1) Ayrık-zamanlı nedensel $\nearrow$ LZD bir sistemin giriş-çıkış ilişkisi aşağıdaki fark denklemi ile verilmiştir.

$$y[n] + \frac{1}{3}y[n-1] - \frac{2}{9}y[n-2] = x[n] - \frac{9}{8}x[n-1]$$

a) Sistemin transfer fonksiyonu $H(z)$'i bulunuz ve yakınsaklık bölgesini tanımlayınız.

b) Bu sistem kararlı mıdır?

---

soln

z-transform uygulayalım

$$\underline{FT} \qquad \underline{zT}$$

$$e^{j\omega} \qquad \longrightarrow \qquad z$$

$$\boxed{x[n-n_0] \longrightarrow z^{-n_0} X(z)}$$

$$Y(z) + \frac{1}{3}z^{-1}Y(z) \frac{-2}{9}z^{-2}Y(z) = X(z) - \frac{9}{8}z^{-1}X(z)$$

$$Y(z)\left[1 + \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{2}{9}z^{-2}\right] = X(z)\left[1 - \frac{9}{8}z^{-1}\right]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

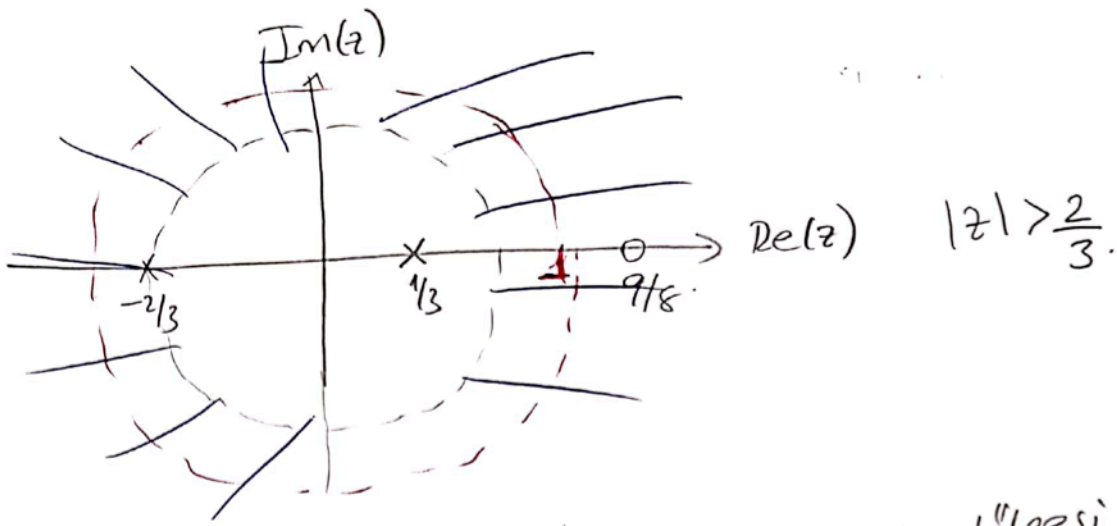$$y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{z} Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \frac{9}{8}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{2}{9}z^{-2}} = \frac{1 - \frac{9}{8}z^{-1}}{\left(1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$z_1 = 9/8$$

$$p_1 = -2/3 \qquad \text{p2=1/3}$$

$\text{Im}(z)$ $\text{Re}(z)$ $|z| > \dfrac{2}{3}$

(points marked at $-2/3$, $1/3$, $9/8$)

$\Rightarrow$ Sistem nedensel olduğu için, yakınsaklık bölgesi sağ-yönlüdür.

$|z| > \text{pmax}$.

$\Rightarrow$ Yakınsaklık bölgesi, birim çemberi kapsadığından dolayı sistem kararlıdır.

c). Sistemin impuls cevabı $h[n]$'i bulalım.

$$H(z) = \frac{1 - \dfrac{9}{8}z^{-1}}{\left(1 + \dfrac{2}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{A}{1 + \dfrac{2}{3}z^{-1}} + \frac{B}{1 - \dfrac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\left(1 - \dfrac{1}{3}z^{-1}\right) \qquad \left(1 + \dfrac{2}{3}z^{-1}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 1 \\[2mm] -\dfrac{A}{3} + \dfrac{2B}{3} = \dfrac{-9}{8} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 3B = \dfrac{-19}{8} \\[2mm] B = \dfrac{-19}{24} \\[2mm] A = \dfrac{43}{24} \end{array}$$

$$H(z) = \frac{43/24}{1 + \dfrac{2}{3}z^{-1}} + \frac{-19/24}{1 - \dfrac{1}{3}z^{-1}} \qquad |z| > \dfrac{2}{3}$$

$$\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{\;z\;} \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \qquad |z| > |\alpha|$$

$$-\alpha^n u[-n-1] \xleftrightarrow{\;z\;} \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \qquad |z| < |\alpha| \qquad ⊙2$$

$$h[n] = \frac{43}{24}\left(\frac{-2}{3}\right)^{n} u[n] - \frac{19}{24}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} u[n].$$

