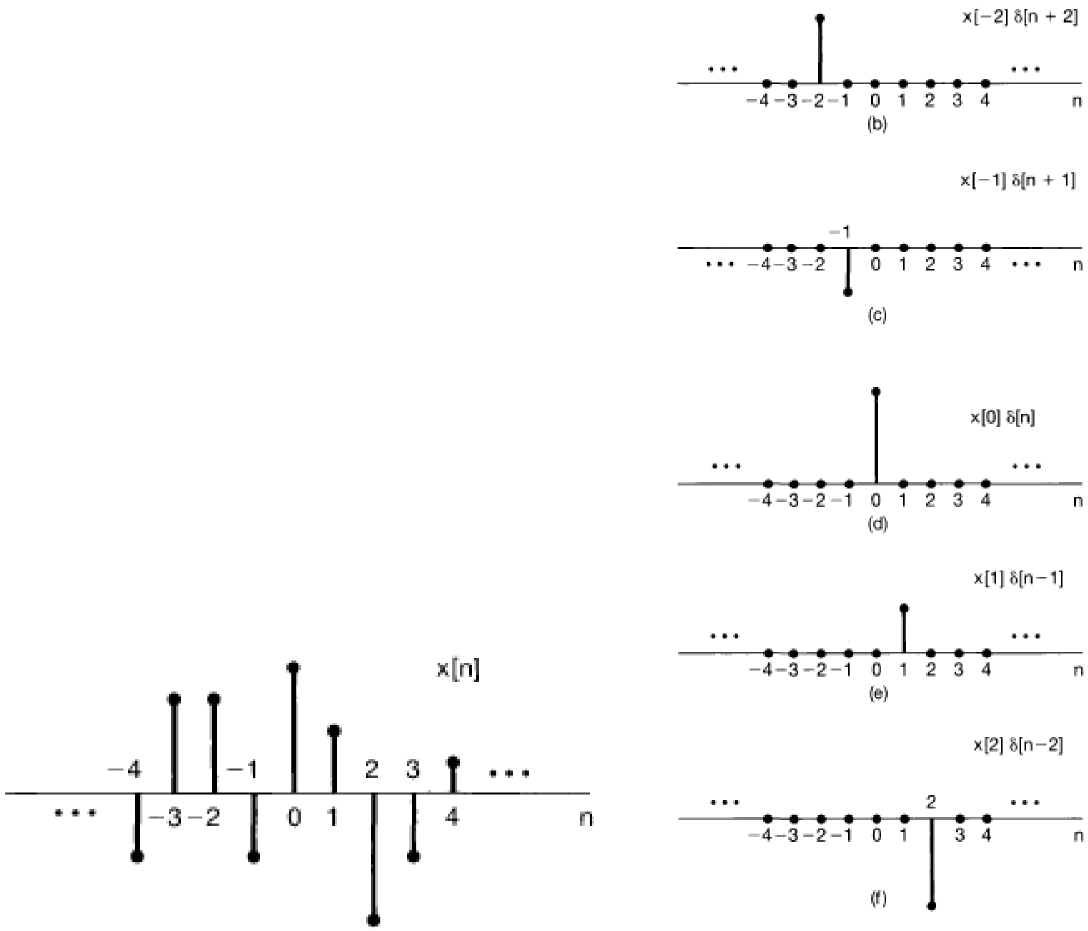
LZD sistemlerin Zaman domeni analizi-Konvolüsyon toplamı/integrali

(Time domain analysis of LTI systems)

Ayrık zamanlı işaretlerin ötelenmiş impulsların ağırlıklı toplamı cinsinden gösterilmesi

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k].$$

$$x[n] = \ldots + x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3] + \ldots.$$



Sistemin cevabı

$$y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\} = \mathbf{T}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k] \right\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathbf{T}\{\delta[n-k]\}$$

$$h[n-k] = \mathbf{T}\{\delta[n-k]\}$$

Konvolüsyon toplamı (convolution sum)

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k].}$$

Konvolüsyonun grafiksel olarak hesabı

1. **İmpuls işareti zamanda katlanarak**
   $h[-k]$

oluşturulur.

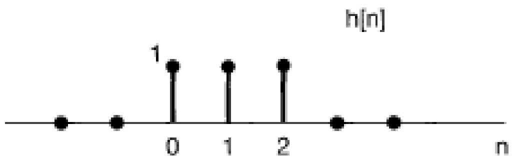
2. **Verilen n anındaki çıkışı hesaplamak için**

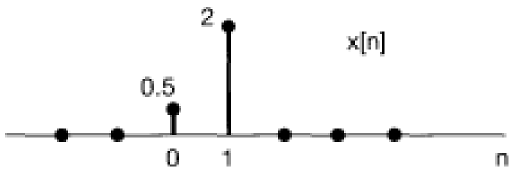
$h[n-k]$

oluşturulur.

