HANDAN NAK 10.12.12

OKS _ Uygulama II

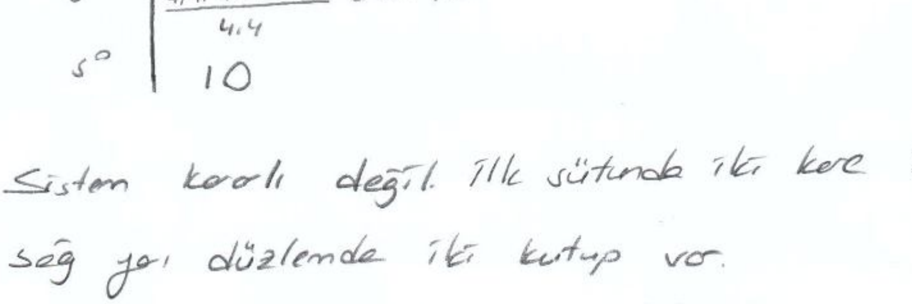
1) a) Karakteristik polinomu $q(s) = 2s^4 + 10s^3 + 5{,}5s^2 + 5{,}5s + 10$ olarak verilen sistemin Routh_Hurwitz kararlılık ölçütüne göre incelеyerek sistemin kararlı olup olmadığını bulunuz. Sistem kararlı değil ise sağ yarı s-düzlemindeki sistem kutbu sayısını belirleyiniz ve nedenini açıklayınız.

$$q(s) = 2s^4 + 10s^3 + 5{,}5s^2 + 5{,}5s + 10$$

s^4	2	$5{,}5$	10
s^3	10	$5{,}5$	
s^2	$\frac{55-11}{10} = 4{,}4$	10	
s^1	$\frac{4{,}4 . 5{,}5 - 100}{4{,}4} = -17{,}23$		
s^0	10		

Sistem kararlı değil. İlk sütunda iki kere işaret değiştiğinden sağ yarı düzlemde iki kutup var.

b) İleri yol transfer fonksiyonu $G(s) = \dfrac{K}{s(s^2+11s+30)}$ olarak verilen birim geribeslemeli sistemi kararlı kılan K aralığını bulunuz.



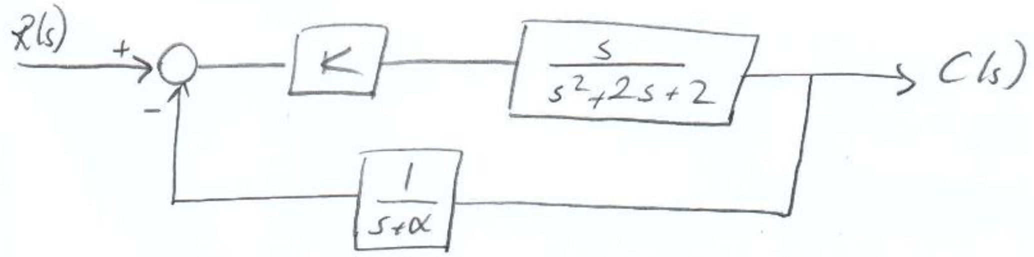
$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{s^3+11s^2+30s+K}$$

$$q(s) = s^3+11s^2+30s+K$$

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 30 \\
s^2 & 11 & K \\
s^1 & \frac{330-K}{11} & \\
s^0 & K &
\end{array}$$

$\frac{330-K}{11} > 0$ ve $K > 0$ olmalı

$\Rightarrow 0 < K < 330$

2) 

a) Şekilde verilen kapalı çevrim sistemde $\alpha = 3$ için K'nın değişen pozitif değerlerine bağlı olarak kök eğrisini çiziniz.

($\frac{d}{ds} GH = 0$ yapan değerler $s_1 = 0,935$, $s_{2,3} = -1,717 \mp j0,511$'dir.)

