S: a) Maxwell denklemlerini (zaman bölgesi) yazarak anlamlarını 1-2 cümle ile açıklayınız.

b) $\vec{E}(x,y,z;t) = E_x \cdot \vec{e_x} + E_y \cdot \vec{e_y} + E_z \cdot \vec{e_z}$

$\vec{H}(x,y,z;t) = H_x \vec{e_x} + H_y \cdot \vec{e_y} + H_z \cdot \vec{e_z}$

olduğuna göre, elektrik ve manyetik alan bileşenlerini ($E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$) birbiri ile ilişkilendiren 6 denklemi yazınız.

C: a) (...)

b) $\nabla \times \vec{E} = \dfrac{-\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \cdot \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

$\nabla \times \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J_\sigma} + \vec{J_v} = \varepsilon \cdot \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \cdot \vec{E} + \vec{J_v}$

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{e_x}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) - \vec{e_y}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) + \vec{e_z}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{e_x} \cdot \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) - \vec{e_y} \cdot \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z}\right) + \vec{e_z} \cdot \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)$$

O halde,

(1) $\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \cdot \dfrac{\partial H_x}{\partial t}$

(2) $\dfrac{\partial E_z}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = \mu \cdot \dfrac{\partial H_y}{\partial t}$

(3) $\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \cdot \dfrac{\partial H_z}{\partial t}$

(4) $\dfrac{\partial H_z}{\partial y} - \dfrac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \cdot \dfrac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma \cdot E_x + J_{v_x}$

(5) $\dfrac{\partial H_z}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial z} = -\varepsilon \dfrac{\partial E_y}{\partial t} - \sigma \cdot E_y - J_{v_y}$

(6) $\dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon \dfrac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma \cdot E_z + J_{v_z}$

Q: For a sourceless and lossless media, obtain a general solution for Helmholtz equation, where the solution is known as in form,

$$\vec{E} = \vec{e_x} \cdot E_x(z)$$

After that, find the exact solution under following boundary conditions.

$$E_x(0) = 2 \quad ; \quad \frac{dE_x(0)}{\partial z} = 1$$

Also find time domain expression of the solution.

A:

a) $$\frac{\partial^2 E_x(z)}{\partial z^2} + k^2 E_x(z) = 0$$

$$E_x = e^{rz} \;;$$

$$r^2 e^{rz} + k^2 e^{rz} = 0 \Rightarrow r = \pm jk$$

General solution,

Hangisine A, B dediğimiz önemli değil, sonuç aynı gelecek

$$\leftarrow E_x(z) = A\, e^{-jkz} + B \cdot e^{jkz}$$

Boundary conditions,

b) $$E_x(0) = A + B = 2$$

$$\frac{\partial E_x(0)}{\partial z} = -jk \cdot A + jk \cdot B = 1$$

$$\Rightarrow 2B \cdot jk = 2jk + 1 \Rightarrow B = \frac{2jk+1}{2jk} = 1 - j \cdot \frac{1}{2k}$$

$$\Rightarrow A = 2 - \left(1 - j \cdot \frac{1}{2k}\right) \Rightarrow A = 1 + j \cdot \frac{1}{2k}$$

$$\Rightarrow E_x(z) = e^{-jkz} + j\frac{1}{2k} e^{-jkz} + e^{jkz} - j \cdot \frac{1}{2k} e^{jkz}$$

$$\left[\begin{aligned} \cos x &= (e^{jx} + e^{-jx})/2 \\ \sin x &= (e^{jx} - e^{-jx})/2j \end{aligned}\right]$$

$$\Rightarrow E_x(z) = 2\cos(kz) + \frac{1}{k} \cdot \sin(kz)$$

$$\Rightarrow E_x(z,t) = Re\{E_x(z) \cdot e^{-j\omega t}\} = \underbrace{2 \cdot \cos(kz) \cdot \cos(\omega t) + \frac{1}{k} \cdot \sin(kz) \cos(\omega t)}_{\text{Standing wave (Duran dalga)}} \;//$$

$$\boxed{\cos(\omega t) = \cos(-\omega t)}$$

$$\rightarrow \vec{E}(z,t) = E_x(z,t) \cdot \vec{e_x}$$

c) $$\vec{H} = \frac{1}{\eta} \vec{n} \times \vec{E}$$

$$= \frac{1}{\eta} (\vec{e_z} \times \vec{e_x})\, E_x(z)$$

(Böyle varsaydım soru için çok önemli değil.)

