

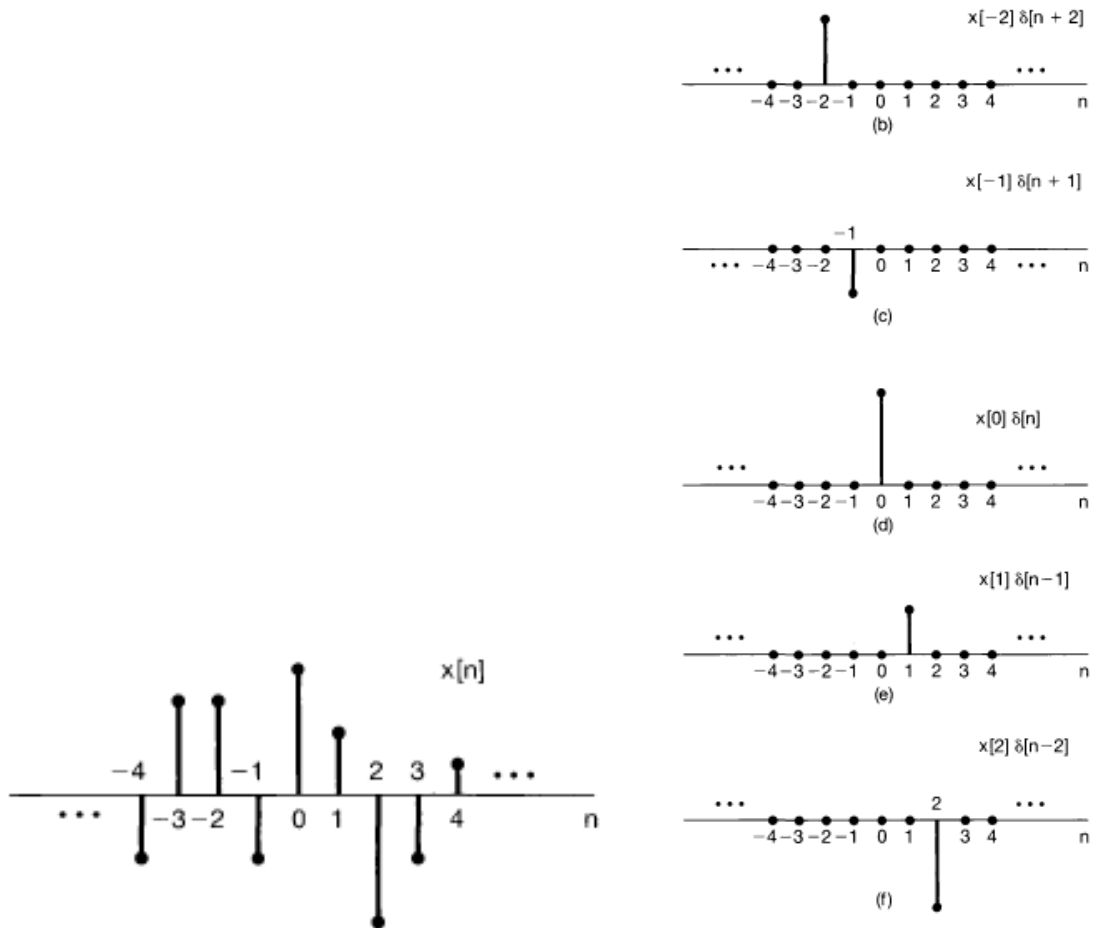
## LZD sistemlerin Zaman domeni analizi-Konvolüsyon toplamı/integrali

### (Time domain analysis of LTI systems)

*Ayrık zamanlı işaretlerin ötelenmiş impulsların ağırlıklı toplamı cinsinden gösterilmesi*

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n - k].$$

$$x[n] = \dots + x[-3] \delta[n + 3] + x[-2] \delta[n + 2] + x[-1] \delta[n + 1] + x[0] \delta[n] + x[1] \delta[n - 1] + x[2] \delta[n - 2] + x[3] \delta[n - 3] + \dots$$



### Sistemin cevabı

$$\begin{aligned}y[n] &= \mathbf{T}\{x[n]\} = \mathbf{T}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]\right\} \\&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \mathbf{T}\{\delta[n-k]\}\end{aligned}$$

$$h[n-k] = \mathbf{T}\{\delta[n-k]\}$$

**Konvolüsyon toplamı (convolution sum)**

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k].$$

### Konvolüsyonun grafiksel olarak hesabı

**1. İmpuls işareti zamanda katlanarak**  
 $h[-k]$

**oluşturulur.**

**2. Verilen n anındaki çıkışı hesaplamak için**

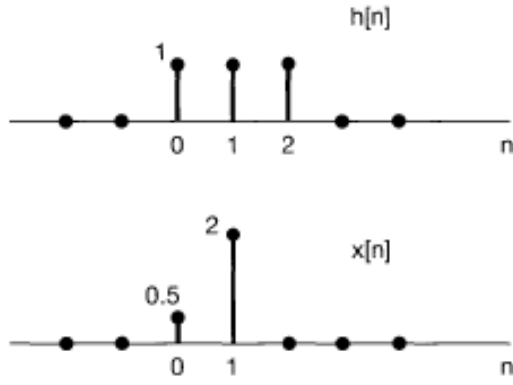
$$h[n-k]:$$

**oluşturulur.**

**3.  $x[k]h[n-k]$**   
**çarpımı yapılarak, tüm k değerleri toplam alınıp, n anı için çıkış**  
**işaretinin değeri bulunur.**

