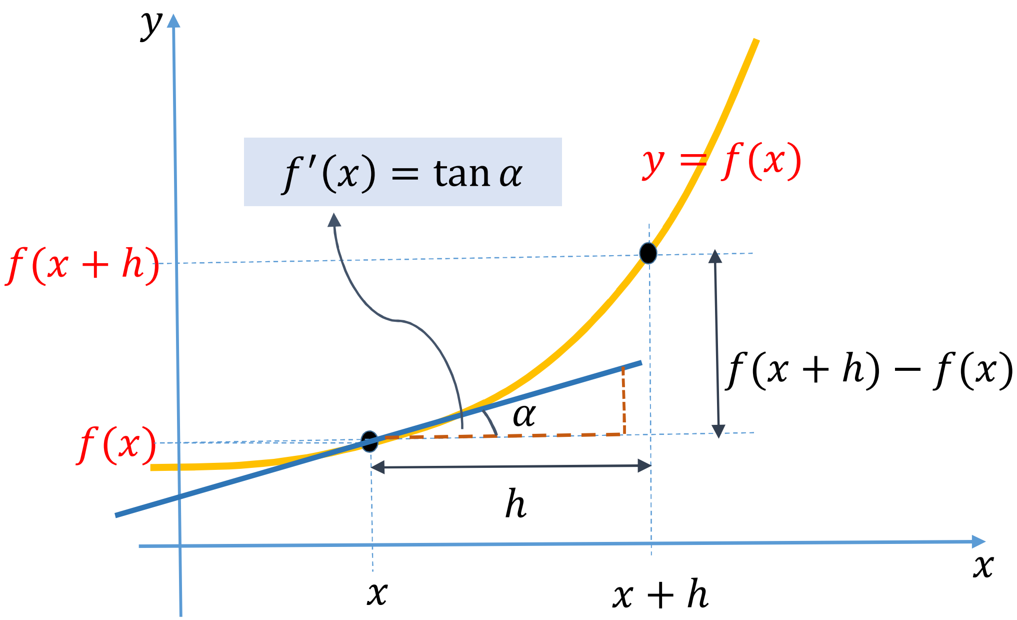
SAYISAL TÜREV

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

y $= f(x)$ reel fonksiyonunun x *noktasındaki türevi*



Küçük h değerleri için

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =: D_h f(x)$$

Sayısal Türev

$D_h f(x)$: $f(x)$ fonksiyonunun h adım aralığı için x noktasındaki sayısal türevi

SAYISAL TÜREV

Örnek: $f(x) = cosx$ in $x = \frac{\pi}{6}$ noktasındaki sayısal türevi: Gerçek Değer : $-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0.5$

h	$D_h f(x)$	hata	oran
0.1	-0.54243	0.04243	-
0.05	-0.52144	0.02144	1.98
0.025	-0.51077	0.01077	1.99
0.0125	-0.50540	0.00540	1.99
0.00625	-0.50270	0.00270	2.00
0.003125	-0.50135	0.00135	2.00

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c); \quad x < c < x+h$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = D_h f(x) \Rightarrow$$

$$D_h f(x) = \frac{1}{h}\left[f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c) - f(x)\right] = f'(x) + \frac{h}{2} f''(c)$$

$$\Longrightarrow \ Hata = f'(x) - D_h f(x) = -\frac{h}{2} f''(c)$$

$$h > 0 \ iken \quad f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = D_h f(x)$$

Sayısal Türev için **İleri Fark Formülü**

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) - D_h f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{h}{2}\cos(c) \ ; \quad \frac{\pi}{6} < c < \frac{\pi}{6} + h$$

$\Longrightarrow$ Hata $\boldsymbol{h}$ ile orantılı. $\boldsymbol{h}$ yarıya indiğinde hata da yarıya iniyor.