3. $x[k]h[n-k]$
   çarpımı yapılarak, tüm k değerleri toplam alınıp, n anı için çıkış işaretinin değeri bulunur.
4. **2-3 adımları $-\infty < n < \infty$ aralığı için tekrarlanarak çıkış işareti y[n] bulunur.**

Örnek:

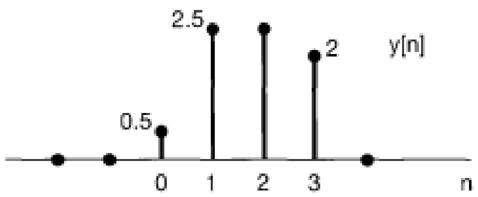




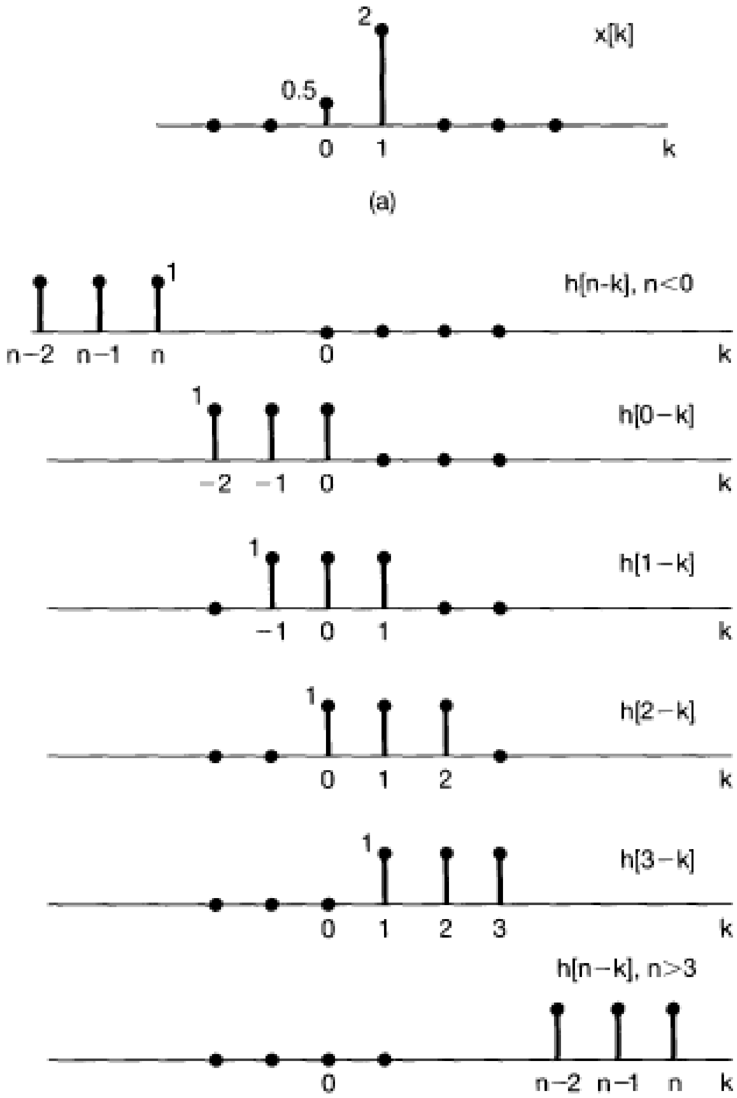
Şeklinde verilen 2 işaretin konvolüsyonunu alalım.

1. *Çözüm (LZD sistem özelliklerinden yararlanarak*

$$y[n] = x[0]h[n-0] + x[1]h[n-1] = 0.5h[n] + 2h[n-1].$$



2. *Çözüm konvolüsyon toplamından yararlanarak*



Çıkış işareti

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k] = 0.5.$$

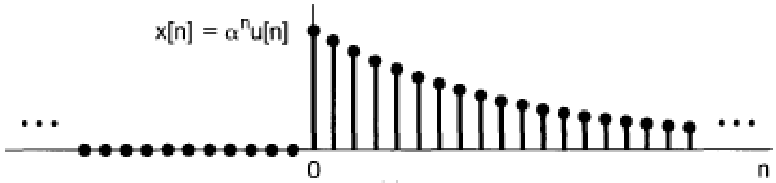
$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k] = 0.5 + 2.0 = 2.5.$$

$$y[2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[2-k] = 0.5 + 2.0 = 2.5,$$

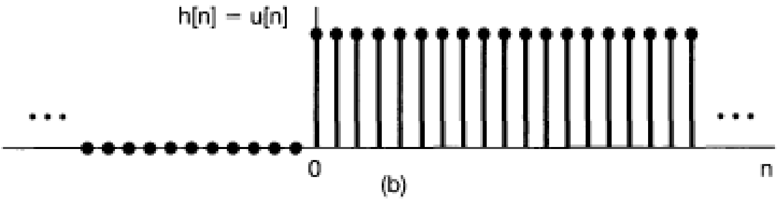
$$y[3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[3-k] = 2.0.$$

Örnek:

