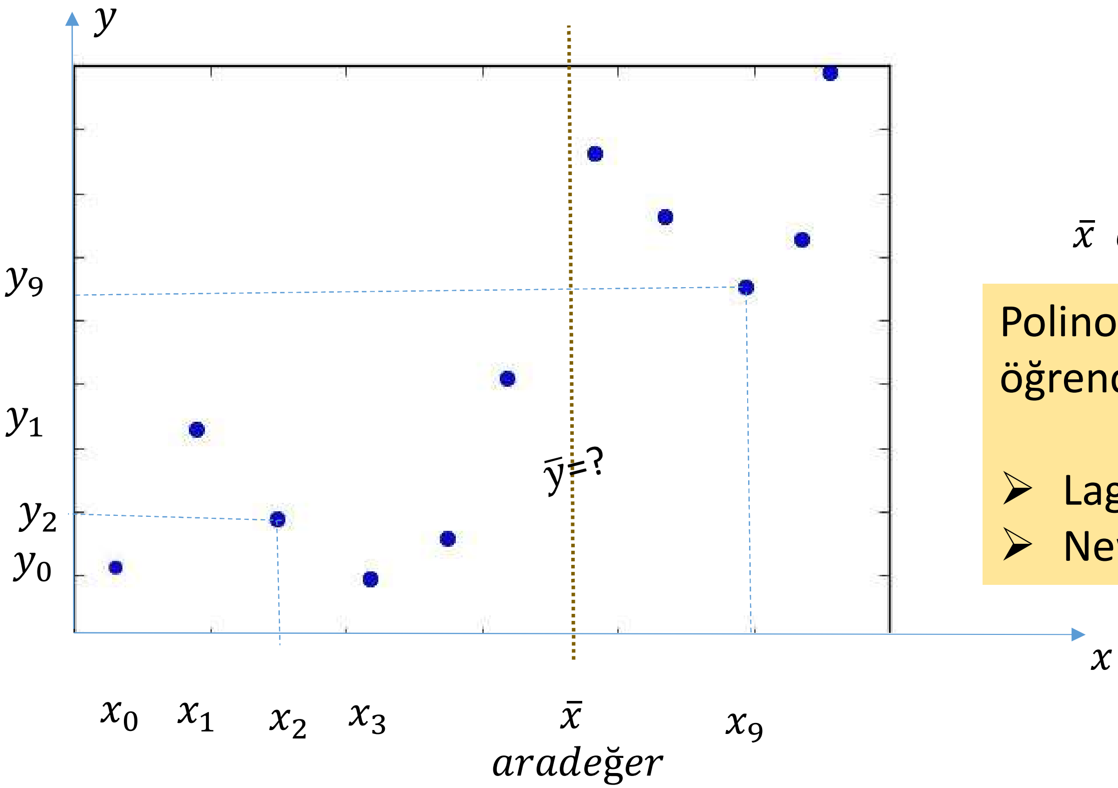
İNTERPOLASYON

Verilen bir data kümesinden hareketle bir fonksiyon belirleyerek başka noktalardaki değerleri hesaplamaya çalışıyoruz.



$\bar{x}$ *ara değeri için* $\bar{y}$=?

Polinomlarla interpolasyon için iki farklı formülasyon öğrendik:

- Lagrange Polinomları
- Newton Bölünmüş Farklar Yöntemi

LAGRANGE FORMÜLÜ

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ ayrık noktalarından geçen (derecesi n yada daha küçük olan) $p_n(x)$ polinomu

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n\, L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots.(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots.(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)} = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}; \quad i = 0,1,2,\dots n$$

