Sayısal Yöntemler - MAT202 **Dersi veren:** *Prof. Dr. Ali Yapar*
Bahar 2020-2021 **Dersin yardımcısı:** *Araş. Gör. Furkan Şahin*
3. Uygulama 06.04.2021

1. $(0, 2)$, $(1, 1)$ şeklinde verilen veri noktaları için

   (a) lineer interpolasyon uygulayınız.

   (b) $f(x) = a + b\,\mathrm{e}^x$ şeklinde bir interpolasyon fonksiyonu bulunuz.

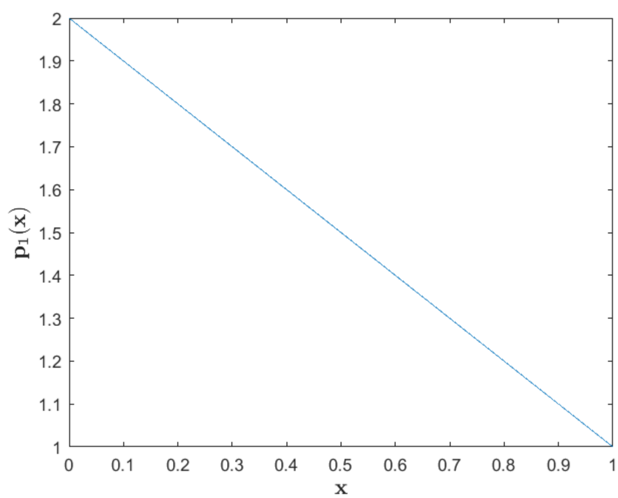
   (c) $f(x) = a/(b + x)$ şeklinde bir interpolasyon fonksiyonu bulunuz.

Çözüm:

a.

$$p_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

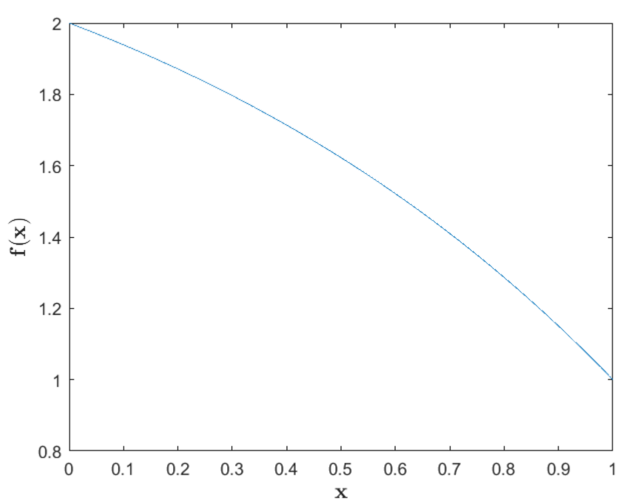
$$p_1(x) = 2\frac{x-1}{0-1} + 1\frac{x-0}{1-0} = 2 - x$$



b.

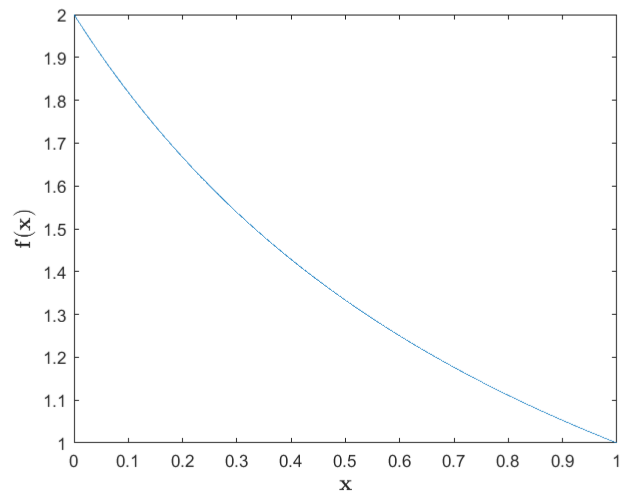
$$\begin{aligned} f(0) &= \ a + b = 2 \\ f(1) &= a + b\,\mathrm{e} = 1 \end{aligned} \begin{cases} a = \ \ 2.581977 \\ b = -0.581977 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2.581977 - 0.581977\,\mathrm{e}^x$$



c.

$$f(0) = \frac{a}{b} = 2$$
$$f(1) = \frac{a}{b+1} = 1 \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{1+x}$$



2. Aşağıdaki veri kümeleri için $L_i(x)$ Lagrange fonksiyonlarını bularak kuadratik (ikinci derece polinom) interpolasyonları bulunuz.

