

1. Aşağıdaki veri kümesi göz önüne alınsın.

| | | | | |
|----------|-----|-----|-----|-----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 0.3 | 0.7 | 1.8 | 3.2 |

- (a) Bu veri kümesini en küçük kareler anlamında en iyi temsil eden lineer fonksiyon $\ell(x) = c + dx$ için c ve d katsayılarını belirleyiniz.
- (b) Bulduğunuz (c, d) değerleri için $E_\ell = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ell(x_i) - y_i)^2}$ (ortalama karesel hatanın karekökü) ne olur?
- (c) Bu veri kümesini en küçük kareler anlamında en iyi temsil eden logaritmik fonksiyon $f(x) = a + b \ln(x)$ için a ve b katsayılarını belirleyiniz.
- (d) Bulduğunuz (a, b) değerleri için $E_f = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2}$ (ortalama karesel hatanın karekökü) ne olur?
- (e) $\ell(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonlarını çizdiriniz.

Çözüm:

a. $n = 4$ toplam veri sayısı olmak üzere

$$nc + d \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i,$$
$$c \sum_{i=1}^n x_i + d \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

denklemleri elde edilir. Buradan c ve d katsayıları hesaplanarak $\ell(x)$ fonksiyonu elde edilir.

$$4c + 10d = 6 \quad (1.a)$$

$$10c + 30d = 19.9 \quad (1.b)$$

$$\underline{-3 \times (1.a) + (1.b):}$$

$$-2c = 1.9 \Rightarrow c = -0.95$$

$$\underline{c \rightarrow (1.a):}$$

$$-3.8 + 10d = 6 \Rightarrow d = 0.98$$

$$\Rightarrow \ell(x) = -0.95 + 0.98x$$

b.

$$\begin{aligned} E_\ell &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ell(x_i) - y_i)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} [(0.03 - 0.3)^2 + (1.01 - 0.7)^2 + (1.99 - 1.8)^2 + (2.97 - 3.2)^2]} \\ &= 0.253968501984006 \end{aligned}$$

c. a ve b katsayılarının belirlenmesi için gereken denklem sistemi

$$G(a, b) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a + b \ln(x_i) - y_i)^2$$

fonksiyonu yardımıyla oluşturulur. Bunun için $G(a, b)$ fonksiyonunu minimum yapan uygun a ve b değişkenlerinin denklemleri yazılır.

$$\frac{\partial G}{\partial a} = 0 \Rightarrow 2 \sum_{i=1}^n (a + b \ln(x_i) - y_i) = 0$$

$$\Rightarrow na + b \sum_{i=1}^n \ln(x_i) = \sum_{i=1}^n y_i \quad (1.c)$$

$$\frac{\partial G}{\partial b} = 0 \Rightarrow 2 \sum_{i=1}^n \ln(x_i) (a + b \ln(x_i) - y_i) = 0$$

$$\Rightarrow a \sum_{i=1}^n \ln(x_i) + b \sum_{i=1}^n (\ln(x_i))^2 = \sum_{i=1}^n \ln(x_i) y_i \quad (1.d)$$

Buradan denklem sistemi elde edilir.

