

Sayısal Haberleşme

Prof. Dr. İbrahim Altunbaş

1 Soru: Pulse Code Modulation (PCM)

A_1 genlikli sinüsoidal bir sinyal kuantalayıcı girişine uygulanmaktadır. Kuantalayıcı A_2 genliğine ayarlanmıştır. ($A_2 > A_1$) Sinyal gücünün kuantalama gürültüsünün gücüne oranını bulunuz.

Not-1: Uniform kuantalama gürültüsü olduğu varsayıldı.

Not-2: İşaret $A_1 \cos(\cdot)$ şeklinde iken kuantalayıcı $A_2 \cos(\cdot)$ şeklinde olduğunu varsayıyor.

1.1 Cevap:

Kuantalayıcının adım aralığı $a = \frac{2A_2}{2^n}$

$$\begin{aligned} \frac{S}{N_q} &= \frac{\langle x^2(t) \rangle}{\mathbb{E}[n_q^2]} = \frac{(A_1^2/2)}{a^2/12} = \frac{A_1^2}{2} \frac{12}{(2A_2/2^n)^2} = \frac{3}{2} 2^{2n} \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \\ \left[\frac{S}{N_q} \right]_{dB} &= 10 \log_{10}(3/2) + 20 \log_{10} 2^n + 20 \log_{10} \left(\frac{A_1}{A_2} \right) \\ \left[\frac{S}{N_q} \right]_{dB} &= 1.76 + 6.02n + 20 \log_{10} \left(\frac{A_1}{A_2} \right) \end{aligned}$$

n arttıkça $\left(\frac{S}{N_q} \right)$ artmaktadır.

A_1 arttıkça $\left(\frac{S}{N_q} \right)$ artmaktadır.

A_1 azaldıkça beklenildiği gibi $\left(\frac{S}{N_q} \right)$ azalmaktadır.

2 Soru: Pulse Code Modulation (PCM)

4 kuantaya düzeye düzgün kuantalanacak bir bilgi işareti

$$f_X(x) = \begin{cases} ke^{-|x|}, & -4 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{dışında} \end{cases}$$

olasılık yoğunluk işlevi ile verilmektedir. Kuantalama düzeyleri, kuantalama aralıklarının ortalarında seçildiklerine göre, kuantalama hatasının ortalama gücünü ve SNR_q 'yu (kuantalanmış işaretin, kuantalama hatasının gücüne oranını) bulunuz.

2.1 Cevap:

Süreklili bir rastlantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunun geçerli olabilmesi için;

- 1) $f(x) = 0$, $x \notin \mathbb{R}$
- 2) $f(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ ($f(x)$ fonksiyonu 0'dan küçük olamaz.)
- 3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ ($f(x)$ fonksiyonunun altında kalan alan 1'dir.)

olmalıdır. Öyleyse,

$$\int_{-4}^0 ke^x dx + \int_0^4 ke^{-x} dx = 1$$

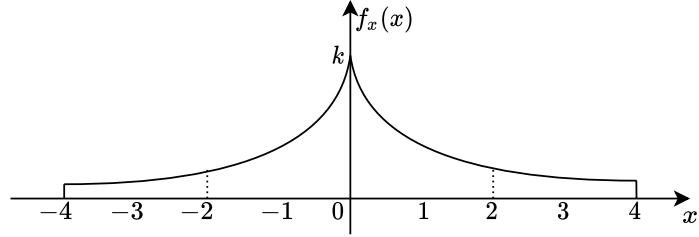
$$e^x \Big|_{-4}^0 - e^{-x} \Big|_0^4 = 1/k$$

$$1 - e^{-4} - e^{-4} + 1 = 1/k$$

$$2 - 2e^{-4} = 1/k$$

$$2 - 2(0.183) = 1/k$$

$$\boxed{k \approx 0.51}$$



Şekil 1: $f_X(x)$.

-4 V ile 4 V aralığı kuantalanıyor. Yani, $A = 8$.

Kuantalama aralıkları $[-4, -2)$, $[-2, 0)$, $[0, 2)$, $[2, 4]$ şeklindedir ve $Q = 4$ kuantaya seviyesi vardır.

Kuantalama adım aralığı $a = \frac{A}{Q} = 2$ V.