   (a) $\{(-2,-15),(-1,-8),(0,-3)\}$

   (b) $\{(0,1),(1,2),(2,3)\}$

   (c) $\{(0,1),(1,1),(2,1)\}$

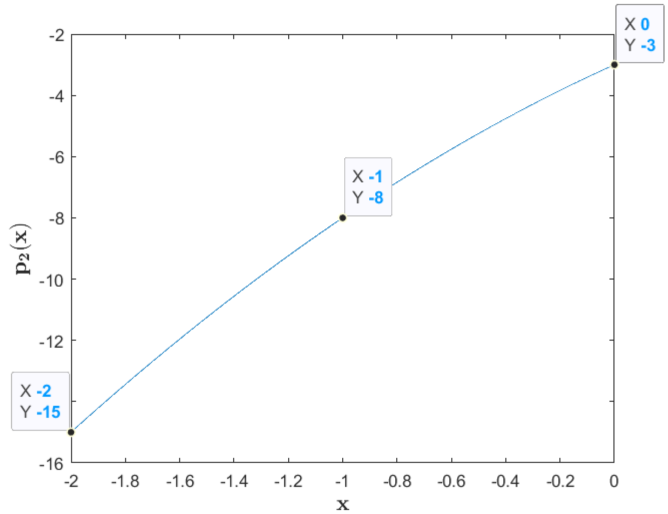
Çözüm:

$$p_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$$
$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$$

a. $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $y_0 = -15$, $y_1 = -8$, $y_2 = -3$.

$$L_i(x) = \begin{cases} L_0(x) &= \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \dfrac{(x+1)x}{(-2+1)(-2)} = \dfrac{x^2+x}{2} \\ L_1(x) &= \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \dfrac{(x+2)x}{(-1+2)(-1)} = -x^2-2x \\ L_2(x) &= \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \dfrac{(x+2)(x+1)}{2\times 1} = \dfrac{x^2+3x+2}{2} \end{cases}$$

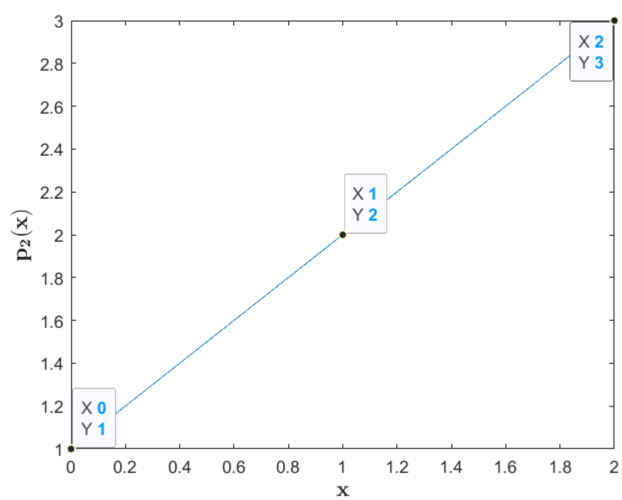
$$p_2(x) = -15\frac{(x^2+x)}{2} - 8(-x^2-2x)$$
$$-3\frac{(x^2+3x+2)}{2}$$
$$p_2(x) = -x^2+4x-3$$



b. $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$, $y_2 = 3$.

$$L_i(x) = \begin{cases} L_0(x) &= \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)} = \dfrac{x^2-3x+2}{2} \\ L_1(x) &= \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \dfrac{x(x-2)}{(1)(-1)} = -x^2+2x \\ L_2(x) &= \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \dfrac{x(x-1)}{2\times 1} = \dfrac{x^2-x}{2} \end{cases}$$

$$p_2(x) = \frac{(x^2-3x+2)}{2} + 2(-x^2+2x)$$
$$+3\frac{(x^2-x)}{2}$$
$$p_2(x) = x+1$$



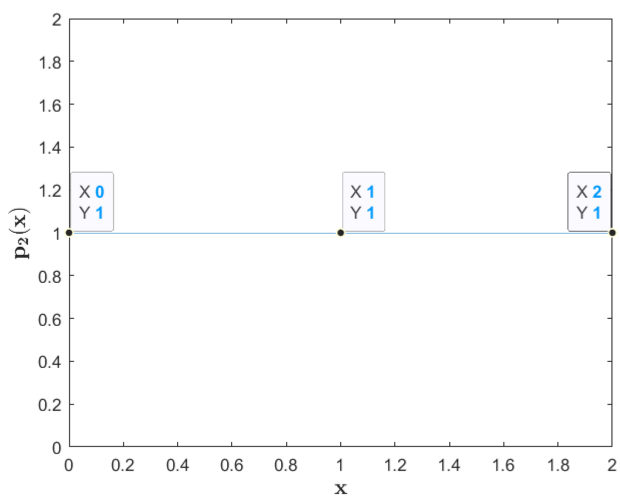
c.

