Otomatik Kontrol Sistemleri

Transfer Fonksiyonları

ve

Durum Uzayı Gösterilimi

(M. Turan Söylemez)

Transfer Fonksiyonu Kavramı

Çoğu zaman sistemin girişi ile çıkışı arasındaki bağıntı bir lineer diferansiyel denklem ile ifade edilebilir.

Verilen bir giriş için çıkışın nasıl olacağı bu denklemin çözülmesi ile bulunur.

ANCAK DİFERANSİYEL DENKLEMLERLE UĞRAŞMAK ZORDUR!!!

Transfer Fonksiyonu Kavramı

Bundan dolayı genelde bu denklemler Laplace dönüşümü adı verilen bir dönüşüme tabi tutulur.

Laplace dönüşümü sonucunda sistem girişi ile çıkışı arasındaki bağıntı genelde çok daha basit bir fonksiyonla verilir.

Örneğin

$$F(t) = M\frac{dv(t)}{dt} + Bv(t)$$

$\downarrow$ Laplace dönüşümü

$$F(s) = Msv(s) + Bv(s)$$

$\downarrow$

$$F(s) = (Ms + B)v(s)$$

$\rightarrow$ Transfer fonksiyonu

$$\frac{v(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms + B}$$

Laplace dönüşümünün temeli

Laplace Dönüşümü

$\uparrow$

Fourier Dönüşümü

$\uparrow$

Fourier Serileri

$\uparrow$

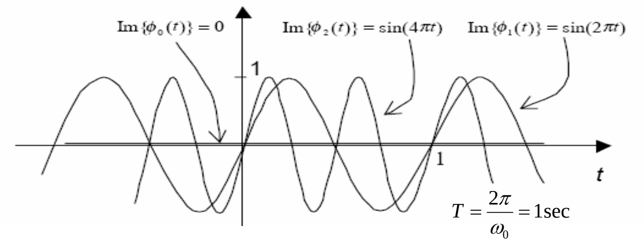
e^{jkwt} fonksiyon ailesinin ortogonal oluşu

Ortogonallik:

$$\phi_k(t) := e^{jk\omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \phi_k(t)\phi_{-m}(t)dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} e^{jk\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} e^{j(m-k)\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{j(m-k)\omega_0}\left[e^{j(m-k)2\pi} - 1\right] = \begin{cases} \frac{2\pi}{\omega_0}, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases}$$



Fourier Serileri

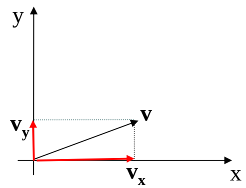
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T})t},$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(\frac{2\pi}{T})t}dt$$

Periodik bir işaretin bir period boyunca aldığı değerleri bilmek veya **Fourier katsayılarını bilmek işareti belirlemek için yeterlidir.**

Yorum:

Bu bir vektörün kartezyen koordinatlarda bileşenlerine ayrıştırılmasına benzetilebilir:

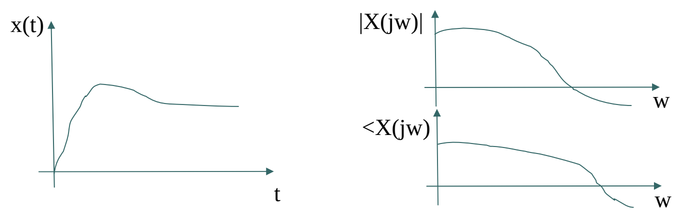


Fourier Transformasyonu

Fourier serilerinin periodu sonsuz olan (yani aperiodik) işaretlere genelleştirilmesi olarak düşünülebilir.

Burada verilen herhangi bir işaret Fourier dönüşümü sonucunda farklı bir uzayda ifade edilebilir:

x(t) <=> X(jw)



Bizim Uğraşacağımız Sistemler

- Transfer fonksiyonu kavramı ancak lineer sistemler için geçerli bir kavramdır. (Lineer diferansiyel denklemler ➔ Lineer sistemler)
- Biz dersimizde daha çok **nedensel**, **zamanla değişmeyen**, **lineer** sistemlerle uğraşacağız.

