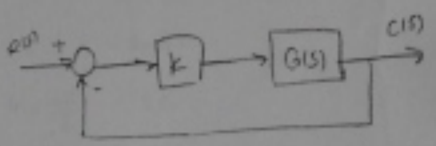
Control Systems 2

25.04.2014

KON317E - Control Systems

Exercise Lecture II

Q1:



$$G(s) = \frac{s^2 - 2s + 2}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Sketch the root locus $(K>0)$ for the unity feedback system given above. The roots of $\frac{dG(s)}{ds} = 0$ are calculated as $s_1 = -2.563$, $s_2 = -1.422$, $s_3 = -0.298$. Find the range of K for stability for the feedback system using Routh-Hurwitz analysis.

A1: $KG(s) = \frac{K(s^2 - 2s + 2)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$ $\Bigg\}$ $n = 4 \quad m = 2$

poles : $0, -1, -2, -3$

zeros : $1 \mp j$

* Nb. of branches : 4

* " " asymp. : $n - m = 2$

$$\sigma_0 = \frac{-1-2-3-(1+1)}{n-m} = -4$$

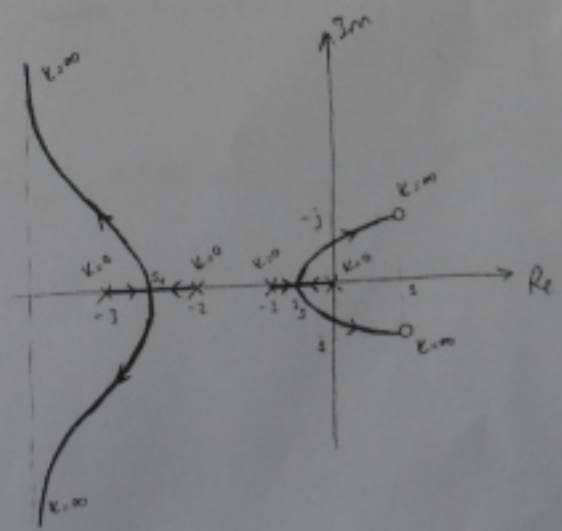
$$\theta_i = \frac{2i+1}{2} \cdot 180^\circ = \mp 90^\circ$$

* Ending angle for the zeros :

$$90 + \theta - \left[45 + \tan^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\tfrac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\tfrac{1}{4}\right)\right] = 180^\circ$$

$$90 + \theta - [45 + 26.56 + 18.43 + 14.03) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \theta = 194.02^\circ$$



* Break-away points are s_1 and s_3.

Routh - Hurwitz Tabulation :

Charac. poly : $P_c(s) = s^4 + 6s^3 + (11+K)s^2 + (6-2K)s + 2K$

$$\left.\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 11+K & 2K \\ s^3 & 6 & 6-2K & \\ s^2 & 10+\frac{4K}{3} & 2K & \\ s^1 & \frac{-4K^2-36K+90}{15+2K} & & \\ s^0 & 2K & & \end{array}\right\}$$

$2K > 0 \Rightarrow K > 0$

$10 + \frac{4K}{3} > 0 \Rightarrow K > -7.5$

$-4K^2 - 36K + 90 > 0 \Rightarrow -11.03 < K < 2.038$

$\Rightarrow \boxed{0 < K < 2.038}$

is the range for K for stable feedback system.

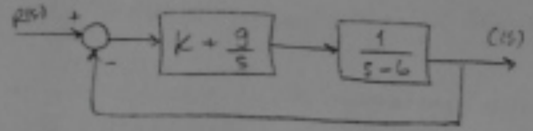
* From the Routh Tabulation we can find the crossing point of root locus on $j\omega$-axis.

$$\left(11 + \frac{4K_{cr}}{3}\right)s^2 + 2K_{cr} = 0 \quad , \text{where } K_{cr} = 2.038$$

$$38.15\,s^2 = -12.23$$

$$s = \mp j\,0.566 \Rightarrow \omega_{cr} = 0.566 \text{ rad/s}$$

Q2:



a) Sketch the root locus for the unity feedback system.

b) Find the value of K to yield damping ratio $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ using the root locus.