$$GH(s) = \frac{Ks}{(s^2+2s+2)(s+3)}$$

$n = 3$, $m = 1$

kutuplar: $-3, -1 \mp j$

sıfırlar: 0

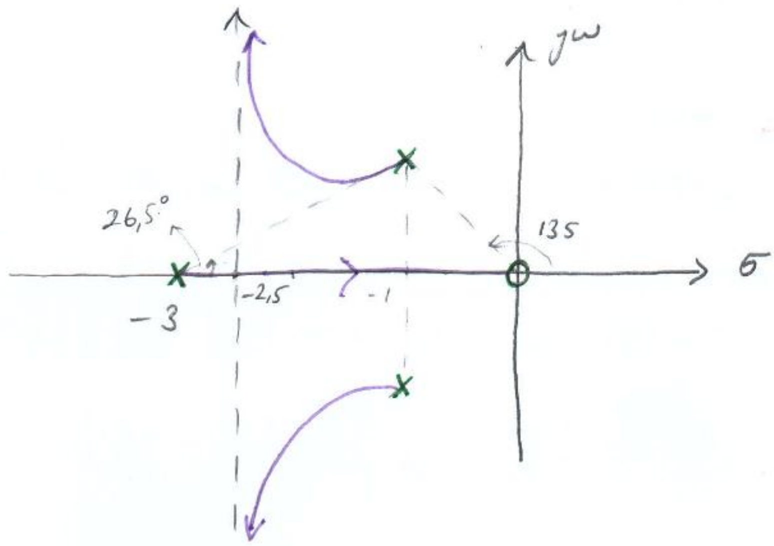
$n-m = 2$ adet asimptot

$$\theta_i = \frac{2i+1}{3-1} \cdot 180 = 90^\circ, 270^\circ$$

$$\sigma = \frac{(-3-1-1)-(0)}{3-1} = -2{,}5$$

$-1+i$ için çıkış açısı

$$135-(\theta+26{,}5+90) = (2i+1)180 \Rightarrow \theta = 198{,}5$$



$\frac{d}{ds}GH=0$ yapan $s_{1,2,3}$ değerleri $1+GH=0$ karakteristik denklemini sağlamadığından kopma noktaları değildir.

b) Aynı sistemde $K=1$ için α'nın değişen pozitif değerlerine bağlı olarak kök eğrisini çiziniz.

($\frac{d}{ds}GH' = 0$ yapan değerler: $s_{1,2} = -0{,}268 \mp j1{,}311$ $\quad s_{3,4} = -1{,}732 \mp j0{,}593$)

Not. Burada GH' α'ya göre düzenlenmiş eşdeğer açık çevrim transfer fonksiyonudur.

$$GH(s) = \frac{s}{(s^2+2s+2)(s+\alpha)} \qquad GH+1 = \frac{s}{(s^2+2s+2)(s+\alpha)} + 1 = 0$$

$$(s^2+2s+2)(s+\alpha)+s = s^3+(2+\alpha)s^2+(3+2\alpha)s+2\alpha = 0$$

$$s^3+2s^2+3s+\alpha(s^2+2s+2) = 0$$

$$\alpha\frac{(s^2+2s+2)}{s^3+2s^2+3s} + 1 = 0$$

$$GH' = \frac{\alpha(s^2+2s+2)}{s(s^2+2s+3)}$$

→ $n = 3$, $m = 2$

→ kutuplar: $0, \; -1 \mp 1{,}44j$

→ sıfırlar: $-1 \mp j$

→ $n - m = 1$ adet asimptot

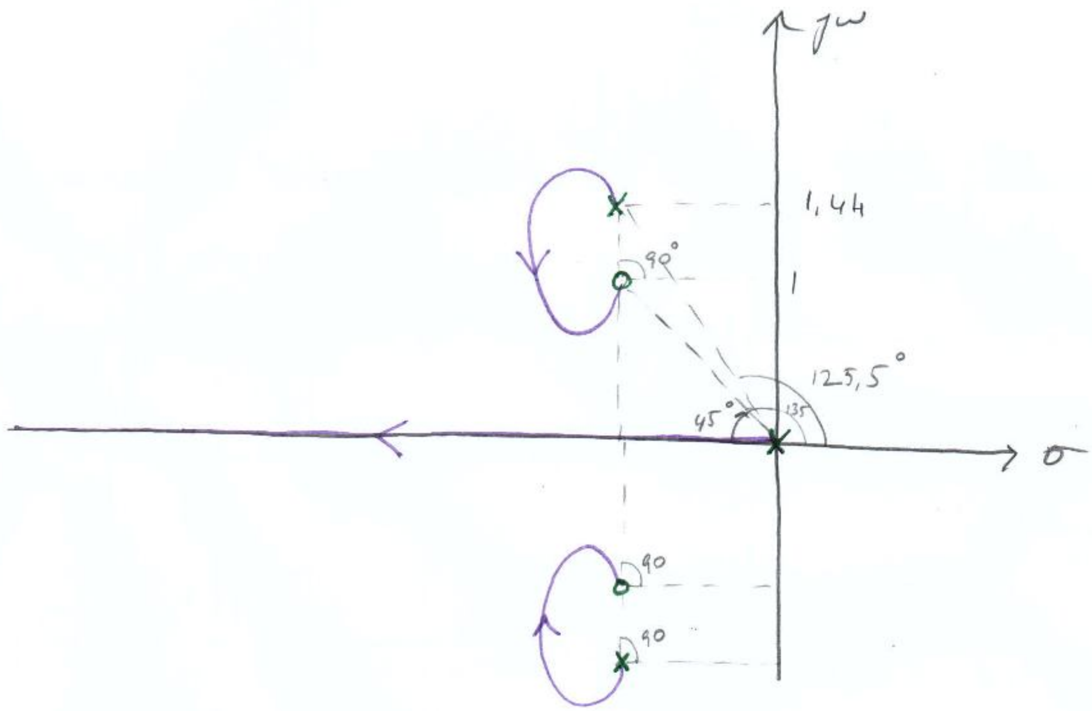
→ $\theta_i = \dfrac{2i+1}{3-2} \, 180 = 180°$