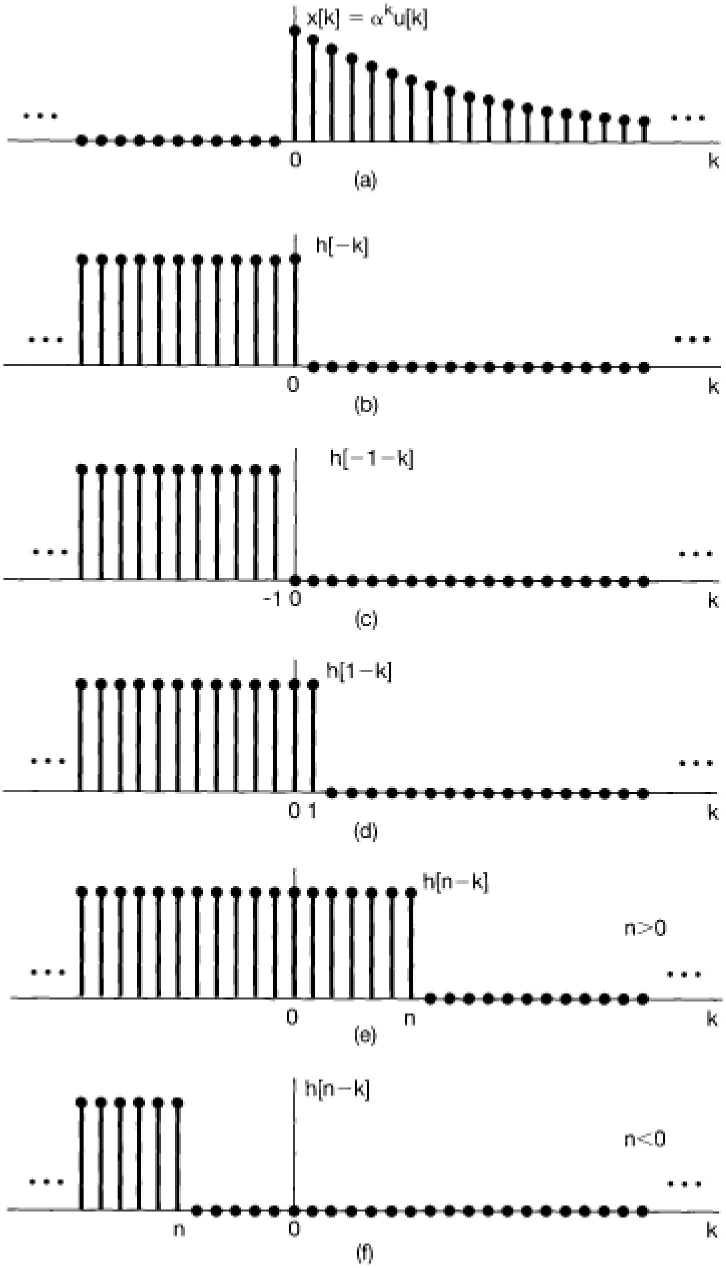
$$x[n] = \alpha^n u[n],$$
$$h[n] = u[n].$$



(a)



(b)



$y[n] = 0, n < 0.$

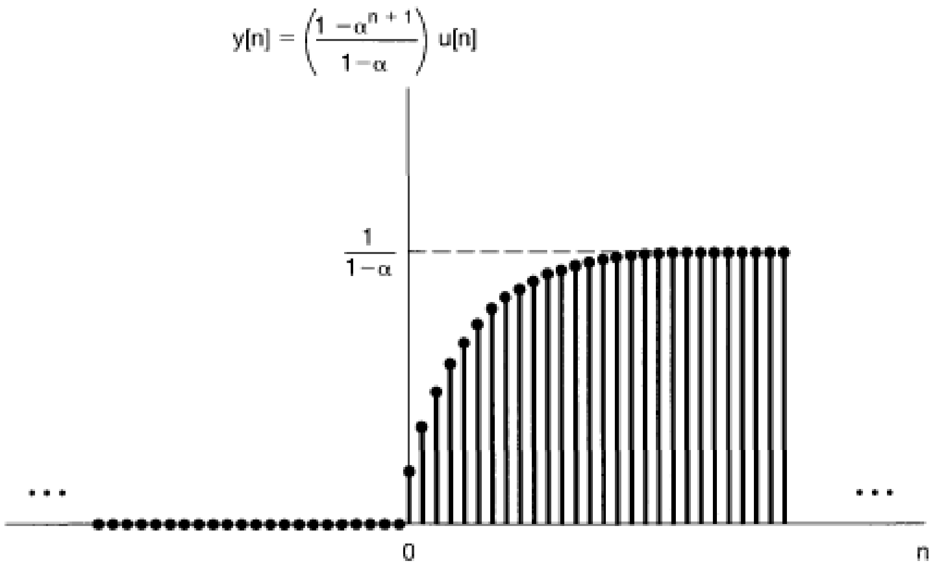
$n \geq 0,$

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^k, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k,$$

