G_x(f) = \frac{A^2}{4}\sum_n J_n^2(\beta)[\delta(f-(f_c+nf_m)) + \delta(f+(f_c+nf_m))]$$

şeklindedir.



Şekil 1: $x_c(t)$'nin frekans spektrumu.



Şekil 2: $x_c(t)$'nin güç spektrumu.

e)

$$BG_{10} = 2(1+\beta)f_m = 2(1+3)100 = 800 \text{ Hz}$$
$$P_{\text{iletim}} = 2\left(\frac{A^2}{4}J_0^2(3) + 2\frac{A^2}{4}(J_1^2(3) + J_2^2(3) + J_3^2(3) + J_4^2(3))\right) = 1,992 \text{ W}$$
$$P_T = A^2/2 = 2 \text{ W}, \ (f_c \gg \Delta f \text{ ve } f_c \gg f_m \text{ koşulları altında})$$

Buradan $\frac{P_{\text{iletim}}}{P_c} = \frac{1,992}{2} = \%99,6$ olur.

f)

$$BG'_{10} = 0,75BG_{10} = 0,75.800 = 600 \text{ Hz}$$
$$BG'_{10} = 2(1+\beta')f_m = 2(\Delta f' + f_m) = 600 \text{ Hz}$$

ise $\Delta f' = 200$ Hz olur.

$$\Delta f' = \frac{k_f a'}{2\pi} = \frac{60\pi a'}{2\pi} = 200 \text{ Hz}$$

ise $a' = 6,6$ Volt olur.

Bu durumda $\beta' = \frac{\Delta f'}{f_m} = \frac{200}{100} = 2$'dir.

P_{iletim} hesaplanırken dikkat edilmesi gereken şey $\Delta f'$ ve BG'_{10} değişmiştir. Dolayısıyla iletim band genişliğinde yer alan bileşen sayısı 3'tür.

$$P'_{\text{iletim}} = 2\left(\frac{A^2}{4}J_0^2(2) + 2\frac{A^2}{4}(J_1^2(2) + J_2^2(2) + J_3^2(2)+)\right) = 1,997 \text{ W}$$
$$P_T = A^2/2 = 2 \text{ W}, \ (f_c \gg \Delta f \text{ ve } f_c \gg f_m \text{ koşulları altında})$$

Dolayısıyla $\frac{P'_{\text{iletim}}}{P_c} = \frac{1,997}{2} = \%99,8$ olur.

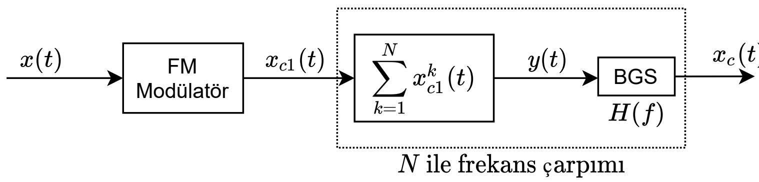
İletim band genişliği azaldığı halde iletilen güç artmıştır. Bunun nedeni β'nın değişmesidir. Bu şıkta iletim bandı dar da olsan $J_n(\beta)$'ların toplamı daha büyüktür. β büyüdükçe $J_n(\beta)$ küçülür. β küçüldükçe $J_n(\beta)$ büyür.

2 Dolaylı Frekans Modülasyonu (FM)

Şekil 3'te görülen düzende band genişliği 15 kHz'lik bir temel band $x(t)$ işaretinden

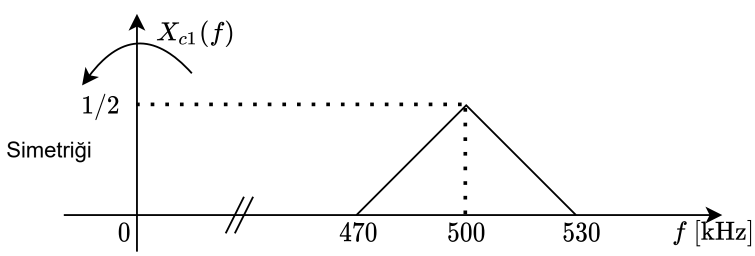
$$x_{c1}(t) = \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi\Delta f \int_0^t x(\tau)d\tau\right)$$

FM işareti elde edilmektedir. Bu işaretten frekans çarpma ve süzgeçleme yöntemi ile $x_c(t)$ FM işareti oluşturulmaktadır.