SAYISAL TÜREV

Sayısal Türev için **İleri Fark Formülü**

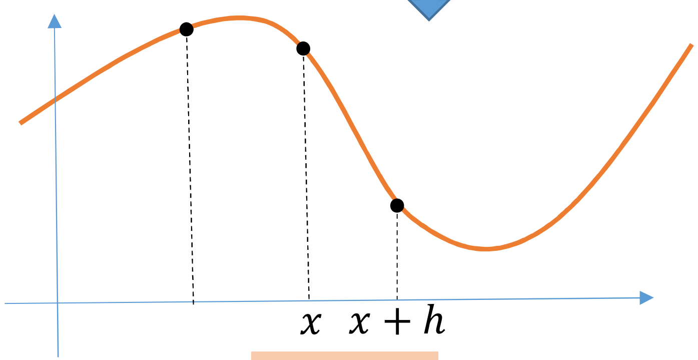
$$h > 0 \; iken \;\; f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = D_h f(x)$$

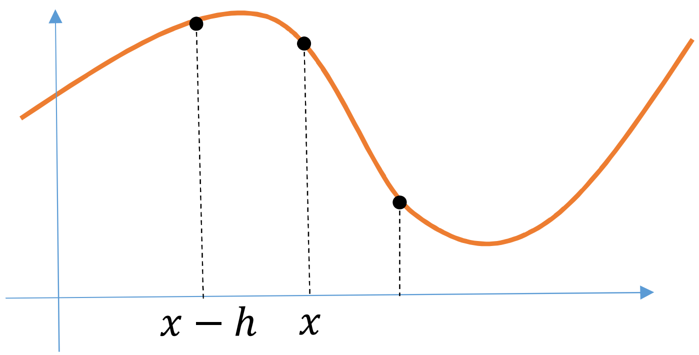
$h \longrightarrow -h$ yapılırsa

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \; ; h > 0 \Longrightarrow$$

Sayısal Türev için **Geri Fark Formülü**

$$h > 0 \; iken \;\; f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = D_h f(x)$$





İleri Fark

$$Hata = f'(x) - D_h f(x) = -\frac{h}{2} f''(c); \quad c \in (x, x+h)$$

Geri Fark

$$Hata = f'(x) - D_h f(x) = \frac{h}{2} f''(c); \quad c \in (x-h, x)$$

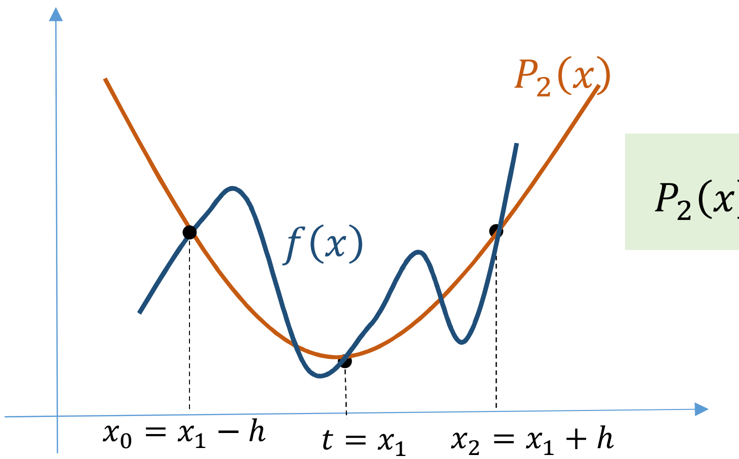
SAYISAL TÜREV

İnterpolasyon Yardımıyla Türev Hesabı

$x_0, x_1, \dots x_n$ noktaları ve $f(x)$ fonksiyonu için

$P_n(x), f(x)'i$ interpole eden polinom olmak üzere $f'(t) \approx P_n'(t)$

$n = 2; \quad t = x_1, x_0 = x_1 - h,\ x_2 = x_1 + h \Longrightarrow\ f'(t) \approx P_2'(t)$



$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{2h^2} + f(x_1)\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{-h^2} + f(x_2)\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2} \Longrightarrow$$

$$P_2'(x) = f(x_0)\frac{(2x - x_1 - x_2)}{2h^2} + f(x_1)\frac{(2x - x_0 - x_2)}{-h^2} + f(x_2)\frac{(2x - x_0 - x_1)}{2h^2}$$

$$P_2'(x_1) = f(x_0)\frac{\overbrace{(x_1 - x_2)}^{-h}}{2h^2} + f(x_1)\frac{\overbrace{(2x_1 - x_0 - x_2)}^{0}}{-h^2} + f(x_2)\frac{\overbrace{(x_1 - x_0)}^{h}}{2h^2}$$

$$P_2'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} \Longrightarrow$$

$$P_2'(x_1) = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1 - h)}{2h}$$

$$f'(x_1) \approx \frac{f(x_1 + h) - f(x_1 - h)}{2h} = D_h f(x)$$

Sayısal Türev için **Merkezi Fark Formülü**

SAYISAL TÜREV

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(c_1); \quad x < c_1 < x+h$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(c_2); \quad x-h < c_2 < x$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{12}[f'''(c_1) - f'''(c_2)] \Longrightarrow f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = D_h\, f(x)$$

Sayısal Türev için **Merkezi Fark Formülü**

$$Hata = f'(x) - D_h f(x) \propto h^2$$

Merkezi Fark Formülünde Hata h^2 ile orantılı olduğundan daha yüksek doğruluktadır!!!