$$= \frac{1}{\eta} \cdot \vec{e_y} \cdot \left[2\cos(kz) + \frac{1}{k} \sin(kz)\right]$$

$$= \left[\frac{2}{\eta} \cos(kz) + \frac{1}{k\eta} \cdot \sin(kz)\right] \vec{e_y}$$

$$\vec{H}(z,t) = Re\{\vec{H}(z) \cdot e^{-j\omega t}\} = (\ldots)$$

CamScanner ile tarandı

Q: Manyetik olmayan, kayıpsız bir ortamda ilerleyen dalgaya ilişkin manyetik alan vektörü aşağıdaki gibi verilmiştir

$$\vec{H}(y,t) = 4\sin(10^8 t - 2y)\,\vec{e_x} \quad [A/m]$$

Buna göre,

a) Ortamın dalga empedansı?

b) Dalgaboyu?

c) Manyetik alana eşlik eden elektrik alan vektörünün açık ifadesi?

A.

a)
$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

$$\beta = \frac{w}{v} \Rightarrow v = \frac{w}{\beta} \Rightarrow \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{10^8}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\varepsilon_r} = \frac{2 \cdot 3\times 10^8}{10^8} = 6 \Rightarrow \varepsilon_r = 36$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{\eta_0}{\sqrt{36}} = \frac{120\pi}{6} = 20\pi \;//$$

b)
$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{2} = \pi \;//$$

c)
$$\vec{H} = \frac{1}{\eta}\,\vec{n}\times\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = -\eta \cdot \vec{n}\times\vec{H}$$

(Bu ifadeler fazör bölgesi için geçerli!! Fakat ben burada doğrudan zaman bölgesi sorusunu yazmıştım. Zaman bölgesi için bu ifadeler kullanılamaz. Normalde fazörde bulup sonra zamana geçmek gerekir.)

$$\Rightarrow \vec{H}(y) = -4 \cdot \cos(10^8 t - 2y + \pi/2) \cdot \vec{e_x}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = +20\pi \cdot (\vec{e_y}\times\vec{e_x})\,|\vec{H}|$$

$$= -80\pi \cdot \cos(10^8 t - 2y + \pi/2) \cdot \vec{e_z} \;//$$

Q: Manyetik alan vektörü aşağıdaki gibi verilen bir düzlem dalga $\varepsilon_r = 9$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 0$ olan bir ortamda ilerlemektedir. Buna göre, aşağıdaki soruları cevaplayınız.

$$\vec{H} = 3 . \cos(2.10^8 t + kx) . \vec{e_y} \quad A/m$$

a) $k = ?$, $\lambda = ?$, $T = ?$

b) Dalganın 2λ yolu alması için gereken süre $= ?$

c) Eşlik eden elektrik alan vektörü $= ?$

A: a) $k = \dfrac{w}{v} = \sqrt{\varepsilon_r} . k_0 = \sqrt{9} . \dfrac{w}{c} = \dfrac{3 . 2.10^8}{3.10^8} = 2$ //

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \pi \ [m]$ //

$f = \dfrac{c}{\lambda} = \dfrac{3.10^8}{\pi} = \dfrac{3}{\pi} . 10^8 \Rightarrow T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{\pi}{3} . 10^{-8} [s]$ //

b) Dalganın hızı,

$v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_r . \varepsilon_0}} = \dfrac{c}{3} = 10^8 \ [m/s]$

$\Rightarrow v.t = 2\lambda \Rightarrow t = \dfrac{2 . \pi \ [m]}{10^8 \ [m/s]} = 2\pi . 10^{-8} \ [s]$

c) $\vec{H} = \dfrac{1}{\eta} . \vec{n} \times \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = -\eta . \vec{n} \times \vec{H}$, $\eta = \dfrac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \dfrac{\eta_0}{3} = 40\pi$

$\vec{E} = -40\pi . (-\vec{e_z}) \times (\vec{e_y}) . 3 e^{-j\pi x}$

$= -120\pi \ e^{-j\pi x} . \vec{e_x} \Rightarrow \vec{E}(x,t) = -120\pi . \cos(2.10^8 t + \pi x) \vec{e_x}$ //

Hava ortamındaki bir EM dalgaya ait elektrik alan vektörü,

$$\vec{E}(z,t) = 4.\sin(4\pi.10^7 t + \beta z + \pi/4) . \vec{e_x}$$

olarak verilmiştir. Buna göre,

a) Dalganın ilerleme yönü, elektrik alan vektörünün yönü, ve manyetik alan vektörünün yönü nedir?

b) Faz sabiti ve dalga boyunun değeri nedir?

c) Fazör domeni elektrik alan ifadesini yazın. Buna karşı düşen manyetik alan vektörünün ifadesini bulun.

d) Bulduğunuz fazör domeni ifadelerin fazör domeni Maxwell denklemlerini sağladığını gösterin.