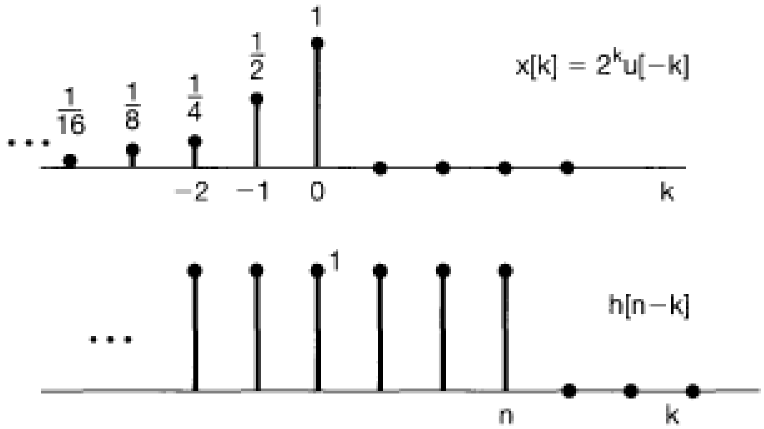
$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

$$y[n] = \left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right)u[n].$$



Örnek:

$$x[n] = 2^n u[-n],$$
$$h[n] = u[n].$$



$n \geq 0,$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{0} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}, \quad 0 < |\alpha| < 1.$$

$r = -k,$

Değişken dönüşümü yaparak

$$\sum_{k=-\infty}^{0} 2^k = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-(1/2)} = 2.$$