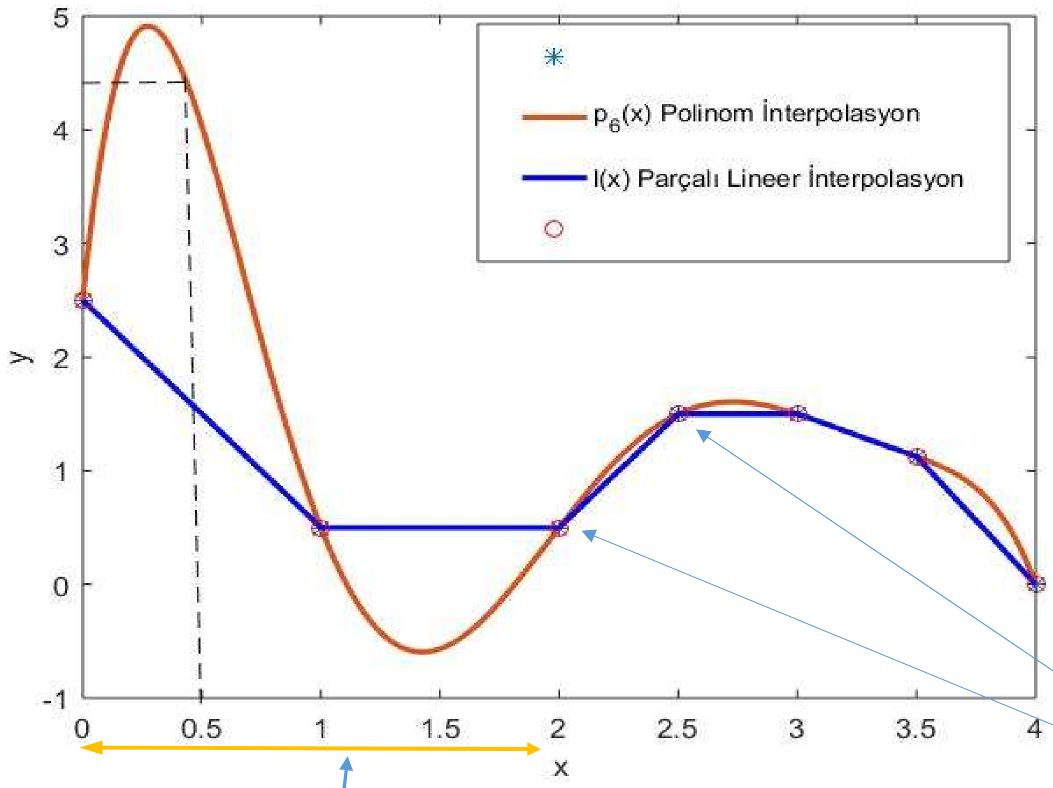
NEWTON BÖLÜNMÜŞ FARKLAR İNTERPOLASYON FORMÜLÜ

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots., x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots., x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

k. Mertebeden bölünmüş fark

$$p_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]\,(x - x_0)(x - x_1)\dots.(x - x_{k-1})$$

POLİNOM İNTERPOLASYON



x	y
0	2.5
1	0.5
2	0.5
2.5	1.5
3	1.5
3.5	1.125
4	0

Bu aralıkta veri çok iyi modellenememiş!!

$p_6(x)$ aralığın tamamında veriyi iyi modelleyemiyor!

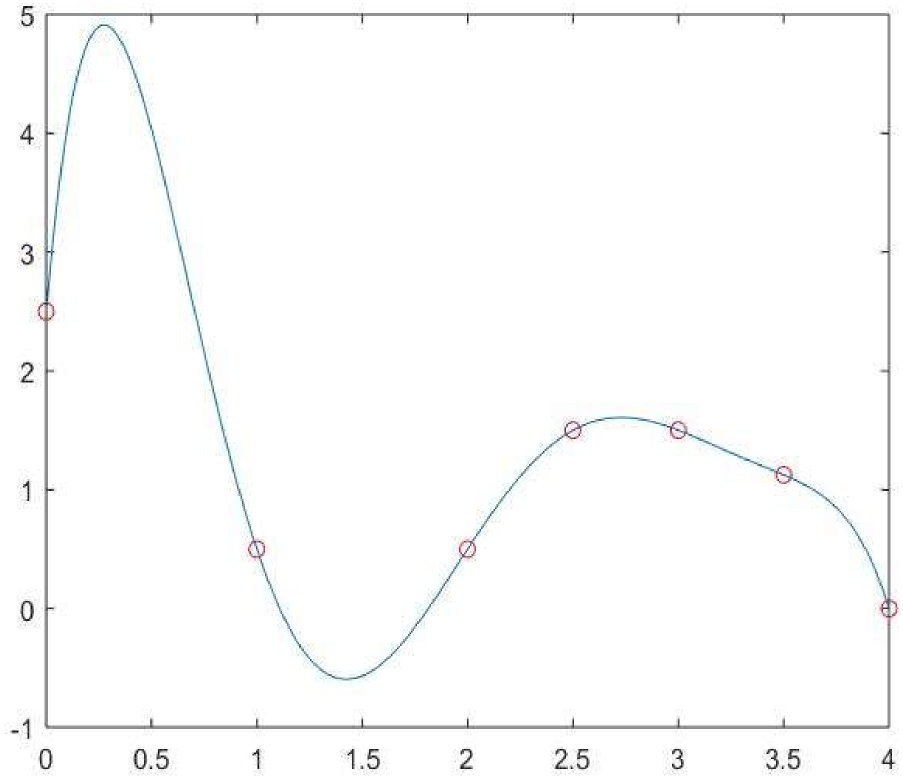
$\ell(x)$ parçalı lineer interpolasyon fonksiyonu ise veri noktalarında türevlerde süreksiz!

