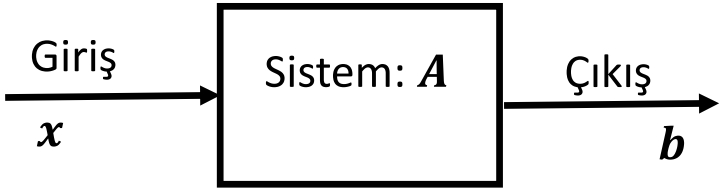
Lineer Denklem Sistemlerinde Kararlılık (Stabilite)

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$;

$\boldsymbol{b}$: veri, $\boldsymbol{x}$: bilinmeyen



$\boldsymbol{A}$ *ve* $\boldsymbol{x}$ biliniyorken $\boldsymbol{b}$ yi hesaplama → Düz Problem

$\boldsymbol{A}$ *ve* $\boldsymbol{b}$ biliniyorken $\boldsymbol{x}$ i hesaplama → Ters Problem

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ denklemini verilmiş bir $\boldsymbol{b}$ verisi için çözerek $\boldsymbol{x}$'i bulma problemi temelde bir **ters problem**

İyi Kurulmuş (Well-Posed) Problem : Hadamard Kriterleri:

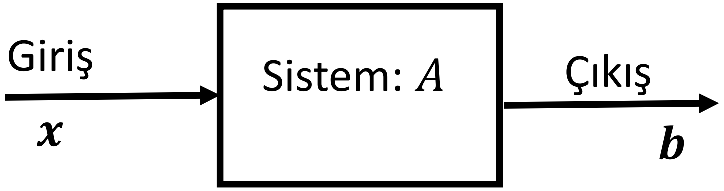
1. Çözümün Varlığı
2. Çözümün Tekliği
3. Dataya (Veriye) Sürekli Bağlılık

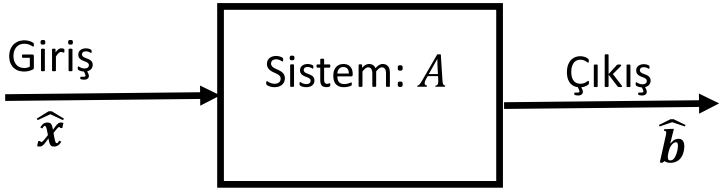
Her üç koşulu sağlayan problem (iyi kurulmuş) well-posed

Bu koşullardan herhangi biri sağlanmıyorsa
→ Problem Kötü Kurulmuş (İll-Posed)

Ters Problemler Genellikle Kötü Kurulmuş (İll-Posed)!!!

3. Koşul : *Dataya (Veriye) Sürekli Bağlılık:*
Verideki ($\boldsymbol{b}$ deki) küçük değişiklikler çözümde ($\boldsymbol{x}\,'$ de) küçük değişikliklere sebep oluyorsa sistem kararlı veya stabildir.





$\widehat{\boldsymbol{b}}$: $\boldsymbol{b}$'nin pertürbe hali olsun ($\boldsymbol{b}'$ nin gerçek değeri yerine ölçüm/hesap hatası/gürültü vb. nedeniyle $\widehat{\boldsymbol{b}}$ kullanılıyor olsun)

Bu halde aynı sistem için $\widehat{\boldsymbol{b}}$ verisine karşı düşen çözüm $\widehat{\boldsymbol{x}}$ olsun)

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$: Gerçek (Tam) Sistem
$\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \widehat{\boldsymbol{b}}$: Yaklaşık (Pertürbe) Sistem

$\boldsymbol{b} - \widehat{\boldsymbol{b}}$ ile $\boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{x}}$ arasındaki ilişki kararlılığı belirler

Verideki Hata

Sonuçtaki (Çözümdeki) Hata

Lineer Denklem Sistemlerinde Kararlılık (Stabilite)

$$5x_1 + 7x_2 = 0{,}7$$
$$7x_1 + 10x_2 = 1$$

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0{,}1$$

Gerçek (Tam) Çözüm

$$5\widehat{x_1} + 7\widehat{x_2} = 0{,}69$$
$$7\widehat{x_1} + 10\widehat{x_2} = 1{,}01$$

$$\widehat{x_1} = -0{,}17$$
$$\widehat{x_2} = 0{,}22$$

Pertürbe (Yaklaşık) Çözüm

b_1 *de* $1/70$ değişim
b_2 *de* $1/100$ değişim

x_1 *ve* x_2 *de değişim çok büyük*!!!

