



**Soru :** Yukarıda verilen kapalı çevrim sistemde Routh-Hurwitz yöntemini kullanarak

- $G(s) = \frac{s+1}{s^4(s+2)}$  için sistemi kararlı kılan K kazanç değeri aralığını bulun.
- $K = 1$  ve  $G(s) = \frac{1}{4s^2(s^2-1)}$  olarak verildiğine göre kapalı çevrim sistem kutuplarının s-düzleminde hangi bölgede olduğunu belirleyin.
- $K = 1$  ve  $G(s) = \frac{s+3}{s^2(s^3+3s^2+5s+4)}$  olarak verildiğine göre kapalı çevrim sistem kutuplarının s-düzleminde hangi bölgede olduğunu belirleyin.

**Çözüm:**

a) Kapalı çevrim transfer fonksiyonu  $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s+1)}{s^5+2s^4+Ks+K}$  olarak hesaplanır. Dolayısıyla, sistemin karakteristik denklemi  $s^5 + 2s^4 + 0s^3 + 0s^2 + Ks + K = 0$  kullanılarak aşağıdaki Routh tablosu oluşturulur.

$s^5$	1	0	K
$s^4$	2	0	K
$s^3$	$\emptyset \in$	$\frac{K}{2}$	0
$s^2$	$-\frac{K}{\epsilon}$	K	0
$s^1$	$\epsilon^2 + \frac{K}{2}$	0	0
$s^0$	K	0	0

$s^3$  satırının ilk elemanı sıfır olduğu için bu elemanın yerine sıfıra yakın ama sıfırdan farklı bir değerde olduğunu kabul ettiğimiz  $\epsilon$  koyarız.  $\epsilon$ 'un ve K'nın pozitif ya da negatif olmalarına göre oluşan 4 farklı durumu değerlendiren aşağıdaki tabloyu inceleyelim.

$\epsilon = 0^+, K > 0$	$\epsilon = 0^-, K > 0$	$\epsilon = 0^+, K < 0$	$\epsilon = 0^-, K < 0$	ilk sütun
+	+	+	+	1
+	+	+	+	2
+	- $\Downarrow$	+	- $\Downarrow$	$\epsilon$
- $\Downarrow$	+	+	-	$-\frac{K}{\epsilon}$
+	+	- $\Downarrow$	-	$\epsilon^2 + \frac{K}{2}$
+	+	-	-	K

Görüldüğü üzere  $K > 0$  için 2 tane kök sağ yarı düzlemde,  $K < 0$  için 1 tane kök sağ yarı düzlemde olduğu bulunur. Burada hatırlanması gereken bir nokta da  $\epsilon$ 'un pozitif ya da negatif değerli olmasının sonucu değiştirmedığı gerçeğidir. Bütün bu irdelemeden şunu anlıyoruz ki, seçilen her hangi bir K değeri ile birinci sütunda işaret değişikliği olmamasını sağlamak mümkün değildir. Dolayısıyla sistemi kararlı kılan K değer aralığı bulunamaz.

b) Kapalı çevrim transfer fonksiyonu  $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{4s^4 - 4s^2 + 1}$  olarak hesaplanır. Dolayısıyla, sistemin karakteristik denklemi  $4s^4 + 0s^3 - 4s^2 + 0s + 1 = 0$  kullanılarak aşağıdaki Routh tablosu oluşturulur.

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 4 & -4 & 1 \\ s^3 & 0 & -1 & 0 \\ s^2 & -2 & 1 & 0 \\ s^1 & 0 & -4 & 0 \\ s^0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$s^3$  satırının tüm elemanları sıfırdır. Bu durumda  $s^4$  satırını oluşturan fonksiyonun  $s$ 'e göre türevi alınır.  $\frac{d[4s^4 - 4s^2 + 1]}{ds} = 16s^3 - 8$  olarak bulunan fonksiyon  $s^3$  satırında yerine konur ve sadeleştirme amacıyla 8'e bölünür. Bu sefer de  $s^1$  satırının tüm elemanları sıfır çıkar. Bu durumda da  $s^2$  satırını oluşturan fonksiyonun  $s$ 'e göre türevi alınır.  $\frac{d[-2s^2 + 1]}{ds} = -4s$  olarak bulunan fonksiyon  $s^1$  satırında yerine konarak Routh tablosu oluşturulur.

$s^3$  satırının tüm elemanları sıfır olması fonksiyonun 4. dereceden bir çift fonksiyon olduğundan kaynaklanmıştır. Dolayısıyla, bu fonksiyonun 4 kökü orijine göre simetriktir. Routh tablosunun ilk sütununda 2 defa işaret değişikliği olduğu için bu köklerin ikisinin sağ yarı düzlemde olduğunu anlıyoruz. Dolayısıyla köklerin  $\sigma_1 + j\omega_1, \sigma_1 - j\omega_1, -\sigma_1 + j\omega_1, -\sigma_1 - j\omega_1$  şeklinde olduğunu düşünebiliriz. Öte yandan  $s^1$  satırında ikinci defa tüm elemanların sıfır olduğu bir satır görüyoruz. Bu durum köklerin katlı kök olduğunu gösterir. Yani  $\omega_1 = 0$  olmak durumundadır. Öyleyse iki kök  $\sigma_1$ 'de ve diğer iki kök de  $-\sigma_1$ 'dedir.

c) Kapalı çevrim transfer fonksiyonu  $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+3}{s^5 + 3s^4 + 5s^3 + 4s^2 + s + 3}$  olarak hesaplanır. Dolayısıyla, sistemin karakteristik denklemi  $s^5 + 3s^4 + 5s^3 + 4s^2 + s + 3 = 0$  kullanılarak aşağıdaki Routh tablosu oluşturulur.

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 5 & 1 \\ s^4 & 3 & 4 & 3 \\ s^3 & \frac{11}{3} & 0 & 0 \\ s^2 & 4 & 3 & 0 \\ s^1 & -\frac{11}{4} & 0 & 0 \\ s^0 & 3 & 0 & 0 \end{array}$$

Routh tablosunun ilk sütununda 2 defa işaret değişikliği olduğu için bu köklerin ikisinin sağ yarı düzlemde olduğunu anlıyoruz. 5. dereceden bir sistem olduğu için toplam 5 kök vardır. Kalan 3 kök sol yarı düzlemdedir.