Kaynak: Oppenheim, Willsky, “Signals and Systems”

Tek Yanlı (Unilateral) Laplace dönüşümü

Unilateral Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\mathfrak{X}(s) \triangleq \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt,$$

$$x(t) \overset{\mathcal{UL}}{\longleftrightarrow} \mathfrak{X}(s) = \mathcal{UL}\{x(t)\}.$$

Örnek:

$$x(t) = e^{-a(t+1)}u(t+1).$$

şeklinde verilen işaretin Laplace dönüşümünü bulalım.

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}(s) &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-a(t+1)}u(t+1)e^{-st}\,dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-a}e^{-t(s+a)}\,dt \\ &= e^{-a}\frac{1}{s+a}, \qquad \Re e\{s\} > -a.\end{aligned}$$

Örnek:

$$\mathfrak{X}(s) = \frac{s^2-3}{s+2}.$$

şeklinde verilen unilateral Laplace dönüşümüne karşı gelen zaman domeni işareti bulalım.

$$\mathfrak{X}(s) = A + Bs + \frac{C}{s+2}.$$

$$\mathfrak{X}(s) = -2 + s + \frac{1}{s+2},$$

ROC of $\Re e\{s\} > -2$.

$$x(t) = -2\delta(t) + u_1(t) + e^{-2t}u(t) \quad \text{for} \quad t > 0^-.$$

Kaynak: Oppenheim, Willsky, “Signals and Systems”

Unilateral Laplace dönüşümünün özellikleri

Property	Signal	Unilateral Laplace Transform
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$\mathcal{X}(s)$ $\mathcal{X}_1(s)$ $\mathcal{X}_2(s)$
Linearity	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$a\mathcal{X}_1(s) + b\mathcal{X}_2(s)$
Shifting in the s-domain	$e^{s_0 t}x(t)$	$\mathcal{X}(s - s_0)$
Time scaling	$x(at), \quad a > 0$	$\frac{1}{a}\mathcal{X}\left(\frac{s}{a}\right)$
Conjugation	$x*(t)$	$x*(s)$
Convolution (assuming that $x_1(t)$ and $x_2(t)$ are identically zero for $t < 0$)	$x_1(t) * x_2(t)$	$\mathcal{X}_1(s)\mathcal{X}_2(s)$
Differentiation in the time domain	$\frac{d}{dt}x(t)$	$s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$
Differentiation in the s-domain	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}\mathcal{X}(s)$
Integration in the time domain	$\int_{0^-}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}\mathcal{X}(s)$

Initial- and Final-Value Theorems

If $x(t)$ contains no impulses or higher-order singularities at $t = 0$, then

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\mathcal{X}(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s\mathcal{X}(s)$$

Kaynak: Oppenheim, Willsky, “Signals and Systems”

Unilateral Laplace dönüşümü ile diferansiyel denklem çözümü

Örnek:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t),$$

şeklinde diferansiyel denklemi verilen ve *dinlenmede olan* bir sistemin

$$x(t) = \alpha u(t).$$

Giriş işaretine cevabını bulalım.

Sistemin transfer fonksiyonu

$$\mathcal{H}(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}.$$

Sistemin çıkış işaretinin unilateral Laplace dönüşümü

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}(s) &= \mathcal{H}(s)\mathcal{X}(s) = \frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{\alpha/2}{s} - \frac{\alpha}{s+1} + \frac{\alpha/2}{s+2}.\end{aligned}$$

Sistem çıkışı

$$y(t) = \alpha\left[\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right]u(t).$$

Başlangıç koşulları sıfırdan farklı sistemler için

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st}\, dt = x(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} + s\int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\, dt$$
$$= s\mathcal{X}(s) - x(0^-).$$

$$d^2x(t)/dt^2.$$

$$s^2\mathcal{X}(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

Ifadeleri kullanılacaktır.

Örnek:

Önceki örnekte verilen sistem için*, başlangıç koşullarının*

$$y(0^-) = \beta, \qquad y'(0^-) = \gamma.$$

şeklinde verilmesi durumunda

$$x(t) = \alpha u(t)$$

Giriş işareti için , çıkış bulunmak istenirse

$$s^2\mathcal{Y}(s) - \beta s - \gamma + 3s\mathcal{Y}(s) - 3\beta + 2\mathcal{Y}(s) = \frac{\alpha}{s},$$

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{\beta(s+3)}{(s+1)(s+2)} + \frac{\gamma}{(s+1)(s+2)} + \frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)},$$

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2}.$$

$$y(t) = [1 - e^{-t} + 3e^{-2t}]u(t) \quad \text{for} \quad t > 0.$$

şeklinde elde edilir.