Sistem Stabil (Kararlı) Değil!!!

Datadaki ($\boldsymbol{b}$) küçük değişimler çözümde büyük değişimlere sebep oluyorsa sistem stabil değildir

Datadaki ($\boldsymbol{b}$) küçük değişimler çözüme de küçük değişimler şeklinde yansıyorsa sistem stabildir

Söz konusu küçük değişim ya da pertürbasyonları ölçmenin yolu <u>**norm**</u> kullanmaktır.

Örneğin $\boldsymbol{b}$ datasındaki değişimin iyi bir ölçütü $\boldsymbol{b} - \widehat{\boldsymbol{b}}$ **farkının normudur:**
Norm $\rho(\boldsymbol{b} - \widehat{\boldsymbol{b}}) = \|\boldsymbol{b} - \widehat{\boldsymbol{b}}\|$

Vektör ve Matris Normu Tanımlar

Vektör Normu

V bir vektör uzayı ve F reel veya kompleks sayılar cismini göstermek üzere

$\rho: V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \;\; ve \;\; \forall\, \beta \in F \; için$

1. $\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \leq \rho(\boldsymbol{x}) + \rho(\boldsymbol{y}) \;\; Alt\ Toplamsallık$
2. $\rho(\beta\boldsymbol{x}) = |\beta|\rho(\boldsymbol{x}) \;\; Pozitif\ Homojenlik$
3. $\rho(\boldsymbol{x}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \;\; Pozitif\ Tanımlılık$

Özelliklerini sağlıyorsa bir **Norm** dur

Norm için kullanılan genel notasyon:

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$$

Lineer Denklem Sistemlerinde Kararlılık (Stabilite)

n boyutlu bir $\boldsymbol{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$ vektörü göz önüne alalım. çeşitli **Vektör Normu** tanımları verilebilir:

ℓ_1 Norm: $\rho(\boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{z}\| = |z_1| + |z_2| + \cdots |z_n| \;\; (Taxicab\ Norm\ (Manhatten\ Norm))$

ℓ_2 Norm: $\rho(\boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{z}\| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + \cdots z_n^2} \quad (\ddot{O}klidyen\ Norm)$

ℓ_p Norm: $\rho(\boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{z}\| = (z_1^p + z_2^p + \cdots z_n^p)^{\frac{1}{p}}$

ℓ_∞ Norm veya Maximum Norm : $\rho(\boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{z}\| = \max\limits_{1 \le i \le n} |z_i|$

Lineer Denklem Sistemlerinde Kararlılık (Stabilite)

Matris Normu

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}];\, i,j = 1,2,\dots,n \quad matrisi \;\; verilsin$$

$$\boldsymbol{A}\; matrisinin\; normu:\;\; \|\boldsymbol{A}\| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Bu toplamların en büyüğü olan sayı A matrisinin normudur

1. Satır: $a_{11}\;\; a_{12}\;\; \dots\dots\;\; a_{1n} \rightarrow \sum_{j=1}^{n} |a_{1j}|$

2. Satır: $a_{21}\;\; a_{22}\;\; \dots\dots\;\; a_{2n} \rightarrow \sum_{j=1}^{n} |a_{2j}|$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

n. Satır: $a_{n1}\;\; a_{n2}\;\; \dots\dots\;\; a_{nn} \rightarrow \sum_{j=1}^{n} |a_{nj}|$

Normun Özellikleri: $\boldsymbol{y}$ *ve* $\boldsymbol{z}$ *iki vektör;* $\boldsymbol{A}$ *ve* $\boldsymbol{B}$ *matrisler olmak üzere*

1. $\|\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\| \le \|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{z}\|$
2. $\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\| \le \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|$
3. $\|\boldsymbol{AB}\| \le \|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{B}\|$
4. $\|\boldsymbol{Az}\| \le \|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{z}\|$

Lineer Denklem Sistemlerinde Kararlılık (Stabilite)

