# 1. Ödev



2) $u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$

$t=0$ için başlangıç koşulları:

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = \cos x \qquad (1)$$
$$u_t(x,0) = -cf'(x) + cg'(x) = \sin x \qquad (2)$$

(2) denklemi integre edilirse

$$-f(x) + g(x) = -\frac{1}{c}\cos x + C_1 \qquad (3)$$

$C_1$ : integrasyon sabiti

(1) ve (3) denklemlerinden

$$g(x) = \left(1 - \frac{1}{c}\right)\frac{1}{2}\cos x + \frac{C_1}{2}$$

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{c}\right)\frac{1}{2}\cos x - \frac{C_1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x-ct) = \left(\frac{c+1}{2c}\right)\cos(x-ct) - \frac{C_1}{2}$$

$$g(x+ct) = \left(\frac{c-1}{2c}\right)\cos(x+ct) + \frac{C_1}{2}$$

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) = \left(\frac{c+1}{2c}\right)\cos(x-ct) + \left(\frac{c-1}{2c}\right)\cos(x+ct)$$

5) $u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$

Başlangıç koşulları $(t=0)$

$$f(x) + g(x) = \sin 2x \qquad x \geq 0 \qquad (1)$$
$$-cf'(x) + cg'(x) = 0 \qquad x \geq 0 \qquad (2)$$

(2) denklemi integre edilerek $-f(x) + g(x) = C_1$ (3)

(1) ve (3) denkleminden

$$f(x) = -\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{C_1}{2} \qquad x \geq 0$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{C_1}{2} \qquad x \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x-ct) = -\frac{1}{2}\sin 2(x-ct) - \frac{C_1}{2} \qquad x-ct \geq 0 \qquad (4)$$

$$g(x+ct) = \frac{1}{2}\sin 2(x+ct) + \frac{C_1}{2} \qquad x+ct \geq 0 \qquad (5)$$

$t \geq 0$ ve $x \geq 0$ için $x+ct$ her zaman pozitif olur yani $g(x+ct)$'nin argümanı her zaman tanım bölgesinde yer alır. Ancak $x < ct$ için $f(x-ct)$'nin argümanı negatif değerler alır, dolayısıyla bu bölgede fonksiyonun nasıl davrandığının ayrıca incelenmesi gerekir. Bu amaçla sınır koşulları kullanılır

$$u_x(0,t) = f'(-ct) + g'(ct) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(-ct) + g(ct) = C_2 \qquad C_2 : \text{integrasyon sabiti}$$

$\lambda = ct$ denilirse $\quad f(-\lambda) = C_2 - g(\lambda)$

Bu eşitlikten faydalanılarak $f$ fonksiyonu argümanı negatif olduğu durumda belirlenebilir. Buna göre $x \leq ct$ için (5) denklemi kullanılarak

$$f(x-ct) = -g(ct-x) + C_2 = -\frac{1}{2}\sin 2(ct-x) - \frac{C_1}{2} + C_2 \qquad (6)$$

Buna göre

$x \geq ct$ için (4) ve (5)'ten $\quad u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\sin(2x+2ct) - \sin(2x-2ct)\right]$

$x \leq ct$ için (4) ve (6)'dan $\quad u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\sin(2x+2ct) + \sin(2x-2ct)\right] + C_2$

Sürekliliği sağlamak için $x=ct$'de iki ifade eşit olmalı $\Rightarrow C_2 = 0$

Sonuçta:

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(2x+2ct) - \frac{1}{2}\sin(2x-2ct) & x \geq ct \\ \frac{1}{2}\sin(2x+2ct) + \frac{1}{2}\sin(2x-2ct) & x \leq ct \end{cases}$$

2. Ödev



3) Fazör ifade $\vec{E}(y,z) = -E_0 i\, e^{i(ay+bz)} [\vec{e}_y + \sqrt{3}\,\vec{e}_z]$

$$\mathrm{div}\vec{E} = \nabla\cdot\vec{E} = -E_0 i a\, e^{i(ay+bz)} - E_0 i b\sqrt{3}\, e^{i(ay+bz)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a + \sqrt{3}\,b = 0 \qquad (1)$$

Vektörel Helmholtz denklemi: $\Delta\vec{E} + k^2\vec{E} = 0$

Bu denklem kartezyen koordinatlarda skaler bileşenlerine ayrıştırılabilir.

$$\Rightarrow \Delta E_y(y,z) + k^2 E_y(y,z) = 0 \qquad E_x = 0$$
$$\Delta E_z(y,z) + k^2 E_z(y,z) = 0$$

$$\Delta E_y(y,z) = \underbrace{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}$$

$$\Delta E_y + k^2 E_y = + E_0 i a^2 e^{i(ay+bz)} + E_0 i b^2 e^{i(ay+bz)} - E_0 i k^2 e^{i(ay+bz)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = k^2 \qquad (2)$$

$E_z$ için yazılan denklem de (2)'de verilen eşitliği üretir.

$$a + \sqrt{3}\,b = 0$$
$$a^2 + b^2 = k^2$$

Boş uzayda : $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ $\qquad \omega = 2\pi f = 6\pi\cdot 10^8$

