



Otomatik Kontrol Sistemleri

Hafta 6

Doç. Dr. Volkan Sezer

Kararlılık Analizi

Kararlılık, en önemli sistem özelliğidir.

Bir sistem kararsızsa, geçici hal davranışı ve sürekli hatasından bahsedilemez.

Bir sistemin cevabı, zorlanmış ve doğal (tabi) çözümden oluşmaktadır.

$$C(t) = C_{zorlanmış}(t) + C_{doğal}(t)$$

Bir sistemin doğal cevabına göre aşağıdaki kararlılık tanımları yapılabilir.

- $t \rightarrow \infty$ iken sifıra yakınsıyorsa, Sistem KARARLI
- $t \rightarrow \infty$ iken sonsuza yakınsıyorsa, Sistem KARARSIZ
- $t \rightarrow \infty$ iken değişmiyorsa, Sistem MARJİNAL KARARLI

Alternatif olarak, toplam cevaba bakarak da aşağıdaki kararlılık tanımlarını yapmak mümkündür.

- Her sınırlı girişe karşılık sınırlı bir çıkış veriyorsa , sınırlı giriş-sınırlı çıkış (BIBO) anlamında kararlıdır.
- Herhangi bir sınırlı giriş sınırsız çıkış veriyorsa , sistem BIBO anlamında kararsızdır.