Nedensel Sistemler

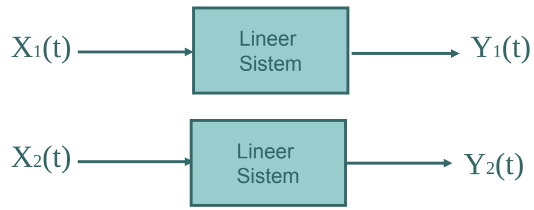
- Çıkışın sadece geçmiş giriş ve çıkışlara ve şu anki girişe bağımlı olduğu sistemlere *nedensel sistemler* denir.
- Gelecekteki giriş tahmin edilemez.
- Pratikte kullanılan tüm sistemler bu türdendir.

Zamanla Değişmeyen Sistemler

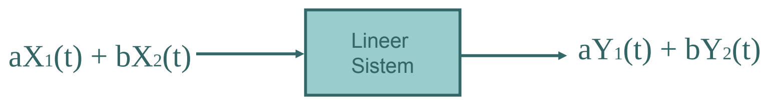
- Eğer sistem parametreleri zamanın bir fonksiyonu değilse, bir başka deyişle, ötelenmiş bir giriş, ötelenmiş bir çıkış üretiyorsa bu tür sistemlere *zamanla değişmeyen sistemler* denir.

Lineer Sistemler

- Süperpozisyon ilkesine uyan sistemlere denir.
- Başlangıçtaki sistemim :



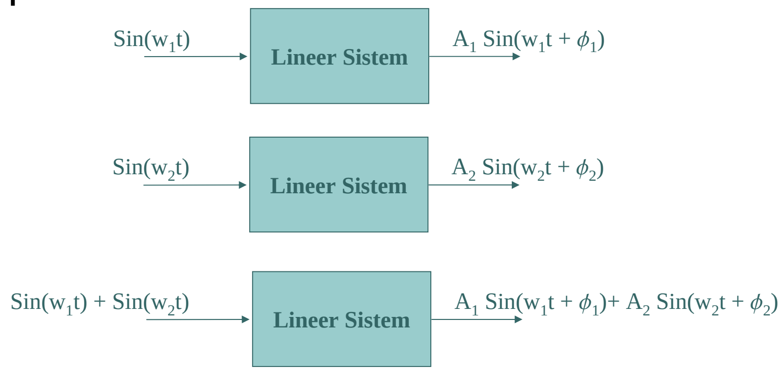
- Sistemin girişi : Sistemin çıkışı:



Lineer sistemlerin özfonksiyonları

- e^{-st} şeklindeki fonksiyonlar bir lineer sistemin girişine uygulandığında sadece genlik ve faz değiştirirler.

Lineer sistemler:



Öyleyse belirli frekans bölgelerinde sistem davranışı sistemin Fourier Transformasyonunun o frekans bölgesindeki şekli ile belirlenir.

Impuls fonksiyonu

- Impuls fonksiyonu tüm frekans bileşenlerini içerir:

$$\delta(t) \Leftrightarrow \delta(jw) = 1$$

Demek ki lineer bir sistemin impuls impuls cevabı sistem hakkında her türlü bilgiyi içerir.

Transfer Fonksiyonu Kavramı

Arabadaki hız kontrolüne benzer şekilde RC devresine ilişkin transfer fonksiyonun

$$\frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1}{RCs+1}$$

ve sıvı tankına ilişkin transfer fonksiyonun

$$\frac{h(s)}{q_i(s)} = \frac{R}{ARs+1}$$

paydanın derecesi 1.

olduğu gösterilebilir.

Bunlar bizim için birinci dereceden transfer fonksiyonlarıdır.

Transfer Fonksiyonu Kavramı

Pratikte transfer fonksiyonu 2. yada daha yüksek dereceden olan sistemlerle karşılaşmak mümkündür.

Örneğin 2. dereceden bir transfer fonksiyonu

$$\frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

paydanın derecesi 2.

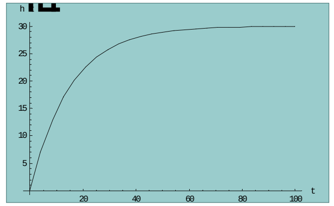
şeklinde olabilir.

Püf Noktası

Transfer fonksiyonlarına bakarak sistemlerin bir takım önemli özellikleri anlaşılabilir.