**4. 2-3 adımları  $-\infty < n < \infty$  aralığı için tekrarlanarak çıkış işareti  $y[n]$**   
**bulunur.**

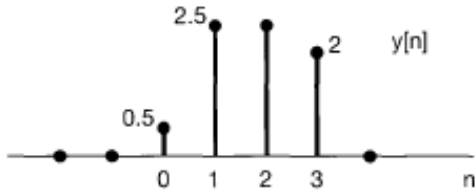
### Örnek:



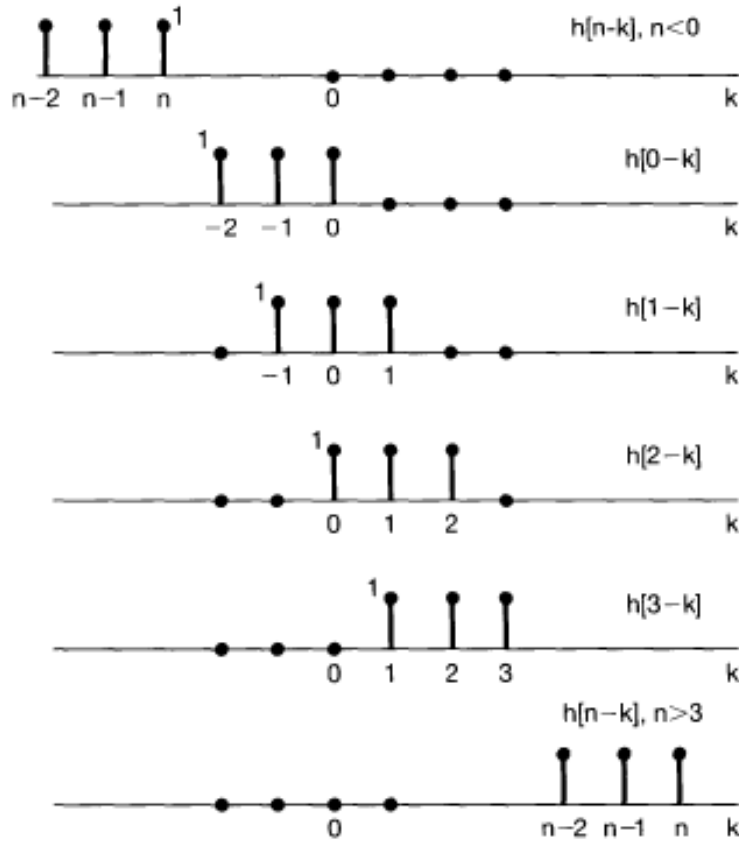
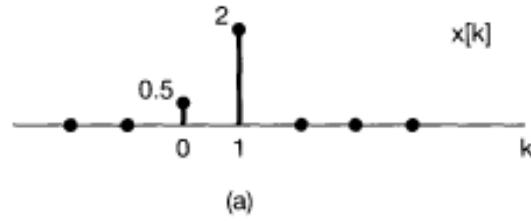
Şeklinde verilen 2 işaretin konvolüsyonunu alalım.

#### 1. Çözüm (LZD sistem özelliklerinden yararlanarak)

$$y[n] = x[0]h[n - 0] + x[1]h[n - 1] = 0.5h[n] + 2h[n - 1].$$



#### 2. Çözüm konvolüsyon toplamından yararlanarak



Çıkış işareti

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k] = 0.5.$$

$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k] = 0.5 + 2.0 = 2.5.$$

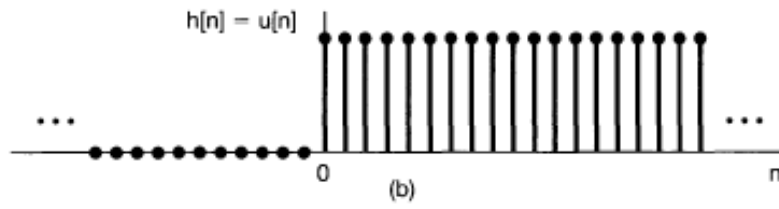
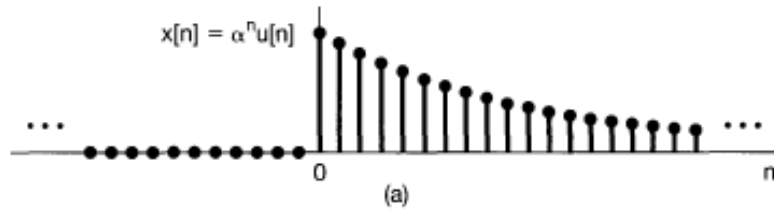
$$y[2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[2-k] = 0.5 + 2.0 = 2.5,$$

