Boole Fonksiyonlarının İndirgenmesi

- Amaç: Verilen bir Boole fonksiyonunun en basit gerçeklemesini bulmak.
- İndirgeme sadeleştirmenin sistematik yöntemidir.
- İndirgeme için devrenin basitliğini ölçen bir kriter kullanmak gerekir
- Kullanacağımız kriterler:
  - Değişken sayısı (D)
  - Kapı girişi sayısı (KG)
  - TÜMLEME kapıları ile birlikte kapı girişi sayısı (KGT)

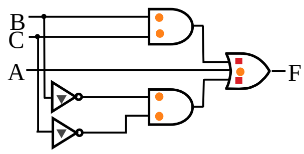
İndirgeme Kriterleri

- Örnek 1:
- $F = A + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}$

D = 5

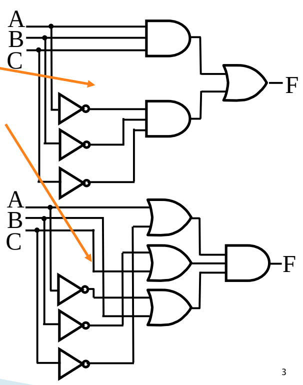
KG = D + 2 = 7

KGT = KG + 2 = 9



İndirgeme Kriterleri

- Örnek 2:
- $F = A\,B\,C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$
  - D = 6 KG = 8 KGT = 11
- $F = (A+\overline{C})(\overline{B}+C)(\overline{A}+B)$
  - D = 6 KG = 9 KGT = 12
- Aynı fonksiyon ve aynı değişken sayısı
- Fakat ilk devrede daha az kapı girişi ve tümleme ile birlikte kapı girişi var



Boolean Fonksiyonlarının İndirgenmesi

- Quine-McCluskey
- Karnaugh (K-) diyagramı
- Espresso

İndirgeme Örneği

Örnek: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_m(1,3,5,6,7,8,12,14,15)$

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\boxed{x_1'x_2'x_3'x_4+x_1'x_2'x_3x_4}+x_1'x_2x_3'x_4+x_1'x_2x_3x_4'+x_1'x_2x_3x_4+x_1x_2'x_3'x_4'+x_1x_2x_3'x_4'+x_1x_2x_3x_4'+x_1x_2x_3x_4$

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)= x_1'x_2'x_4(x_3'+x_3)+x_1'x_3'x_4(x_2'+x_2)+x_1'x_3x_4(x_2'+x_2)$
$+x_1'x_2x_4(x_3'+x_3)+x_1'x_2x_3(x_4'+x_4)+x_2x_3x_4'(x_1'+x_1)$
$+x_2x_3x_4(x_1'+x_1)+x_1x_3'x_4'(x_2'+x_2)+x_1x_2x_4'(x_3'+x_3)+x_1x_2x_3(x_4'+x_4)$

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)= x_1'x_2'x_4+x_1'x_3'x_4+x_1'x_3x_4+x_1'x_2x_4+x_1'x_2x_3$
$+x_2x_3x_4'+x_2x_3x_4+x_1x_3'x_4'+x_1x_2x_4'+x_1x_2x_3$

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)= x_1'x_4+x_1'x_4+x_2x_3+x_2x_3+x_1x_3'x_4'+x_1x_2x_4'$

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)= x_1'x_4+x_2x_3+x_1x_3'x_4'+x_1x_2x_4'$

Quine-McCluskey Yöntemi İle Boole Fonksiyonlarının İndirgenmesi

- Fonksiyon çarpımlar toplamı veya toplamlar çarpımı biçiminde yazılır.
- 1. Aşama: f'nin bütün asal bileşenleri bulunur.
- 2. Aşama: Asal bileşenlerden bazıları atılarak minimal ifade elde edilir.