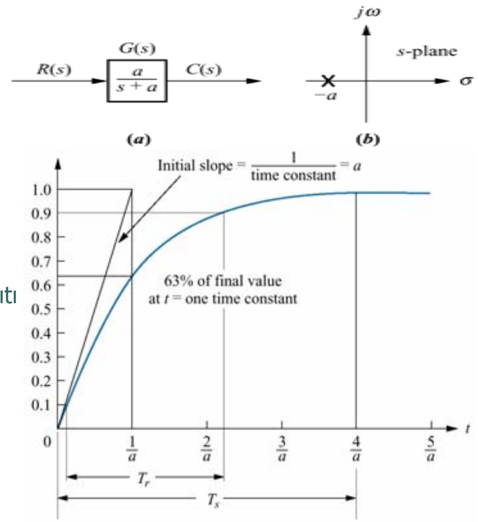
Sistem kararlı mıdır?
Ne kadar hızlıdır?
vbg.

Örneğin 1. dereceden kararlı transfer fonksiyonuna sahip sistemlere sabit bir giriş uygulandığında çıkış şuna benzer şekilde olur:

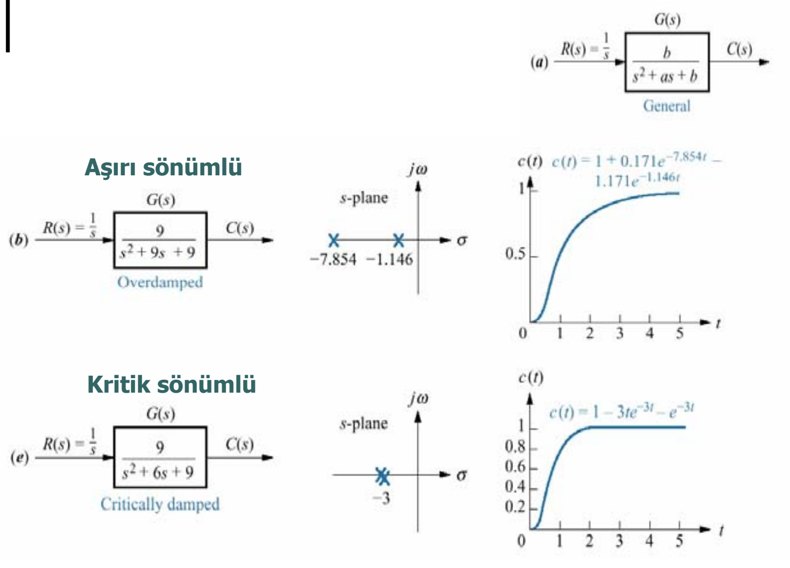


Birinci dereceden sistemler

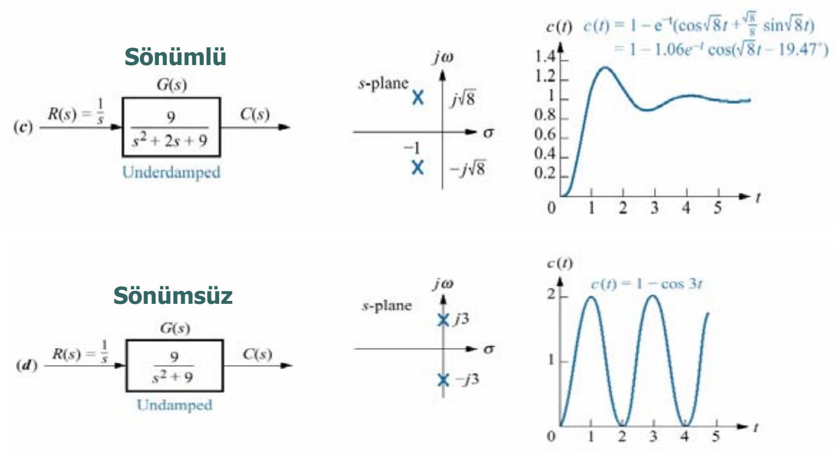
Birim basamak yanıtı



2. Dereceden sistemler



2. Dereceden sistemler



Durum Uzayı Gösterilimi

Bazen sistemlerin çıkış ve girişi arasındaki bağıntının yanı sıra iç dinamiklerine ilişkin bağıntılarında kullanılması gerekir.

Böyle durumlarda transfer fonksiyonunun bulunması yeterli olmayacaktır.

Sistemin iç dinamiklerini göstermenin bir yoluda sistemin durum denklemlerini yazmaktır.

Durum Uzayı Gösterilimi

Durum denklemleri birinci mertebeden bir diferansiyel denklem takımıdır.

Örneğin:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 u$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 u$$

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + d_1 u$$

Durum değişkenleri

Giriş işareti

Çıkış işareti

Sabırla dinlediğiniz için

TEŞEKKÜR EDERİM!