(1) ve (2)'den $\quad b = \frac{k}{2} \quad a = -\frac{\sqrt{3}k}{2}$

Dalganın ilerleme yönünü gösteren birim vektör: $\vec{n} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y + \frac{1}{2}\vec{e}_z$

5

Eş faz yüzeyleri $ay+bz-\omega t = \text{sabit}$ denklemini sağlayan yüzeylerdir.

$$V_f = \frac{\omega}{|\text{grad}\,\alpha(\vec{r})|} \qquad \text{Burada } \alpha(\vec{r}) = ay+bz$$

Buna göre $\text{grad}\,\alpha(\vec{r}) = \frac{\partial\alpha}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\vec{e}_z = a\vec{e}_y + b\vec{e}_z$

$\Rightarrow |\text{grad}\,\alpha(\vec{r})| = \sqrt{a^2+b^2}$ Dolayısıyla $V_f = \frac{\omega}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c_0$

Dalga boş uzayda ilerlediğinden faz hızı ışık hızına eşittir.

Manyetik Alan Vektörü:

$$\vec{H}(y,z) = \frac{1}{Z_0}\,\vec{n}\times\vec{E} \qquad \text{Boş uzayda } Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$$

$$\vec{H} = \frac{1}{120\pi}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y + \frac{1}{2}\vec{e}_z\right)\times(-i)E_0\,e^{i(ay+bz)}\left[\vec{e}_y + \sqrt{3}\,\vec{e}_z\right]$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{120\pi}\,2iE_0\,e^{i(ay+bz)}\,\vec{e}_x$$

Zaman domeninde $\vec{H}(y,z,t) = \frac{2E_0}{120\pi}\sin(-ax-by+\omega t)\,\vec{e}_x$

4) $\vec{E} = E_0 e^{i20\pi(x+\sqrt{3}y)} \vec{e}_z = E_0 e^{ik\vec{n}\vec{r}} \vec{e}_z$

Burada $\vec{r}$ konum vektörü: $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$

$$20\pi(x+\sqrt{3}y) = \underbrace{(20\pi\vec{e}_x + 20\pi\sqrt{3}\vec{e}_y)}_{k\vec{n}}\underbrace{(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)}_{\vec{r}}$$

$$k\vec{n} = k_x\vec{e}_x + k_y\vec{e}_y = 20\pi\vec{e}_x + 20\pi\sqrt{3}\vec{e}_y$$

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{(20\pi)^2 + 3(20\pi)^2} = 40\pi \quad \text{dalga sayısı}$$

$$\vec{n} = \frac{k\vec{n}}{k} = \frac{1}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y$$ Dalganın ilerleme yönünü gösteren birim vektör.

Dalga boş uzayda yayıldığından faz hızı $v_f = c = 3 \cdot 10^8$ m/s

Açısal frekans $\omega = k \cdot c = 2\pi \cdot 6 \cdot 10^9$

Dalganın frekansı $f = \frac{\omega}{2\pi} = 6$ GHz ; dalgaboyu $\lambda = \frac{c}{f} = 5$ cm

Manyetik Alan vektörü

$$\vec{H}(x,y) = \frac{1}{120\pi}\left(\frac{1}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y\right) \times E_0 e^{i20\pi(x+\sqrt{3}y)} \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{H}(x,y) = -\frac{E_0}{240\pi} e^{i20\pi(x+\sqrt{3}y)} \vec{e}_y + \frac{\sqrt{3}E_0}{240\pi} e^{i20\pi(x+\sqrt{3}y)} \vec{e}_x$$

Zaman domeninde:

$$\vec{H}(x,y,t) = \frac{E_0}{240\pi} \cos\left[20\pi\left(x+\sqrt{3}y - 6\cdot 10^8 t\right)\right]\left(-\vec{e}_y + \sqrt{3}\vec{e}_x\right)$$

Kompleks Poynting Vektörü:

$$\vec{P}_c = \frac{1}{2}\left[\vec{E} \times \vec{H}^*\right]$$

$\vec{H}^*$ manyetik alan vektörünün kompleks eşleniği:

$$\vec{H}^* = -\frac{E_0}{240\pi} e^{-i120\pi(x+\sqrt{3}y)} \vec{e}_y + \frac{\sqrt{3}E_0}{240\pi} e^{-i120\pi(x+\sqrt{3}y)} \vec{e}_x$$

$$\vec{P}_c = \frac{1}{2}\left[E_z \vec{e}_z \times \left(H_x^* \vec{e}_x + H_y^* \vec{e}_y\right)\right] = \frac{1}{2}\left[-E_z H_y^* \vec{e}_x + E_z H_x^* \vec{e}_y\right]$$

$$\vec{P}_c = \frac{E_0^2}{480\pi} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}E_0^2}{480\pi} \vec{e}_y$$

Zaman domeninde

$$\vec{P}_c = \frac{E_0^2}{480\pi} \cos(\omega t) \left[\vec{e}_x + \sqrt{3}\vec{e}_y\right]$$