Quine-McCluskey Yöntemi İle Çarpımlar Toplamı İfadenin İndirgenmesi – 1. Aşama : Asal Bileşenlerin Belirlenmesi

- Örnek: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_m(1,3,5,6,7,8,12,14,15)$

		x_1	x_2	x_3	x_4
√	1	0	0	0	1
√	8	1	0	0	0
√	3	0	0	1	1
√	5	0	1	0	1
√	6	0	1	1	0
√	12	1	1	0	0
√	7	0	1	1	1
√	14	1	1	1	0
√	15	1	1	1	1

		x_1	x_2	x_3	x_4
1,3	√	0	0	–	1
1,5	√	0	–	0	1
8,12	A	1	–	0	0
3,7	√	0	–	1	1
5,7	√	0	1	–	1
6,7	√	0	1	1	–
6,14	√	–	1	1	0
12,14	B	1	1	–	0
7,15	√	–	1	1	1
14,15	√	1	1	1	–

	x_1	x_2	x_3	x_4	
1,3,5,7	0	–	–	1	C
1,5,3,7	0	–	–	1	
6,7,14,15	–	1	1	–	D
6,14,7,15	–	1	1	–	

Asal Bileşenlerin Toplamı:

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_3'x_4'+x_1x_2x_4'+x_1'x_4+x_2x_3$

Quine-McCluskey Yöntemi İle Çarpımlar Toplamı İfadenin İndirgenmesi – 2. Aşama: Minimal İfadenin Bulunması

Tablo Yöntemi

A	8,12
B	12,14
C	1,3,5,7
D	6,7,14,15

	1	3	5	6	7	8	12	14	15	
A						X	X			TAB
B							X	X		
C	X	X	X		X					TAB
D				X	X			X	X	TAB

Minimal ifade:

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_3'x_4'+x_1'x_4+x_2x_3$

Quine-McCluskey Yöntemi İle Çarpımlar Toplamı İfadenin İndirgenmesi – 2. Aşama: Minimal İfadenin Bulunması

Patrick Yöntemi

A	8,12
B	12,14
C	1,3,5,7
D	6,7,14,15

P=C C C D (C+D) A (A+B) (B+D) D

C=1, D=1, A=1

P=1

Minimal ifade:

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_3'x_4'+x_1'x_4+x_2x_3$

Örnek: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\Sigma_m(1,4,5,7,8,9,11,12,14,15)$

		x_1	x_2	x_3	x_4
√	1	0	0	0	1
√	4	0	1	0	0
√	8	1	0	0	0
√	5	0	1	0	1
√	9	1	0	0	1
√	12	1	1	0	0
√	7	0	1	1	1
√	11	1	0	1	1
√	14	1	1	1	0
√	15	1	1	1	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	
1,5	0	–	0	1	A
1,9	–	0	0	1	B
4,5	0	1	0	–	C
4,12	–	1	0	0	D
8,9	1	0	0	–	E
8,12	1	–	0	0	F
5,7	0	1	–	1	G
9,11	1	0	–	1	H
12,14	1	1	–	0	I
7,15	–	1	1	1	J
11,15	1	–	1	1	K
14,15	1	1	1	–	L

Asal Bileşenlerin Toplamı:

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_3'x_4+x_2'x_3'x_4+x_1'x_2x_3'+x_2x_3'x_4'+x_1x_2'x_3'+x_1x_3'x_4'+x_1'x_2x_4$
$+x_1x_2'x_4+x_1x_2x_4'+x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_3$

Örnek: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\Sigma_m(1,4,5,7,8,9,11,12,14,15)$

	1	4	5	7	8	9	11	12	14	15
A	X		X							
B	X					X				
C		X	X							
D		X						X		
E					X	X				
F					X			X		
G			X	X						
H						X	X			
I								X	X	
J				X						X
K							X			X
L									X	X