Gerçek ve pertürbe data arasındaki fark yani datadaki hata: $\boldsymbol{b}-\widehat{\boldsymbol{b}}$

Gerçek ve pertürbe (yaklaşık/hatalı) çözümler arasındaki fark : $\boldsymbol{x}-\widehat{\boldsymbol{x}}$

n boyutlu vektör uzayında $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\dots,x_n]^{\boldsymbol{T}}$ ve $\boldsymbol{b}=[b_1,b_2,\dots,b_n]^{\boldsymbol{T}}$ vektörleri için

$$\|\boldsymbol{x}-\widehat{\boldsymbol{x}}\|=\max_{1\le i\le n}|x_i-\widehat{x}_i| \qquad \left\|\boldsymbol{b}-\widehat{\boldsymbol{b}}\right\|=\max_{1\le i\le n}\left|b_i-\widehat{b}_i\right|$$

$$cond(A)=\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$$

Teorem: $\boldsymbol{A}$ tekil olmayan bir matris $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ ve $\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{x}}=\widehat{\boldsymbol{b}}$ olmak üzere

$$\frac{\|\boldsymbol{x}-\widehat{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\le\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\frac{\left\|\boldsymbol{b}-\widehat{\boldsymbol{b}}\right\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

İspat: $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{x}}=\widehat{\boldsymbol{b}} \Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\widehat{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{b}-\widehat{\boldsymbol{b}} \Longrightarrow (\boldsymbol{x}-\widehat{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{b}-\widehat{\boldsymbol{b}})$

$$\|\boldsymbol{x}-\widehat{\boldsymbol{x}}\|=\left\|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{b}-\widehat{\boldsymbol{b}})\right\|\le\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\left\|\boldsymbol{b}-\widehat{\boldsymbol{b}}\right\|\Longrightarrow$$

$$\frac{\|\boldsymbol{x}-\widehat{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\le\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\frac{\left\|\boldsymbol{b}-\widehat{\boldsymbol{b}}\right\|}{\|\boldsymbol{x}\|}=\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\frac{\left\|\boldsymbol{b}-\widehat{\boldsymbol{b}}\right\|}{\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}\|}\le\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\frac{\left\|\boldsymbol{b}-\widehat{\boldsymbol{b}}\right\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

$$\ge\|\boldsymbol{Ax}\|=\|\boldsymbol{b}\|$$

$$\frac{\|\boldsymbol{x}-\widehat{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\le cond(A)\frac{\left\|\boldsymbol{b}-\widehat{\boldsymbol{b}}\right\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

Çözümdeki Bağıl Hata

Datadaki Bağıl Hata

$cond(A)\gg 1\Longrightarrow$

Sistem Stabil Değil!!!

Hata Kontrolümüzden Çıkabilir

Lineer Denklem Sistemlerinde Kararlılık (Stabilite)

$$5x_1 + 7x_2 = 0{,}7$$
$$7x_1 + 10x_2 = 1$$

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0{,}1$$

Gerçek (Tam) Çözüm

$$5\widehat{x_1} + 7\widehat{x_2} = 0{,}69$$
$$7\widehat{x_1} + 10\widehat{x_2} = 1{,}01$$

$$\widehat{x_1} = -0{,}17$$
$$\widehat{x_2} = 0{,}22$$

Pertürbe (Yaklaşık) Çözüm

b_1 *de* $1/70$ değişim
b_2 *de* $1/100$ değişim

x_1 *ve* x_2 *de değişim çok büyük!!!*

Sistem Stabil (Kararlı) Değil!!!