Kuantalama Gürültüsü = Gerçek (x) değeri - Kuantalanmış (x_q) değeri

$$n_q = x - x_q$$

Dolayısıyla $-1 \leq n_q \leq 1$ şeklindedir.

$$[-4, -2) \text{ aralığında } f_{n_q}(n_q) = ke^{-|n_q+x_q|} = ke^{-|n_q-3|} = ke^{n_q-3}$$

$$[-2, 0) \text{ aralığında } f_{n_q}(n_q) = ke^{-|n_q-1|} = ke^{n_q-1}$$

$$[0, 2) \text{ aralığında } f_{n_q}(n_q) = ke^{-|n_q+1|} = ke^{-n_q-1}$$

$$[2, 4] \text{ aralığında } f_{n_q}(n_q) = ke^{-|n_q+1|} = ke^{-n_q-3}$$

Kuantalama hatasının ortalama gücü:

$$N_q = \mathbb{E} [n_q^2] = \int_{-1}^1 n_q^2 f_{n_q}(n_q) dn_q$$

şeklindedir. $f_{n_q}(n_q)$ parçalı fonksiyon olduğu için

$$N_q = \int_{-1}^1 n_q^2 (ke^{n_q-3}) dn_q + \int_{-1}^1 n_q^2 (ke^{n_q-1}) dn_q + \int_{-1}^1 n_q^2 (ke^{-n_q-1}) dn_q + \int_{-1}^1 n_q^2 (ke^{-n_q-3}) dn_q$$

şeklinde yazılması gerekmektedir. Yukarıdaki integrallerin hesaplanması için $\int_{-1}^1 n_q^2 e^{n_q} dn_q$ integralini kısmi integrasyon ile hesaplayalım.

$$\int_{-1}^1 n_q^2 e^{n_q} dn_q = uv - \int v du$$

şeklinde yazılmakta olup burada $\begin{matrix} u = n_q^2 & dv = e^{n_q} dn_q \\ du = 2n_q dn_q & v = e^{n_q} \end{matrix}$ şeklindedir. İntegrali tekrar yazarsak,

$$\int_{-1}^1 n_q^2 e^{n_q} dn_q = n_q^2 e^{n_q} \Big|_{-1}^1 - 2 \underbrace{\int_{-1}^1 e^{n_q} n_q dn_q}_I = e - e^{-1} - 2I$$

olur. Burada I terimini bulmak istersek;

$$I = \int_{-1}^1 e^{n_q} n_q dn_q = \int u^* dv^* = u^* v^* - \int v^* du^*$$

olup $\begin{matrix} u^* = n_q & dv^* = e^{n_q} dn_q \\ du^* = dn_q & v^* = e^{n_q} \end{matrix}$ şeklindedir. Dolayısıyla,

$$I = \int_{-1}^1 e^{n_q} n_q dn_q = n_q e^{n_q} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^{n_q} dn_q = e + e^{-1} - e + e^{-1} = 2e^{-1}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak $\boxed{\int_{-1}^1 n_q^2 e^{n_q} dn_q = e - e^{-1} - 2(2e^{-1}) = e - 5e^{-1} = 0.878}$ olarak bulunur.

Aynı şekilde gösterilebilir ki: $\int_{-1}^1 n_q^2 e^{-n_q} dn_q = 0.878$.

Kuantalama gürültüsünün gücü (n_q sürekli rast. değ. olmak üzere)

$$N_q = \mathbb{E} [n_q^2] = 0.878k(e^{-3} + e^{-1} + e^{-1} + e^{-3}) = 0.375 \text{ W}$$

olur.

Kuantalanmış işaretin gücü (x_q ayrık rast. değ.)

$$S_q = \mathbb{E}[x_q^2] = \sum_q x_q^2 P(x_q)$$

$$S_q = (-3)^2 \int_{-4}^{-2} k e^x dx + (-1)^2 \int_{-2}^0 k e^x dx + (1)^2 \int_0^2 k e^{-x} dx + (3)^2 \int_2^4 k e^{-x} dx$$

$$S_q = k (9(e^{-2} - e^{-4}) + 2(1 - e^{-2}))$$

$$S_q = 1.956 \text{ W}$$

olarak bulunur.

$$\text{Dolayısıyla, } SNR_q = \frac{S_q}{N_q} = \frac{1.956}{0.375} = 5.216$$

$$\boxed{[SNR_q]_{dB} = 10 \log_{10} 5.216 = 7.17 \text{ dB}}.$$

3 Soru: Pulse Code Modulation (PCM)

Frekansı 50 – 4800 Hz arasında değişen bir ses işaretinin çeşitli genlik bölgelerinde olma olasılıkları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