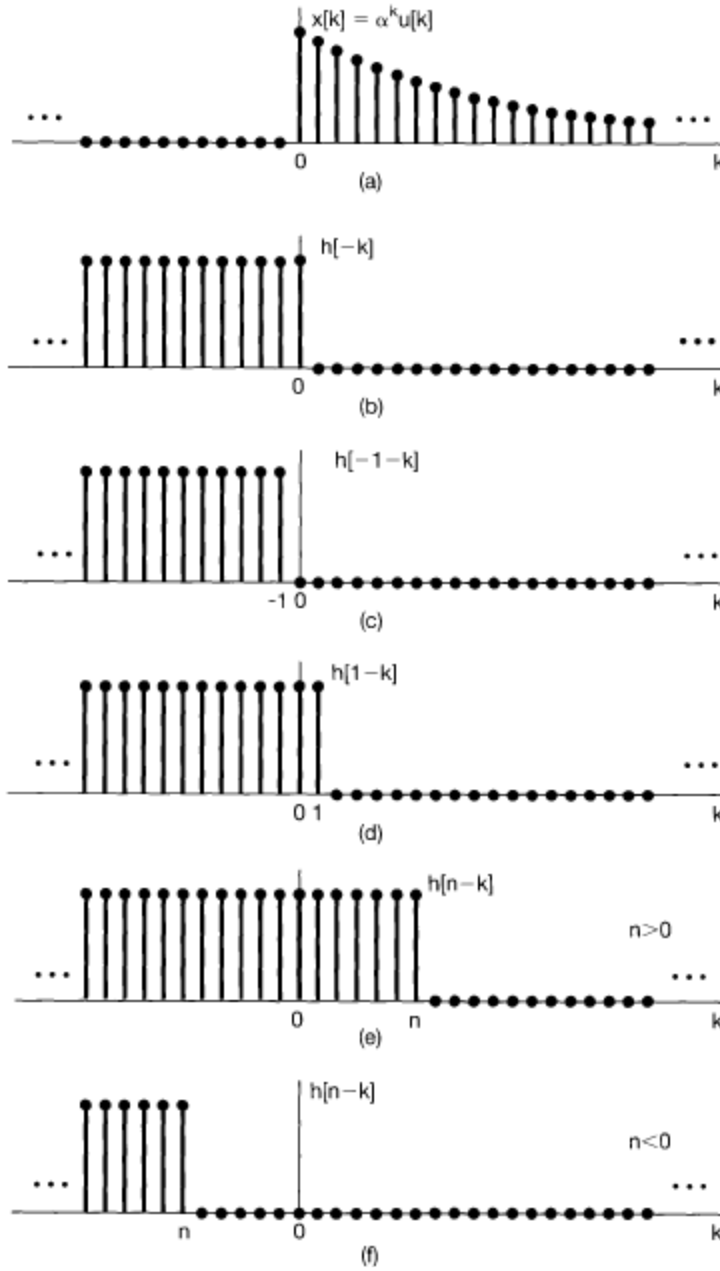
$$y[3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[3-k] = 2.0.$$

## Örnek:

$$x[n] = \alpha^n u[n],$$

$$h[n] = u[n],$$





$$y[n] = 0, n < 0.$$

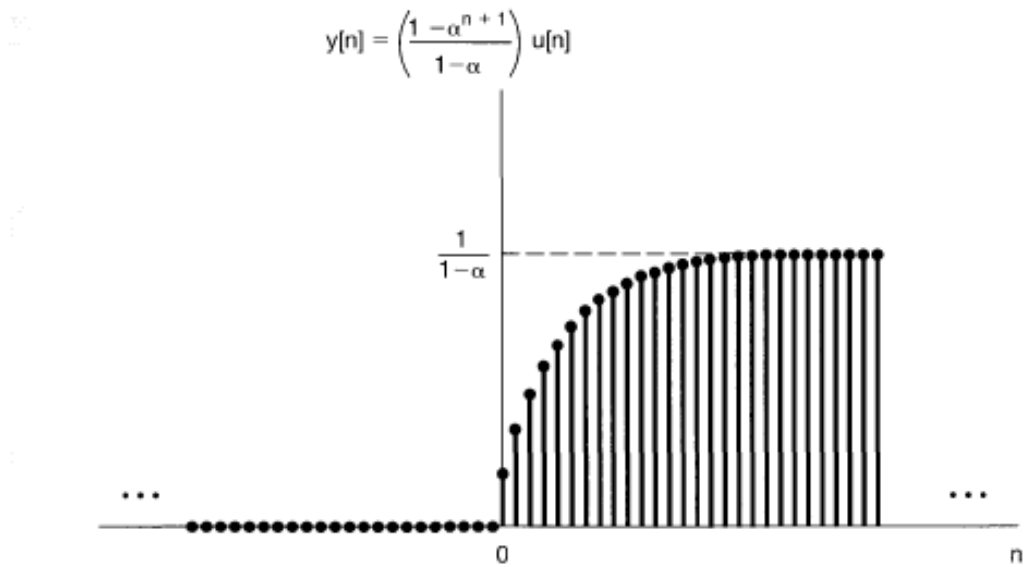
$$n \geq 0,$$

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^k, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^k,$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