Yeni bir yaklaşımla her iki dezavantajı da ortadan kaldırmak mümkün ---> Yani AMAÇ hem veriyi mümkün olduğunca iyi yansıtmak hem de mümkün olduğunca düzgün (smooth) bir fonksiyon bulmak -----> SPLİNE (ŞERİT) İNTERPOLASYON

POLİNOM İNTERPOLASYON

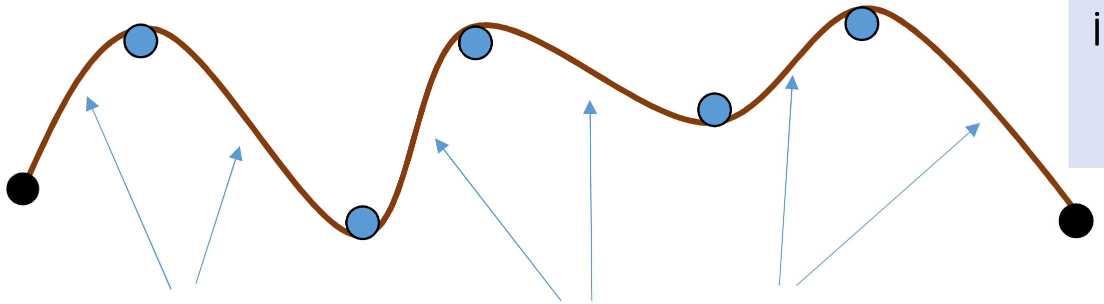
Polinom İnterpolasyon için Matlab Kodu:

```
clear all
clc
format long
x=[0 1 2 2.5 3 3.5 4];
y=[2.5 0.5 0.5 1.5 1.5 1.125 0];
c=polyfit(x,y,6)
xs=0.:0.01:4;
ys=c(7)+c(6)*xs+c(5)*xs.^2+c(4)*xs.^3…
+c(3)*xs.^4+c(2)*xs.^5+c(1)*xs.^6;
figure
plot(x,y,'ro-')
hold
plot(xs,ys)
```




```
c =
  Columns 1 through 5
 -0.253174603174672   3.495238095239019 -18.600198412703165      46.839285714297397 -53.896626984140603
  Columns 6 through 7
  20.415476190482245   2.499999999999741
```

KÜBİK ŞERİT (SPLINE) INTERPOLASYON



İnce elastik bir şerit ilgili noktalardan geçecek şekilde belirli bir miktar serbest bırakılarak (fazla germeden) bükülmüş gibi

Ardışık iki nokta 3. dereceden bir polinomla birleştiriliyor.