SAYISAL TÜREV

Teorem: $f(x)$, $[a,b]$ aralığında $(n+2)$. mertebeye kadar sürekli türevlere sahip bir fonksiyon, $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ aynı aralıktaki $(n+1)$ tane interpolasyon noktası ve $P_n(t)$ bu noktalardan geçen enterpolasyon polinomu olmak üzere $t \in [a,b]$ için

$$f'(t) - P_n'(t) = \Psi_n(t)\frac{f^{(n+2)}(c_1)}{(n+2)!} + \Psi_n'(t)\frac{f^{(n+1)}(c_2)}{(n+1)!}$$

$\Psi_n(t) = (t-x_0)(t-x_1)(t-x_2)\dots\dots(t-x_n);\qquad c_1, c_2 \in [\min(x_i\ ler\ ve\ t), \max(x_i\ ler\ ve\ t)]$

$$\Psi_2(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \longrightarrow \Psi_2(x_1) = 0$$

$$\Psi_2'(x) = (x-x_1)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_1) \longrightarrow \Psi_2'(x_1) = (x_1-x_0)(x_1-x_2) = h^2$$

$$f'(x_1) - \frac{f(x_1+h) - f(x_1-h)}{2h} = -\frac{h^2}{6}f'''(c_2);\quad x_1 - h < c_2 < x_1 + h$$

SAYISAL TÜREV

Örnek: $f(x) = cosx$ in $x = \frac{\pi}{6}$ noktasındaki sayısal türevinin merkezi farklarla hesabı: Gerçek Değer: $-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0.5$

h	$D_h f(x)$	hata	oran
0.1	-0.49916708	-0.0008329	-
0.05	-0.49979169	-0.0002083	4
0.025	-0.49994792	-0.00005208	4
0.0125	-0.49998669	-0.00001302	4
0.00625	-0.49999674	-0.000003255	4

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx \frac{f\left(\frac{\pi}{6} + 0.025\right) - f\left(\frac{\pi}{6} - 0.025\right)}{2\ 0.025} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6} + 0.025\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} - 0.025\right)}{0.05}$$

$$= \frac{0.853256086983572 - 0.878253482898284}{0.05} = -0.499947918294246$$

SAYISAL TÜREV

Belirsiz Katsayılar Yöntemi

$f(x)$ fonksiyonu için $x = t,\ x = t + h,\ x = t - h$ noktalarındaki değerler cinsinden
t noktasındaki türevi ifade etmeye çalışalım. Örneğin ikinci türev $f''(x)$ için bir ifade arayalım:

$$f''(t) \approx D_h^{(2)} f(t) = Af(t+h) + Bf(t) + Cf(t-h)$$

$A, B\ ve\ C$ bilinmeyen katsayılar

$$f(t+h) \approx f(t) + hf'(t) + \frac{h^2}{2} f''(t) + \frac{h^3}{6} f'''(t) + \frac{h^4}{24} f^{(iv)}(t)$$

$$f(t-h) \approx f(t) - hf'(t) + \frac{h^2}{2} f''(t) - \frac{h^3}{6} f'''(t) + \frac{h^4}{24} f^{(iv)}(t)$$

$$D_h^{(2)} f(t) \approx (A+B+C)f(t) + h(A-C)f'(t) + \frac{h^2}{2}(A+C)f''(t) + \frac{h^3}{6}(A-C)f'''(t) + \frac{h^4}{24}(A+C)f^{(iv)}(t)$$

$$D_h^{(2)} f(t) \approx f''(t) \Longrightarrow \begin{cases} A+B+C = 0 \\ h(A-C) = 0 \\ \dfrac{h^2}{2}(A+C) = 1 \end{cases}$$

$$A = C = \frac{1}{h^2};\ \ B = \frac{-2}{h^2}$$

$$D_h^{(2)} f(t) = \frac{f(t+h) - 2f(t) + f(t-h)}{h^2}$$

$$f''(t) - D_h^{(2)} f(t) \approx \frac{h^2}{12} f^{(iv)}(t)$$

Hata h^2 ile orantılı!!!