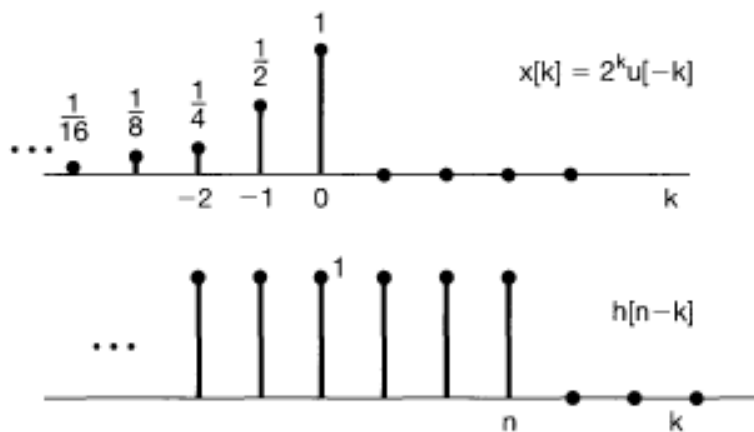
$$y[n] = \left( \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \right) u[n].$$



### Örnek:

$$x[n] = 2^n u[-n],$$

$$h[n] = u[n].$$



$$n \geq 0,$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^0 x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^0 2^k.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}, \quad 0 < |\alpha| < 1.$$

$$r = -k,$$

Değişken dönüşümü yaparak

$$\sum_{k=-\infty}^0 2^k = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^r = \frac{1}{1-(1/2)} = 2.$$

$n < 0$  için

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n 2^k.$$

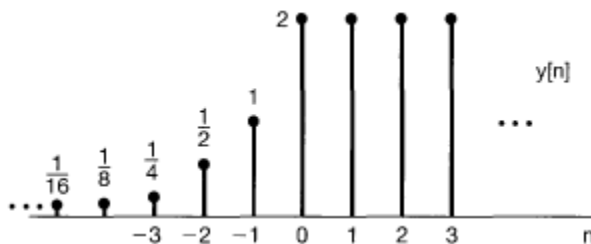
$$l = -k$$

$$m = l + n,$$

Değişken dönüşümlerini yaparak,

Çıkış işareti

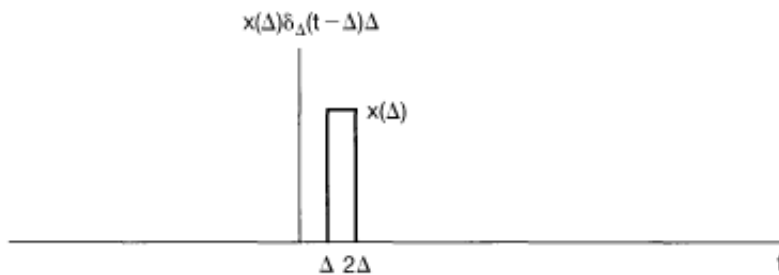
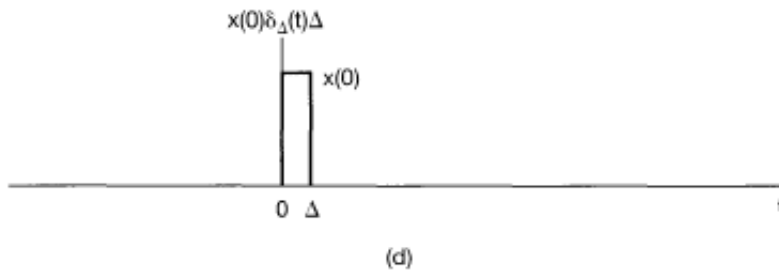
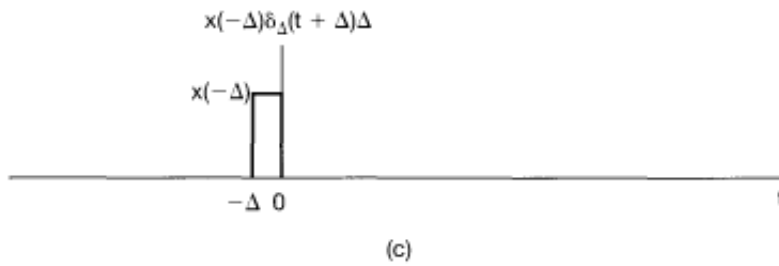
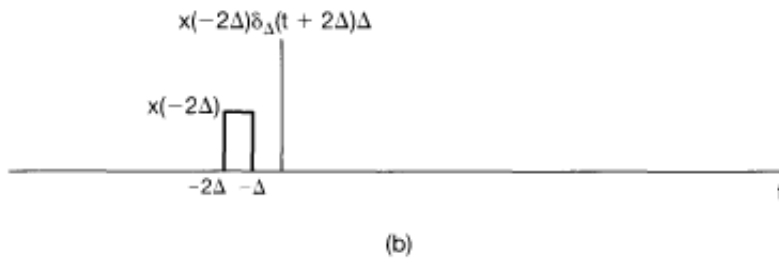
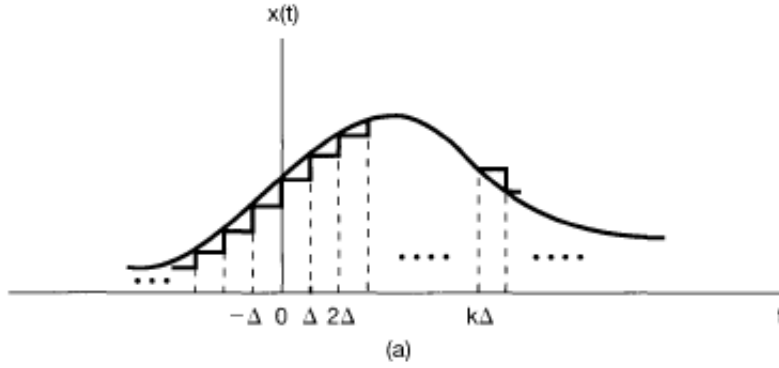
$$y[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^l = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 2^n \cdot 2 = 2^{n+1},$$