Kutupların Yerleriyle Kararlılık İlişkisi

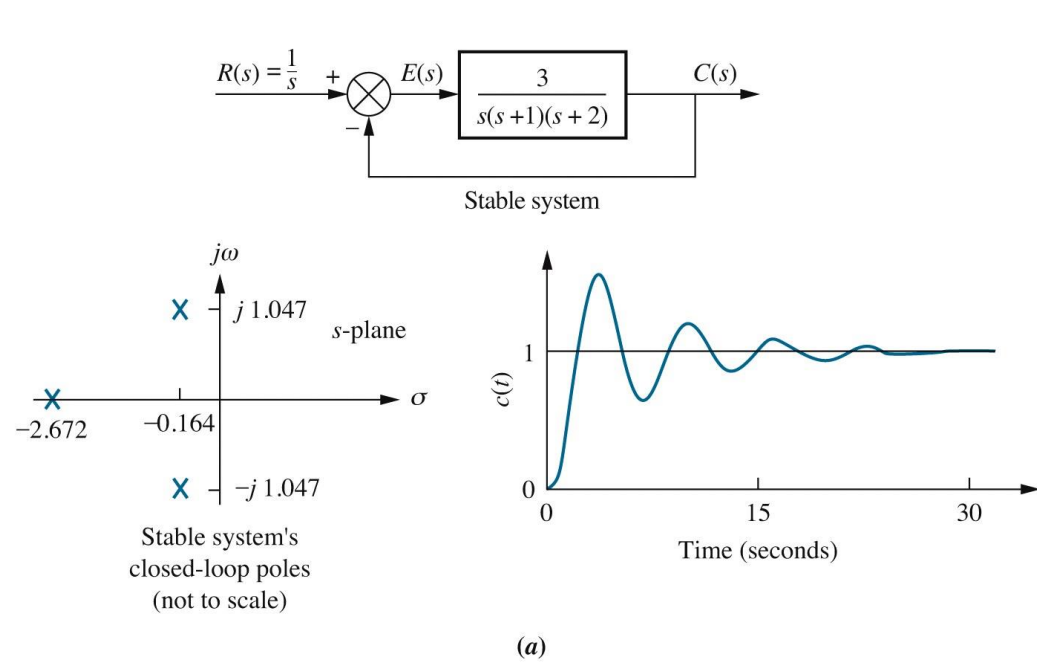


Figure 6.1a
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

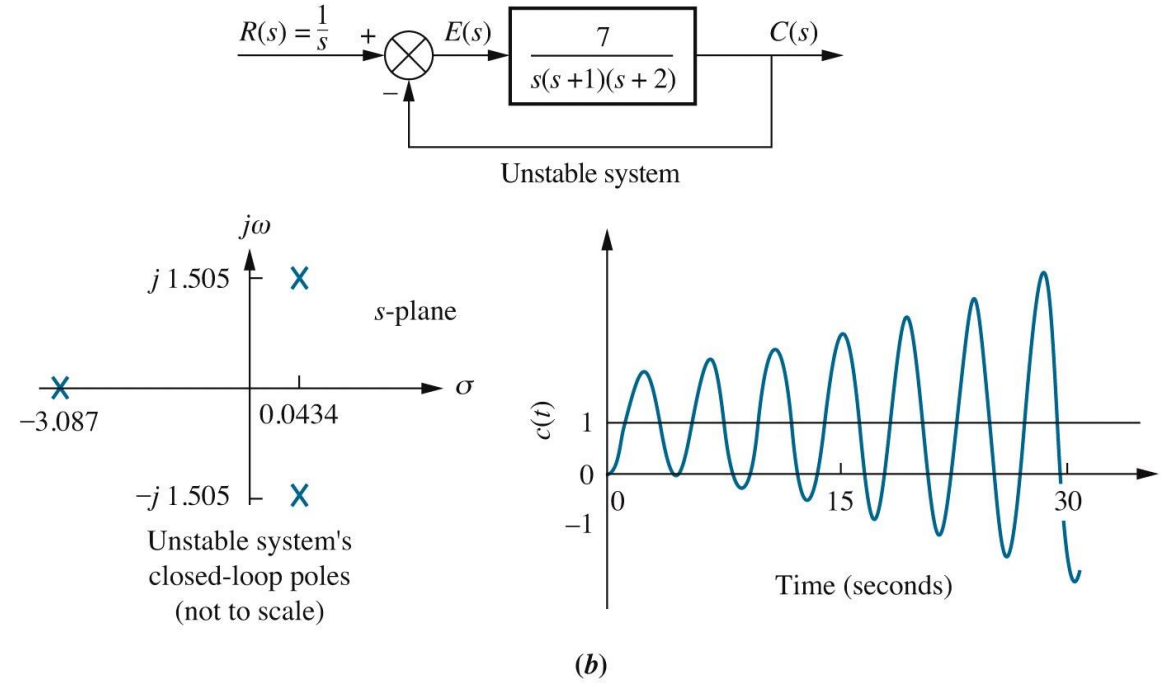
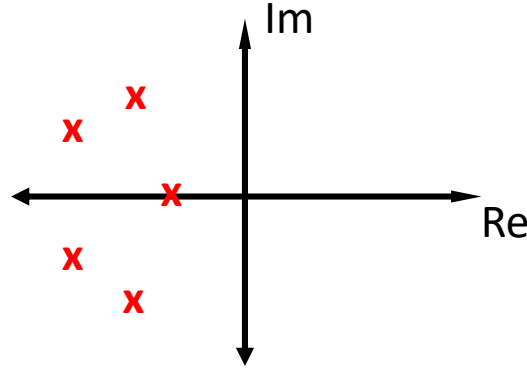


Figure 6.1b
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

Kutupların Yerleriyle Kararlılık İlişkisi

- Bir sistemin kararlılığı, kutupların yerlerine göre belirlenebilir.

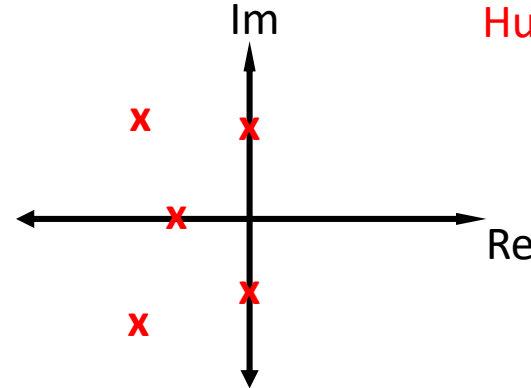
Kutuplar sol yarı düzlemdeyse sistem kararlı.



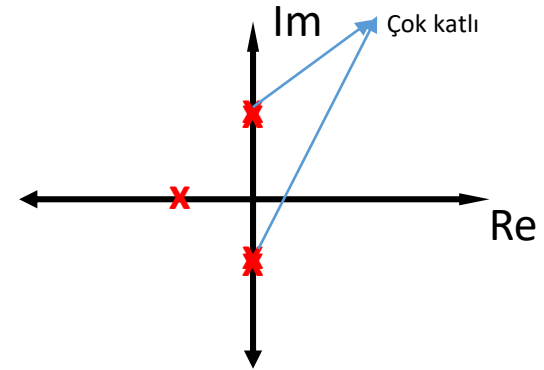
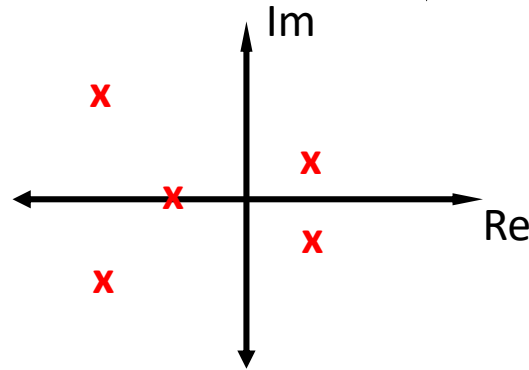
Bir sistemin transfer fonksiyonunun paydasının köklerini bulmak, yüksek dereceli sistemler için kolay değildir!