Temel asal bileşen yok.
Satır veya sütun örtmesi yok.
I=1 veya L=1

P=(A+B)(C+D)(A+C+G)(G+J)(E+F)
(B+E+H)(H+K)(D+F+I)(I+L)(J+K+L)
Temel asal bileşen yok
Satır örtmesi yok
Sütun örtmesi yok
A=1 olsun
P= (C+D)(G+J)(E+F)(B+E+H)(H+K)
(D+F+I)(I+L)(J+K+L)
Temel asal bileşen yok
E B'yi örter. D C'yi örter. J G'yi örter.
B=0, C=0, G=0
P= D J (E+F)(E+H)(H+K)(D+F+I)(I+L)
(J+K+L)
P= (E+F)(E+H)(H+K)(I+L)
D ve J temel asal bileşen. D=1, J=1
Temel asal bileşen yok
E F'yi örter. H K'yi örter.
F=0, K=0
P= E (E+H) H (I+L)
E ve H temel asal bileşen. E=1, H=1

- F=A+D+J+E+H+L
- F=A+D+J+E+H+I

Quine-McCluskey Yöntemi İle Toplamlar Çarpımı İfadenin İndirgenmesi

- Örnek: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\Pi_M(1,4,5,8,11,12,14)$

		x_1	x_2	x_3	x_4		x_1	x_2	x_3	x_4	
√	1	0	0	0	1	1,5	0	–	0	1	B
√	4	0	1	0	0	4,5	0	1	0	–	C
√	8	1	0	0	0	4,12	–	1	0	0	D
√	5	0	1	0	1	8,12	1	–	0	0	E
√	12	1	1	0	0	12,14	1	1	–	0	F
A	11	1	0	1	1						
√	14	1	1	1	0						

	1	4	8	5	12	11	14	
A						X		TAB
B	X			X				TAB
C		X		X				
D		X			X			
E			X		X			TAB
F					X		X	TAB

Asal Bileşenlerin Çarpımı:

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1'+x_2+x_3'+x_4')(x_1+x_3+x_4')$
$(x_1+x_2'+x_3)(x_2'+x_3+x_4)(x_1'+x_3+x_4)$
$(x_1'+x_2'+x_4)$

Minimal ifade:

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1'+x_2+x_3'+x_4')(x_1+x_3+x_4')$
$(x_1'+x_3+x_4)(x_1'+x_2'+x_4)$
$(x_1+x_2'+x_3)$ veya $(x_2'+x_3+x_4)$

Keyfi Değerler

- Bazen bir doğruluk tablosunda aşağıdaki durumlardan birine sahip girişler bulunur:
  - Karşılık gelen çarpım terimini oluşturacak giriş asla gelmeyecektir.
  - Çarpım teriminin oluşturduğu çıkış asla kullanılmayacaktır.
- Bu durumlarda çıkış değerini tanımlamak gerekmez.
- Bunun yerine çıkış değeri "keyfi" olarak tanımlanır.
- İndirgeme sırasında diyagrama "k" veya "x" koymak devreyi küçültebilir.
- Örnek: BCD kodlanmış sayıların bir basamağını toplayacak bir devre tasarlansın. Sadece 0 dan 9'a kadar olan sayıların kodları kullanılacaktır. Geriye kalan 1010 dan 1111 olan kodlar asla ortaya çıkmayacaktır.

14

Quine-McCluskey Yöntemi Keyfi Değerli Bir Boole Fonksiyonunun İndirgenmesi

- Örnek: $f(x_1,x_2,x_3)=\Sigma_m(0,1,5)+k\Sigma_m(2,6)$

		x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3	
√	0	0	0	0	0,1	0	0	–	A
√	1	0	0	1	0,2	0	–	0	B
√	2	0	1	0	1,5	–	0	1	C
√	5	1	0	1	2,6	–	1	0	D
√	6	1	1	0					

	0	1	5	
A	X	X		
B	X			
C		X	X	TAB

Asal Bileşenlerin Toplamı

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1'x_2'+x_1'x_3'+x_2'x_3+x_2x_3'$

Minimal ifade:

$f(x_1,x_2,x_3)=x_2'x_3+x_1'x_2'$ veya $x_1'x_3'$

Sadece Keyfilerden oluşan asal bileşenleri tablonun satırlarına koyma
Keyfi çarpım terimlerini tablonun sütunlarına KOYMA