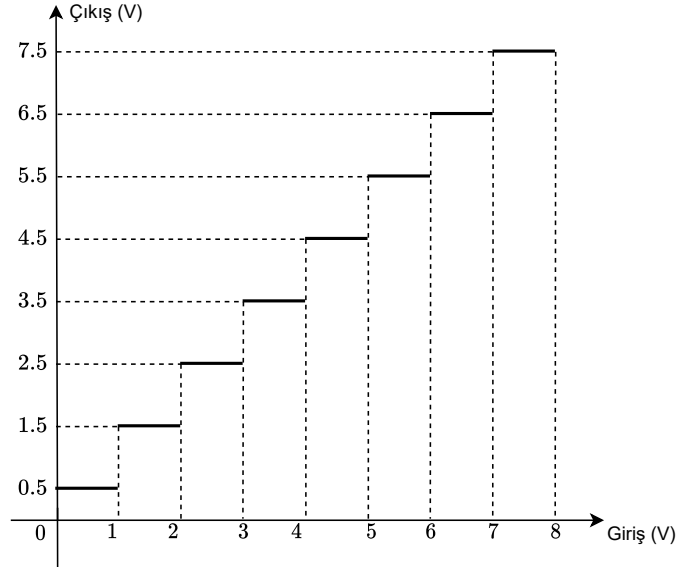
Aralık (Volt)	0 – 1	1 – 2	2 – 3	3 – 4	4 – 5	5 – 6	6 – 7	7 – 8
Olasılık	0.15	0.20	0.20	0.15	0.10	0.10	0.05	0.05

Bu işaret $f_s = 12$ kHz frekansında örneklendiğinde ve tabloda verilen aralıkların ortasındaki düzeylere kuantalandığına göre,

- Kuantalayıcının giriş-çıkış eğrisini çiziniz. Bu, düzgün bir kuantalayıcı mıdır?
- Kuantalama düzeylerini belirleyerek kuantalanmış işarete ilişkin ortalama gücü (S_q) bulunuz.
- Kuanta düzeyleri ikili PCM ile iletileceğine göre örnek başına gerekli bit sayısını (n) bulunuz.
- Bu PCM sistemin bit iletim hızını (R_b) [bit/sn] bulunuz.
- Bu ses işaretinin 15 dk'lık kısmı toplam kaç bit ile kodlanır?
- %50 güven aralığı için PCM darbe süresini hesaplayınız.
- En düşük genlikli kuanta düzeyinden başlayarak artan ikili sayı yönünde kodlama yapıldığına göre kodlayıcının 0 ve 1 üretme olasılıklarını bulunuz.

3.1 Cevap:

- a) Kuantalama aralıkları eşit olduğu için düzgün kuantalayıcıdır.



Şekil 2: Kuantalayıcının giriş-çıkış eğrisi.

b) Kuantalama düzeyleri: 0.5, 1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5, 6.5, 7.5 değerleri olduğuna göre,

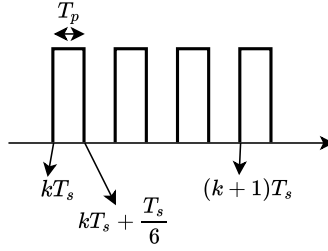
$$\begin{aligned}
 S_q &= \sum_{i=1}^8 x_i^2 P(x_q = x_i) \\
 &= (0.5)^2 P(x_q = 0.5) + (1.5)^2 P(x_q = 1.5) + (2.5)^2 P(x_q = 2.5) + (3.5)^2 P(x_q = 3.5) \\
 &\quad + (4.5)^2 P(x_q = 4.5) + (5.5)^2 P(x_q = 5.5) + (6.5)^2 P(x_q = 6.5) + (7.5)^2 P(x_q = 7.5) \\
 &= (0.5)^2 0.15 + (1.5)^2 0.20 + (2.5)^2 0.20 + (3.5)^2 0.15 \\
 &\quad + (4.5)^2 0.10 + (5.5)^2 0.10 + (6.5)^2 0.05 + (7.5)^2 0.05 \\
 &= 13.55 \text{ W}
 \end{aligned}$$

c) $Q = 8$ düzey olduğuna göre her düzey için 3 bit gereklidir.

d) $R_b = n f_s = 3(12 \text{ kHz}) = 36000 \text{ bit/sn}$.

e) $(36000)(15)(60) = 32400000 \text{ bit}$

f) %50 güven aralığı için $T_p = \frac{(T_s)/n}{2} = \frac{T_s}{6} = \frac{1}{6(12 \cdot 10^3)} \approx 13.8 \mu\text{sn}$



Şekil 3: Darbe şekillendirici çıkışındaki işaret.

g)

0.5 → 000

1.5 → 001

2.5 → 010

3.5 → 011

4.5 → 100

5.5 → 101

6.5 → 110

7.5 → 111

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \frac{3}{3} 0.15 + \frac{2}{3} 0.20 + \frac{2}{3} 0.20 + \frac{1}{3} 0.15 + \frac{2}{3} 0.10 + \frac{1}{3} 0.10 + \frac{1}{3} 0.05 \\
 &= 0.58\bar{3} \\
 P_1 &= 1 - P_0 = 0.41\bar{6}
 \end{aligned}$$