Bu nedenle kararlılık analizi için Routh Hurwitz kriterleri uygulanır!

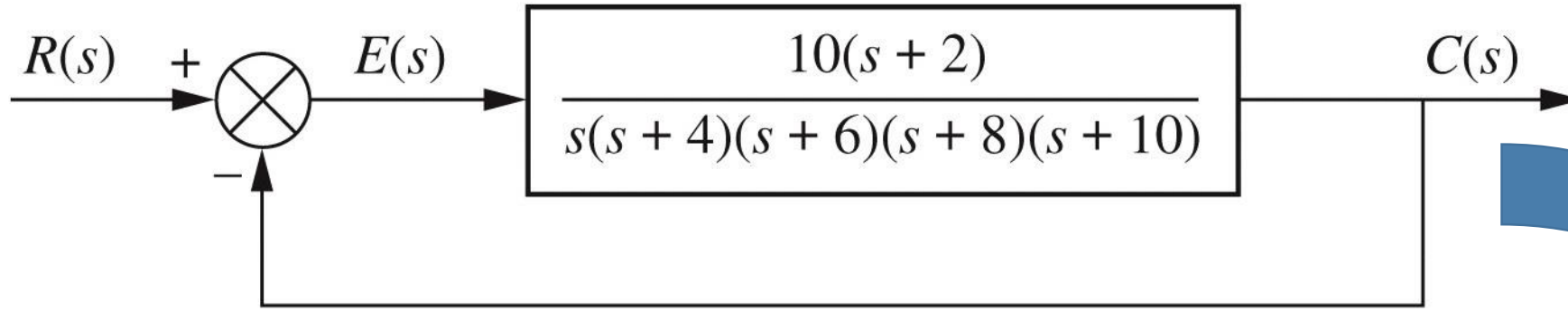
Kutuplar sol yarı düzlemdeyse ve imajiner ekseninde tek katlı kutup varsa sistem marjinal kararlı.



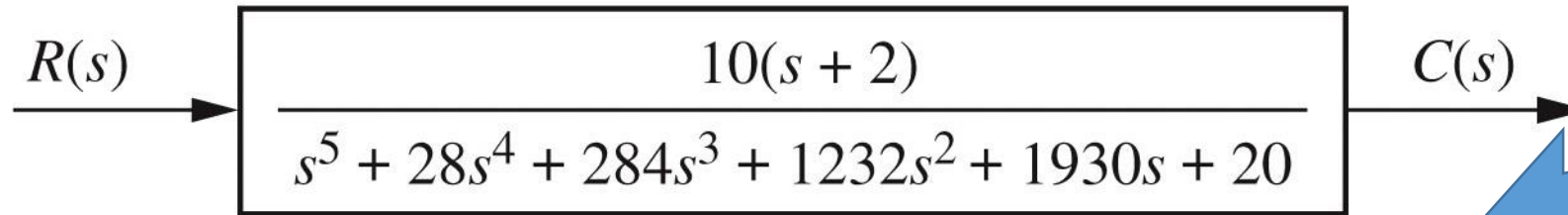
En az 1 kutup sağ yarı düzlemdeyse veya imajiner ekseninde katlı kutup varsa, sistem kararsız.



Kutupların Yerleriyle Kararlılık İlişkisi



(a)



(b)

Kapalı çevrim transfer fonksiyonu kararlı mıdır?

Routh-Hurwitz Kriterleri

1) Karakteristik polinom (transfer fonksiyonunun paydası) aşağıdaki gibi yazılır.

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

3) Polinomda s 'nin herhangi bir kuvveti eksikse sistem kararsız veya marjinal kararlıdır.

2) Polinomun bütün katsayıları pozitif olmalıdır. (Hepsi negatifse her taraf -1 ile çarpılıp pozitive dönüştürülür.) Eğer hepsi pozitif değilse sistem kararsızdır. Eğer hepsi pozitifse 3. adıma geçilir.