## Konvolüsyon integrali (convolution integral)

Sürekli- zamanlı işaretlerin impuls işaretleri ile modellenmesi



$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t < \Delta, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases},$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta.$$

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta.$$

---

*Sonuç olarak*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau.$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{T}\{x(t)\} = \mathbf{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \mathbf{T}\{\delta(t - \tau)\} d\tau \end{aligned}$$

$$h(t) = \mathbf{T}\{\delta(t)\}$$

$$h(t - \tau) = \mathbf{T}\{\delta(t - \tau)\}$$

---

*Sistemin çıkışı*

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h_{\tau}(t) d\tau.$$

$$y(t) = x(t) * h(t).$$

---

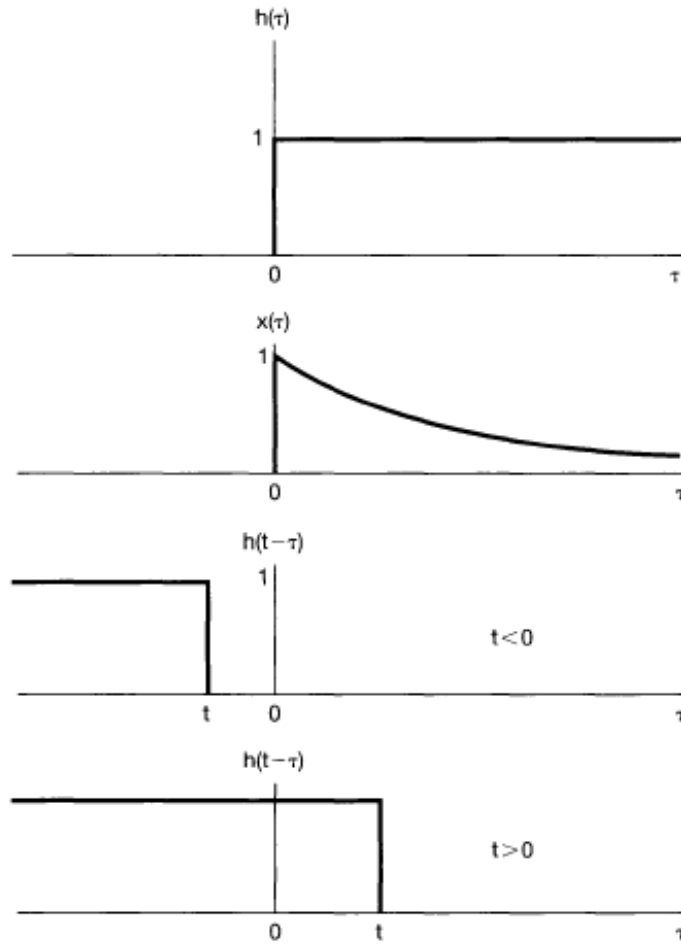
### Örnek:

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

$$h(t) = u(t).$$

Şeklinde verilen işaretlerin konvolüsyonunu konvolüsyon integralinden yararlanarak bulalım.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h_{\tau}(t)d\tau.$$

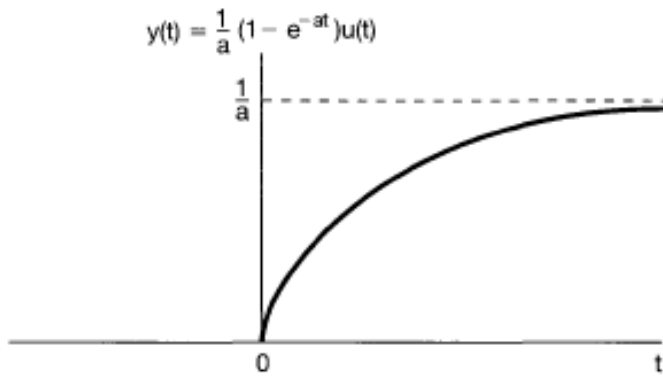


$t > 0,$

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-a\tau}, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau} \Big|_0^t \\ &= \frac{1}{a} (1 - e^{-at}). \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) u(t),$$