SAYISAL TÜREV

Örnek: $f(x) = cosx$ in $x = \frac{\pi}{6}$ noktasındaki 2.dereceden sayısal türevinin hesabı:

Gerçek Değer: $-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0.866025403784439$

h	$D_h^2 f(x)$	hata	oran
0.5	-0.84813289	-1.789 E-2	-
0.25	-0.86152434	-4.5 E-3	3.97
0.125	**-0.86489835**	-1.12E-3	3.99
0.0625	-0.86574353	-2.81 E-4	4
0.03125	-0.86595493	-7.048 E-5	4

$$D_h^{(2)} f(t) = \frac{f(t+h) - 2f(t) + f(t-h)}{h^2} = \frac{cos\left(\frac{\pi}{6} + \mathbf{0.125}\right) - 2cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + cos\left(\frac{\pi}{6} - \mathbf{0.125}\right)}{\mathbf{0.125}^2} =$$

$$\frac{0.796931018703644 - 2 \times 0.866025403784439 + 0.921605752088872}{0.015625} = \mathbf{-0.86489835}3687174$$

SAYISAL TÜREV

Türev Hesabında Hatanın Etkisi

$$D_h^{(2)} f(t) = \frac{f(t+h) - 2f(t) + f(t-h)}{h^2} \quad \Rightarrow \quad D_h^{(2)} f(x_1) = \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} \approx f''(x_1)$$

$$x_2 = x_1 + h \qquad x_0 = x_1 - h$$

$D_h^{(2)} f(x_1)$ hesabı yapılırken $f(x_0), f(x_1)$ ve $f(x_2)$ nin değerlerinde yapılacak olası hatalar nedeniyle $f\left(x_j\right)$ yerine $\widehat{f_j}$ kullanılmış olsun

$$fonksiyon\ değerlerindeki\ hatalar\ :\ f\left(x_j\right) - \widehat{f_j} = \epsilon_j, \qquad j = 0,1,2;$$

Hesaplanan $D_h^{(2)} f(x_1)$ $değeri$ $\widehat{D_h^{(2)}} f(x_1) = \dfrac{\widehat{f_2} - 2\widehat{f_1} + \widehat{f_0}}{h^2}$ $\Rightarrow$ $\widehat{f_j} = f\left(x_j\right) - \epsilon_j$ yazılırsa

$$f''(x_1) - \widehat{D_h^{(2)}} f(x_1) = f''(x_1) - \frac{[f(x_2) - \epsilon_2] - 2[f(x_1) - \epsilon_1] + [f(x_0) - \epsilon_0]}{h^2}$$

SAYISAL TÜREV

$$f''(x_1) - \widehat{D_h^{(2)}} f(x_1) = f''(x_1) - \frac{[f(x_2) - \epsilon_2] - 2[f(x_1) - \epsilon_1] + [f(x_0) - \epsilon_0]}{h^2} =$$

$$= \left\{ f''(x_1) - \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} \right\} + \frac{\epsilon_2 - 2\epsilon_1 + \epsilon_0}{h^2} \approx \frac{h^2}{12} f^{(iv)}(x_1) + \frac{\epsilon_2 - 2\epsilon_1 + \epsilon_0}{h^2}$$

$$f''(t) - D_h^{(2)} f(t) \approx \frac{h^2}{12} f^{(iv)}(t)$$

$$\left| f''(x_1) - \widehat{D_h^{(2)}} f(x_1) \right| \leq \frac{h^2}{12} \left| f^{(iv)}(x_1) \right| + \frac{4\delta}{h^2}$$

$Hatalar \;\; yani \;\; \epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2 \;\; değerleri$
$belirli \;\; bir \;\; (-\delta, \delta) \; aralığında \; sınırlı \; rasgele \; sayılar$

$\frac{4\delta}{h^2}$ **terimi nedeniyle h azaldıkça hata artıyor.**
Enteresan bi sonuç. Hassasiyet ve doğruluğun artmasını beklerken küçülen h larla beraber hata artıyor!!!