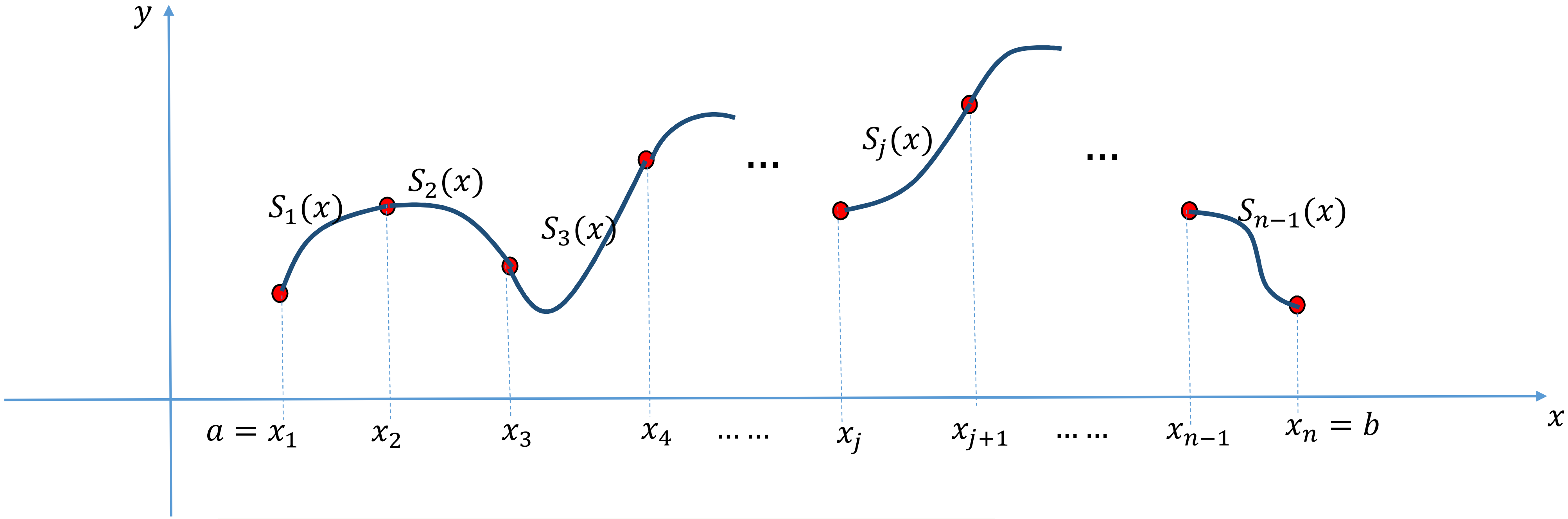
Bu yaklaşım bir anlamda parça parça polinom interpolasyona karşı düşüyor.

Böylece

(i) Data noktalarında sert geçişlerden kaçınarak düzgün (smooth) bir fonksiyon elde ediyoruz

(ii) Data genel polinom interpolasyona göre çok daha iyi modellenmiş oluyor

KÜBİK ŞERİT (SPLINE) INTERPOLASYON



(x_i, y_i) ; $i = 1,2, \dots, n$ data kümesi verilmiş olsun.

AMAÇ: Her ardışık iki nokta çifti arasında 3. derece bir polinom hesaplamak --->

Her bir $[x_j, x_{j+1}]$; $j = 1,2, \dots, n-1$ aralığında 3. derece bir $S_j(x)$ polinomu ile veri kümesini interpole etmek; yani $n-1$ tane 3. dereceden bulmalıyız.

KÜBİK ŞERİT (SPLINE) INTERPOLASYON

Yöntem:

(x_i, y_i) ; $i = 1,2,\dots,n$ data kümesi için $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ olsun.

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x); \quad x \in [x_1, x_2] \\ S_2(x); \quad x \in [x_2, x_3] \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ S_j(x); x \in [x_j, x_{j+1}] \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ S_{n-1}(x); x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Aradığımız parça parça kübik polinomlardan oluşan $S(x)$ fonksiyonunun özellikleri (İsterlerimiz):

1. $S(x)$ veri noktalarından geçsin: Yani $S(x_i) = y_i$; $i = 1,2,\dots,n$

2. $S(x)$ köşe noktaları içermesin yani belirli bir mertebeye kadar düzgün (smooth) olsun -----> $S(x)$, $S'(x)$ ve $S''(x)$ iç data noktalarında sürekli olsun

3. $S(x)$ in ikinci türevi uçlarda $(x = a \; ve \; x = b \; de)$ sıfır olsun

Bu üç koşulu sağlayan $S(x)$ fonksiyonuna Doğal Kübik Şerit İnterpolasyon Fonksiyonu denir.

KÜBİK ŞERİT (SPLINE) INTERPOLASYON

Her bir aralıktaki $S_j(x)$ 3. dereceden bir polinom olduğundan

$S_j(x) = a_j + b_j x + c_j x^2 + d_j x^3 \Longrightarrow 4\ bilinmeyen\ katsayı$
$\Longrightarrow (n-1)\ tane\ \ S_j(x)\ polinomu\ \ \mathbf{4(n-1)}\quad adet\ katsayı$

1. $S(x)$ $[a,b]$ aralığında sürekli $\Longrightarrow$ iç data noktalarında süreklilik
$\Longrightarrow S(x);\ \ x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ noktalarında sürekli $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{(n-2)}\ denklem$ ✓

2. $S'(x)$ $[a,b]$ aralığında sürekli $\Longrightarrow$ iç data noktalarında 1. türevin sürekliliği
$\Longrightarrow S'(x);\ \ x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ noktalarında sürekli $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{(n-2)}\ denklem$ ✓