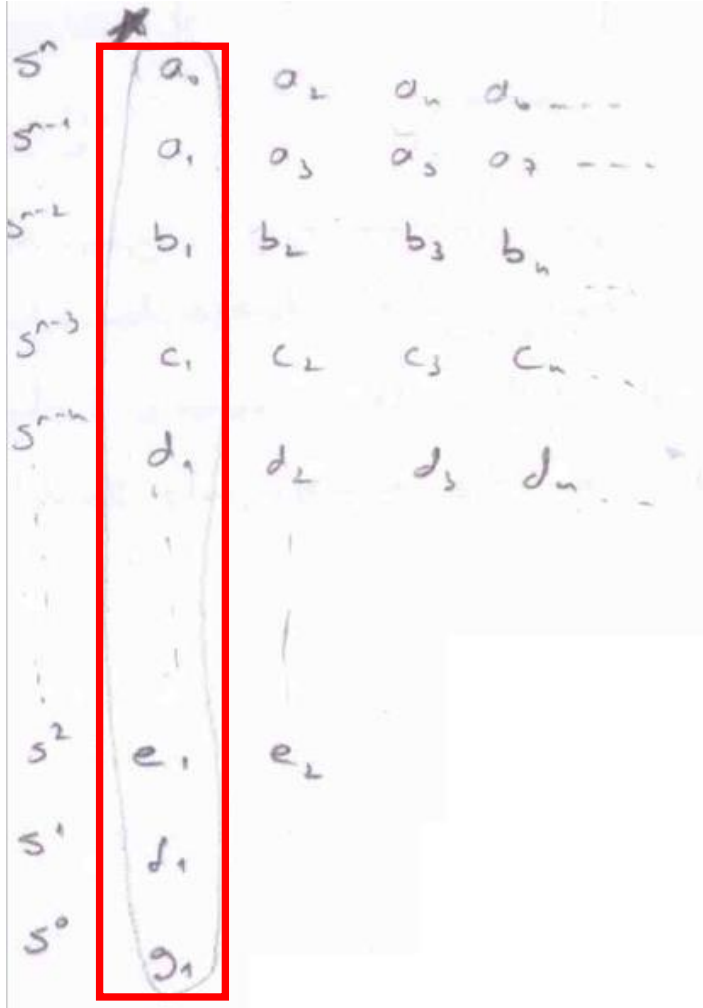
4) Eğer tüm kuvvetler mevcutsa ve tüm katsayılar pozitifse Routh tablosu oluşturulur.

Routh Tablosu

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \quad \dots$$



s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	\dots
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	\dots
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	\dots
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	\dots
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3	d_4	\dots
s^2	e_1	e_2			
s^1	f_1				
s^0	g_1				

1. Sütunda kaç işaret değişikliği varsa, o kadar kutup sağ yarı düzlemde dir!

Örnek

$$T.F. = \frac{4}{s^3 + 6s^2 + 12s + 8}$$

Verilen transfer fonksiyonu kararlı mıdır?

s^3	1	12	0
s^2	6	8	0
s^1	$b_1 = \frac{32}{3}$	$b_2 = 0$	
s^0	$c_1 = 8$		

$$b_1 = \frac{6 \cdot 12 - 8 \cdot 1}{6} = \frac{32}{3}$$

$$b_2 = \frac{6 \cdot 0 - 1 \cdot 0}{6}$$

$$c_1 = \frac{\frac{32}{3} \cdot 8 - 6 \cdot 0}{\frac{32}{3}} = 8$$

İşaret değişimi yok, sistem kararlı.

$$((s+2)^3 = 0, s_{1,2,3} = -2,)$$

heri s'den

Örnek

$$TF = \frac{7}{2s^3 + 4s^2 + 4s + 12}$$

Verilen transfer fonksiyonu kararlı mıdır?

s^3	2	4	0
s^2	4	12	0
s^1	$b_1 = -2$	$b_2 = 0$	
s^0	$c_1 = 12$		

$$b_1 = \frac{4 \cdot 4 - 2 \cdot 12}{4} = -2$$

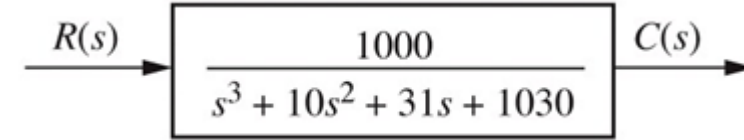
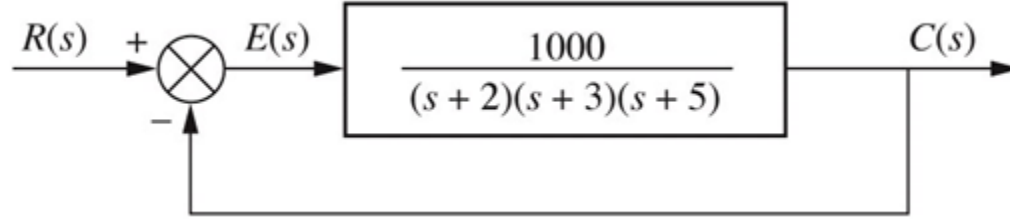
$$b_2 = \frac{4 \cdot 0 - 2 \cdot 0}{4} = 0$$

$$c_1 = \frac{-2 \cdot 12 - 4 \cdot 0}{-2} = 12$$

2 kez işaret değiştirmiş, kararsız!

