OTOMATİK KONTROL SİSTEMLERİ DERS UYGULAMALARI-1

Doç. Dr. Volkan Sezer

25 Mart 2022 – Uygulama

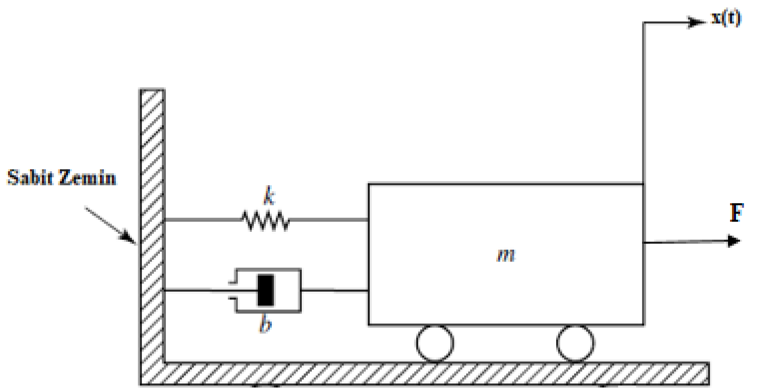
Sorumlu: Arş. Gör. Ozan V. Altınpınar

OTOMATİK KONTROL SİSTEMLERİ DERS UYGULAMALARI - 1

- Soru-1 Şekil-1'deki sistem dengede iken ***m*** kütleli arabaya F kuvveti uygulanmıştır. Belli bir süre sonra ***m*** kütleli araba ***x*** metre yer değiştirmiş ve sistem yeniden denge durumuna geçmiştir. Sistemin girişi kuvvet F, çıkışı yer değiştirme ***x*(t)** olduğuna göre;

a-) Sistemin durum-uzay eşitliklerini elde ediniz.

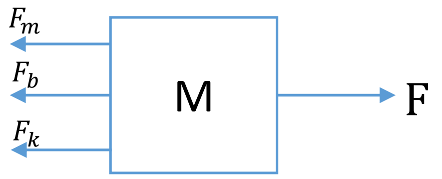
b-) Birim basamak kuvvet giriş cevabında %10'luk bir aşım ve yerleşme zamanının 2 sn (%2 kriteri) olması için viskoz sönüm katsayısı ***b*** ve kütle ***m*** değerleri ne olmalıdır? ($\boldsymbol{k} = 1\ N/m$)



Şekil-1 Sabit zemine monte edilmiş yay-kütle-amortisör sistemi (sürtünme yok).

➢ Çözüm-1:

a-) Öncelikle mekanik sistemin kuvvet cinsinden eşitlikleri elde edilir.



$$F_m = m\ddot{x}, \qquad F_b = b\dot{x}, \qquad F_k = kx$$

$$F_m + F_b + F_k = F$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F$$

$$a = \ddot{x}, \ \vartheta = \dot{x}$$

Sürekli zamanlı sistemlerde durum-uzay eşitlikleri

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathrm{u}$$

$$\mathrm{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathrm{D}\mathrm{u}$$

Durumlar arasındaki ilişkiler

$$x = x_1, \qquad \dot{x}_1 = x_2, \qquad \ddot{x} = \ddot{x}_1 = \dot{x}_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{F}{m} - \frac{b}{m}\dot{x}_1 - \frac{k}{m}x_1$$

Sistemin durum-uzay eşitlikleri

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{m}\end{bmatrix}F$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

- Durum uzay gösterimini elde etmenin birçok yöntemi vardır. Eğer ilk bakışta sistemin durum uzay denklemleri elde edilemiyorsa önce sistemin transfer fonksiyonu bulunur; sonra aşağıda verilen eşitlikler kullanılarak sistemin kanonik formlarda durum-uzay gösterimleri elde edilebilir.