→ $-1 + 1{,}44j$ için çıkış açısı

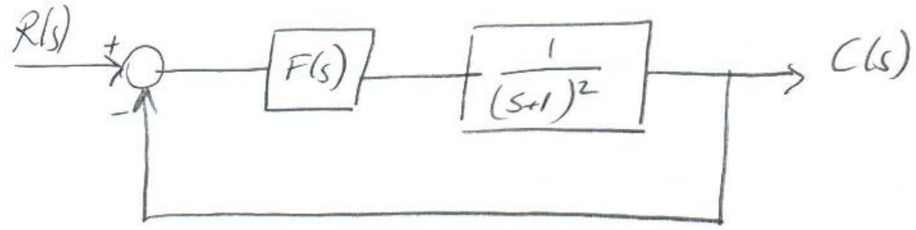
$$(90+90) - (\theta + 90 + 125{,}5) = (2i+1)180 \Rightarrow \theta = 144{,}5°$$

→ $-1 + j$ için giriş açısı

$$(\theta + 90) - (270 + 90 + 135) = (2i+1)180 \Rightarrow \theta = 225°$$



$\dfrac{dGH'}{ds} = 0$ yapan s değerlerinden hiçbiri $1 + GH'$ karakteristik denklemini sağlamadığından hiçbiri kopma noktası değildir.

3) 

Yukarda verilen kapalı çevrim sistemin doğal frekası $\omega_n = 1$ olan sönümsüz bir sistem ($\xi = 0$) olabilmesi için mümkün olduğunca basit bir kontrolör ($F(s)$) öneriniz.

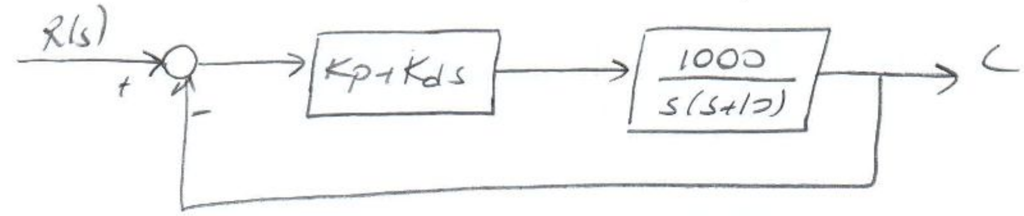
$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s^2+2s+1}$$

$$T(s) = \frac{F(s)\,G(s)}{1+F(s)\,G(s)} = \frac{F(s)}{s^2+2s+1+F(s)}$$

$$q(s) = s^2 + 2s + 1 + F(s)$$

$$q_1(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 1$$

$$q(s) = q_1(s) \Rightarrow F(s) = -2s$$

4) 

Hız hata katsayısını 1000 ve sönüm oranını $\xi = 0,5$ yapan PD kontrolörünü bulunuz.