2 kutup sağ yarı düzlemde,
1 kutup sol yarı düzlemde

Örnek



Kapalı çevrim sisteme ait transfer fonksiyonu kararlı mıdır?

TABLE 6.3 Completed Routh table for Example 6.1

s^3	1	31	0
s^2	1030	103	0
s^1	$-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 31 \\ 1 & 1030 \end{vmatrix}}{1} = -72$	$-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0$	$-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0$
s^0	$-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 103 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 103$	$-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 0$	$-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 0$

2 kez işaret değiştirmiş, kararsız!

2 kutup sağ yarı düzlemde,
1 kutup sol yarı düzlemde

Özel Durumlar-1

Herhangi bir satırın ilk elemanı '0' çıkarsa ve satırda 0'dan farklı eleman(lar) varsa, satırın ilk elemanı yerine çok küçük pozitif bir değer olarak ' ϵ ' yerleştirerek işlemlere devam edilir.

Özel Durumlar-1 Örnek

Herhangi bir satırın ilk elemanı '0' çıkarsa ve satırda 0'dan farklı eleman(lar) varsa, satırın ilk elemanı yerine çok küçük pozitif bir değer olarak 'ε' yerleştirerek işlemlere devam edilir.

$$TF = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$$

Verilen transfer fonksiyonu kararlı mıdır?

+	s^5	1	3	5
+	s^4	2	6	3
+	s^3			
-	s^2			
+	s^1			
+	s^0			

$$b_1 = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 6}{2} = 0 \quad b_2 = \frac{2 \cdot 5 - 1 \cdot 3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$b_3 = \frac{2 \cdot 0 - 1 \cdot 0}{2} = 0$$

$$c_1 = \frac{\epsilon \cdot 6 - 2 \cdot \frac{7}{2}}{\epsilon} = \frac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$$

$$c_2 = \frac{\epsilon \cdot 3 - 2 \cdot 0}{\epsilon} = 3$$

$$c_3 = \frac{\epsilon \cdot 0 - 2 \cdot 0}{\epsilon} = 0$$

$$d_1 = \frac{\frac{6\epsilon - 7}{\epsilon} \cdot \frac{7}{2} - \epsilon \cdot 3}{\frac{6\epsilon - 7}{\epsilon}} = \frac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$$

$$d_2 = \frac{c_1 \cdot b_3 - b_1 \cdot c_3}{-c_1} = 0$$

$$e_1 = \frac{d_1 \cdot 3 - c_1 \cdot 0}{d_1} = 3$$

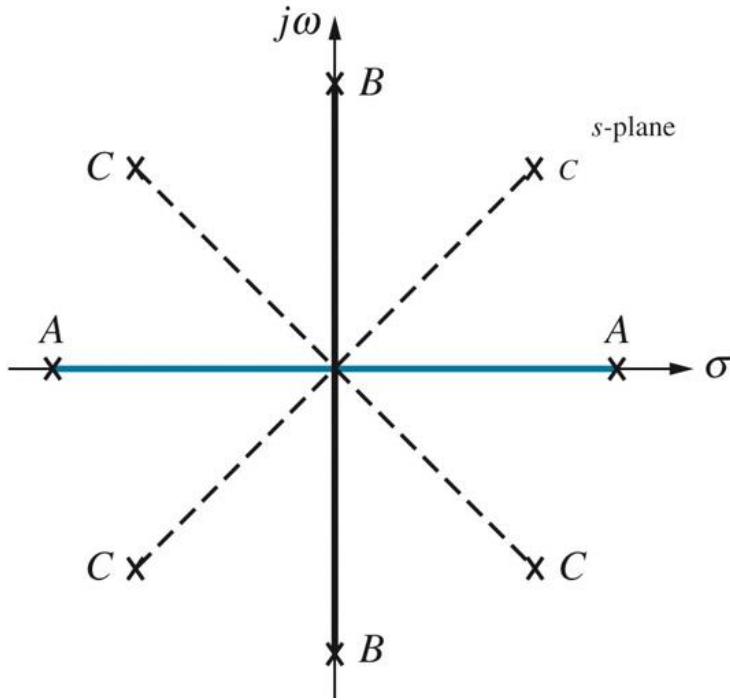
2 kez işaret değiştirmiş, kararsız!

2 kutup sağ yarı düzlemde,
3 kutup sol yarı düzlemde

Özel Durumlar-2

Eğer bir satırın tüm elemanları '0' çıkarsa, bir üst satırdan yardımcı polinom alınır. Yardımcı polinomun türevinin katsayıları kullanılır.

Yardımcı polinomdan gelecek kökler, orijine göre simetrik olmalıdır.



