OLASILIKLA İLGİLİ BAZI TEMEL BİLGİLER

Tanım (Olasılık): Bir S uzayındaki her A olayına $P(A)$ gibi bir sayı ile bağlanan ve aşağıdaki aksiyomları gerçekleyen "umut ölçüsüne" olasılık denir:

1) $P(A) \geq 0$

2) $P(S) = 1$

3) $A \cap B = \phi$ ise (A ve B ayrık olaylar ise), $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Tanım (Rastlantı Değişkeni): Bir S uzayındaki herhangi bir olayı reel bir sayıya bağlayan fonksiyona rastlantı değişkeni denir.

Genellikle rastlantı değişkenleri büyük harflerle (örneğin X), bunların almış oldukları değerler ise küçük harflerle (örneğin x) gösterilir. Eğer bir rastlantı değişkeni sayılamayan sonsuz sayıda değer alıyorsa süreklidir. Eğer bir rastlantı değişkeni sonlu ya da sayılabilir sonsuz sayıda değer alıyorsa ayrıktır.

Bir rastlantı değişkeni, (birikimli) dağılım fonksiyonu ((cumulative) distribution function, cdf) veya (olasılık) yoğunluk fonksiyonu ((probability) density function, pdf) yardımı ile tanımlanabilir.

(Birikimli) Dağılım Fonksiyonu (cdf):

X rastlantı değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonu $F_X(x)$ veya kısaca $F(x)$ ile gösterilir ve

$$F(x) = P(X \leq x)$$

olarak tanımlanır.

Not: $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$, $F(x_1) \leq F(x_2)$ eğer $x_1 < x_2$ ise.

(Olasılık) Yoğunluk Fonksiyonu (pdf):

✓ X rastlantı değişkeni sürekli ise, $P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx$ eşitliğini sağlayan $f_X(x)$ (veya kısaca $f(x)$) fonksiyonuna, X rastlantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu denir.

Not: $f(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$

✓ X rastlantı değişkeni ayrık ise ve x_i, i=tamsayı değerlerini $P(X=x_i)=p(x_i)$ olasılıkları ile alıyorsa, $p(x_i)$ fonksiyonuna X rastlantı değişkeninin olasılık fonksiyonu denir. Gösterilimde kimi zaman i indisi kullanılmaz.

Not: $p(x_i)\geq 0$, $\sum_{i=-\infty}^{\infty} p(x_i)=1$, $p(x_i)=F(x_i)-F(x_i^-)$, $F(x)=P(X\leq x)=\sum_{\substack{i\\(x_i\leq x)}} p(x_i)$

Momentler:

✓ Bir X rastlantı değişkeninin k. dereceden mutlak momenti (veya kısaca momenti), X^k'nın beklenen değeridir $(k>0)$ ve

$$E[X^k]=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx, & X \text{ sürekli ise}\\ \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i^k p(x_i), & X \text{ ayrık ise}\end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. $k=1$ ise $E[X]$, X'in ortalama değeri olarak da adlandırılır ve genellikle m_x veya m ile gösterilir.

✓ Bir X rastlantı değişkeninin k. dereceden merkezi momenti, $(X-m_x)^k$'nın beklenen değeridir $(k>0)$ ve

$$E[(X-m_x)^k]=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^k f(x)dx, & X \text{ sürekli ise}\\ \sum_{i=-\infty}^{\infty} (x_i-m_x)^k p(x_i), & X \text{ ayrık ise}\end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. $k=2$ ise $E[(X-m_x)^2]$, X'in varyansı (değişintisi) olarak da adlandırılır ve genellikle σ_x^2, σ^2 veya $Var(X)$ ile gösterilir.

Not: 1) $Var(X)=\sigma_x^2=E[(X-m_x)^2]=E[X^2]-m_x^2$

2) $\sigma_x=\sqrt{Var(X)}$: Standart sapma

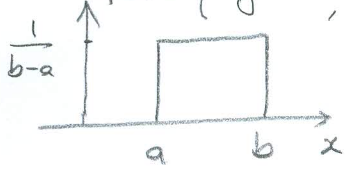
3) $Var(X)\geq 0$

4) a ve b sabit sayılar ise, $E[aX]=aE[X]$, $Var(aX+b)=a^2Var(X)$

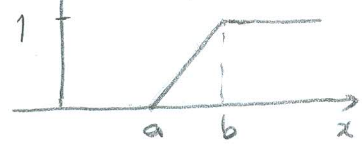
5) Herhangi iki X ve Y rastlantı değişkeni için $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$

Örnek (Düzgün ≡ Uniform Dağılım):

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & , \quad a < x \leq b \\ 0 & , \quad \text{dışında} \end{cases}$$



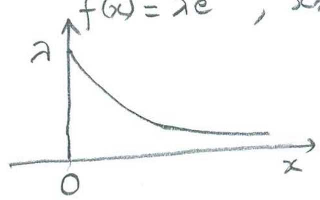
$$F(x) = \begin{cases} (x-a)/(b-a) & , \quad a < x \leq b \\ 0 & , \quad \text{dışında} \end{cases}$$



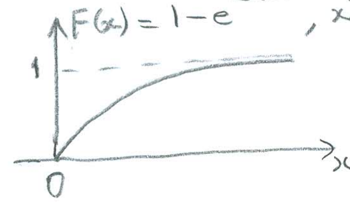
$m_x = (a+b)/2 \quad , \quad \sigma_x^2 = (b-a)^2/12$

Örnek (Üstel ≡ Exponansiyel Dağılım):

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x \geq 0 \quad , \quad \lambda > 0$



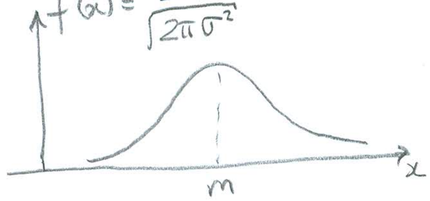
$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad , \quad x \geq 0$



$m_x = 1/\lambda \quad , \quad \sigma_x^2 = 1/\lambda^2$

Örnek (Gauss Dağılımı ≡ Normal Dağılım):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$$



$$F(x) = 1 - Q\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2} du$$

$m_x = m \quad , \quad \sigma_x^2 = \sigma^2$ (Bu dağılım kısaca $N(m, \sigma^2)$ biçiminde gösterilir).