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} s\,(K_p + K_d s)\frac{1000}{s(s+10)}$$

$$K_v = 100\,K_p = 1000$$

$$\Rightarrow K_p = 10 \text{ olur.}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1000\,(K_p + K_d s)}{s^2 + (10 + 1000\,K_d)\,s + 1000\,K_p}$$

$$s^2 + (10 + 1000\,K_d)\,s + 1000\,K_p = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$1000\,K_p = \omega_n^2 \quad \Rightarrow \quad K_p = 10 \text{ için } \omega_n = 100$$

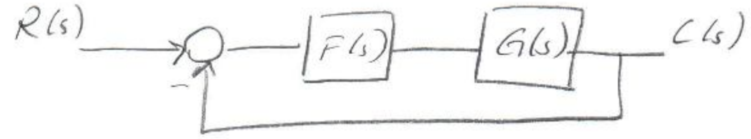
$$10 + 1000\,K_d = 2\xi\omega_n \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 100 \text{ için } K_d = 0.09 \text{ olur.}$$

5) 2008-2009 Güz 2. Vize 2. Soru

Aşağıda blok diyagramı verilen bir robot kolu sisteminde $F(s)=K_p$ ve $G(s)=\dfrac{s+10}{s(s+3)(s^2+4s+8)}$ olduğu bilinmektedir.

$\dfrac{\partial G(s)}{\partial s}=0$ denklemini $s_1=-12,78$, $s_2=-1,273$ ve

$s_{34}=-1,97\mp j1,01$ noktaları için sağlamaktadır.



a) Sistemi kararlı yapan K_p kazanç aralıklarını bulunuz.

$$T(s)=\frac{(s+10)K_p}{s^4+7s^3+20s^2+(24+K_p)s+10K_p}$$

$$p_c(s)=s^4+7s^3+20s^2+(24+K_p)s+10K_p$$

s^4	1	20	K_p
s^3	7	$24+K_p$	
s^2	$\frac{116-K_p}{7}$	$10K_p$	
s^1	$\frac{K_p^2+398K_p-2784}{K_p-116}$		
s^0	$10K_p$		

$$\frac{116-K_p}{7}>0 \Rightarrow K_p<116$$

$$\frac{K_p^2+398K_p-2784}{K_p-116}>0 \Rightarrow -404,87<K_p<6,87$$

$$10K_p>0 \Rightarrow K_p>0$$

$$\boxed{0<K_p<6,87}$$

b) Kapalı çevrim sistem kutuplarının $K_p \geq 0$ kazancının değişimine göre nasıl değiştiğini inceleyiniz.

$$G(s) = \frac{s+10}{s(s+3)(s^2+4s+8)}$$

1) 4. dereceden sistem 4 kol

2) Kutuplar ($K_p = 0$): $s_1 = 0$, $s_2 = -3$, $s_{3,4} = -2 \mp 2j$

Sıfırlar ($K_p = \infty$): $s_1 = -10$ $\quad s_{2,3,4} = \infty$

3) Kök eğrisi reel eksene göre simetriktir.

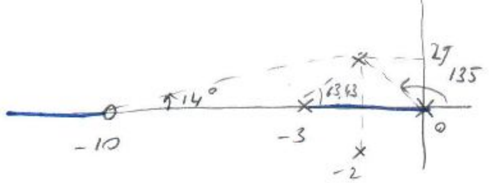
4) Asimptot açıları $n = 4$, $m = 1$

$$\theta_i = \frac{2i+1}{n-m} 180 = 60°, 180°, 300°$$

5) Asimptotların kesişim noktası

$$\sigma = \frac{-3-2-2-(-10)}{n-m} = 1$$

6) Gerçek eksendeki kök eğrisi



7) $s_3 = -2+2j$ için çıkış açısı

$$14 - (135 + 90 + 63{,}43 + \theta) = (2i+1)180 \Rightarrow \theta = 265{,}6°$$

8) Kök eğrilerinin sanal ekseni kesme noktaları

a) çıkkında elde edilen Routh tablosundan

$$\frac{116 - K_p}{7} s^2 + 10K_p = 0 \qquad K_p = K_c = 6{,}876$$

$$K_p = 6{,}876 \Rightarrow 15{,}59\, s^2 + 68{,}76 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \mp 2{,}1j$$