- Bu özellik göz önüne alınarak yardımcı polinomdan gelecek köklerin imajiner eksenin neresinde olduğu anlaşılabilir.
- (Yardımcı polinomun kökleri, transfer fonksiyonunun köklerinin bir kısmıdır)
- Routh tablosunda yardımcı polinomun altında kalan sütun üzerinde işaret değişimi yoksa, köklerin tamamı $j\omega$ eksenı üzerindedir. İşaret değişimi kadar kutup sağ yarı düzlemde, geri kalanı $j\omega$ eksenı üzerindedir.

Özel Durumlar-2 Örnek

$$TF = \frac{s+1}{s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 + 25s + 50}$$

Verilen transfer fonksiyonu kararlı mıdır?

$$b_1 = \frac{2 \cdot 24 - 1 \cdot 48}{2} = 0 \quad b_2 = \frac{2 \cdot 25 - 1 \cdot 50}{2} = 0 \quad b_3 = \frac{2 \cdot 0 - 1 \cdot 0}{2} = 0$$

$$2s^4 + 48s^2 + 50 = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Rarr} \\ 8s^3 + 25 = 0 \end{array} \right)$$

Her 3 eleman "0", 0 ne demekdir
2. soldan yardımcı polinom alalım.

$$c_1 = \frac{8 \cdot 48 - 2 \cdot 24}{8} = 24$$

$$c_2 = \frac{8 \cdot 50 - 2 \cdot 0}{8} = +50$$

$$c_3 = \frac{8 \cdot 0 - 2 \cdot 0}{8} = 0$$

$$d_1 = \frac{24 \cdot 24 - 8 \cdot 50}{24} = \frac{238}{3}$$

$$d_2 = \frac{24 \cdot 0 - 8 \cdot 0}{24} = 0$$

$$e_1 = \frac{\frac{238}{3} \cdot 50 - 24 \cdot 0}{\frac{238}{3}} = +50$$

s^5	1	24	+25	0
s^4	2	48	+50	0
s^3	$b_1 = 0 = 8$	$b_2 = 0 = 24$	$b_3 = 0$	
s^2	$c_1 = 24$	$c_2 = +50$	$c_3 = 0$	
s^1	$d_1 = \frac{238}{3}$	$d_2 = 0$		
s^0	$e_1 = +50$			

Özel Durumlar-2 Örnek

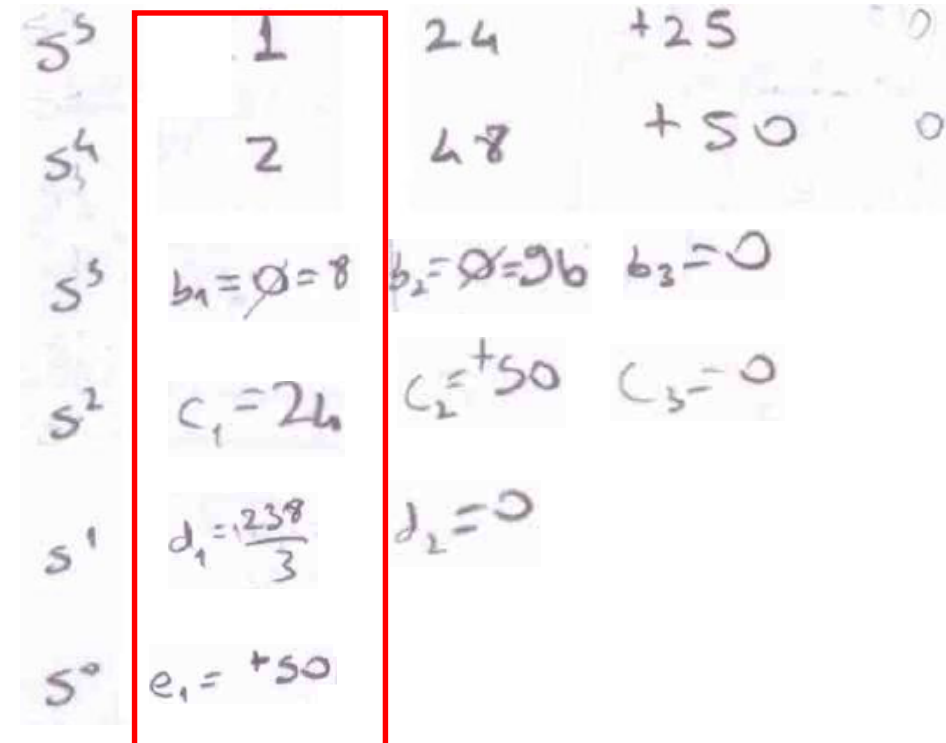
$$TF = \frac{s+1}{s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 + 25s + 50}$$

Verilen transfer fonksiyonu kararlı mıdır?