n<0 için

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^k.$$

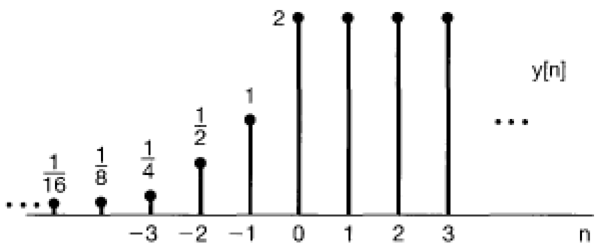
$l = -k$

$m = l + n,$

Değişken dönüşümlerini yaparak,

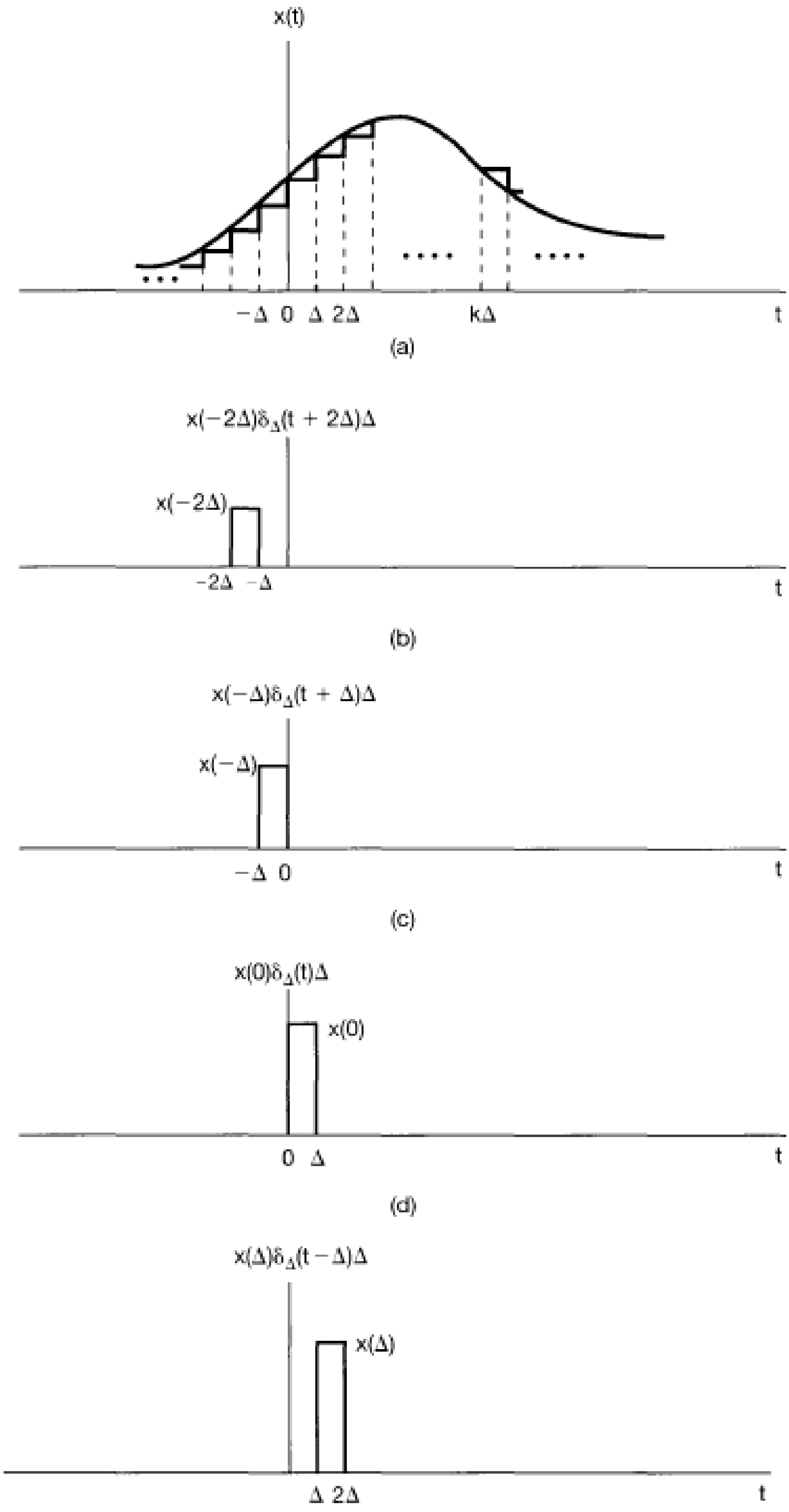
Çıkış işareti

$$y[n] = \sum_{l=-n}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^l = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}.$$



Konvolüsyon integrali (convolution integral)

Sürekli- zamanlı işaretlerin impuls işaretleri ile modellenmesi



$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \le t < \Delta \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases},$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta.$$

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta.$$

Sonuç olarak

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau.$$

$$y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\} = \mathbf{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathbf{T}\{\delta(t-\tau)\}\,d\tau$$

$$h(t) = \mathbf{T}\{\delta(t)\}$$

$$h(t-\tau) = \mathbf{T}\{\delta(t-\tau)\}$$

Sistemin çıkışı

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h_\tau(t)d\tau.$$

$$y(t) = x(t) * h(t).$$

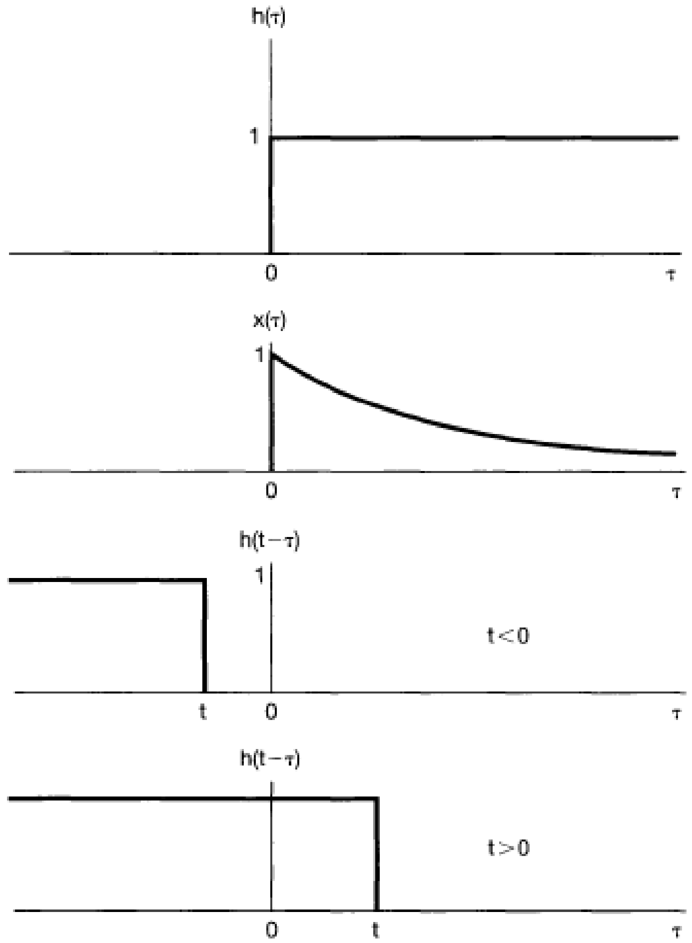
Örnek:

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

$$h(t) = u(t).$$

Şeklinde verilen işaretlerin konvolüsyonunu konvolüsyon integralinden yararlanarak bulalım.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h_\tau(t)d\tau.$$

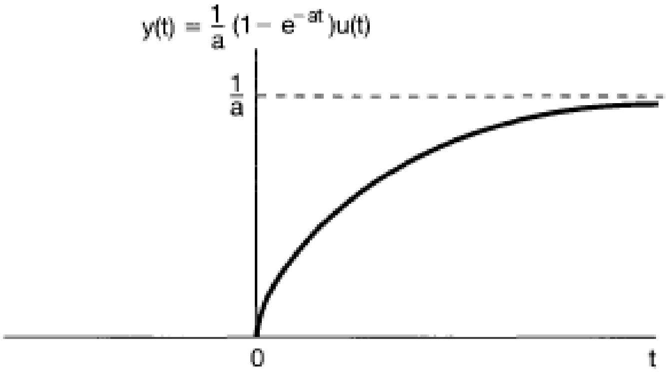


$t > 0,$

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-a\tau}, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau}\Big|_0^t$$
$$= \frac{1}{a}(1 - e^{-at}).$$