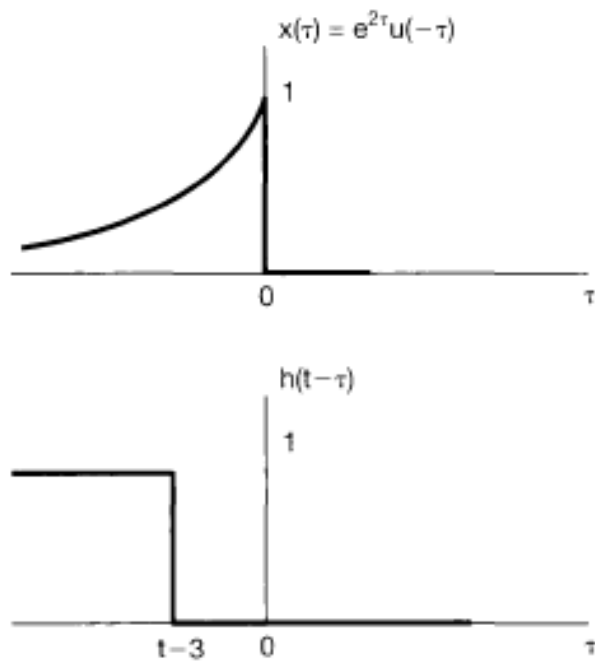


### Örnek:

$$x(t) = e^{2t} u(-t),$$

$$h(t) = u(t - 3).$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h_{\tau}(t) d\tau.$$



$$t-3 \leq 0,$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2} e^{2(t-3)}.$$

$$t-3 \geq 0,$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^0 e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2}.$$

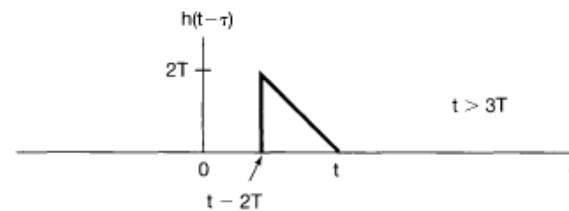
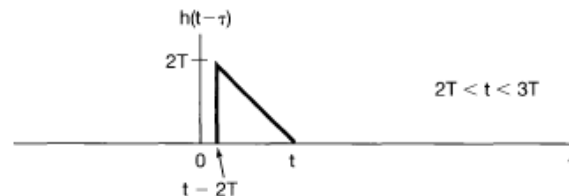
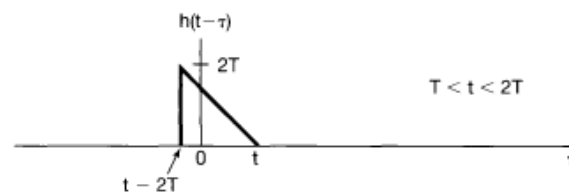
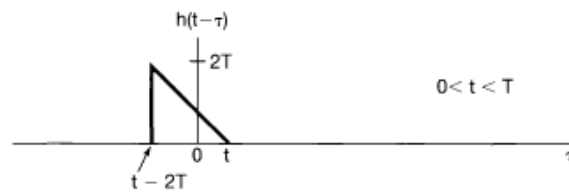
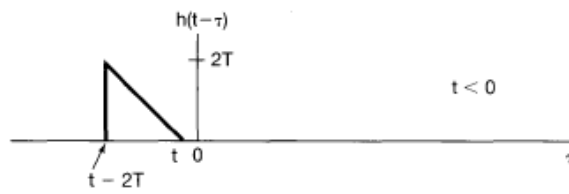
Çalışma sorusu:

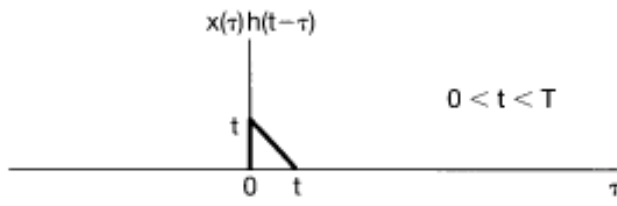
$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

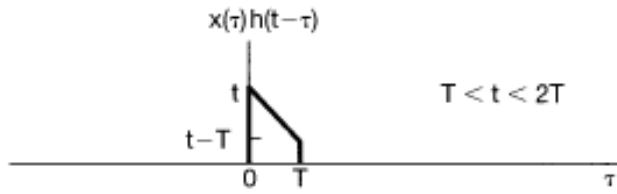
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h_{\tau}(t)d\tau.$$

hesaplayınız.

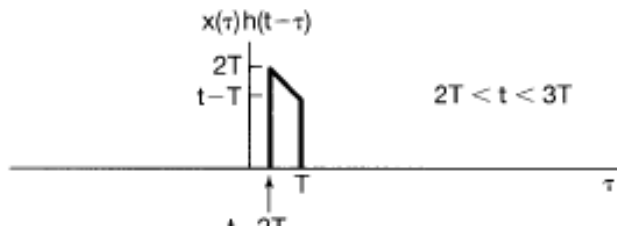




(a)

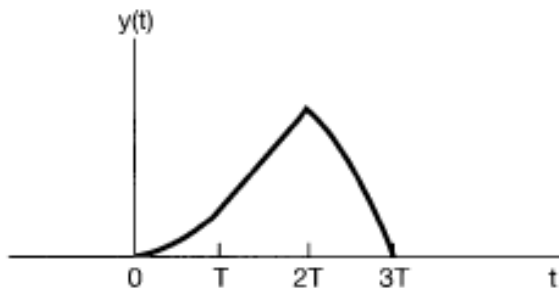


(b)