Şekil 3: Frekans çarpma ve süzgeçleme blok şeması.

a) $x_{c1}(t)$ işaretinin %10'luk band genişliği gözönüne alınarak çizilen spektrum, Şekil 4'te verilmektedir. Buna göre taşıyıcı frekans f_c ve frekans sapması Δf'i bulunuz.

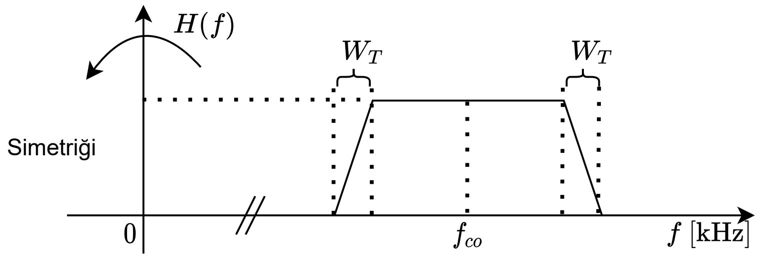


Şekil 4: $x_{c1}(t)$'nin frekans spektrumu.

b) $N = 2$ durumunda $y(t)$'nin spektrumunu çiziniz.

c) N istenildiği kadar olmak üzere **ideal** band geçiren süzgeç kullanılarak elde edilebilecek en büyük frekans çarpımı nedir?

d) Eğer BGS Şekil 5'teki gibi olursa elde edilebilecek en büyük frekans çarpanı ne olur? ($W_T = f_c/100$)



Şekil 5: İdeal olmayan BGS'nin transfer fonksiyonu $H(f)$.

2.1 Cevap:

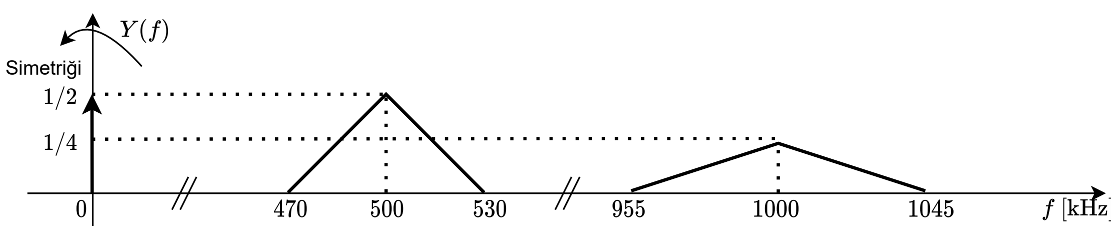
a) Biliyoruz ki, temel band işaretin band genişliği $f_m = 15$ kHz ve taşıyıcı işaretin frekansının da Şekil 4'ten $f_c = 500$ kHz, $BG_{10} = 60$ kHz olduğu görülmektedir. $BG_{10} = 2(\Delta f + f_m) = 60$ kHz ise $\Delta f = 15$ kHz bulunur.

b) $N = 2$ için $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ dönüşümünden yararlanarak

$$y(t) = \sum_{k=1}^{2} x_{c1}^k(t) = x_{c1}(t) + x_{c1}^2(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} + \underbrace{\cos\left(2\pi f_c t + 2\pi\Delta f \int^t x(\tau)d\tau\right)}_{f_c=500 \text{ kHz},\ \Delta f=15 \text{ kHz}, BG_{10}=60 \text{ kHz}} + \underbrace{\frac{1}{2}\cos\left(4\pi f_c t + 4\pi\Delta f \int^t x(\tau)d\tau\right)}_{f_c'=1 \text{ MHz},\ \Delta f=2\Delta f=30 \text{ kHz}, BG_{10}=2(\Delta f+f_m)=90 \text{ kHz}}$$

şeklindedir.