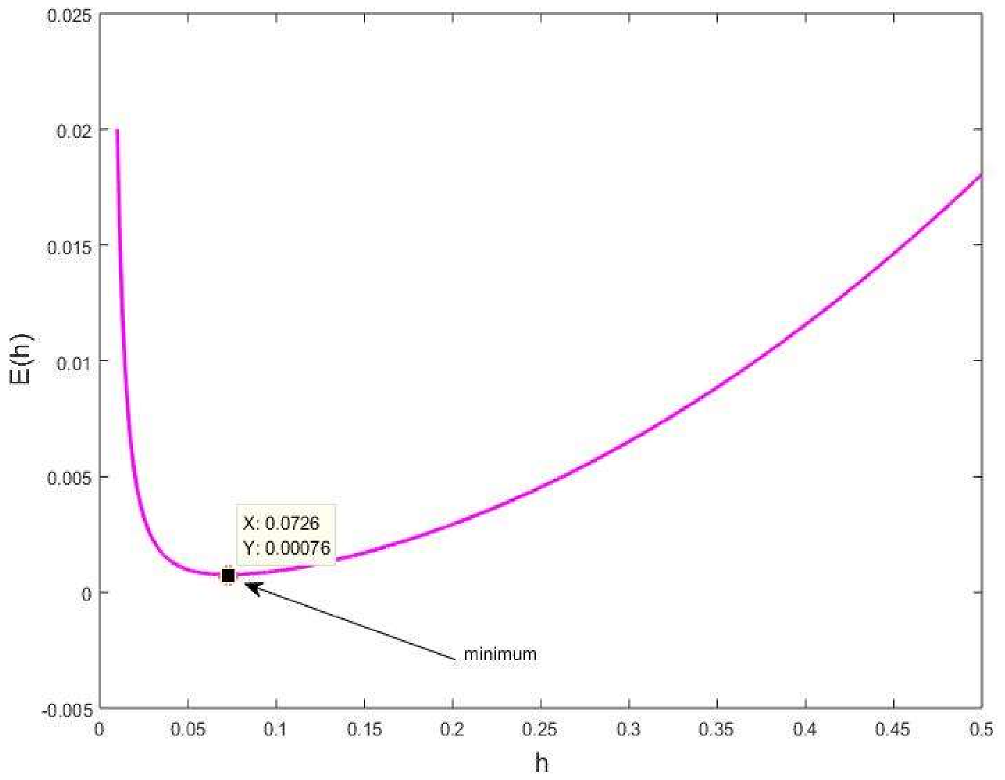
SAYISAL TÜREV

Örnek: $f(x) = cosx$ in $x = \frac{\pi}{6}$ noktasındaki 2.dereceden sayısal türevinin hesabında $\widehat{f_j}$ ler $f(x_j)$ gerçek değerlerinin 6 anlamlı hane ile sınırlanarak yuvarlanmış şekli olarak alınırsa $|\epsilon_j| \leq 5.0\ 10^{-7} = \delta,$ j $= 0,1,2$ olmak üzere

$$\left|f''(x_1) - \widehat{D_h^{(2)}} f(x_1)\right| \leq \frac{h^2}{12}\left|\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| + \frac{4}{h^2} 5.0\ 10^{-7}$$
$$= 0.0722h^2 + \frac{2\ 10^{-6}}{h^2} = E(h)$$

h	$\widehat{D_h^{(2)}} f(x_1)$	hata
0.5	-0.848128	-0.017897
0.25	-0.861504	-0.004521
0.125	-0.864832	-0.001193
0.0625	-0.865536	-0.000489
0.03125	-0.865280	-0.000745
0.015625	-0.860160	-0.005865
0.0078125	-0.851968	-0.014057
0.00390625	-0.786432	-0.079593

Minimum



SAYISAL TÜREV

Aynı örnekte $\left|\epsilon_j\right| \leq 5.0\ 10^{-5} = \delta,\ \ \mathrm{j} = 0{,}1{,}2$ alınırsa

$$\left|f''(x_1) - \widehat{D_h^{(2)}} f(x_1)\right| \leq \frac{h^2}{12}\left|\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| + \frac{4}{h^2} 5.0\ 10^{-5}$$
$$= 0.0722h^2 + \frac{2\ 10^{-4}}{h^2} = E(h)$$

Sayısal Türevde hesaba giren fonksiyonların değerlerindeki, ya da bunlar bir ölçüme aitse dataların değerlerindeki hataların türev hesabındaki etkisi beklenmedik şekilde kötü sonuçlar alınmasına sebep olabilir!!!