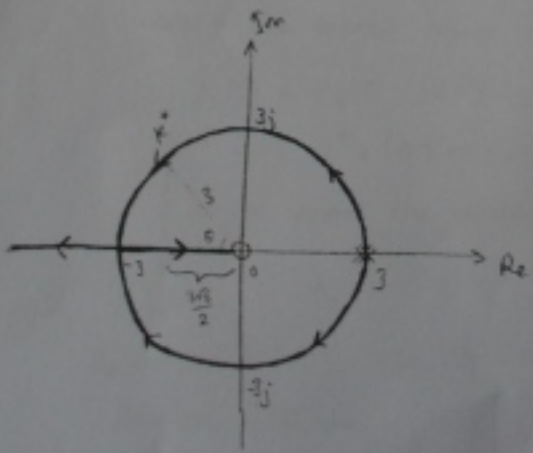
A2: a) $$G_{cl}(s) = \frac{\left(K + \frac{9}{s}\right)\left(\frac{1}{s-6}\right)}{1 + \left(K + \frac{9}{s}\right)\left(\frac{1}{s-6}\right)} = \frac{Ks + 9}{s(s-6) + Ks + 9}$$

$\Rightarrow P_c(s) = s^2 - 6s + 9 + Ks = 0$ / Devide by $(s^2 - 6s + 9)$

$$\Rightarrow 1 + K \frac{s}{s^2 - 6s + 9} = 0$$

We have to sketch the root locus according to $GH'(s) = K \cdot \frac{s}{s^2 - 6s + 9}$

* $n = 2$, $m = 1$, zeros: 0, poles: +3, +3
* Nb. of branches: 2
* " " asymp.: $n - m = 1$, $\theta_i = 180°$
* Break-away points: $\frac{dGH'(s)}{ds} = \frac{(s^2 - 6s + 9) - s(2s - 6)}{(s^2 - 6s + 9)^2} = 0 \begin{cases} s^2 = 9 \\ s_{1,2} = \mp 3 \end{cases}$



b) $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45°$

From magnitude criterion:

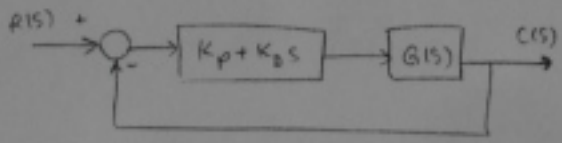
$$K^* = \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + 3\right)^2}\right)^2}{3}$$

$= 10.24$

Q3: The unity feedback system shown in Figure below with

$$G(s) = \frac{(s+6)}{(s+2)(s+3)(s+5)}$$ is operating with a dominant pole

damping ratio (ζ) of 0.707. Design a PD controller so that the settling time is 0.86 seconds.



A3: $$G_{cl}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(s+6)(K_P+K_D s)}{(s+2)(s+3)(s+5)+(s+6)(K_P+K_D s)}$$

$$\Rightarrow P_c(s) = s^3 + (10+K_D)s^2 + (K_P+6K_D+31)s + 30 + 6K_P$$

$$\Rightarrow \zeta = 0.707 \text{ and } T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 0.86 \text{ so; } \omega_n = 6.57$$

So the desired polynomial must be:

$$P_d(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 9.3s + 43.16$$

However, the degree of $P_c(s)$ is 3, so there must be another pole at the desired charac. polynomial. Thus we should write:

$$P_c(s) = P_d(s)\cdot(s+a)$$
$$= s^3 + (9.3+a)s^2 + (43.16+9.3a)s + 43.16a$$

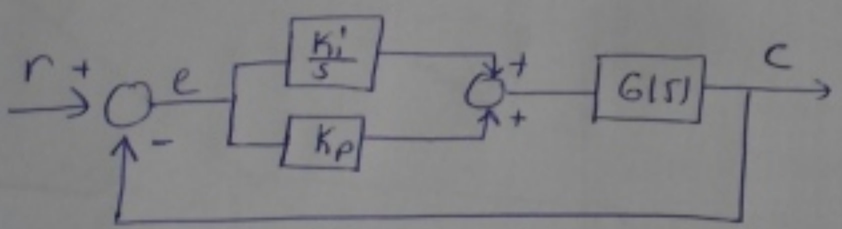
If we equate the coeffs. of these two polynomials, we get:

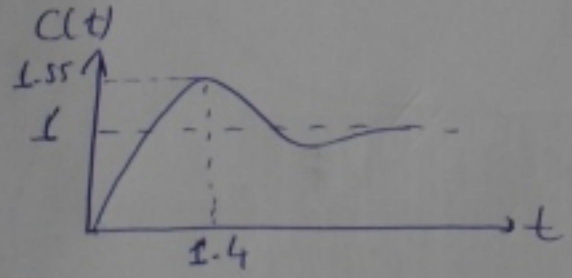
$$\left.\begin{aligned} 9.3+a &= 10+K_D \\ K_P+6K_D+31 &= 43.16+9.3a \\ 30+6K_P &= 43.16a \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &a = 5.48 \\ &\boxed{K_P = 34.46} \\ &\boxed{K_D = 4.78} \end{aligned}$$

$$G_{PD}(s) = 34.46 + 4.78s$$

4) When a unit step function is applied to the c/l system given in figure, the following response is obtained. The system is first order and has not zero. $K_i = 10$ and $K_p = 0{,}67$. $G(s) = ?$

Note: Assume that the zero of the controller has no effect on c/l t.f. of system





T.f. of Controller: $G_c(s) = \frac{K_p s + K_i}{s}$

T.f. of system: $G(s) = \frac{a}{s+b}$

$$T(s) = \frac{G_c(s)\,G(s)}{1 + G_c(s)\,G(s)} = \frac{a(K_p s + K_i)}{s^2 + (b + aK_p)s + K_i a}$$

Overshoot: $\frac{1.55 - 1}{1} = 0{,}55 \Rightarrow \zeta = 0.187$

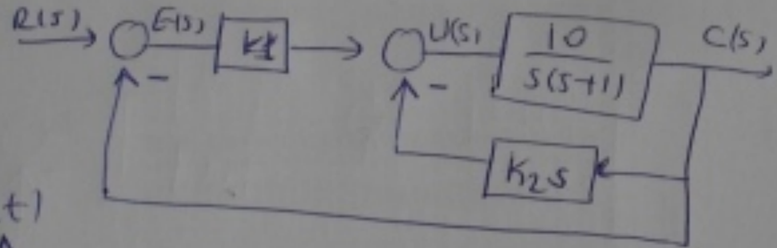
$t_p = 1.4 = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow w_n = 2{,}245$

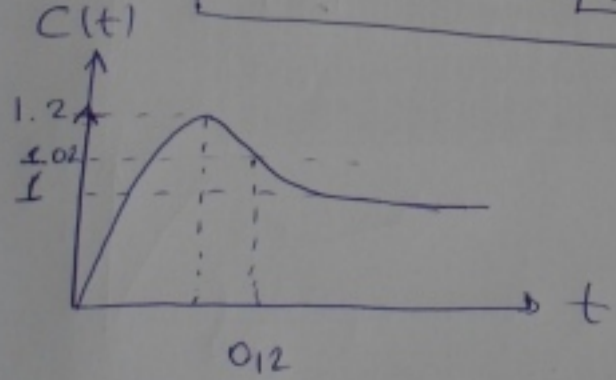
$$T_d(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad \left. \begin{array}{l} a k_i = w_n^2 \\ b + a k_p = 2\zeta w_n \end{array} \right\}$$

$$T_d(s) = T(s)$$

$a = 0,521$

$b = 0,504$

5) 



Determine the K_1 and K_2 so as to obtain a closed loop response as given in figure when a unit step function is applied to input.

overshoot $= \frac{1.2 - 1}{1} = 0,2 \Rightarrow \zeta = 0.456$

$t_s = \frac{4}{\zeta w_n} = 0,2 \Rightarrow w_n = 43,86$

$$T(s) = \frac{10 K_1}{s(s + 1 + 10K_2) + 10K_1}$$

$$T_d(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$$

$$s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2 = s^2+(1+10k_2)s+10k_1$$

$$\left.\begin{aligned}\omega_n^2 &= 10k_1\\ 2\zeta\omega_n &= 1+10k_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}k_1 &= 192{,}37\\ k_2 &= 3.9\end{aligned}$$

$$T(s)=\frac{1923{,}7}{s^2+40s+1923{,}7}$$

OKS

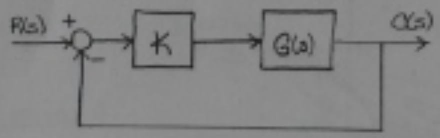
2

25.04.2014

OTOMATİK KONTROL SİSTEMLERİ 25.04.2014

Uygulama 2

SORU 1



$$G(s) = \frac{s^2-2s+2}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

ⓐ Yukarıda verilen birim geribeslemeli sistem için köklerin yer eğrisini çiziniz. $\frac{dG(s)}{ds} = 0$ için kökler $s_1 = -2,563$, $s_2 = -1,422$ ve $s_3 = -0,298$ olarak hesaplanmıştır. ⓑ Routh-Hurwitz analizini kullanarak geribesleme sistemini kararlı yapacak K aralığını bulunuz.