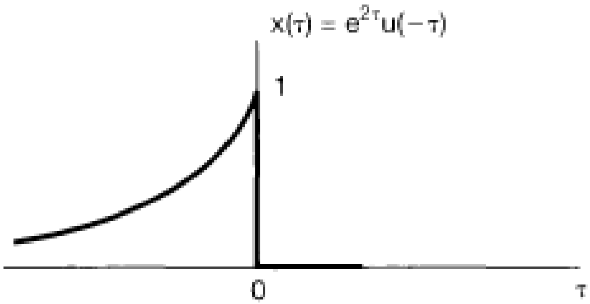
$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t),$$

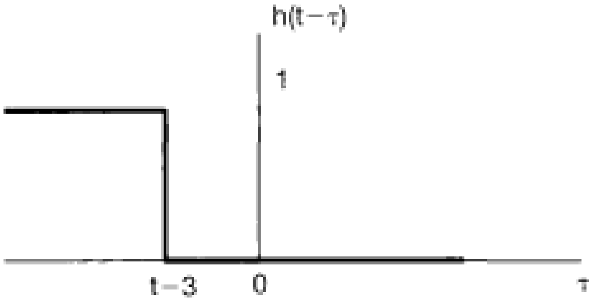


Örnek:

$$x(t) = e^{2t}u(-t),$$
$$h(t) = u(t-3).$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h_\tau(t)d\tau.$$





$t-3 \leq 0$.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2} e^{2(t-3)}.$$

$t-3 \geq 0$,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2}.$$

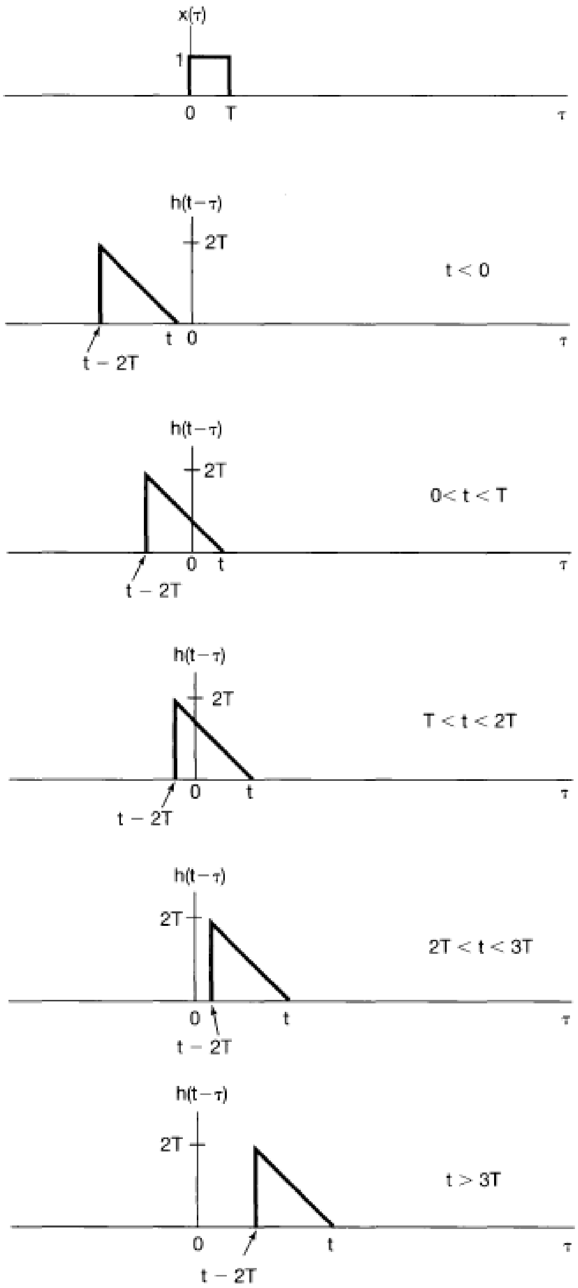
Çalışma sorusu:

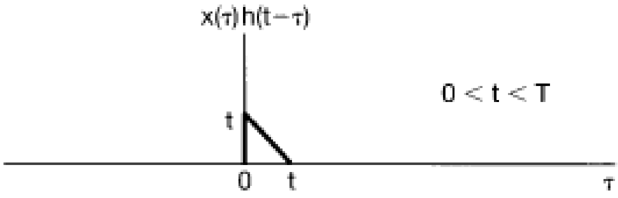
$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases},$$

$$h(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

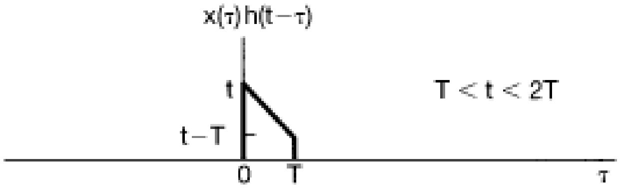
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h_\tau(t)d\tau.$$

hesaplayınız.