3. $S''(x)$ $[a,b]$ aralığında sürekli $\Longrightarrow$ iç data noktalarında 2. türevin sürekliliği
$\Longrightarrow S''(x);\ \ x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ noktalarında sürekli $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{(n-2)}\ denklem$ ✓

4. $S(x)$ veri kümesindeki noktalardan geçmeli
$x_1, x_2, \dots, x_n$ noktalarında $S(x)$ veriye eşit olmalı $\Longrightarrow \quad \mathrm{S}(x_j) = y_j \quad \Longrightarrow \quad (\boldsymbol{n})\ denklem$ ✓

5. Doğal olma koşulları $S(x)$ in ikinci türevi uçlarda $(x = a\ ve\ x = b\ de)$ sıfır
$\Longrightarrow\ S''(x_1 = a) = S''(x_n = b) = 0 \ \Longrightarrow \mathbf{2}\ \ denklem$ ✓

$3(n-2) + \mathrm{n} + 2 = \mathbf{4n-4} = \text{bilinmeyen katsayıların sayısı} \dashrightarrow$ Prensip olarak tutarlı bir sistem!

KÜBİK ŞERİT (SPLINE) INTERPOLASYON

Örneğin 7 data noktası verilmişse 6 aralık için 6 tane 3. dereceden polinom bulmak gerekir ki bu da 6x4=24 tane katsayı gerektirir. Bu halde 24x24 lük bir sistemin çözümü söz konusudur.

Ancak bu kadar işleme gerek duymadan da bu problemi çözmek (daha az denklem ile) mümkündür;

ETKİN BİR YÖNTEM:

$M_i = S''(x_i) \qquad i = 1,2,\dots,n$ olarak tanımlayalım. (Data noktalarında ikinci türevin aldığı değer M_i ile gösterilsin)

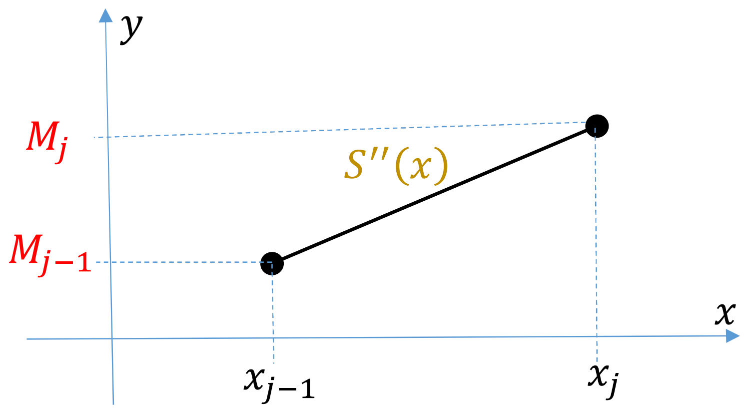
Burada yöntemin temeli $S(x)$ polinomunu M_i'ler cinsinden ifade etmeye dayanır!

$[x_{j-1}, x_j]$ aralığında $S(x) = S_{j-1}(x)$ kübik olduğuna göre ----> $S'(x)$ ikinci derece ve $S''(x)$ lineer bir fonksiyon olur.

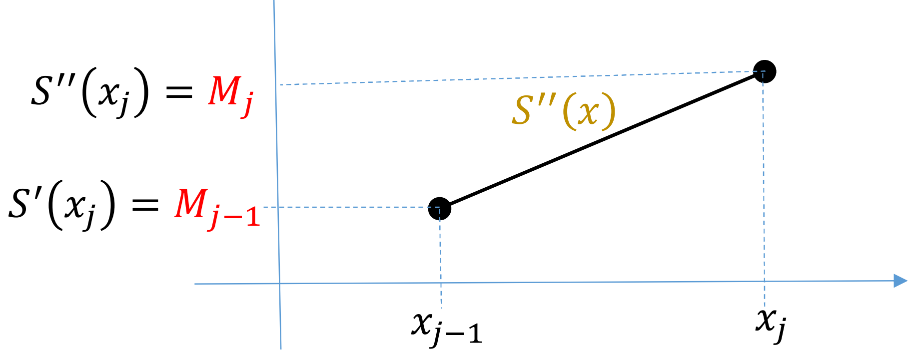
Bu lineer fonksiyon yani $S''(x)$, 2 nokta yardımıyla belirlenebilir.