ⓐ Sistemin ileri yön transfer fonksiyonu; (Açık çevrim transfer fonksiyonu)

$$K.G(s) = \frac{K(s^2-2s+2)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$n = 4$ (sistemin derecesi, açık çevrim kutup sayısı)
$m = 2$ (açık çevrim sıfır sayısı)

kutuplar: $0, -1, -2, -3$
sıfırlar: $1 \mp j$

Köklerin yer eğrisinin adım adım çizilmesi;

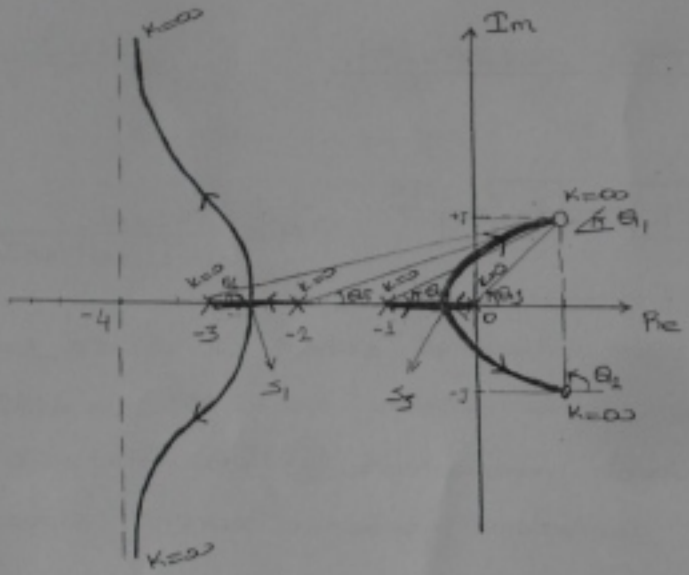
* Kol sayısı: 4 (Kapalı çevrim kutupların sayısı kadardır)
* Asimtot sayısı : $n - m = 2$
* Asimtot açısı: $\alpha = \frac{180(2k+1)}{n-m} = 90(2k+1)$,

$k=0$ ve $k=-1$'de $\alpha = \mp 90°$'lik iki asimtot vardır.

* Asimtotların reel ekseni kestiği noktalar

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_q}{n-m} = \frac{(0-1-2-3)-(1+1)}{2} = -4$$

$\sum p_i = \sum K.G(s)$ kutupları
$\sum z_q = \sum K.G(s)$ sıfırları



* Kök yer eğrisinin reel eksenden ayrılma noktaları soruda verilen s_1 ve s_3 noktalarıdır. (s_2 noktası reel eksen üzerinde kök yer eğrisi üzerinde yer almadığından ayrılma noktası değildir)

* Karmaşık sıfıra varma açısı;

$$\theta_1 + \theta_2 - (\theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6) = 180$$

$$\theta_1 + 90 - \left[45 + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)\right] = 180$$

$$\theta_1 + 90 - [45 + 26,56 + 18,43 + 14,03) = 180$$

$$\theta_1 = 194,02^\circ$$

(b) Routh-Hurwitz tablosu ile kararlılık analizi

Sistemin karakteristik polinomu;

$$P_c(s) = s^4 + 6s^3 + (11+k)s^2 + (6-2k)s + 2k$$

s^4	1	$11+K$	$2K$
s^3	6	$6-2K$	
s^2	$10+\frac{4K}{3}$	$2K$	
s^1	$\frac{-4K^2-36K+90}{15+2K}$		
s^0	$2K$		

s^2: $\longrightarrow 10+\frac{4K}{3} > 0 \Rightarrow \underline{K > -7{,}5}$

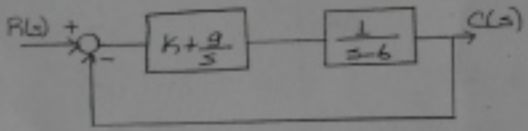
s^1: $\longrightarrow -4K^2-36K+90 > 0$

$\underline{-11{,}03 < K < 2{,}038}$

s^0: $\longrightarrow 2K > 0 \Rightarrow \underline{K > 0}$

$\boxed{0 < K < 2{,}038}$ aralığı için sistem kararlıdır

SORU 2



a) Birim geribeslemeli sistemin kök yer eğrisini çiziniz.

b) Kök yer eğrisini kullanarak sönümleme oranını $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ yapacak K değerini hesaplayınız.