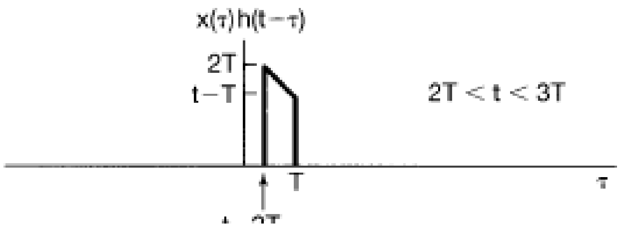




(a)

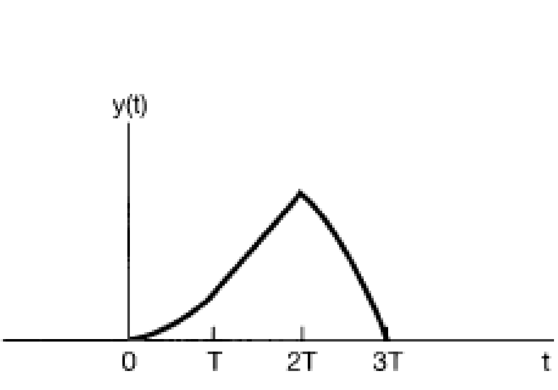


(b)



Çıkış işareti

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2, & 0 < t < T \\ Tt - \frac{1}{2}T^2, & T < t < 2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2, & 2T < t < 3T \\ 0, & 3T < t \end{cases},$$



LZD sistemlerin konvolüsyon toplamı/integrali gösterilimi

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

Konvolüsyonun özellikleri (properties of the convolution)

Komütatif özellik (commutative property)

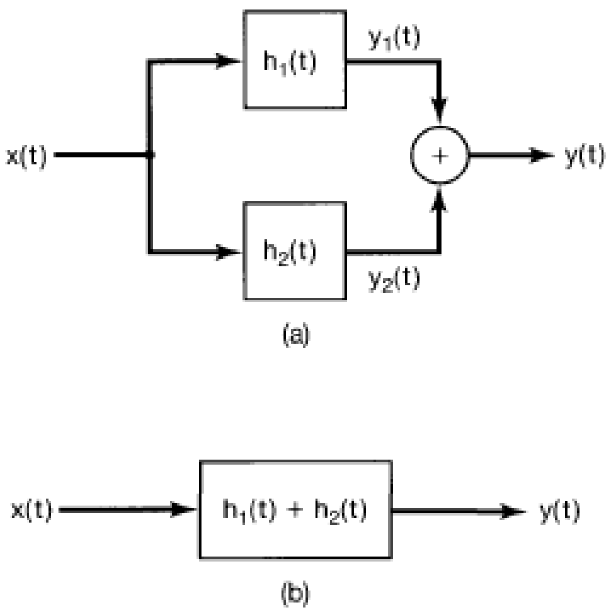
$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

Distribütif özellik (distributive property)

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n],$$

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t).$$

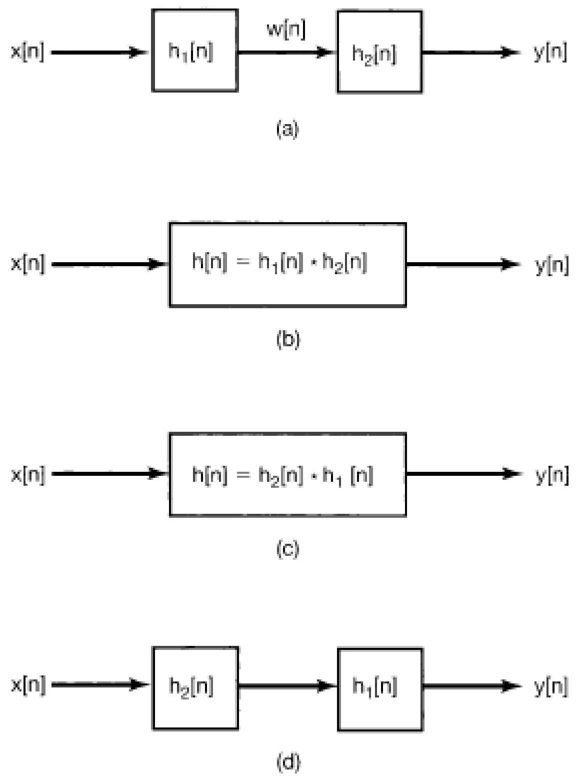


Asosyatif özellik (Assosciative prooerty)

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n],$$

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t).$$

Eşdeğer sistemler(Equivalent systems)



Bir işaretin impuls işareti ile konvolüsyonu

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau.$$

$$x[n] = x[n] * \delta[n]$$

$$x(t) = x(t) * \delta(t),$$

Sistemlerin özelliklerinin impuls cevabına bağlı olarak bulunması

Belleksiz sistem (Memoryless system)

Giriş-çıkış ilişkisi

$$y[n] = Kx[n].$$

İmpuls cevabı

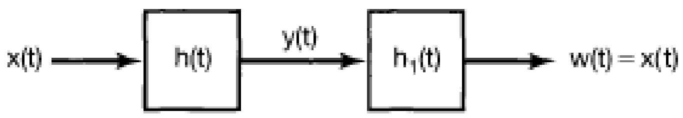
$$h[n] = K\delta[n],$$

Benzer ilişki sürekli-zamanlı sistemler için de elde edilebilir.