$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, y_0 = 1, y_1 = 1, y_2 = 1.$

$$L_i(x) = \begin{cases} L_0(x) &= \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)} = \dfrac{x^2-3x+2}{2} \\ L_1(x) &= \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \dfrac{x(x-2)}{(1)(-1)} = -x^2+2x \\ L_2(x) &= \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \dfrac{x(x-1)}{2\times 1} = \dfrac{x^2-x}{2} \end{cases}$$

$$p_2(x) = \frac{(x^2-3x+2)}{2} + (-x^2+2x) + \frac{(x^2-x)}{2}$$

$$p_2(x) = 1$$



3. $f(x) = 1/(1+x)$ fonksiyonu ve $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ noktaları için
   (a) $f[x_0, x_1]$, $f[x_1, x_2]$ ve $f[x_0, x_1, x_2]$ bölünmüş farkları bulunuz.
   (b) Newton bölünmüş farklar interpolasyon yöntemini uygulayarak $p_2(x)$ kuadratik polinomunu bulunuz.
   (c) $[0, 2]$ aralığında $p_2(x)$, $f(x)$ ve $f(x) - p_2(x)$ ifadelerinin grafiğini çizdiriniz.

Çözüm:

a.

$$f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, ..., x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}]}{x_{i+k} - x_i}, \quad (f[x_i] = f(x_i))$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{1/2 - 1}{1 - 0} = -\frac{1}{2}$$

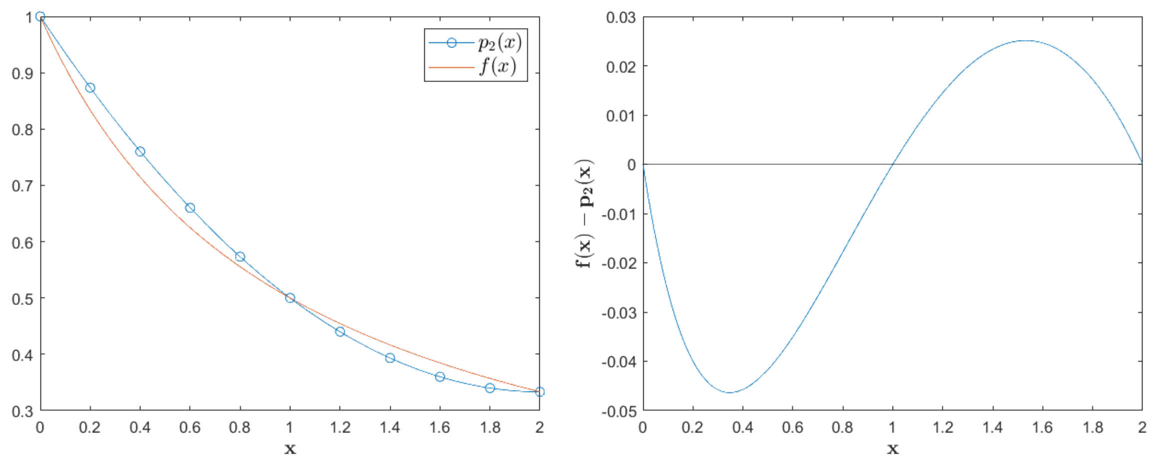
$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{1/3 - 1/2}{2 - 1} = -\frac{1}{6}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-1/6 + 1/2}{2 - 0} = \frac{1}{6}$$

b.

$$\begin{aligned} p_2(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x(x-1)}{6} = \frac{x^2}{6} - \frac{2x}{3} + 1 \end{aligned}$$

c.



4. Aşağıdaki gibi bir veri kümesi verilmiş olsun.

x	1	2	3	4	5
y	3	1	2	3	2

(a) $l(x)$ parçalı lineer interpolasyon fonksiyonunu bulunuz.

(b) $S(x)$ kübik şerit (spline) interpolasyon fonksiyonunu bulunuz. $l(s)$, $S(x)$ fonksiyonlarının grafiklerini birlikte çizdiriniz.

Çözüm:

a.

$$l(x) = p_1(x) = y_{i-1}\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + y_i\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad x_{i-1} < x < x_i, \ (i = 1, 2, ..., n)$$

$n = 4$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, $y_0 = 3$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$, $y_4 = 2$.