İki değişkenli Karnaugh Diyagramı

- İki değişken: x ve y
  - 4 çarpım terimi:
    - m_0 = x'y' → 00
    - m_1 = x'y → 01
    - m_2 = xy' → 10
    - m_3 = xy → 11

x \ y	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

x \ y	0	1
0	x'y'	x'y
1	xy'	xy

16

Karnaugh Diyagramı ile Fonksiyonların Gösterilimi

- Örnek: F(x,y) = x

x \ y	0	1
0	0	0
1	1	1

- F(x,y) fonksiyonu için 1 içeren iki komşu hücre birleştirilebilir.

$$F(x, y) = x\,\bar{y} + x\,y = x$$

Karnaugh Diyagramı ile Fonksiyonların Gösterilimi

- Örnek: G(x,y) = x + y

G = x+y	y = 0	y = 1
x = 0	0	1
x = 1	1	1

- G(x,y) fonksiyonu için 1 içeren iki çift komşu hücre birleştirilebilir.

$$G(x, y) = (x\,\bar{y} + x\,y) + (xy + \bar{x}\,y) = x + y$$

xy tekrarlanıyor

Üç değişkenli Karnaugh Diyagramı

x \ yz	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

- Komşu kareler arasında sadece 1 bit değişir.
  - $m_2 \leftrightarrow m_6$, $m_3 \leftrightarrow m_7$
  - $m_2 \leftrightarrow m_0$, $m_6 \leftrightarrow m_4$

Üç değişkenli Karnaugh Diyagramı

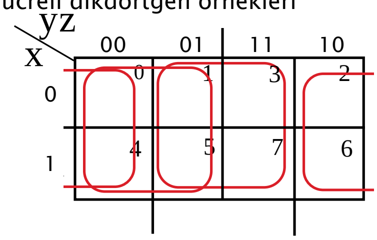
- 2 hücreli dikdörtgen örnekleri

x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

- Gösterilen dikdörtgenlerin çarpım terimlerini okuyun.

Üç değişkenli Karnaugh Diyagramı

- 4 hücreli dikdörtgen örnekleri



- Gösterilen dikdörtgenlerin çarpım terimlerini okuyun.

Örnek: F(x,y,z)=$\sum$m(1,2,3,5,7)

x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	1	1	0

x'y

z

F=x'y+z

1. sütun	2. sütun	3. sütun
x y z	x y z	x y z
√ 0 0 1	√ 0 – 1	B – – 1
√ 0 1 0	√ – 0 1	
√ 0 1 1	A 0 1 –	
√ 1 0 1	√ – 1 1	
√ 1 1 1	√ 1 – 1	

P=AB
A=B=1
A=x'y
B=z
F=A+B=x'y+z

Üç değişkenli Karnaugh Diyagramı

- 1 hücre 3 değişkenli bir çarpım terimini gösterir.
- 2 komşu hücre 2 değişkenli bir terimi gösterir.
- 4 komşu hücre 1 değişkenli bir terimi gösterir.
- 8 komşu hücre her zaman 1'e eşittir.

Ornek: Uç değişkenli Karnaugh Diyagramı

- F_1(x, y, z) = Σ (2, 3, 4, 5)

x \ yz	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	1	0	0

- F_1(x, y, z) = xy' + x'y
- F_2(x, y, z) = Σ (3, 4, 6, 7)