Bir sistemin transfer fonksiyonunun genel olarak gösterimi:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

Bir sistemin durum-uzay eşitlikleri kullanılarak transfer fonksiyonunun çıkarılması

$$\mathrm{TF}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Kontrol edilebilir kanonik formda durum-uzay gösterimi

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \;\vdots\; b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

Soruda verilen sistemin kontrol edilebilir ve gözlenebilir kanonik formlarda durum-uzay gösteriminin elde edilmesi:

$$\mathrm{TF(s)} = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{1/m}{s^2 + \left(\frac{b}{m}\right)s + (\frac{k}{m})}$$

Kontrol edilebilir kanonik formda
durum-uzay gösterimi

$n = 2$ $\quad b_0 = 0, \qquad b_1 = 0, \qquad b_2 = 1/m$

$$a_1 = \frac{b}{m}, \qquad a_2 = \frac{k}{m}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} F$$

$$y = [1/m \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

b-) Soruda istenen şartları sağlatacak viskoz sönüm katsayısı ***b*** ve kütle ***m*** değerlerini bulmadan önce sistemin transfer fonksiyonu bulunmalıdır. Sonrasında karakteristik transfer fonksiyonunun sönüm oranı ξ ve doğal frekansı w_n bulunur.

Sistemin transfer fonksiyonu:

$$\mathrm{TF(s)} = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1/m}{s^2 + \left(\frac{b}{m}\right)s + \left(\frac{k}{m}\right)}$$

Karakteristik transfer fonksiyonu:

$$\mathrm{TF(s)} = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{Kw_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

Aşım değerinden sönüm oranı bulma:

$$\xi = \frac{-\ln(M_p)}{\sqrt{\pi^2 + ln^2(M_p)}}, \qquad M_p = 0.1 \rightarrow \xi = 0.5912$$

Yerleşme zamanı ve sönüm oranından doğal frekansı bulma:

$$t_s = \frac{4}{\xi w_n} \text{ (\%2 kriteri)},$$

$$\xi = 0.5912 \text{ ve } t_s = 2 \text{ sn} \rightarrow w_n = 3.3832 \text{ rad/sn}$$

Sistemin transfer fonksiyonu ile karakteristik transfer fonksiyonu birbirine eşitleme:

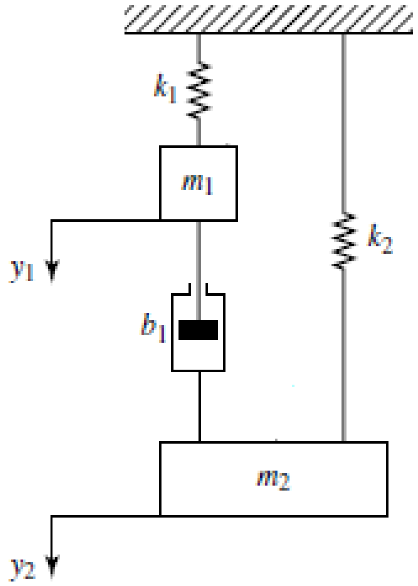
$$\frac{k}{m} = w_n^2 \quad \text{ve } k = 1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \rightarrow m = 0.0874 \text{ kg}$$

$$\frac{b}{m} = 2\xi w_n \rightarrow b = 0.3495 \frac{\mathrm{N.sn}}{\mathrm{m}}$$

❖Soru-2 Şekil-2'de verilen mekanik sisteme sadece yer çekimi kuvveti etki ettiğine göre;

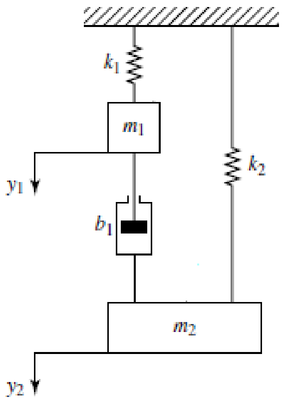
a-) Serbest cisim diyagramı ile kuvvet eşitliklerini elde ediniz.

b-) $\frac{Y_2(s)}{Y_1(s)} = ?$ transfer fonksiyonunu bulunuz. (g: yer çekimi ivmesi)



Şekil-2 Mekanik sistem

➢ Çözüm-2:

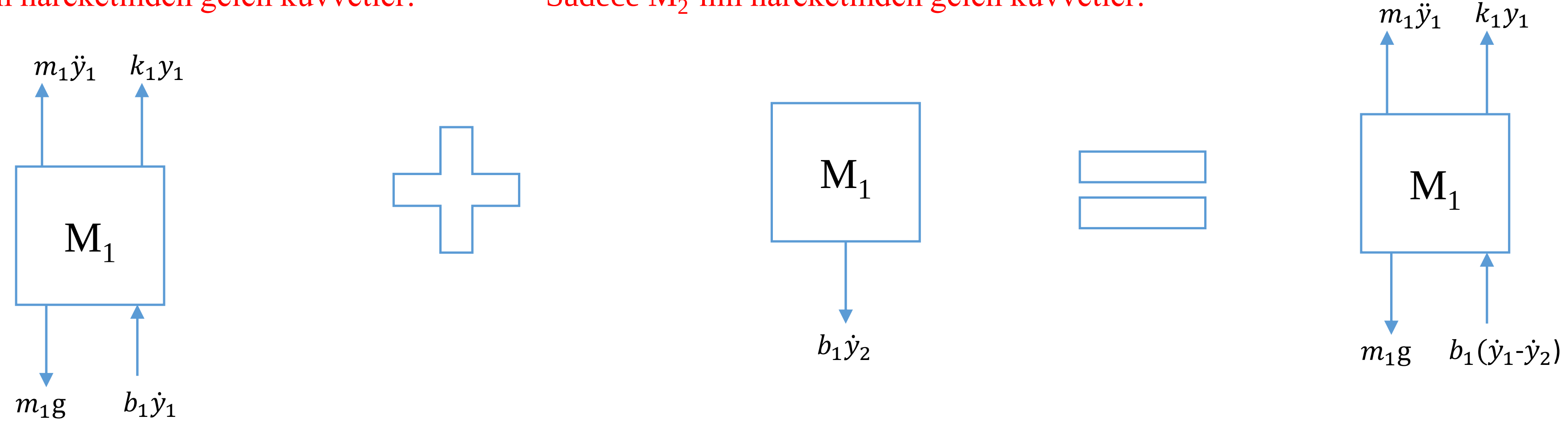


a-) Her bir kütle için iki ayrı serbest cisim diyagramı oluşturulur. Superpozisyon ile her kütle için tek bir diyagram elde edilir.

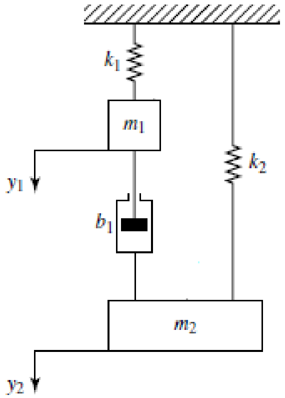
M_1 Kütlesinin Serbest Cisim Diyagramları:

Sadece M_1'in hareketinden gelen kuvvetler:

Sadece M_2'nin hareketinden gelen kuvvetler:



$$m_1 g = m_1\ddot{y}_1 + b_1\dot{y}_1 + y_1k_1 - b_1\dot{y}_2$$

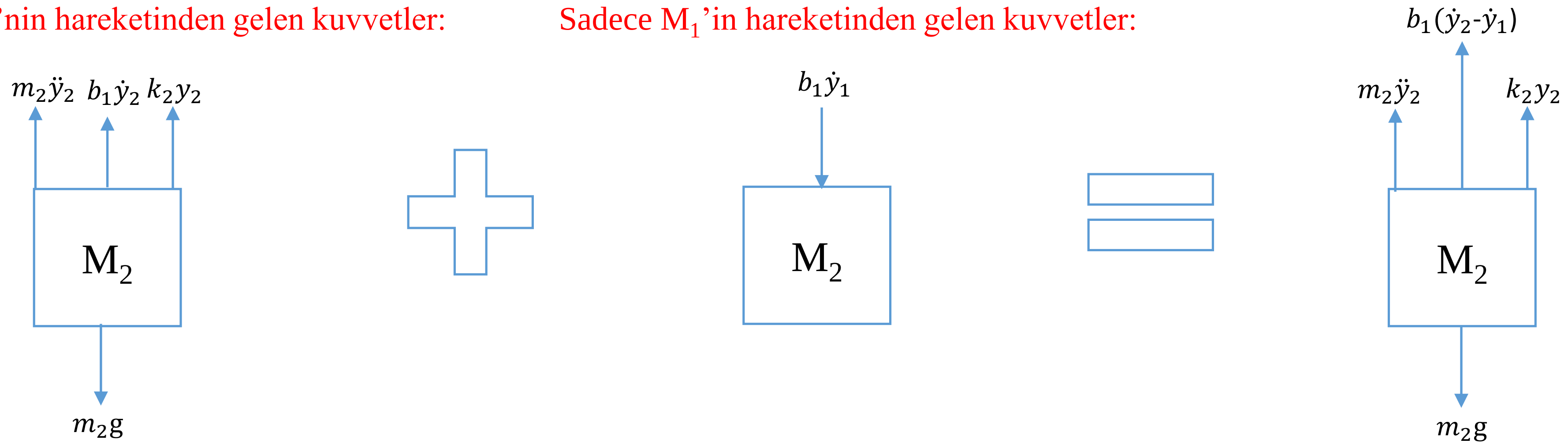


➢ Çözüm-2:

a-) Her bir kütle için iki ayrı serbest cisim diyagramı oluşturulur. Superpozisyon ile her kütle için tek bir diyagram elde edilir.