$$l(x)=\begin{cases} y_0\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=3\dfrac{x-2}{1-2}+1\dfrac{x-1}{2-1}, & 1\le x\le 2\\ y_1\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}+y_2\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=1\dfrac{x-3}{2-3}+2\dfrac{x-2}{3-2}, & 2\le x\le 3\\ y_2\dfrac{x-x_3}{x_2-x_3}+y_3\dfrac{x-x_2}{x_3-x_2}=2\dfrac{x-4}{3-4}+3\dfrac{x-3}{4-3}, & 3\le x\le 4\\ y_3\dfrac{x-x_4}{x_3-x_4}+y_4\dfrac{x-x_3}{x_4-x_3}=3\dfrac{x-5}{4-5}+2\dfrac{x-4}{5-4}, & 4\le x\le 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow l(x)=\begin{cases} -2x+5, & 1\le x\le 2\\ x-1, & 2\le x\le 3\\ x-1, & 3\le x\le 4\\ -x+7, & 4\le x\le 5 \end{cases}$$

b. Genel halde kübik şerit (spline) interpolasyon yöntemi için

$$\begin{aligned}&\frac{(x_i-x_{i-1})}{6}M_{i-1}+\frac{(x_{i+1}-x_{i-1})}{3}M_i+\frac{(x_{i+1}-x_i)}{6}M_{i+1}\\ =&\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}-\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}},\quad (i=2,3,...,n-1)\end{aligned}$$

lineer denklem sistemi $M_1=M_n=0$ varsayımı altında çözülür ve

$$\begin{aligned}S(x)=&\frac{(x_i-x)^3M_{i-1}+(x-x_{i-1})^3M_i}{6(x_i-x_{i-1})}+\frac{(x_i-x)y_{i-1}+(x-x_{i-1})y_i}{x_i-x_{i-1}}\\ &-\frac{1}{6}(x_i-x_{i-1})[(x_i-x)M_{i-1}+(x-x_{i-1})M_i],\quad x_{i-1}<x<x_i\end{aligned}$$

parçalı polinomu oluşturulur.

Verilen veri kümesinde $n=5$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$, $x_5=5$, $y_1=3$, $y_2=1$, $y_3=2$, $y_4=3$ ve $y_5=2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{M_1}{6}+\frac{2M_2}{3}+\frac{M_3}{6}&=3\\ \frac{M_2}{6}+\frac{2M_3}{3}+\frac{M_4}{6}&=0\\ \frac{M_3}{6}+\frac{2M_4}{3}+\frac{M_5}{6}&=-2\end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. $M_1=M_5=0$ varsayımı yapılırsa sistem

$$\frac{2M_2}{3} + \frac{M_3}{6} = 3 \qquad (a)$$

$$\frac{M_2}{6} + \frac{2M_3}{3} + \frac{M_4}{6} = 0 \qquad (b)$$

$$\frac{M_3}{6} + \frac{2M_4}{3} = -2 \qquad (c)$$

3 bilinmeyenli 3 denkleme dönüşür.

$$(-1/4) \times (a) + (b) + (-1/4) \times (c) \Rightarrow -\frac{M_3}{24} + \frac{2M_3}{3} - \frac{M_3}{24} = -\frac{3}{4} + \frac{2}{4}$$

$$\Rightarrow M_3 = -\frac{3}{7}$$

$$M_3 \to (a) \Rightarrow M_2 = \frac{129}{28}$$

$$M_3 \to (c) \Rightarrow M_4 = -\frac{81}{28}$$

$S(x)$ parçalı polinomun ifadesi MATLAB programı kullanılarak elde edilebilir. Bunun için ilk önce her bir parçanın polinomu sembolik olarak bulunduktan sonra polinomların katsayılarına ulaşılabilir.

```
% calSx.m
clearvars;
format long

xi = [1 2 3 4 5]; yi = [3 1 2 3 2]; Mi = [0 129/28 -3/7 -81/28 0];
n = 5; S = sym('S',[1 n-1]); syms x;

for i=2:n
    S(i-1)=((xi(i)-x)^3*Mi(i-1)+(x-xi(i-1))^3*Mi(i))/(6*(xi(i)-xi(i-1)))...
        + ((xi(i)-x)*yi(i-1)+(x-xi(i-1))*yi(i))/(xi(i)-xi(i-1))...
        - (1/6)*(xi(i)-xi(i-1))*((xi(i)-x)*Mi(i-1)+(x-xi(i-1))*Mi(i));

    disp([i-1 ,coeffs(S(i-1))]);
end
```

```
>> calSx
[1, 5, -13/28, -129/56, 43/56]

[2, 125/7, -79/4, 411/56, -47/56]

[3, 44/7, -229/28, 195/56, -23/56]

[4, -356/7, 971/28, -405/56, 27/56]
```

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{43}{56}x^3-\dfrac{129}{56}x^2-\dfrac{13}{28}x+5, & 1\le x\le 2\\ -\dfrac{47}{56}x^3+\dfrac{411}{56}x^2-\dfrac{79}{4}x+\dfrac{125}{7}, & 2\le x\le 3\\ -\dfrac{23}{56}x^3+\dfrac{195}{56}x^2-\dfrac{229}{28}x+\dfrac{44}{7}, & 3\le x\le 4\\ \dfrac{27}{56}x^3-\dfrac{405}{56}x^2+\dfrac{971}{28}x-\dfrac{356}{7}, & 4\le x\le 5\end{cases}$$