$$4a + 3.178053830347945b = 6 \quad (1.c)$$

$$3.178053830347945a + 3.609214030403589b = 6.898847101578209 \quad (1.d)$$

$$\underline{3.178053830347945 \times (1.c) - 4 \times (1.d):}$$

$$-4.336829973025113b = -8.527065424225167$$

$$\Rightarrow b = 1.966197770552023$$

$$\underline{b \rightarrow (1.c):}$$

$$4a + 6.248682355924447 = 6$$

$$\Rightarrow a = -0.062170588981112$$

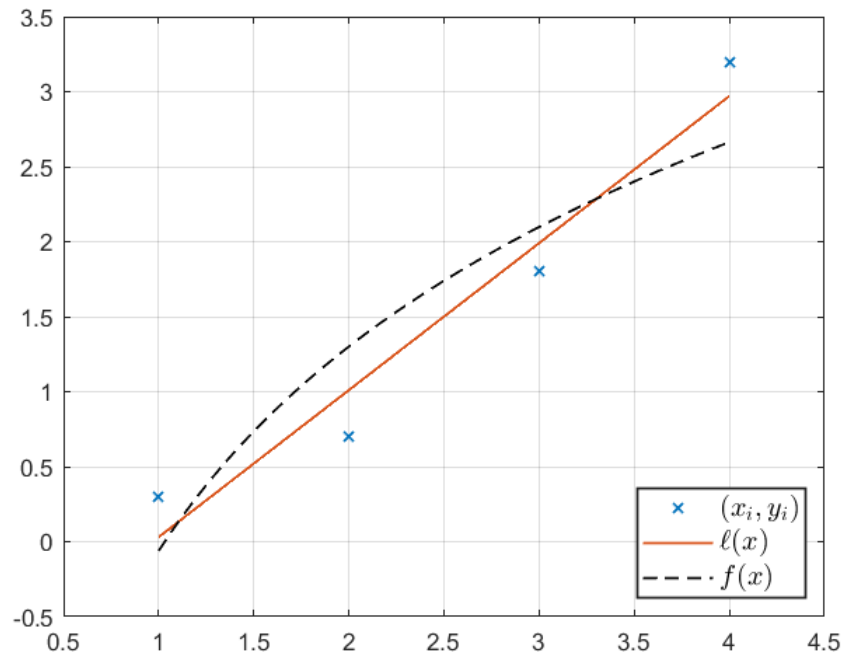
$$\Rightarrow f(x) = -0.062170588981112 + 1.966197770552023 \ln(x)$$

d.

$$E_f = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2}$$

$$\begin{aligned} E_f &= \frac{1}{2} \left[\left(-0.062170588981112 - 0.3 \right)^2 + \left(1.300693852100273 - 0.7 \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(2.097918443699180 - 1.8 \right)^2 + \left(2.663558293181658 - 3.2 \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= 0.465973642866286 \end{aligned}$$

e.



2. Aşağıdaki veri kümesi için

| | | | | | | | |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| x | -1.0 | -0.9 | -0.8 | -0.7 | -0.6 | -0.5 | -0.4 |
| y | 7.904 | 7.422 | 5.827 | 4.400 | 2.908 | 2.144 | 0.581 |
| x | -0.3 | -0.2 | -0.1 | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 |
| y | 0.335 | -0.271 | -0.963 | -0.847 | -1.278 | -1.335 | -0.656 |
| x | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
| y | -0.711 | 0.224 | 0.689 | 0.861 | 1.358 | 2.613 | 4.599 |

en küçük kareler yöntemi yardımıyla

(a) $f_1(x) = ax + b$ lineer fonksiyonu biçiminde eğri uydurma gerçekleştiriniz ve ortalama karesel hatanın karekökünü hesaplayınız.

(b) $f_2(x) = cx^2 + dx + e$ kuadratik fonksiyonu biçiminde eğri uydurma gerçekleştiriniz ve ortalama karesel hatanın karekökünü hesaplayınız.

(c) $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonlarını çizdiriniz.

Çözüm:

a.

$$nb + a \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i,$$

$$b \sum_{i=1}^n x_i + a \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n y_i = 35.804, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 7.7, \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i = -17.0354 \right)$$

$$\begin{cases} 21b = 35.804 \\ 7.7a = -17.0354 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2.2124 \\ b = 1.7049 \end{cases} \Rightarrow f_1(x) = -2.2124x + 1.7049$$

$$E_{f_1} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f_1(x_i) - y_i)^2} = 2.4182$$

b.

$$\begin{aligned}
ne + d \sum_{i=1}^n x_i + c \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n y_i, \\
e \sum_{i=1}^n x_i + d \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i^3 &= \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\
e \sum_{i=1}^n x_i^2 + d \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^4 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i
\end{aligned}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 7.7, \quad \sum_{i=1}^n y_i = 35.804, \quad \sum_{i=1}^n x_i^3 = 0, \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^n x_i y_i = -17.0354, \quad \sum_{i=1}^n x_i^4 = 5.0666, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i = 29.5582 \right)$$

$$\begin{cases} 21e + 7.7c = 35.804 \\ 7.7d = -17.0354 \\ 7.7e + 5.0666c = 29.5582 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 7.3242 \\ d = -2.2124 \\ e = -0.9806 \end{cases} \Rightarrow f_2(x) = 7.3242x^2 - 2.2124x - 0.9806$$

$$\begin{aligned}
E_{f_2} &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f_2(x_i) - y_i)^2} \\
&= 0.3426
\end{aligned}$$

e.