$S''(x_{j-1}) = M_{j-1}$ ve $S''(x_j) = M_j$ ifadelerinden

$$S''(x) = S''_{j-1}(x) = M_{j-1}\frac{x_j - x}{x_j - x_{j-1}} + M_j\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}; \quad x_{j-1} \le x \le x_j;\ \mathrm{j} = 2,3,\dots,\mathrm{n} \quad (1)$$

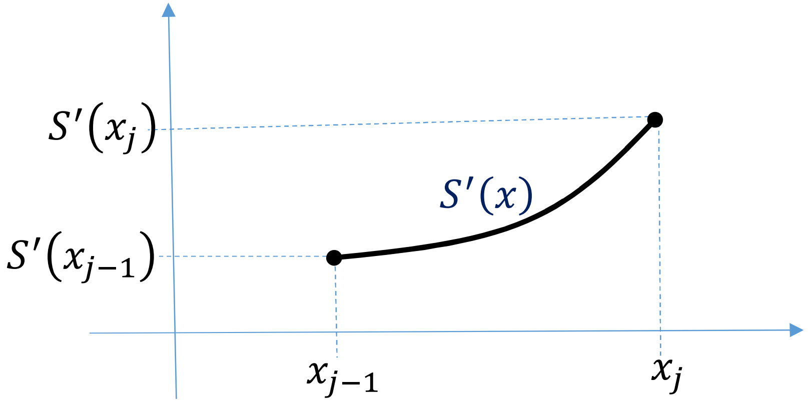


KÜBİK ŞERİT (SPLINE) INTERPOLASYON



M_{j-1} ve M_j biliniyorsa

$$S''(x) = S''_{j-1}(x) = M_{j-1}\frac{x_j - x}{x_j - x_{j-1}} + M_j\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \; belli$$

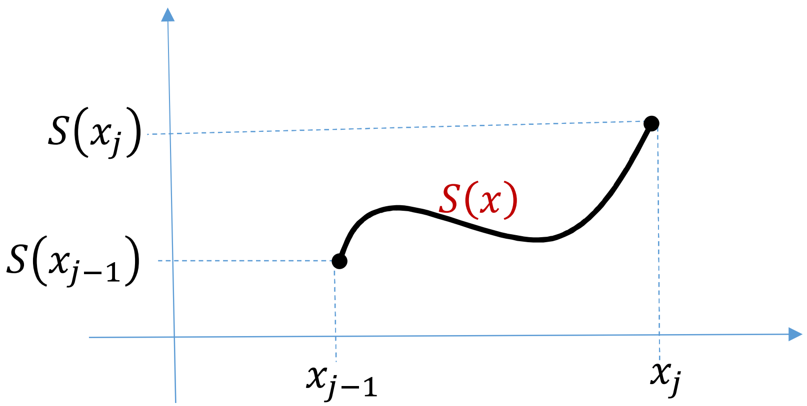


$$S'(x) = \int S''(x)\,dx + C_0$$

C_0 ve D_0 belirsiz integral sabitlerini bulmak için:

$$\boldsymbol{S(x_{j-1}) = y_{j-1} \;\; ve \;\; S(x_j) = y_j}$$

koşulları kullanılır



$$S(x) = \int S'(x)\,dx + D_0$$

Sonuç olarak $S(x)$ bütünüyle yalnızca M_j ler ve data cinsinden yazılmış olur

KÜBİK ŞERİT (SPLINE) INTERPOLASYON

$$S(x) = S_{j-1}(x) = \frac{M_{j-1}(x_j - x)^3 + M_j(x - x_{j-1})^3}{6(x_j - x_{j-1})} + \frac{y_{j-1}(x_j - x) + y_j(x - x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} - \frac{1}{6}(x_j - x_{j-1})[M_{j-1}(x_j - x) + M_j(x - x_{j-1})] \; ; \qquad x_{j-1} \le x \le x_j \tag{2}$$

$S'(x)$ in süreklilik koşulu ---> $[x_{j-1}, x_j]$ ve $[x_j, x_{j+1}]$ aralıkları için yazılmış türevler $x = x_j$ de sürekli olmalı $\Longrightarrow$

$$S'(x = x_j - 0) = S'(x = x_j + 0) \Longrightarrow S'_{j-1}(x_j) = S'_j(x_j) \Longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{x_j - x_{j-1}}{6} M_{j-1} + \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{3} M_j + \frac{x_{j+1} - x_j}{6} M_{j+1} = \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} ; \; j = 2,3,\dots,n-1} \tag{3}$$

$$\boxed{M_1 = M_n = 0}$$

2 tane denklem

$M_1, M_2, \dots M_n$ *leri içeren*
(n-2) tane denklem

SONUÇ: n nokta verildiğinde (n-1) adet 3. derece polinom belirleme problemi normalde 4(n-1) tane bilinmeyen içermesine rağmen bu yaklaşımla n bilinmeyene indirgenmiş olur!