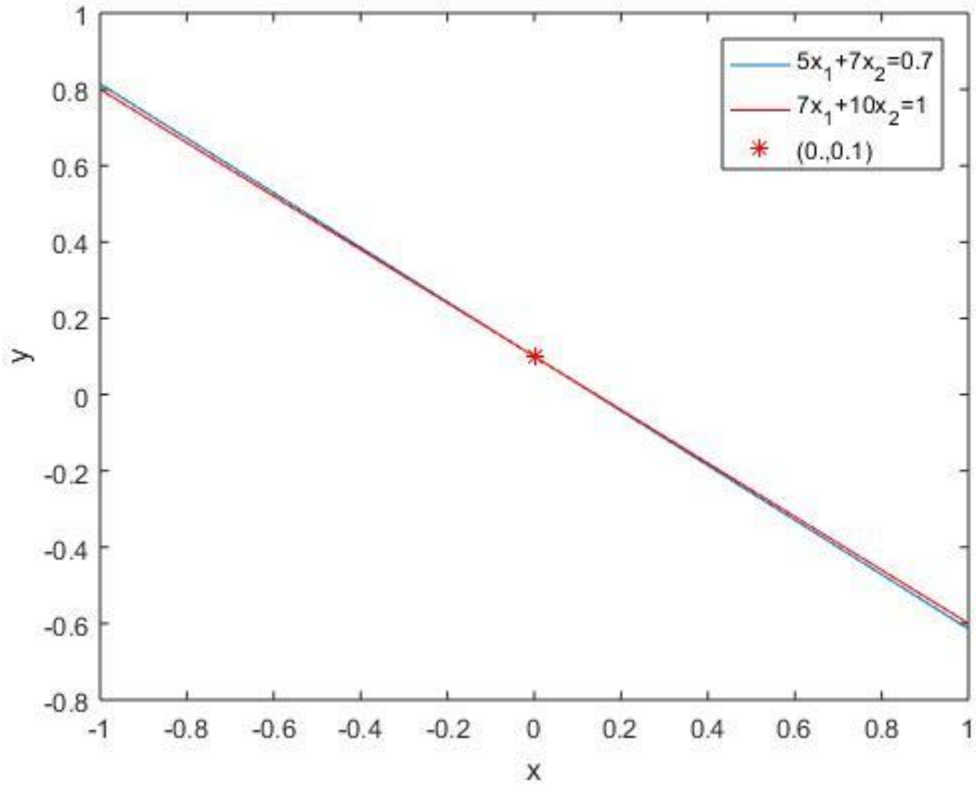
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow cond(A) = \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\| = 17 \times 17 = 289 \gg 1$$

$$\frac{\|\boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq cond(A)\frac{\|\boldsymbol{b} - \widehat{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \Rightarrow$$

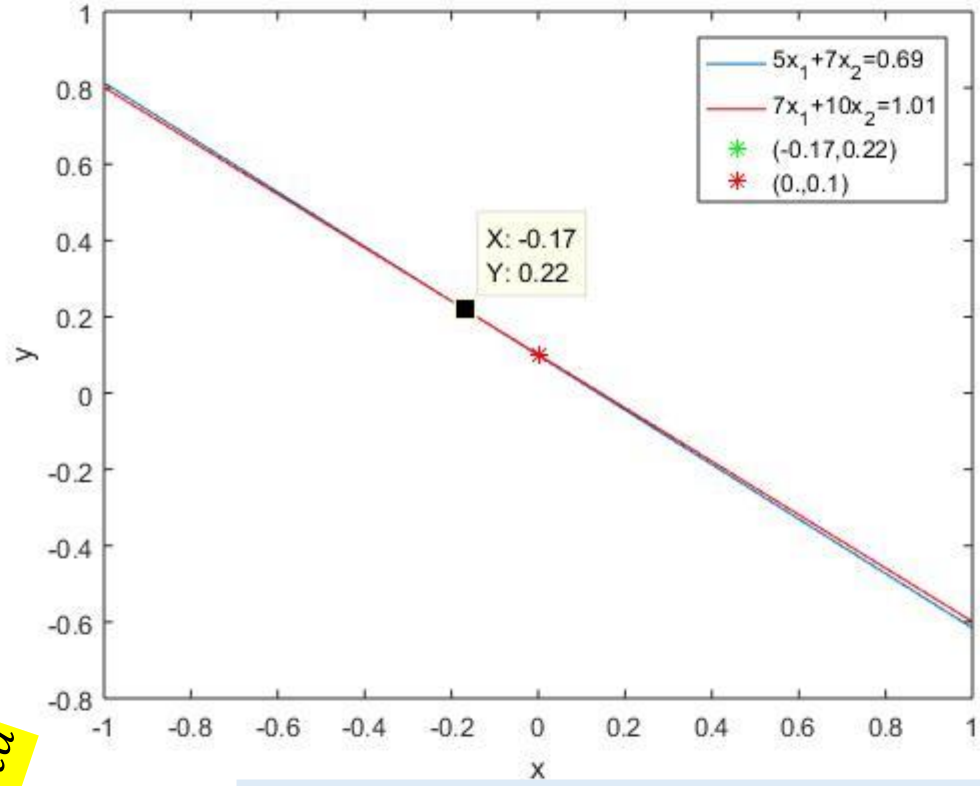
$$\frac{\|\boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \frac{0.17}{0.1} = 1.7 \leq cond(A)\frac{\|\boldsymbol{b} - \widehat{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} = 289 \times 0.01 = 2.89$$