M_2 Kütlesinin Serbest Cisim Diyagramları:

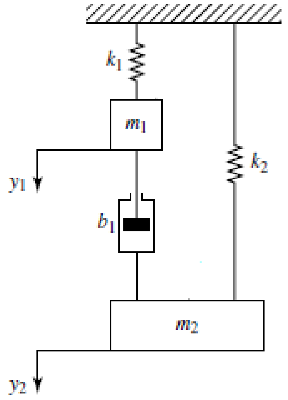
Sadece M_2'nin hareketinden gelen kuvvetler: Sadece M_1'in hareketinden gelen kuvvetler:



$$m_2g = m_2\ddot{y}_2 + b_1\dot{y}_2 + y_2k_2 - b_1\dot{y}_1$$

➢ Çözüm-2:

b-) Sistemin kuvvet eşitlikleri bulunduktan sonra soruda istenilen transfer fonksiyonu hesaplanabilir.



Sistemin kuvvet eşitlikleri:

$$m_1 g = m_1\ddot{y}_1 + b_1\dot{y}_1 + y_1 k_1 - b_1\dot{y}_2$$
$$m_2 g = m_2\ddot{y}_2 + b_1\dot{y}_2 + y_2 k_2 - b_1\dot{y}_1$$

Laplace Dönüşümleri:

$$m_1 s^2 Y_1(s) + b_1 s Y_1(s) + k_1 Y_1(s) - \frac{m_1 g}{s} = b_1 s Y_2(s)$$

$$m_2 s^2 Y_2(s) + b_1 s Y_2(s) + k_2 Y_2(s) - \frac{m_2 g}{s} = b_1 s Y_1(s)$$

$$Y_1(s)(m_1 s^2 + b_1 s + k_1) - \frac{m_1 g}{s} = b_1 s Y_2(s)$$

$$Y_2(s)(m_2 s^2 + b_1 s + k_2) - \frac{m_2 g}{s} = b_1 s Y_1(s)$$

$$Y_1(s) = Y_2(s)\frac{(m_2 s^2 + b_1 s + k_2)}{b_1 s} - \frac{m_2 g}{b_1 s^2}$$

$$Y_2(s) = Y_1(s)\frac{(m_1 s^2 + b_1 s + k_1)}{b_1 s} - \frac{m_1 g}{b_1 s^2}$$

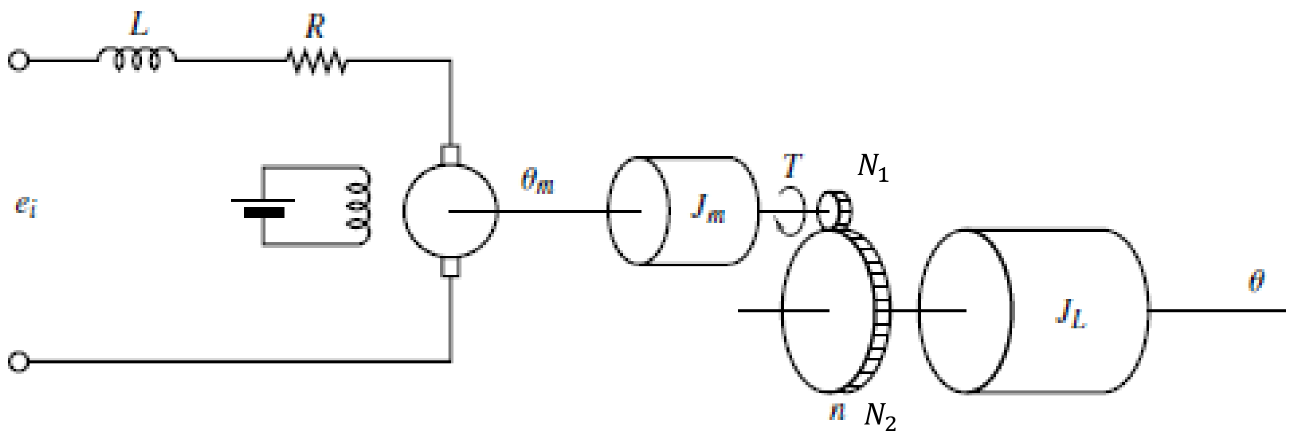
Sonuç:

$$Y_2(s) = \frac{m_1 m_2 g s^2 + (m_1 + m_2) b_1 g s + m_2 g k_1}{s(m_1 m_2 s^4 + (m_1 + m_2) b_1 s^3 + (m_1 k_2 + m_2 k_1) s^2 + (k_1 + k_2) b_1 s + k_1 k_2)}$$

$$Y_1(s) = \frac{m_1 m_2 g s^2 + (m_1 + m_2) b_1 g s + m_1 g k_2}{s(m_1 m_2 s^4 + (m_1 + m_2) b_1 s^3 + (m_1 k_2 + m_2 k_1) s^2 + (k_1 + k_2) b_1 s + k_1 k_2)}$$

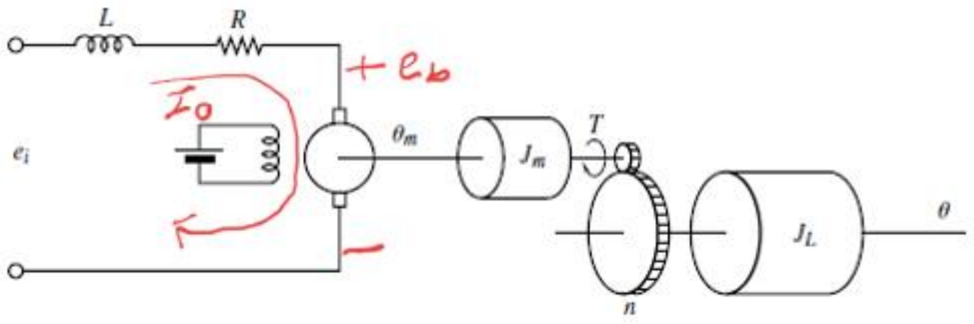
$$\frac{Y_2(s)}{Y_1(s)} = \frac{m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2) b_1 s + m_2 k_1}{m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2) b_1 s + m_1 k_2}$$

❖ Soru-3 Şekil-3'te gösterilen armatür kontrollü bir DC servo motoru, $\boldsymbol{J_L}$ ataletine sahip bir yükü sürmektedir. Motor tarafından dişliye aktarılan tork T'dir. Motor rotorunun atalet momenti ise $\boldsymbol{J_m}$'dir. Motor rotorunun ve yük elemanının açısal yer değişimleri sırasıyla θ_m ve θ şeklindedir. Dişli oranı ${}^{N_1}/_{N_2} = {}^{\theta}/_{\theta_m} = n$'dir. $\Theta(s)/E_i(s)$ transfer fonksiyonunu elde ediniz.



Şekil-3 Armatür kontrollü DC servo motor sistemi.

Çözüm-3:



Motorun elektrik devre kısmındaki eşitlikleri:

$$V_L + V_R + e_b = e_i$$

$$L\frac{di_a}{dt} + Ri_a + K_b\frac{d\theta_m}{dt} = e_i$$

Laplace dönüşümü:

$$E_i(s) = LsI_a(s) + RI_a(s) + K_b s\Theta_m(s)$$

$$\theta/\theta_m = n \rightarrow \Theta_m(s) = \frac{\Theta(s)}{n}$$

$$E_i(s) = LsI_a(s) + RI_a(s) + K_b s\frac{\Theta(s)}{n}$$

Tork eşitlikleri:

$$T_m = T + J_m\ddot{\theta}_m$$

$$T_m = Ki_a$$

$$T = nT_L, \qquad T_L = J_L\ddot{\theta}$$

$$nT_m = nKi_a = n^2J_L\ddot{\theta} + J_m\ddot{\theta}$$

$$i_a = \frac{n^2J_L\ddot{\theta} + J_m\ddot{\theta}}{nK}$$

Laplace dönüşümü:

$$I_a(s) = \frac{(n^2J_L + J_m)s^2\Theta(s)}{nK}$$

SONUÇ:

$$\frac{\Theta(s)}{E_i(s)} = \frac{nK}{s[(Ls+R)(n^2J_L + J_m)s + K.K_b]}$$