x \ yz	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	0	1	1

- F_1(x, y, z) = xz' + yz

Örnek

- $F_1(x, y, z) = \Sigma\,(0, 2, 4, 5, 6)$

x \ yz	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	1	0	1

$F_1(x, y, z) = z' + y'x$

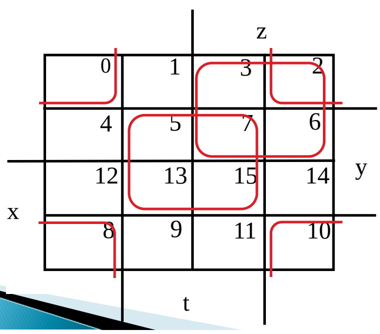
Dört değişkenli Karnaugh Diyagramı

- Dört değiken: x, y, z, t
  - 16 çarpım terimi

xy \ zt	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

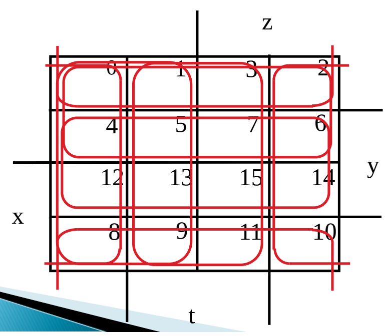
Dört değişkenli Karnaugh Diyagramı

- Dikdörtgen örnekleri



Dört değişkenli Karnaugh Diyagramı

- Dikdörtgen örnekleri



Örnek: F(x,y,z,t) = Σ (0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14)

xy \ zt	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	1
11	1	1	0	1
10	1	1	0	0

- F(x,y,z,t) = z'+x't'+yt'

Örnek: F(x,y,z,t)=x'y'z'+y'zt'+x'yzt'+xy'z'

xy \ zt	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	0	0	1
11	0	0	0	0
10	1	1	0	1

- F(x,y,z,t) =y't'+z'y'+x'zt'

Toplamlar Çarpımı İfadenin Karnaugh Diyagramı İle İndirgenmesi

- Örnek: $f(x,y,z,t)=\Pi_M(1,4,5,8,11,12,14)$

xy \ zt	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	1	1
11	0	1	1	0
10	0	1	0	1

- $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x+z+t')(x'+y'+t)$
  $(x'+z+t)(x'+y+z'+t')$
  $(x+y'+z)$ veya $(y'+z+t)$

Beş Değişkenli Karnaugh Diyagramı

- Dört değişkenliden fazla Karnaugh diyagramlarını kullanmak kolay değildir.
- 5 değişken → 32 k

tw \ xyz	000	001	011	010	110	111	101	100
00	m_0	m_4	m_{12}	m_8	m_{24}	m_{28}	m_{20}	m_{16}
01	m_1	m_5	m_{13}	m_9	m_{25}	m_{29}	m_{21}	m_{17}
11	m_3	m_7	m_{15}	m_{11}	m_{27}	m_{31}	m_{23}	m_{19}
10	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}	m_{26}	m_{30}	m_{22}	m_{18}

Beş Değişkenli Karnaugh Diyagramı

- Dört değişkenliden fazla Karnaugh diyagramlarını kullanmak kolay değildir.
- 5 değişken → 32 k

yz \ tw	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

x = 0

yz \ tw	00	01	11	10
00	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}
01	m_{20}	m_{21}	m_{23}	m_{22}
11	m_{28}	m_{29}	m_{31}	m_{30}
10	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}

x = 1

Çok Değişkenli Karnaugh Diyagramı

- Komşuluk:
  - x = 0 diyagramındaki her kare x = 1 diyagramındaki aynı kareye komşudur.
  - Örneğin, m_4 → m_{20} ve m_{15} → m_{31} komşulukları gösterir.

Örnek: Beş Değişkenli Karnaugh Diyagramı

- F(x, y, z, t, w) = Σ (0, 2, 4, 6, 9, 13, 21, 23, 25, 29, 31)

yz \ tw	00	01	11	10
00	1			1
01	1			1
11		1		
10		1		

x = 0

yz \ tw	00	01	11	10
00				
01		1	1	
11		1	1	
10		1		

x = 1

- F(x,y,z,t,w) =

Keyfi Değerli Fonksiyonların İndirgenmesi (1/2)

- F(x, y, z, t) = Σ(1, 3, 7, 11, 15) – fonksiyon
- k(x, y, z, t) = Σ(0, 2, 5) – keyfi değerler

xy \ zt	00	01	11	10
00	k	1	1	k
01	0	k	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

F =

F_1 =

F_2 =

Keyfi Değerli Fonksiyonların İndirgenmesi (2/2)

- $F_1 = zt + x'y' = \Sigma(0, 1, 2, 3, 7, 11, 15)$
- $F_2 = zt + x't = \Sigma(1, 3, 5, 7, 11, 15)$