1. Aşağıdaki integral göz önüne alınsın.

$$I(f) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

$n = 2$ ve $n = 4$ değerleri için

(a) Trapez yöntemini uygulayarak $T_n(f)$ değerini bulunuz. Ayrıca $I - T_n$ farklarını hesaplayınız.

(b) Simpson yöntemini uygulayarak $S_n(f)$ değerini bulunuz. Ayrıca $I - S_n$ farklarını hesaplayınız.

Çözüm:

İntegralin gerçek değeri şu şekilde hesaplanabilir.

$$I(f) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_{x=0}^{x=1} = \ln(2) = 0.693147181$$

a. Genel halde trapezoidal sayısal integrasyon formülü

$$T_n(f) = h\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right]$$

şeklinde yazılabilir.

$\underline{n = 2}$:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$$

Fonksiyon değerinin hesaplanması gereken noktalar $x_j = a + jh,\ j = 0, 1, ..., n$ şeklinde tanımlanabilir. $f(x) = 1/(1+x)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x_0 &= \quad a = 0 \\ x_1 &= a + h = 1/2 \\ x_2 &= a + 2h = 1 \end{aligned} \begin{cases} f(x_0) = \quad f(0) = 1 \\ f(x_1) = f(1/2) = 2/3 \\ f(x_2) = \quad f(1) = 1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_2(f) = h\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right]$$

$$T_2(f) = 0.708333333$$

$\underline{n=4}$:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{matrix} x_0 = & a = 0 \\ x_1 = & a+h = 1/4 \\ x_2 = & a+2h = 1/2 \\ x_3 = & a+3h = 3/4 \\ x_4 = & a+4h = 1 \end{matrix} \begin{cases} f(x_0) = & f(0) = 1 \\ f(x_1) = & f(1/4) = 4/5 \\ f(x_2) = & f(1/2) = 2/3 \\ f(x_3) = & f(3/4) = 4/7 \\ f(x_4) = & f(1) = 1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_4(f) = h\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \frac{1}{2}f(x_4)\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{1}{4}\right]$$

$$T_4(f) = 0.697023809$$

$$I - T_2 = 0.693147181 - 0.708333333 = -0.015186152$$

$$I - T_4 = 0.693147181 - 0.697023809 = -0.003876628$$

a. Genel halde Simpson sayısal integrasyon formülü

$$S_n(f) = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) ... + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

şeklinde yazılabilir. Simpson yönteminde n mutlaka çift sayı olmalıdır.

$\underline{n=2}$:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{matrix} x_0 = & a = 0 \\ x_1 = & a+h = 1/2 \\ x_2 = & a+2h = 1 \end{matrix} \begin{cases} f(x_0) = & f(0) = 1 \\ f(x_1) = & f(1/2) = 2/3 \\ f(x_2) = & f(1) = 1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_2(f) = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right) = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{8}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

$$S_2(f) = 0.694444444$$

$\underline{n=4}$:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \quad a = 0 \\ x_1 &= a+h = 1/4 \\ x_2 &= a+2h = 1/2 \\ x_3 &= a+3h = 3/4 \\ x_4 &= a+4h = 1 \end{aligned} \begin{cases} f(x_0) = \quad f(0) = 1 \\ f(x_1) = f(1/4) = 4/5 \\ f(x_2) = f(1/2) = 2/3 \\ f(x_3) = f(3/4) = 4/7 \\ f(x_4) = \quad f(1) = 1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_4(f) = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right) = \frac{1}{12}\left(1 + \frac{16}{5} + \frac{4}{3} + \frac{16}{7} + \frac{1}{2}\right)$$

$$S_4(f) = 0.693253968$$

$$I - S_2 = 0.693147181 - 0.694444444 = -0.001297263$$

$$I - S_4 = 0.693147181 - 0.693253968 = -0.000106787$$