Routh tablosundan

$$\frac{K_p^2 + 398K_p - 2784}{K_p - 116} = 0 \Rightarrow K_c = K_p = 6{,}876$$

5) Kopma noktaları

$s_1 = -12,78 \quad s_2 = -1,273 \quad s_{3,4} = -1,97 \mp j\,1,01$

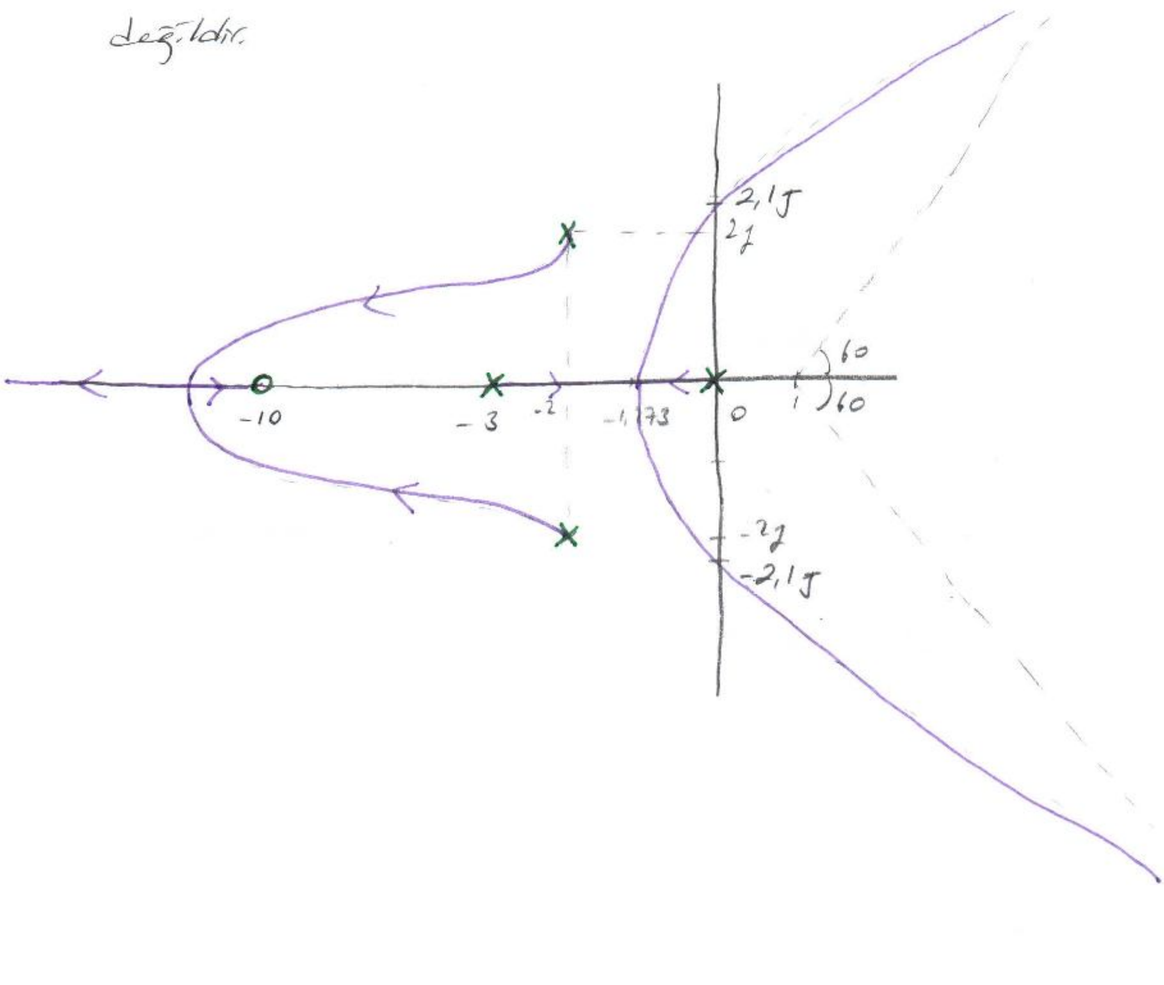
6. bölümde elde edilen kök eğrisine bakılacak s_1 ve s_2 'nin pozitif kök eğrisi için kopma noktası olacağı görülür.
$s_{3,4}$ için karakteristik denklemi sağlayan bir K var mı diye bakılabilir.

$$s^4 + 7s^3 + 20s^2 + (24 + K_p)s + 10K_p = 0$$

$s_3 = -1,97 + 1,01j$ için

$$-9,03152 + 8,03k + j(1,01K_p - 3,01475) = 0$$

denklemini sağlayan bir K_p değeri olmadığından $s_{3,4}$ kopma noktası değildir.