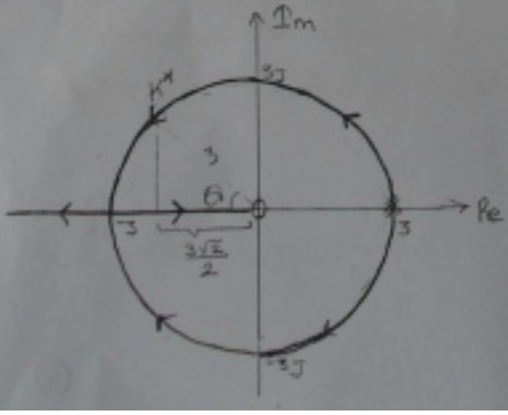
a) $$T(s) = \frac{\left(K+\frac{9}{s}\right)\left(\frac{1}{s-6}\right)}{1+\left(K+\frac{9}{s}\right)\left(\frac{1}{s-6}\right)} = \frac{Ks+9}{s(s+6)+Ks+9}$$

$$P_c(s) = s^2 - 6s + 9 + Ks = 0 \Rightarrow 1 + K \cdot \frac{s}{s^2-6s+9} = 0$$

Köklerin yer eğrisini $GH'(s) = K \cdot \frac{s}{s^2-6s+9}$ 'a göre çizeriz.

* $n=2$, $m=1$, kutuplar: $+3, +3$, sıfırlar: 0
* Kol sayısı: 2
* Asimtot sayısı: $n-m=1$
* Asimtot açısı: $\alpha = \frac{180(2k+1)}{n-m} \Rightarrow \alpha = 180^\circ$
* Asimtot reel eksen üzerindedir.
* Kök yer eğrisinin ayrılma ve kavuşma noktaları;

$$\frac{dGH'(s)}{ds} = \frac{(s^2-6s+9)-s(2s-6)}{(s^2-6s+9)^2} = 0 \quad \Big\} \quad s^2=9, \quad s_{1,2} = \mp 3$$



b) $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ$

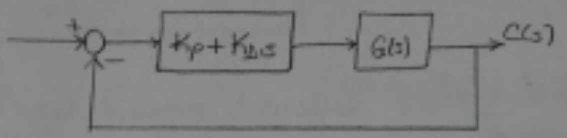
genlik kriterinden

$$K^* = \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}+3\right)^2}\right)^2}{3}$$

$$\boxed{K^* = 10{,}24}$$

SORU 3 Aşağıda verilen birim geribeslemeli sistemde

$G(s) = \dfrac{(s+6)}{(s+2)(s+4)(s+5)}$ ve sistemin sönüm oranını (ζ) 0,707 yapan baskın kutupları vardır. Yerleşme zamanını 0,86 sn. yapan PD kontrolcüyü tasarlayınız.



Sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu;

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(s+6)\,(K_P + K_D \cdot s)}{(s+2)(s+3)(s+5) + (s+6)(K_P + K_D s)}$$

Karakteristik denklem;

$$P_a(s) = s^3 + (10+K_D)s^2 + (K_P + 6K_D + 31)s + 30 + 6K_P \;\ldots\ldots\; (1)$$

$\zeta = 0{,}707$ ve $t_s = \dfrac{4}{\zeta w_n} = 0{,}86 \Rightarrow \boxed{w_n = 6{,}57}$

Bu durumda gerçekleşmesi istenilen karakteristik denklem;

$$P_d(s) = s^2 + 2\zeta w_n \cdot s + w_n^2 = s^2 + 9{,}3s + 43{,}16 \;\ldots\ldots\; (2)$$

Fakat $P_a(s)$'nin kutup sayısı 3 olduğu için, (2) karakteristik denklemine bir kutup daha eklenmelidir.