Yardımcı Polinomdan En Aşağıya Kadar	Önceki Kısım	Toplam
İşaret değişimi yok. O halde sağda kutup yok. Sağda yoksa solda da yok. (Simetri özelliği) O halde jw eksenı üzerinde 4 kutup var.	İşaret değişimi yok, O halde solda 1 kutup var.	1 kutup sol yarı düzlemde. 4 kutup jw eksenı üzerinde.

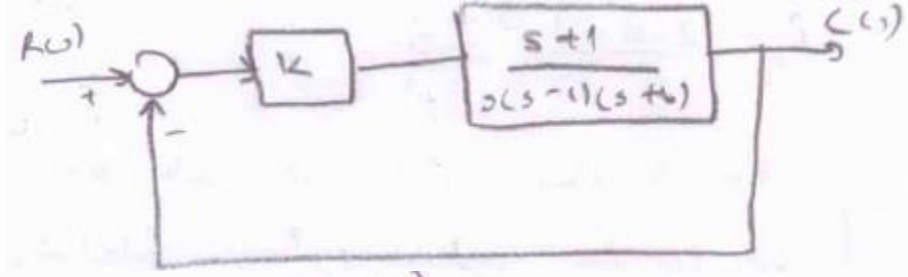
Yardımcı polinomun katlı kutunun olmadığı açıktır. Bu nedenle mevcut sistem 'marjinal kararlıdır'.

Katlı kök olması için $(s^2 + a)^2 = s^4 + 2as^2 + a^2$
Formatında olmalıdır. $2s^4 + 48s^2 + 50 = 0$ buna uymuyor.



Routh-Hurwitz Yardımıyla Kararlı sistem Tasarımı

Örnek 1



Şekildeki kapalı çevrim sistemi kararlı yapacak K'yı tasarlayınız.

$$K_{gk} \text{ için T.F} = \frac{K \cdot (s+1)}{s(s-1)(s+6)}$$

$$\frac{K(s+1)}{s(s-1)(s+6)} + 1$$

$$= \frac{K(s+1)}{K(s+1) + s(s-1)(s+6)} = \frac{K(s+1)}{Ks + K + s^3 + ss^2 - 6s}$$

$$= \frac{K(s+1)}{s^3 + ss^2 + s(K-6) + K}$$

kararlı dallar

$$s^3 + ss^2 + s(K-6) + K$$

s^3	1	$K-6$	0
s^2	5	K	0
s^1	$b_1 = \frac{4K-30}{5}$	$b_2 = 0$	
s^0	$c_1 = K$		

$$b_1 = \frac{5(K-6) - 1 \cdot K}{5} = \frac{4K-30}{5}$$

$$b_2 = \frac{5 \cdot 0 - 1 \cdot 0}{5} = 0$$

$$c_1 = \frac{\frac{4K-30}{5} \cdot K - 5 \cdot 0}{\frac{4K-30}{5} \cdot 0} = K$$

$$K-6 > 0$$

$$K > 6$$

$$K > 0$$

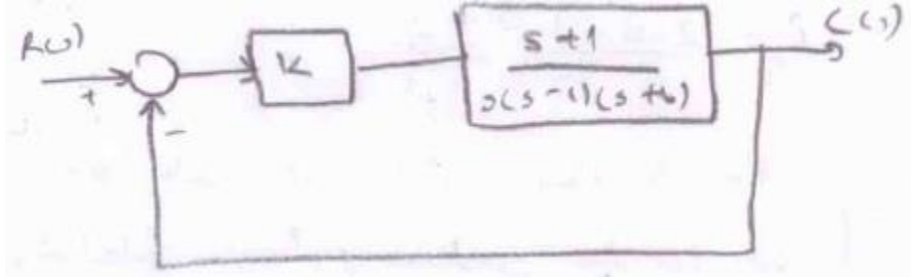
$$\frac{4K-30}{5} > 0 \Rightarrow 4K > 30 \Rightarrow K > 7.5$$

$$K > 0$$

Sonuç: $K > 7.5$ aralığı, Kapalı Çevrim Sistemi Kararlı Kılar
 $K=7.5$ durumunu ayrıca incelemeliyiz

Routh-Hurwitz Yardımıyla Kararlı sistem Tasarımı

Örnek 1



Şekildeki kapalı çevrim sistemi kararlı yapacak K'yı tasarlayınız.

$$s^3 + s^2 + s(K-6) + K$$

$$K=7.5$$

s^3	1	1.5	0
s^2	5	7.5	0
s^1	0	10	
s^0	7.5		

$$b_1 = \frac{5 \cdot 1 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 5}{5} = 0$$