c) Kapalı çevrim sistemde %2 lik band için yerleşme zamanı 4 sn olacak şekilde ayarlayacak K_p değerini bulunuz.

$$T_s = \frac{4}{\xi w_n} = 4 \Rightarrow \xi w_n = 1$$

$$p_c(s) = (s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)(s^2 + as + b)$$

$p_c(s)$ polinomu a şıkkında bulunan karakteristik denklemle eşitlenirse

$$\left.\begin{aligned} 10K_p &= b w_n^2 \\ 24 + K_p &= a w_n^2 + 2b \\ w_n^2 + 2a + b &= 20 \\ a + 2 &= 7 \end{aligned}\right\}$$

$$a = 5$$

$$w_n^2 = 10 - b$$

$$K_p = \frac{b(10-b)}{10} = \frac{10b - b^2}{10}$$

$$24 + \frac{10b - b^2}{10} = 5(10-b) + 2b$$

$$b_1 = 8{,}17 \qquad b_2 = 31{,}83$$

$$w_n^2 = 1{,}83 \qquad \cancel{w_n^2 = -21{,}83}$$

$$\boxed{K_p = 1{,}495}$$

d) Bu sistem için yerleşme zamanı en az kaç sn yapılabilir?

Kök eğrisinin kopma noktalarına bakılacak olursa baskın kutuplar için $\sigma = -\xi w_n$ en fazla $-1{,}273$ noktasına kadar çekilebilir.

$$T_s = \frac{4}{\xi w_n} = \frac{4}{1{,}273} = 3{,}15 \text{ sn olur.}$$

Kök eğrisi çizimi (Özet)

1) Kutupları ($K=0$) belirle
Sıfırları ($K=\infty$) belirle

2) Kök eğrisindeki kol sayısı = max (n, m)
= karakteristik denklemin mertebesi

n: kutup sayısı
m: sıfır sayısı

3) Kök eğrisi reel eksene göre simetriktir

4) Asimptotlar ($s \to \infty$) davranışı

Asimptot açıları = $\theta_i = \dfrac{2i+1}{n-m} 180^\circ$

Asimptotların kesişim noktası = σ_i

$$\sigma_i = \frac{\sum GH(s)\text{'in sonlu kutupları} - \sum GH(s)\text{'in sonlu sıfırları}}{n-m}$$

5) Gerçek eksende kök eğrisi

Gerçek eksenin belirli bir kısmında eğer bu kısmın sağ tarafında yer alan $GH(s)$'in toplam kutup ve sıfır sayısı "tek" ise $0 < K < \infty$ için bu kısım kök eğrisine "dahildir."

6) Kök eğrilerinde kutuplardan çıkış sıfırlara giriş açıları

Kök eğrilerinde GH(s)'in kutup ve sıfırlarından giriş ve çıkış açıları bu kutbun (veya sıfırın) çok yakınında bulunan bir s_1 noktasına açı koşulu uygulanarak bulunur.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{sıfırlardan } s_1\text{'e çizilen vektörlerin} \\ \text{reel eksen ile yaptığı pozitif} \\ \text{yöndeki açıların toplamı}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l}\text{kutuplardan } s_1\text{'e çizilen vektörlerin} \\ \text{reel eksen ile yaptıkları} \\ \text{pozitif yöndeki açıların toplamı}\end{array}\right\} = 180(2i+1)$$

7) Sanal ekseni ($j\omega$ eksenini) kesmek

I. Yol Routh Hurwitz

örnek: $s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$

s^3	1	2
s^2	3	K
s^1	$(6-K)/3$	
s^0	K	

$\frac{6-K}{3} = 0 \Rightarrow K_{kr} = 2$

$3s^2 + K = 0 \xrightarrow{K=2} 3s^2 + 2 = 0$

$s_{1,2} = \mp j\sqrt{2}$

II. Yol karakteristik denklem

örnek: $s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$ $\quad s = j\omega$ için

$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + K = 0 \Rightarrow K - 3\omega^2 + j(2\omega - \omega^3) = 0 + 0j$

$\Rightarrow \omega = \mp\sqrt{2}\,, \quad K = 6$

8) Kopma noktaları

$\frac{d\,GH(s)}{ds} = 0$ yapan değerlerden karakteristik denklemi sağlayanlar kopma noktasıdır.