2) LZD bir sistemin transfer fonksiyonu

$$H(z) = \frac{1 + \frac{7}{6}z^{-1}}{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}$$
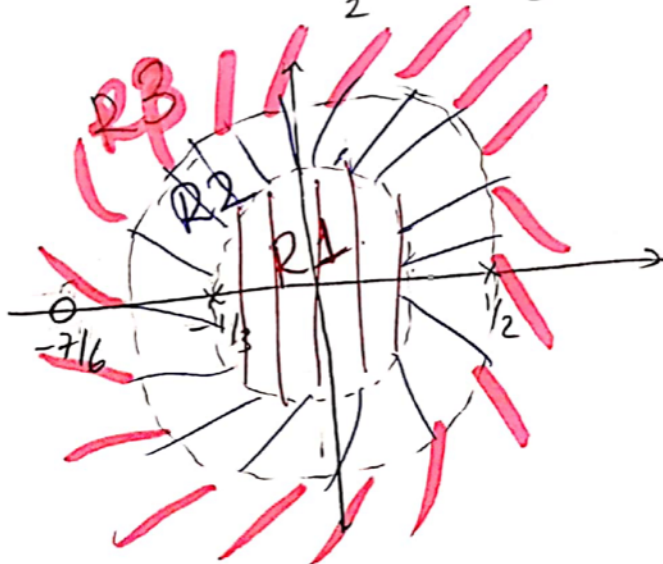
olarak verilmektedir. Buna göre.

a) Sıfır-kutup diagramını çiziniz. Olası yakınsaklık bölgelerini belirtiniz.

b) Olası yakınsaklık bölgeleri için sistemin impuls cevabını bulunuz. Bu sistemlerin nedensellik ve kararlılıklarını yorumlayınız.

---

a) $H(z) = \dfrac{1 + \frac{7}{6}z^{-1}}{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}} = \dfrac{1 + \frac{7}{6}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$

$-\frac{1}{2}z^{-1} \qquad \frac{1}{3}z^{-1}$

$z_1 = -\frac{7}{6}$

$p_1 = \frac{1}{2}$

$p_2 = -\frac{1}{3}$

$R_1: \quad |z| < \frac{1}{3}$

$R_2: \quad \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$
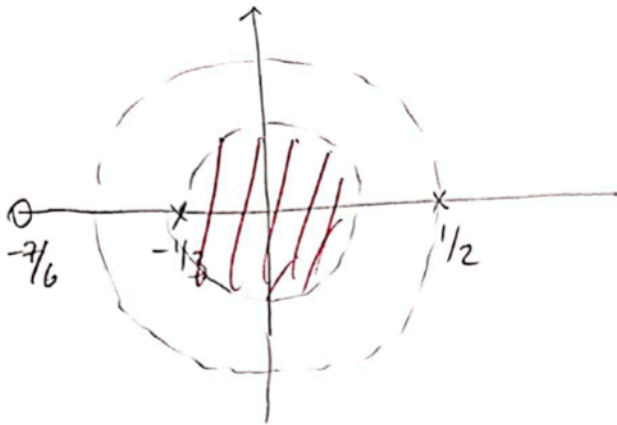
$R_3: \quad |z| > \frac{1}{2}$

$R_1: \quad |z| < \frac{1}{3}$

$$H(z) = \frac{1 + \frac{7}{6}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$H(z) = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$A + B = 1$

$-\frac{B}{2} + \frac{A}{3} = \frac{7}{6}$

$\left.\begin{array}{l}\frac{5A}{3} = \frac{20}{6}\\ A = 2 \\ B = -1\end{array}\right.$

b) $H(z) = \dfrac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \dfrac{-1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$|z| < \frac{1}{2} \;\cap\; |z| < \frac{1}{3}$

$R_1: |z| < \frac{1}{3}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \alpha^n u[n] \longleftrightarrow \dfrac{1}{1 - \alpha z^{-1}} & |z| > |\alpha| \\[3em] -\alpha^n u[-n-1] \longleftrightarrow \dfrac{1}{1 - \alpha z^{-1}} & |z| < |\alpha| \end{array}}$$

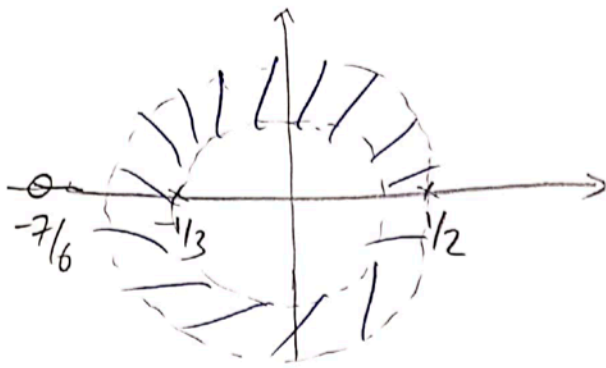$$h[n] = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] + \left(\frac{-1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

Eğer

$h[n] = 0 \qquad n < 0$ için , sistem nedenseldir.