Çıkış işareti

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2, & 0 < t < T \\ Tt - \frac{1}{2}T^2, & T < t < 2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2, & 2T < t < 3T \\ 0, & 3T < t \end{cases}$$



*LZD sistemlerin konvolüsyon toplamı/integrali gösterilimi*

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

**Konvolüsyonun özellikleri (properties of the convolution)**

**Komütatif özellik (commutative property)**

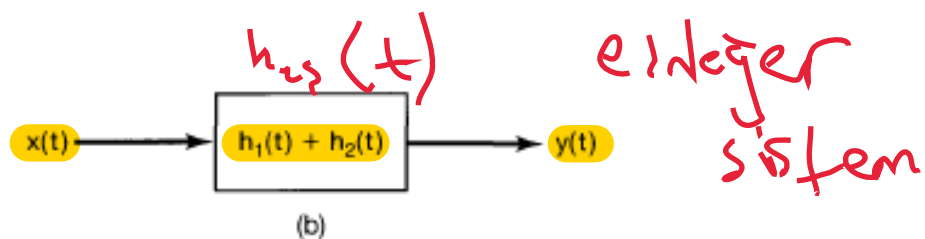
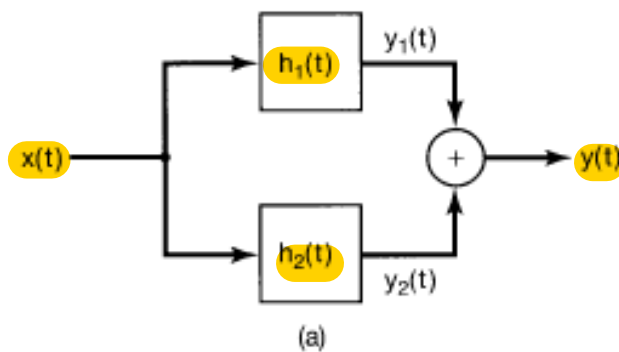
$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

**Distribütif özellik (distributive property)**

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n],$$

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t).$$





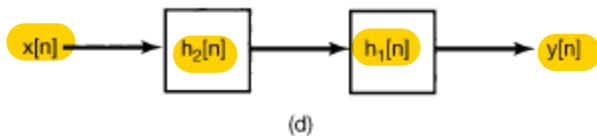
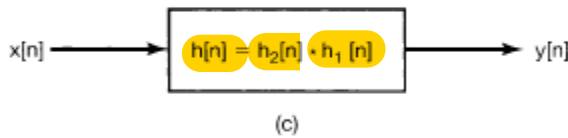
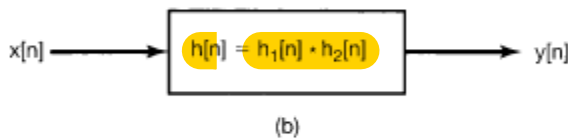
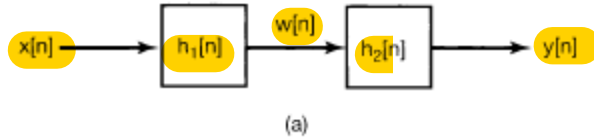
### Asosyatif özellik (Associative property)

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n],$$

$w[n]$

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t).$$

### Eşdeğer sistemler (Equivalent systems)



### Bir işaretin impuls işareti ile konvolüsyonu

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k] = x[n] * \delta[n]$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = x(t) * \delta(t)$$

$$x[n] = x[n] * \delta[n]$$

$$x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]$$

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

$$x(t) = x(t) * \delta(t)$$

$$x[n] \delta[n] = x[0] \delta[n]$$

$$x[n] \delta[n-n_0] = x[n_0] \delta[n-n_0]$$

## Sistemlerin özelliklerinin impuls cevabına bağlı olarak bulunması

### Belleksiz sistem (Memoryless system)

Giriş-çıkış ilişkisi

$$y[n] = Kx[n]$$

İmpuls cevabı

$$h[n] = K\delta[n]$$

Benzer ilişki sürekli-zamanlı sistemler için de elde edilebilir.

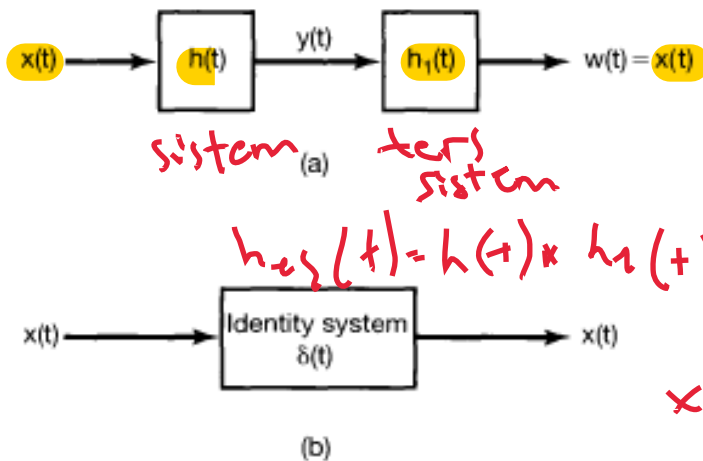
$$y(t) = Kx(t)$$

$$h(t) = K\delta(t)$$

$$h[n] = T[S[n]]$$

$$x[n] = \delta[n] \quad y[n] = h[n]$$

### Tersinir sistem, tersi alınabilirlik (Invertible system, invertibility)



system (a) ters system

$$h_{eq}(t) = h(t) * h_1(t)$$

$$h^{-1}(t)$$

$$h^{-1}(n)$$

$$x(t) * h(t) * h_1(t) = x(t)$$

$$y(t)$$

$$x(t) * ? = x(t)$$

$$h_{eq}(t) = \delta(t)$$

Sistem ile ters sistem arasındaki ilişki

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

$$h[n] * h_1[n] = \delta[n]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] h_1[n-k] = \delta[n]$$

