1.

$$19x_1 + 20x_2 = b_1$$
$$20x_1 + 21x_2 = b_2$$

denklem sisteminde A katsayılar matrisini belirleyerek $\mathrm{cond}(A)$ değerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$A = \begin{bmatrix} 19 & 20 \\ 20 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 21 & -20 \\ -20 & 19 \end{bmatrix} = \frac{1}{19 \times 21 - 20 \times 20} \begin{bmatrix} 21 & -20 \\ -20 & 19 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -21 & 20 \\ 20 & -19 \end{bmatrix}$$

$$\|A\| = 41, \ \|A^{-1}\| = 41$$
$$\Rightarrow \mathrm{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\| = 1681 \gg 1$$

Bu denklem sistemi kararlı değildir. Yani kötü kurulmuş (ill-posed) bir problemdir.

2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{bmatrix}, \ |c| \neq 1$$

olmak üzere c sabitine göre $\mathrm{cond}(A)$ değerinin değişimini çizdiriniz.

Çözüm:

$$A^{-1} = \frac{1}{1-c^2} \begin{bmatrix} 1 & -c \\ -c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-c^2} & \dfrac{c}{c^2-1} \\ \dfrac{c}{c^2-1} & \dfrac{1}{1-c^2} \end{bmatrix}$$

$$\|A\| = 1 + |c|,$$
$$\|A^{-1}\| = \left| \frac{1}{1-c^2} \right| + \left| \frac{c}{c^2-1} \right|$$

$$\mathrm{cond}(A) = (1+|c|)\,.\left(\left|\frac{1}{1-c^2}\right| + \left|\frac{c}{c^2-1}\right|\right)$$

<u>$c < -1$ için:</u>

$$\mathrm{cond}(A) = (1-c)\,.\left(\frac{1}{c^2-1} - \frac{c}{c^2-1}\right)$$

$$\mathrm{cond}(A) = \frac{(1-c)^2}{c^2-1} = \frac{(1-c)^2}{(c-1)(c+1)} = \frac{c-1}{c+1}$$

<u>$-1 < c < 0$ için:</u>

$$\mathrm{cond}(A) = (1-c)\,.\left(\frac{1}{1-c^2} + \frac{c}{c^2-1}\right)$$

$$\mathrm{cond}(A) = \frac{(1-c)^2}{1-c^2} = \frac{(1-c)^2}{(1-c)(1+c)} = \frac{1-c}{1+c}$$

<u>$0 < c < 1$ için:</u>

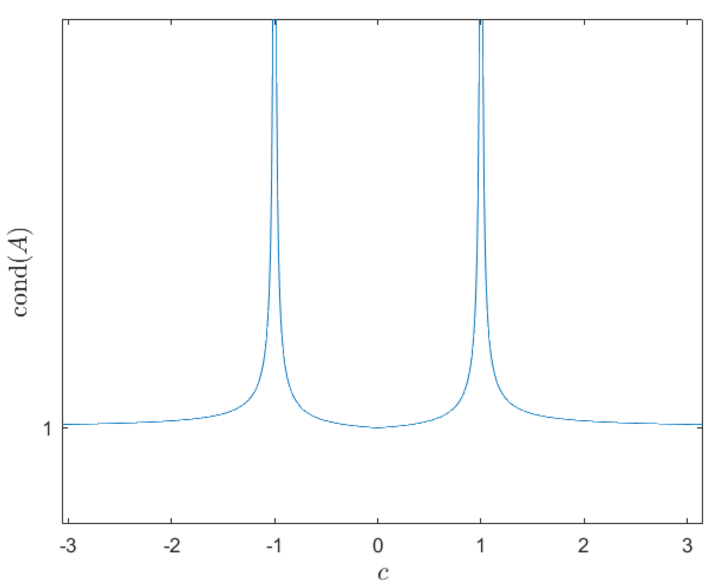
$$\mathrm{cond}(A) = (1+c)\,.\left(\frac{1}{1-c^2} + \frac{c}{1-c^2}\right)$$

$$\mathrm{cond}(A) = \frac{(1+c)^2}{1-c^2} = \frac{(1+c)^2}{(1-c)(1+c)} = \frac{1+c}{1-c}$$

<u>$c > 1$ için:</u>

$$\mathrm{cond}(A) = (1+c)\,.\left(\frac{1}{c^2-1} + \frac{c}{c^2-1}\right)$$

$$\mathrm{cond}(A) = \frac{(1+c)^2}{c^2-1} = \frac{(1+c)^2}{(c-1)(c+1)} = \frac{c+1}{c-1}$$



3.