→ yakınsaklık bölgesi sol-taraflı olduğu için sistem nedensel değildir.

→ Yakınsaklık bölgesi birim çemberi içermediğinden sistem kararlı değildir.

④

R2: $\dfrac{1}{3} < |z| < \dfrac{1}{2}$

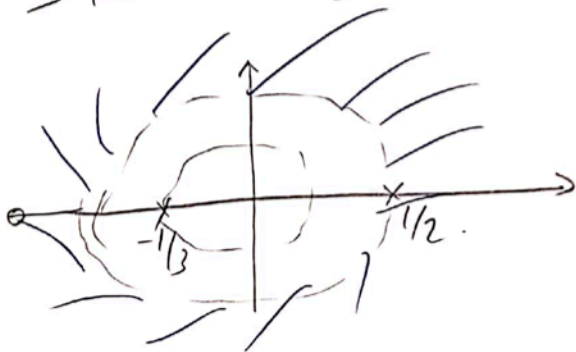$$H(z) = \dfrac{2}{1 - \dfrac{1}{2}z^{-1}} + \dfrac{-1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\downarrow \qquad\qquad |z| > 1/3$$

$$|z| < 1/2$$

$$h[n] = -2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n u[n]$$

⟶ Yakınsaklık bölgesi, iki-yönlü olduğundan, sistem <u>nedensel değildir.</u>

⟶ Yakınsaklık bölgesi, birim çemberi içermediğinden, sistem <u>kararlı</u> <u>değildir.</u>

⟹ R3: $|z| > \dfrac{1}{2}$ için

$$H(z) = \dfrac{2}{1 - \dfrac{1}{2}z^{-1}} + \dfrac{-1}{1 + \dfrac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$|z| > \tfrac{1}{2} \quad \cap \quad |z| > \tfrac{1}{3}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{R3: \ |z| > 1/2}$$

$$h[n] = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n u[n]$$

⟹ Yakınsaklık bölgesi sağ-yönlüdür. $\left(h[n] = 0 \quad n < 0\right)$
Dolayısıyla sistem <u>nedenseldir</u>.

⟹ Yakınsaklık bölgesi birim çemberi içerdiğinden, sistem
aynı zamanda <u>kararlıdır</u>.

3) Nedensel bir LZD sistemin transfer fonksiyonu

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$$

olarak verilmektedir.

a) Sistemin giriş-çıkış ifadelerini birbirine bağlayan bir fark denklemi belirleyiniz.

b) Bu sistemin blok diagramını çiziniz.

c) Bu sistemin girişine $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n]$ gibi bir işaret uygulanması durumunda, çıkış $y[n]$ işareti ne olur?
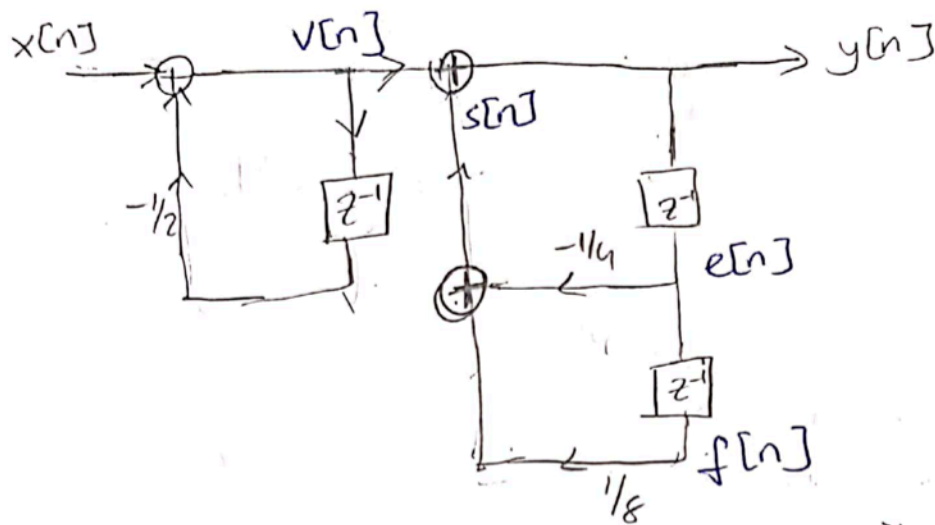
_____