$$P_c(s) = P_d(s)(s+a)$$
$$= s^3 + (9{,}3+a)s^2 + (43{,}16 + 9{,}3a)s + 43{,}16a \;\ldots\ldots\; (3)$$

(1) ve (3) denkleminin katsayıları eşitlenirse;

$$\left.\begin{array}{l} 9{,}3 + a = 10 + K_d \\ K_P + 6K_D + 31 = 43{,}16 + 9{,}3a \\ 30 + 6K_P = 43{,}16a \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = 5{,}48 \\ \boxed{K_P = 34{,}46} \\ \boxed{K_D = 4{,}78} \end{array}$$

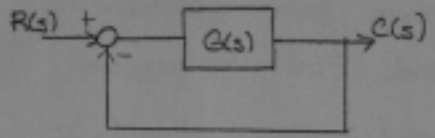
SORU 4 Karakteristik polinomu $q(s) = 2s^4 + 10s^3 + 5{,}5s^2 + 5{,}5s + 10$ olarak verilen sistemin Routh-Hurwitz kararlılık ölçütüne göre inceleyerek kararlı olup olmadığını bulunuz. Sistem kararlı değilse sağ yarı düzlemdeki sistem kutbu sayısını belirleyiniz ve nedenini açıklayınız.

$$q(s) = 2s^4 + 10s^3 + 5{,}5s^2 + 5{,}5s + 10$$

s^4	2	$5{,}5$	10
s^3	10	$5{,}5$	
s^2	$\frac{55-11}{10} = 4{,}4$	$\frac{100-0}{10} = 10$	
s^1	$\frac{4{,}4 \cdot 5{,}5 - 100}{4{,}4} = -17{,}27$		
s^0	10		

⇒ ilk sütunda negatif değer olduğu için sistem kararlı değildir, ve iki kere işaret değiştirdiği için sağ yarı düzlemde iki tane kutup vardır.

SORU 5 İleri yol transfer fonksiyonu $G(s) = \dfrac{K}{s(s^2+11s+30)}$ olarak verilen birim geribeslemeli sistemin K kararlılık aralığını belirleyiniz



$$G(s) = \frac{K}{s(s^2+11s+30)}$$

Kapalı çevrim transfer fonksiyonu;

$$T(s) = \frac{K}{s^3+11s^2+30s+K}$$

Karakteristik denklemi;

$$P_c(s) = s^3 + 11s^2 + 30s + K$$

Routh Hurwitz Tablosu

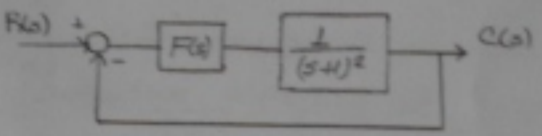
s^3	1	30
s^2	11	K
s^1	$\frac{330-K}{11}$	
s^0	K	

$\longrightarrow \dfrac{330-K}{11} > 0$

$\longrightarrow K > 0$

$$\boxed{0 < K < 330}$$

SORU 6



Yukarıda verilen kapalı çevrim sistemin doğal frekansı (w_n) 1 olan sönümsüz bir sistem ($\zeta = 0$) olması için mümkün olduğunca basit bir kontrolör önererek (F(s)) katsayısını belirleyiniz.

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s^2+2s+1}$$

Kapalı çevrim transfer fonksiyonu:

$$T(s) = \frac{F(s).G(s)}{1+F(s).G(s)} = \frac{F(s)}{s^2+2s+1+F(s)}$$

Sistemin karakteristik denklemi: $q(s) = s^2+2s+1+F(s)$

İstenilen karakteristik denklem: $q_i(s) = s^2+2\zeta W_n s + W_n^2$

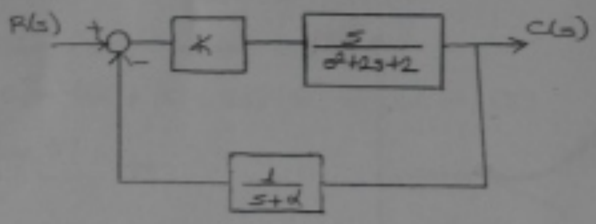
$$= s^2+1$$

$q(s) = q_i(s)$ (katsayıları eşitlersek)