Şekil 6: $y(t)$'nin tek yönlü spektrumu.

c) n. frekans çarpanının band genişliği $BG_{10}^{(n)} = 2(n\Delta f + f_m)$ ve

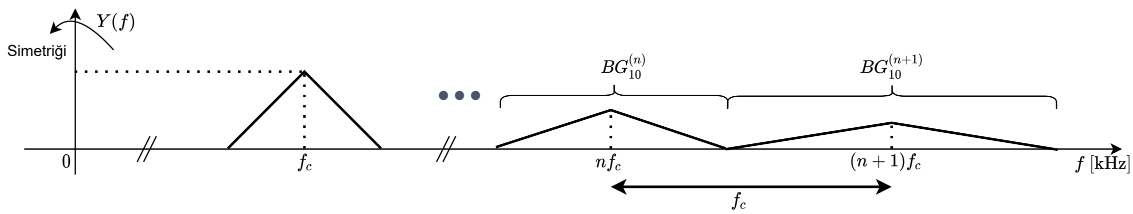
$(n+1)$. frekans çarpanının band genişliği $BG_{10}^{(n+1)} = 2((n+1)\Delta f + f_m)$'dir. Frekans spektrumunda ideal BGS ve frekans çarpma ile işareti geri elde edebilmemiz için maksimum n değerinin aşağıdaki şartı sağlaması gerekmektedir

$$\frac{BG_{10}^{(n)} + BG_{10}^{(n+1)}}{2} \leq f_c$$

$$n \leq \frac{f_c - 2f_m}{2\Delta f} - \frac{1}{2}$$

$$n \leq 15,16$$

$n = 15$ olarak bulunur. n daha büyük olursa örtüşme olur.



Şekil 7: Genel N için $y(t)$'nin tek yönlü spektrumu.

d) n. frekans çarpanının band genişliği $BG_{10}^{(n)} = 2(n\Delta f + f_m)$ ve

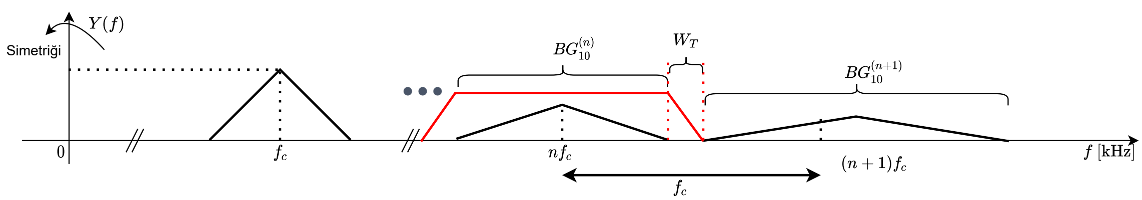
$(n+1)$. frekans çarpanının band genişliği $BG_{10}^{(n+1)} = 2((n+1)\Delta f + f_m)$'dir. Frekans spektrumunda ideal olmayan BGS ve frekans çarpma ile işareti geri elde edebilmemiz için maksimum n değerinin aşağıdaki şartı sağlaması gerekmektedir

$$\frac{BG_{10}^{(n)} + BG_{10}^{(n+1)}}{2} + W_T \leq f_c$$

$$n \leq \frac{f_c - 2f_m - \Delta f}{2\Delta f + \underbrace{(f_c/100)}_{W_T}}$$

$$n \leq 13$$

$n = 13$ olarak bulunur. n daha büyük olursa ideal olmayan BGS'den geçirildiğinde istenmeyen bileşenler de süzgeçten geçer.



Şekil 8: $y(t)$'nin tek yönlü spektrumu.