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

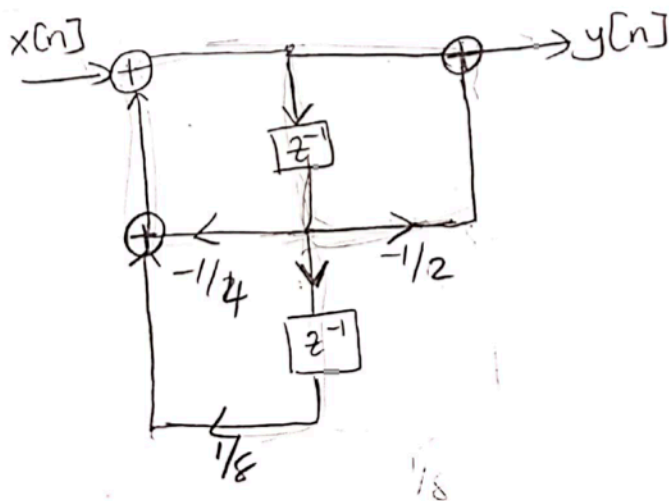$$X(z)\left[1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right] = Y(z)\left[1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}\right]$$

$$\boxed{x[n-n_0] \xrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z)}$$

$$x[n] - \frac{1}{2}x[n-1] = y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2].$$

(6)

b) $y[n] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1] - \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2]$.

$x[n]$ $v[n]$ $\longrightarrow y[n]$

$s[n]$

$-\frac{1}{2}$ z^{-1} z^{-1}

$-\frac{1}{4}$ $e[n]$

z^{-1}

$f[n]$

$\frac{1}{8}$

Direct form I

$x[n]$ $\longrightarrow y[n]$

z^{-1}

$-\frac{1}{4}$ z^{-1} $-\frac{1}{2}$

z^{-1}

$\frac{1}{8}$

Direct form II

$z_1 = \frac{1}{2}$

$P_1 = -\frac{1}{2}$

$P_2 = \frac{1}{4}$

c) $H(z) = \dfrac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}} = \dfrac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$

$= \dfrac{A}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \dfrac{B}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$

$A + B = 1$

$-\frac{A}{4} + \frac{B}{2} = -\frac{1}{2}$.

$\left\{ \begin{array}{l} 3B = -1 \\ B = -\frac{1}{3} \\ A = \frac{4}{3} \end{array} \right.$

⑦

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} = \frac{4/3}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-1/3}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

Sistem nedensel ise, $|z| > \frac{1}{2}$ ᴌ

$$h[n] = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

*)$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n]$ ise

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

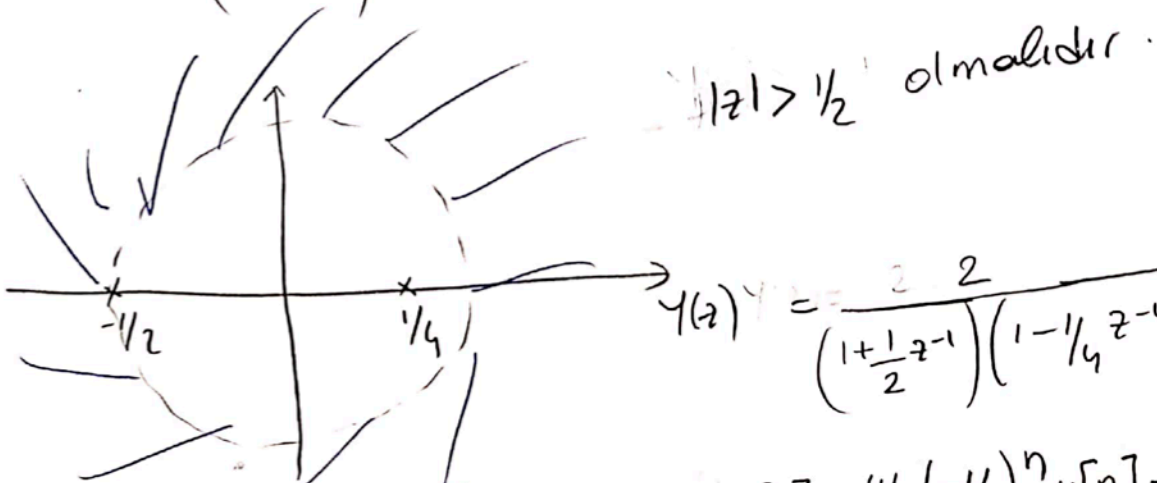$$X(z) = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{2}.$$

$$Y(z) = H(z)\cdot X(z) = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

$$Y(z) = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

$P_1 = -\frac{1}{2}$

$P_2 = \frac{1}{4}$

$|z| > \frac{1}{2}$ olmalıdır.

$$Y(z) = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

$$Y(z) = \frac{4/3}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2/3}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow y[n] = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

(8)