Tüm satır '0' oldu. Yardımcı polinom kullanalım

$$5s^2 + 7.5s = 0$$

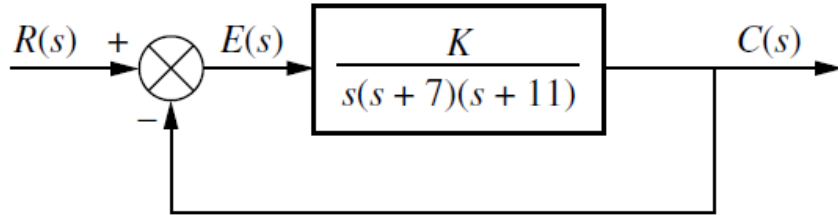
$$\left(\begin{array}{l} \text{Türev} \\ \rightarrow 10s = 0 \end{array} \right)$$

Yardımcı Polinom	Önceki Kısım	Toplam
İşaret değişimi yok. Sağda kutup yok. Sağda yoksa, solda da yok (simetri kuralı) 2 kutup jw eksenı üzerinde	1 kutup sol yarı düzlemde	1 kutup sol yarı düzlemde 2 kutup jw eksenı üzerinde

Sonuç: Kapalı çevrim sistem, $K > 7.5$ için kararlı. $K = 7.5$ için marjinal kararlıdır!

Routh-Hurwitz Yardımıyla Kararlı sistem Tasarımı

Örnek 2



Şekildeki kapalı çevrim sistemi kararlı yapacak K'yı tasarlayınız.

$$K_{ol} \text{ sistemin T.F.} = \frac{K}{s(s+7)(s+11)} = \frac{K}{K + s(s+7)(s+11)}$$

$$= \frac{K}{s^3 + 18s^2 + 77s + K}$$

$$s^3 + 18s^2 + 77s + K$$

s^3	1	77	0
s^2	18	K	0
s^1	$b_1 = \frac{1386 - K}{18}$	$b_2 = 0$	
s^0	$c_1 = K$		

$$b_1 = \frac{18 \cdot 77 - 1 \cdot K}{18} = \frac{1386 - K}{18}$$

$$b_2 = \frac{18 \cdot 0 - 1 \cdot 0}{18} = 0$$

$$K > 0$$

$$K > 0$$

$$c_1 = \frac{\frac{1386 - K}{18} \cdot K - 18 \cdot 0}{\frac{1386 - K}{18}} = K$$

$$b_1 = \frac{1386 - K}{18} > 0 \quad 1386 - K > 0$$

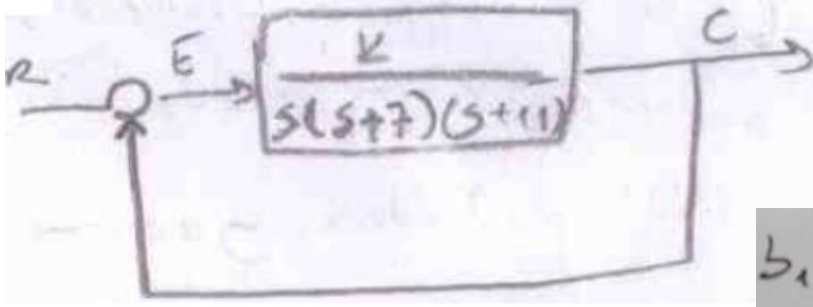
$$K < 1386$$

Sonuç: $0 < K < 1386$ aralığı, Kapalı Çevrim Sistemi Kararlı Kılar

$K = 1386$ durumunu ayrıca incelemeliyiz

Routh-Hurwitz Yardımıyla Kararlı sistem Tasarımı

Örnek 2



Şekildeki kapalı çevrim sistemi kararlı yapacak K'yı tasarlayınız.

$$b_1 = \frac{18 \cdot 77 - 1386 \cdot 1}{18} = 0$$

Tüm satır '0' oldu. Yardımcı polinom kullanalım

$$\text{Yardımcı Polinom} \quad \begin{cases} 18s^2 + 1386 = 0 \\ 36s = 0 \end{cases}$$

$$K = 1386$$

s^3	1	77	0
s^2	18	1386	0
s^1	0 36		
s^0	1386		

Yardımcı Polinom	Önceki Kısım	Toplam
İşaret değişimi yok. Sağda kutup yok. Sağda yoksa, solda da yok (simetri kuralı) 2 kutup jw eksenı üzerinde	İşaret değışimi yok 1 kutup sol yarı düzlemde	1 kutup sol yarı düzlemde 2 kutup jw eksenı üzerinde

Sonuç: Kapalı çevrim sistem, $0 < K < 1386$ için kararlı. $K = 1386$ için marjinal kararlıdır!