$$?$$

### Örnek:

$$y(t) = x(t - t_0).$$

şeklinde giriş-çıkış ilişkisi verilen sistemin ters sistemini (tanımlı ise) bulalım.

Sistemin impuls cevabı

$$h(t) = \delta(t - t_0).$$

(sistem kuralı: giriş işaretini  $t_0$  kadar sola kaydırır)

Bu durumda ters sistem

$$h_1(t) = \delta(t + t_0).$$

(sistem kuralı: giriş işaretini  $t_0$  kadar sağa kaydırır)

Sistem ve ters sistem arasındaki ilişki sağlanır.

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t).$$

### Örnek:

$$h[n] = u[n].$$

için sistemin cevabı

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]u[n-k]. \quad = x[n] * u[n]$$

$u[n-k]$  is 0 for  $n-k < 0$  and 1 for  $n-k \geq 0$ .

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k].$$

Sistem kuralı: verilen  $n$  anındaki çıkış için o ana kadar olan tüm girişler toplanır

Fark alıcı sistemin verilen sistemin ters sistemi olup olmadığını kontrol edelim.

Fark alıcı sistem giriş-çıkış ilişkisi

$$y[n] = x[n] - x[n-1].$$

Fark alıcı sistemin impuls cevabı

$$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1].$$

$$\begin{aligned} h[n] * h_1[n] &= u[n] * \{\delta[n] - \delta[n-1]\} \\ &= u[n] * \delta[n] - u[n] * \delta[n-1] \\ &= u[n] - u[n-1] \\ &= \delta[n] \end{aligned}$$

Fark alıcı sistem toplayıcı (accumulator) sistemin ters sistemidir.

### Nedensellik (causality)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]h[n-k]$$

Sistem çıkışı gelecek çıkışları içermemelidir.

$$h[n] = 0 \text{ for } n < 0$$

Benzer şekilde

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$h(t) = 0 \text{ for } t < 0$$

Nedensel sistemin impuls cevabı sağ taraflı olmalıdır.

### Kararlılık (stability)

Sonlu giriş-sonlu çıkış anlamında kararlılık için, sınırlı giriş için

$$|x[n]| < B < \infty$$

sınırlı çıkış elde edilmelidir.

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \right| < \infty$$

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| |x[n-k]|$$

$$|y[n]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|$$

olduğundan, kararlı sistemin impuls cevabı toplanabilir olmalıdır.

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] + x[n+1] \\ &\quad \text{nedensel değil} \\ y[n] &= \dots + h[-1]x[n+1] \\ &\quad + h[0]x[n] + h[1]x[n-1] \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

?  
 $< \infty$   
 $< \infty$  (sınırlı giriş)  
 $h[n]$  toplanabilir  
 işareti

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty,$$

Sürekli zamanlı sistemler için

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| |x(t-\tau)| d\tau$$

$$\leq B \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \rightarrow$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$   
integre edilebilir

Kararlı sistemin impuls cevabı integre edilebilir olmalıdır.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty,$$

**Örnek:**

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau,$$

Şeklinde giriş-çıkış ilişkisi verilen sistemin impuls cevabı

$$x(t) = \delta(t),$$

alınarak

$$h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(\tau)| d\tau = \int_0^{+\infty} d\tau = \infty,$$

İmpuls cevabı integre edilebilir olmadığından sistem kararlı değildir.

**Örnek:**

$$h[n] = \alpha^n u[n]$$

Şeklinde impuls cevabı verilen sistemi nedensellik ve kararlılık açısından inceleyelim.

$n < n-1$  sol tarafı  
 $n \geq 0$  sağ tarafı  
1 kez

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

redenset  
kararsiz sistem

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha^k u[n]| = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha|^k = \frac{1}{1-|\alpha|} \quad |\alpha| < 1$$

$$|\alpha| < 1$$

için kararlı

Sağ taraflı olduğu için nedensel

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

sistem kararlı

$$h[n] = 2^n u[n]$$

kararsiz

### Birim basamak cevabı (unit step response)

Sistemin birim basamak işaretine cevabı

$$s(t) = \mathcal{T}\{u(t)\}$$

$$u(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow s(t)$$

$$s(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

nedensel değil  
bekleli  
kararsiz sistem

Sistemin impuls ve birim basamak cevapları arasındaki ilişki

$$h(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

Benzer şekilde ayrık-zamanlı sistemler için, sistemin birim basamak cevabı

$$s[n] = h[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

$$h[n] = s[n] - s[n-1]$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

$$h(t)$$

$$h[n]$$

impuls  
cevabı gösterelim