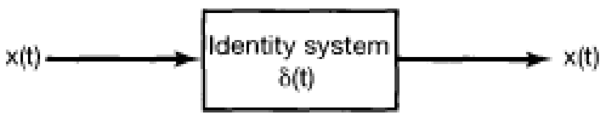
$$y(t) = Kx(t)$$

$$h(t) = K\delta(t).$$

Tersinir sistem, tersi alınabilirlik (Invertible system, invertibility)



(a)



(b)

Sistem ile ters sistem arasındaki ilişki

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t).$$

$$h[n] * h_1[n] = \delta[n].$$

Örnek:

$$y(t) = x(t - t_0).$$

şeklinde giriş-çıkış ilişkisi verilen sistemin ters sistemini (tanımlı ise) bulalım.

Sistemin impuls cevabı

$$h(t) = \delta(t - t_0).$$

(sistem kuralı: giriş işaretini t_o kadar sola kaydırır)

Bu durumda ters sistem

$$h_1(t) = \delta(t + t_0),$$

(sistem kuralı: giriş işaretini t_o kadar sağa kaydırır)

Sistem ve ters sistem arasındaki ilişki sağlanır.

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t).$$

Örnek:

$$h[n] = u[n].$$

için sistemin cevabı

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]u[n-k].$$

$u[n-k]$ is 0 for $n - k < 0$ and 1 for $n - k \geq 0$,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k].$$

Sistem kuralı: verilen n anındaki çıkış için o ana kadar olan tüm girişler toplanır)

Fark alıcı sistemin verilen sistemin ters sistemi olup olmadığını kontrol edelim.

Fark alıcı sistem giriş-çıkış ilişkisi

$$y[n] = x[n] - x[n-1],$$

Fark alıcı sistemin impuls cevabı

$$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1].$$

$$\begin{aligned} h[n] * h_1[n] &= u[n] * \{\delta[n] - \delta[n-1]\} \\ &= u[n] * \delta[n] - u[n] * \delta[n-1] \\ &= u[n] - u[n-1] \\ &= \delta[n]. \end{aligned}$$

Fark alıcı sistem toplayıcı (accumulator) sistemin ters sistemidir.

Nedensellik (causality)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k],$$

Sistem çıkışı gelecek çıkışları içermemelidir.

$$h[n] = 0 \quad \text{for } n < 0.$$

Benzer şekilde

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau.$$

$$h(t) = 0 \quad \text{for } t < 0,$$

Nedensel sistemin impuls cevabı sağ taraflı olmalıdır.

Kararlılık (stability)

Sonlu giriş-sonlu çıkış anlamında kararlılık için, sınırlı giriş için

$$|x[n]| < B$$

sınırlı çıkış elde edilmelidir.

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \right|.$$

$$|y[n]| \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]||x[n-k]|.$$

$$|y[n]| \le B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|$$

olduğundan, *kararlı sistemin impuls cevabı toplanabilir olmalıdır.*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty,$$

Sürekli zamanlı sistemler için

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau \\ &\leq B \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau. \end{aligned}$$

Kararlı sistemin impuls cevabı integre edilebilir olmalıdır.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty.$$

Örnek:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau.$$

Şeklinde giriş-çıkış ilişkisi verilen sistemin impuls cevabı

$$x(t) = \delta(t),$$

alınarak

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(\tau)|d\tau = \int_{0}^{+\infty} d\tau = \infty.$$

İmuls cevabı integre edilebilir olmadığından sistem kararlı değildir.

Örnek:

$$h[n] = \alpha^n u[n]$$

Şeklinde impşls cevabı verilen sistemi nedensellik ve kararlılık açısından inceleyelim.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha^k u[n]| = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha|^k = \frac{1}{1-|\alpha|} \qquad |\alpha| < 1$$

$|\alpha| < 1$

için *kararlı*

Sağ taraflı olduğu için *nedensel*

Birim basamak cevabı (unit step response)

Sistemin birim basamak işaretine cevabı

$$s(t) = \mathbf{T}\{u(t)\}$$

$$s(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau$$

Sistemin impuls ve birim basamak cevapları arasındaki ilişki

$$h(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

Benzer şekilde ayrık-zamanlı sistemler için, sistemin birim basamak cevabı

$$s[n] = h[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

$$h[n] = s[n] - s[n-1]$$