KÜBİK ŞERİT (SPLINE) INTERPOLASYON

Özel Bir Örnek: Aralıkların uzunluğu aynı ve 1 olsun -----> $x_j - x_{j-1} = 1, \quad j = 1,2,\ldots,n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \ldots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \\ \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 \\ \hat{y}_j \\ \hat{y}_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{y}_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}; \; j = 2,3,\ldots,n-1$$

KÜBİK ŞERİT (SPLINE) INTERPOLASYON

Örnek: $\left\{(1,1),\left(2,\frac{1}{2}\right),\left(3,\frac{1}{3}\right),\left(4,\frac{1}{4}\right)\right\}$ veri kümesi için kübik spline interpolasyon

$n=4;\ x_j - x_{j-1} = 1;\quad j = 2,3,4$

$M_1 = 0$

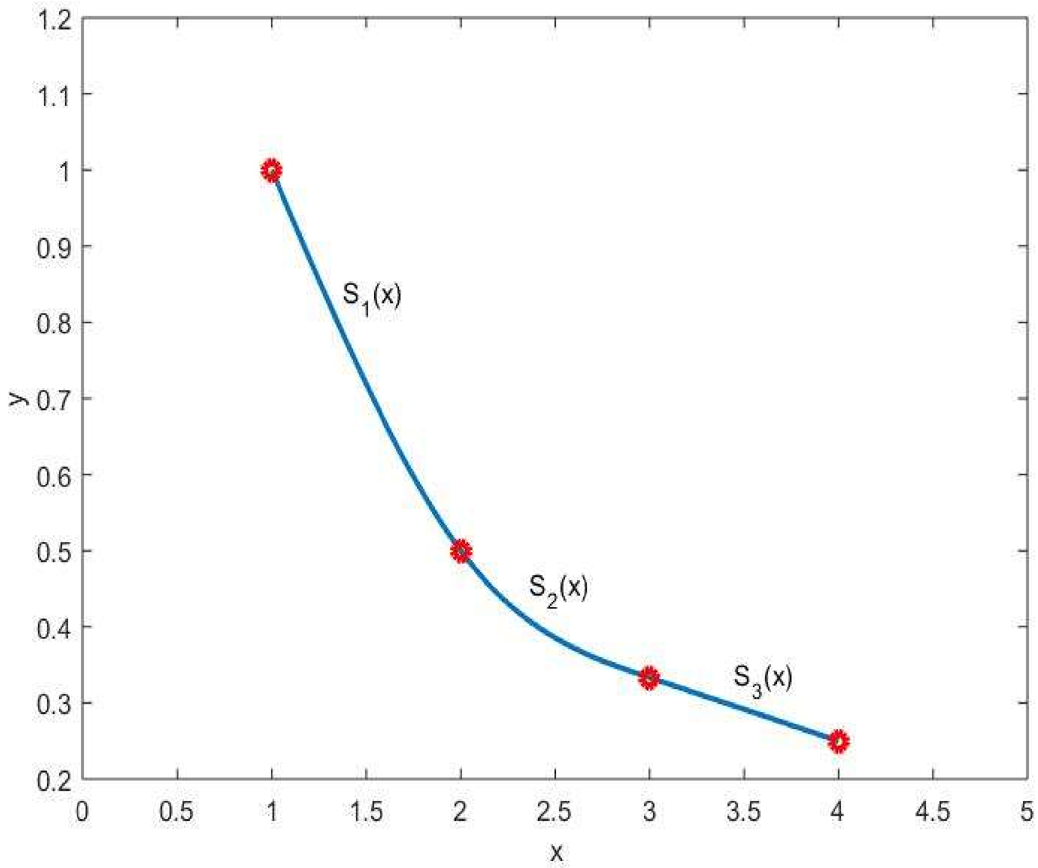
$$\frac{1}{6}M_1 + \frac{2}{3}M_2 + \frac{1}{6}M_3 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{6}M_2 + \frac{2}{3}M_3 + \frac{1}{6}M_4 = \frac{1}{12}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{c} M_1 = 0 \\ M_2 = 0.5 \\ M_3 = 0 \\ M_4 = 0 \end{array}$$