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -15 \\ -31 & 42 \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ ve } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $Ax = b$ lineer denklem sistemi göz önüne alınsın.

(a) A matrisinin tersini bulunuz.

(b) A matrisinin ve tersinin normlarını bularak $\mathrm{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ değerini hesaplayınız. Bu sistem stabil midir?

(c) $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ için x çözümünü bulunuz.

(d) $\widehat{b} = \begin{bmatrix} \widehat{b}_1 \\ \widehat{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95 \\ -2.1 \end{bmatrix}$ için $\widehat{x}$ çözümünü bulunuz.

(e) $\dfrac{\|x - \widehat{x}\|}{\|x\|}$ ve $\dfrac{\|b - \widehat{b}\|}{\|b\|}$ değerlerini hesaplayarak karşılaştırınız.

(f) Bu sistemin herhangi bir başlangıç değerinden hareketle Jacobi ve Gauss-Seidel yöntemleri ile iteratif olarak çözülmeye uygun olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm:

a.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 42 & 15 \\ 31 & 11 \end{bmatrix} = \frac{1}{11 \times 42 - 15 \times 31} \begin{bmatrix} 42 & 15 \\ 31 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 42 & 15 \\ 31 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -10.\bar{3} & -3.\bar{6} \end{bmatrix}$$

b.

$$\|A\| = 73, \; \|A^{-1}\| = 19$$

$$\mathrm{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\| = 1387 \gg 1$$

Denklem sistemi stabil (kararlı) değildir.

c.

$$11x_1 - 15x_2 = 1 \tag{3.a}$$

$$-31x_1 + 45x_2 = -2 \tag{3.b}$$

<u>$31 \times$ (3.a) $+ 11 \times$ (3.b):</u>

$$-3x_2 = 9 \Rightarrow x_2 = -3$$

$x_2 \rightarrow$ (3.a):

$$11x_1 + 45 = 1 \Rightarrow x_1 = -4$$

$$x = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

d.

$$11\widehat{x}_1 - 15\widehat{x}_2 = 0.95 \tag{3.c}$$

$$-31\widehat{x}_1 + 45\widehat{x}_2 = -2.1 \tag{3.d}$$

$31 \times$ (3.c) $+ 11 \times$ (3.d):

$$-3\widehat{x}_2 = 6.35 \Rightarrow \widehat{x}_2 = -2.11\bar{6}$$

$\widehat{x}_2 \rightarrow$ (3.c):

$$11\widehat{x}_1 + 31.75 = 0.95 \Rightarrow \widehat{x}_1 = -2.8$$

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} -2.8 \\ -2.11\bar{6} \end{bmatrix}$$

e.

$$x - \widehat{x} = \begin{bmatrix} -1.2 \\ -0.88\bar{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\|x - \widehat{x}\|}{\|x\|} = 0.3$$

$$b - \widehat{b} = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.1 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\|b - \widehat{b}\|}{\|b\|} = 0.05$$

Çözümdeki hata veridekinin 6 katı kadardır.

f.

Jacobi yöntemi için:

$$N = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 42 \end{bmatrix}, \; P = N - A = \begin{bmatrix} 0 & 15 \\ 31 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 1/11 & 0 \\ 0 & 1/42 \end{bmatrix} \Rightarrow M = N^{-1}P = \begin{bmatrix} 0 & 15/11 \\ 31/42 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|M\| = \max_{\forall i} \sum_{\forall j} |m_{ij}|$$

$$\Rightarrow \|M\| = \frac{15}{11} > 1 \rightarrow \text{ıraksar}$$

Gauss-Seidel yöntemi için:

$$N = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ -31 & 42 \end{bmatrix}, \; P = N - A = \begin{bmatrix} 0 & 15 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \frac{1}{11 \times 42} \begin{bmatrix} 42 & 0 \\ 31 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/11 & 0 \\ 31/462 & 1/42 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M = N^{-1}P = \begin{bmatrix} 0 & 15/11 \\ 0 & 465/462 \end{bmatrix}$$

$$\|M\| = \max_{\forall i} \sum_{\forall j} |m_{ij}|$$

$$\Rightarrow \|M\| = \frac{15}{11} > 1 \rightarrow \text{ıraksar}$$