%1 bağıl hata 289 kat büyüyebiliyor!!!

Lineer Denklem Sistemlerinde Kararlılık (Stabilite)



Gerçek (Tam) Çözüm



Pertürbe/yaklaşık/hatalı Çözüm

$$\begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 &= 0{,}7 \\ 7x_1 + 10x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0{,}1 \end{aligned}$$

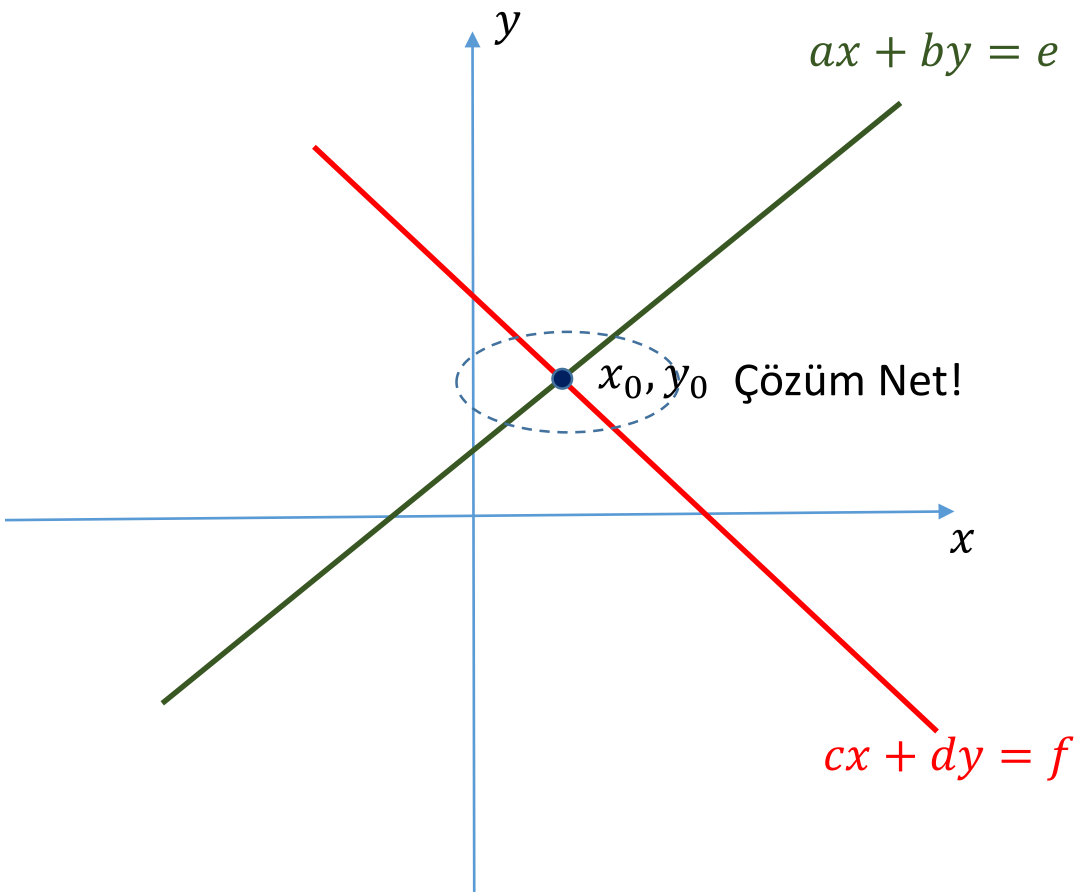
% 170 hata

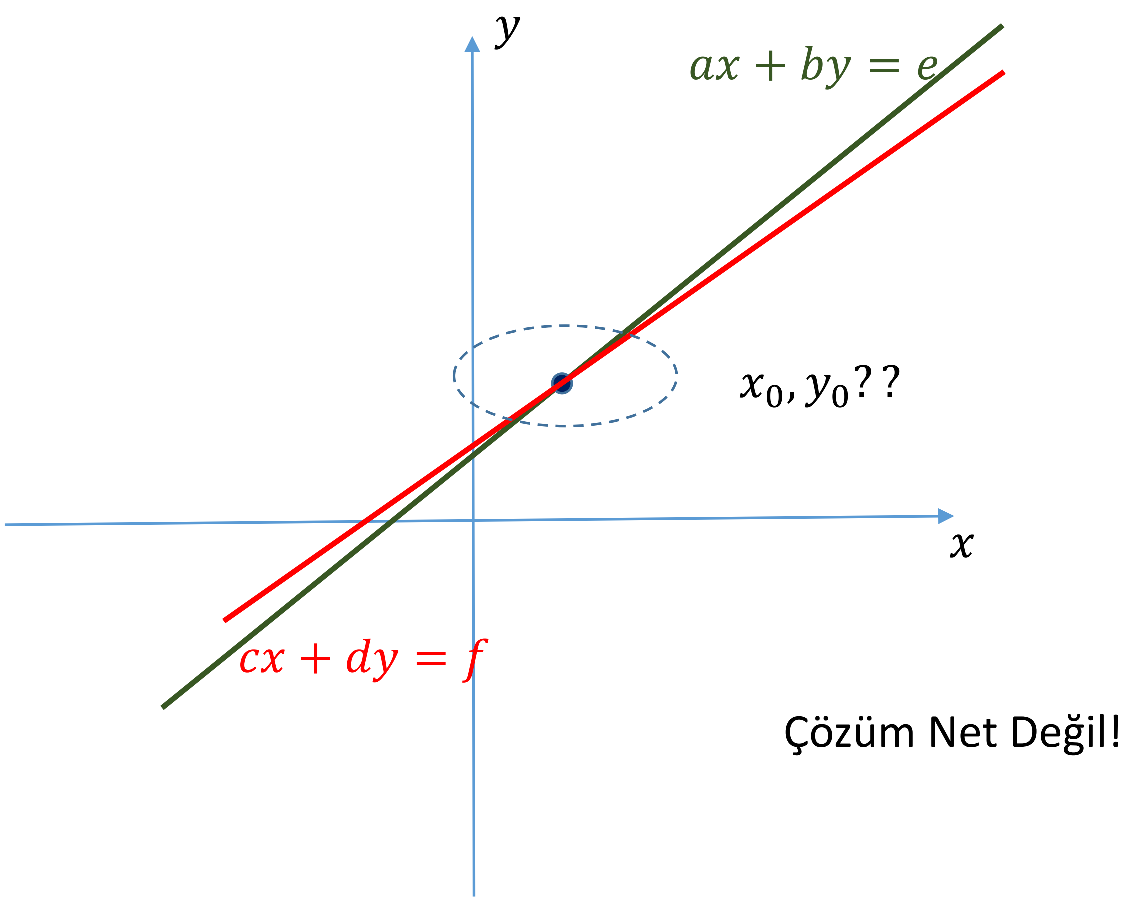
$$\begin{aligned} 5\widehat{x_1} + 7\widehat{x_2} &= 0{,}69 \\ 7\widehat{x_1} + 10\widehat{x_2} &= 1{,}01 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{x_1} &= -0{,}17 \\ \widehat{x_2} &= 0{,}22 \end{aligned}$$

$$\frac{\|\boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \frac{0.17}{0.1} = 1.7 \leq cond(A)\frac{\|\boldsymbol{b} - \widehat{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} = 289 \times 0.01 = 2.89$$

Lineer Denklem Sistemlerinde Kararlılık (Stabilite)





$$\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$$

İyi Kurulmuş (Well-Posed) Problem

$$\frac{a}{b} \approx \frac{c}{d} \left(\frac{5}{7} \approx \frac{7}{10}\right)$$

Kötü Kurulmuş (ill-Posed) Problem