$M_4 = 0$

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x + \frac{3}{2}; & 1 \le x \le 2 \\ -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{17}{6}; & 2 \le x \le 3 \\ -\frac{1}{12}x + \frac{7}{12}; & 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

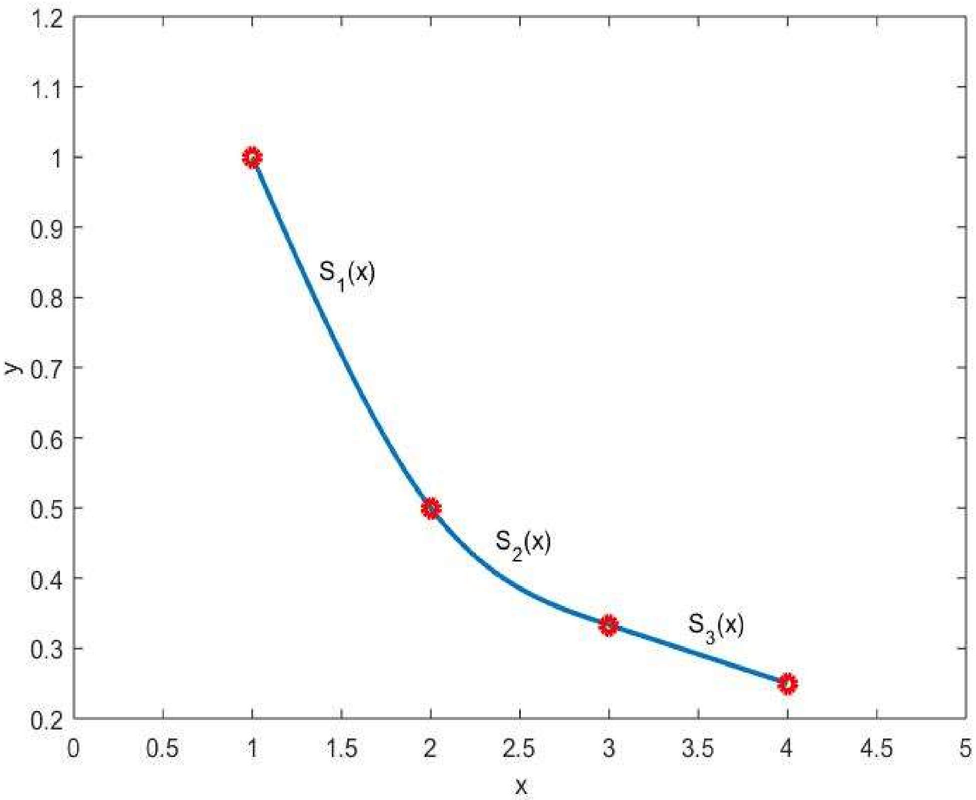


KÜBİK ŞERİT (SPLINE) INTERPOLASYON

$$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{12}x+\frac{3}{2}; & 1\le x\le 2\\ -\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{4}x^2-\frac{7}{3}x+\frac{17}{6}; & 2\le x\le 3\\ -\frac{1}{12}x+\frac{7}{12}; & 3\le x\le 4\end{cases}$$

$$S'(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}; & 1\le x\le 2\\ -\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{7}{3}; & 2\le x\le 3\\ -\frac{1}{12}; & 3\le x\le 4\end{cases}$$

$$S''(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}; & 1\le x\le 2\\ -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}; & 2\le x\le 3\\ 0; & 3\le x\le 4\end{cases}$$



$S(x), S'(x)$ ve $S''(x)$ $\quad x=2$ ve $x=3$ de $sürekli$!!!

KÜBİK ŞERİT (SPLINE) INTERPOLASYON

Kübik Spline MATLAB Kodu:

```
clear all
format long
x=[0 1 2 2.5 3 3.5 4];
y=[2.5 0.5 0.5 1.5 1.5 1.125 0];
cs = spline(x,y);
xx=0.:0.01:4;
figure
plot(x,y,'o')
hold
plot(xx,ppval(cs,xx),'-');
```