$s^2+2s+1+F(s) = s^2+1$

$\Rightarrow \boxed{F(s) = -2s}$

SORU 7



a) Şekilde verilen kapalı çevrim sistemde $\alpha=3$ için K'nın değişen pozitif değerlerine bağlı olarak kök eğrisini çiziniz. ($\frac{d}{ds} GH = 0$ yapan değerler $s_1 = 0,935$, $s_{2,3} = -1,717 \pm j\,0,511$)

b) Aynı sistemde $K=1$ için α'nın değişen pozitif değerlerine bağlı olarak kök eğrisini çiziniz. ($\frac{d}{ds} GH' = 0$ yapan değerler $s_{1,2} = -0,268 \pm j\,1,311$, $s_{3,4} = -1,732 \pm j\,0,595$)

Not: Burada GH' α'ya göre düzenlenmiş eşdeğer açık çevrim t.f.'nur.

a) $GH = \dfrac{K.s}{(s^2+2s+2)(s+3)}$ (açık çevrim transfer fonksiyonu)

$n=3$ (kutup sayısı), kutuplar: -3, $-1 \mp i$
$m=1$ (sıfır sayısı) sıfırlar: 0

Kol sayısı: 3, Asimtot: $n-m = 2$ tane

Asimtot açısı $\alpha = \dfrac{180.(2k+1)}{n-m} = 90°, 270°$

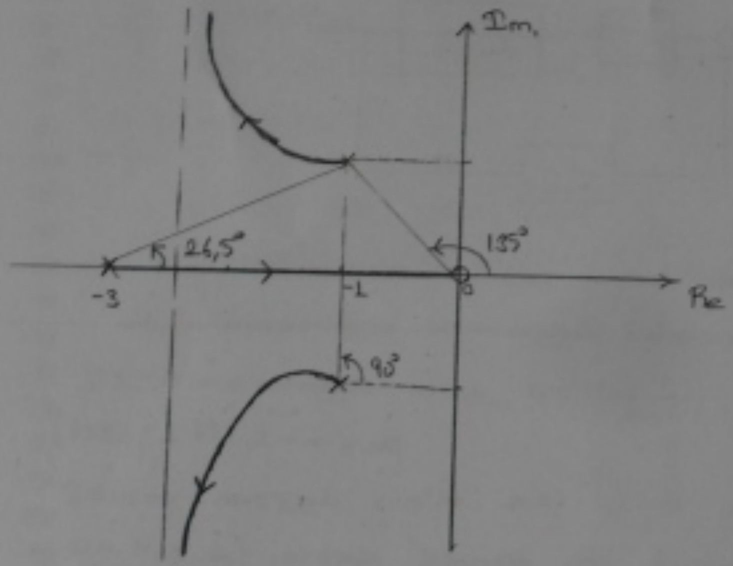
Asimtotun reel ekseni kesme noktası

$$\sigma = \frac{\sum P_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{(-3-1-1)-(0)}{3-1} = -2,5$$

$-1+i$ için çıkış açısı

$$(135) - (\theta + 26,5 + 90) = (2i+1).180$$

$$\theta = 198,5$$



b) $GH' = \dfrac{s}{(s^2+2s+1)(s+\alpha)} =$ $\qquad GH'+1 = \dfrac{s}{(s^2+2s+2)(+\alpha)} + 1 = 0$

$(s^2+2s+2)(s+\alpha)+s=0$

$s^3+(2+\alpha)s^2+(3+2\alpha)s+2\alpha=0$

$s^3+2s^2+3s+\alpha(s^2+2s+2)=0$

$\dfrac{\alpha(s^2+2s+2}{s^3+2s^2+3s}+1=0 \quad \Rightarrow \quad GH^* = \dfrac{\alpha(s^2+2s+2)}{s(s^2+2s+3)}$

$n=3, \quad m=2$

kutuplar: $0, \ -1 \mp 1{,}41i$

sıfırlar: $-1 \mp i$

$n-m=1$ asimtot

$\alpha = \dfrac{180(2k+1)}{n-m} = 180°$

$-1 + 1{,}41i$ için çıkış açısı

$(90+90) - (\theta + 90 + 125{,}5) = (2i+1)180$

$\theta = 144{,}5°$

$-1 + i$ için giriş açısı

$(\theta+90) - (270 + 90 + 135) = (2i+1)180$

$\theta = 225°$