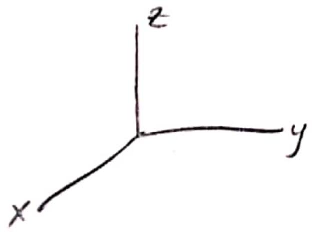
Buraya ex yazdıysanız puan kırmayacagım. Faz terimi zaman bölgesinde bir sinusoidal fonk. olduğundan, yönü sadece ex değil, aynı zamanda -ex tir. Yani t'ye bağlı olarak değişir. Bunu belirtmek için çözümü bu şekilde yapmışım.

4

a) Elektrik alan yönü : $\vec{e_x}$, $-\vec{e_x}$

İlerleme yönü : $-\vec{e_z}$

Manyetik alan yönü :



sağ el kuralı yardımıyla

$\vec{E} \rightarrow \vec{e_x}$ için , $(-\vec{e_z}) \times (\vec{e_x}) = -\vec{e_y}$

$E \rightarrow -\vec{e_x}$ iken , $(-\vec{e_z}) \times (-\vec{e_x}) = \vec{e_y}$ //

b) Kayıpsız ortam, çünkü herhangi bir negatif üstel yok

$\Rightarrow k = \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \rightarrow$ Hava için , $\beta = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{\omega}{c}$

$$\Rightarrow \beta = \frac{4\pi.10^7}{3.10^8} = 2\pi/15$$

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{f.\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 15 \text{ m} \quad //$$

c)

$$\vec{E}(z,t) = 4.\cos(4\pi.10^7.t + \beta z + \pi/4)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = 4\, e^{-j(\beta z + \pi/4)}\, \vec{e_x}$$

$$\vec{H}(z) = \frac{1}{\eta}\, \vec{n} \times \vec{E}(z)$$

$\eta = \eta_0$: dalga empedansı $= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$

$$\vec{n} = -\vec{e_z}$$

$$\Rightarrow \vec{H}(z) = \left(\frac{1}{120\pi}\right).(-\vec{e_z}) \times (4.e^{-j(\beta z + \pi/4)}\, \vec{e_x})$$

$$= \frac{1}{30\pi}.e^{-j(\beta z + \pi/4)}.(-\vec{e_z} \times \vec{e_x})$$

$$= -\frac{1}{30\pi}.e^{-j(\beta z + \pi/4)}\, \vec{e_y} = -0,0106.\,e^{-j(\beta z + \pi/4)}\, \vec{e_y}$$ //

d) Faraday yasası : $\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = +j\omega\mu_0 \vec{H}$

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{e_y}.\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\vec{e_y}.\,j\beta.\,4.\,e^{-j(\beta z + \pi/4)}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = -\vec{e_y}.\frac{4\beta}{\omega\mu_0}.e^{-j(\beta z + \pi/4)}$$

$$\frac{4\beta}{\omega\mu_0} = \frac{4\left(\frac{2\pi}{15}\right)}{4\pi.10^7.\,4\pi.10^{-7}} \cong 0,0106$$ // ✓

Ampere yasası,

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \vec{H} = -j\omega . \varepsilon_0 . \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{H} = -\vec{e_x} \frac{\partial H_y}{\partial z} = -j\beta . 0{,}0106 . e^{-j(\beta z + \pi/4)} \vec{e_x}$$

$$\Rightarrow -j\beta . 0{,}0106 . e^{-j(\beta z + \pi/4)} . \vec{e_x} = -j\omega \varepsilon_0 . \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\beta . 0{,}0106}{\omega \varepsilon_0} . e^{-j(\beta z + \pi/4)} . \vec{e_x}$$

$$\frac{\beta . 0{,}0106}{\omega \varepsilon_0} = \frac{(2\pi/15)(0{,}0106)}{(4\pi 10^{7})(\frac{1}{36\pi}.10^{-9})} = 3{,}996 \approx 4 \quad \checkmark$$

Gauss Yasası,

$$\nabla \vec{D} = \rho \Rightarrow \varepsilon_0 \vec{\nabla} . \vec{E} = \rho \Rightarrow \varepsilon_0 . \nabla . \vec{E} = 0$$ Kaynak yok

$$\Rightarrow \varepsilon_0 . \left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial E_x}{\partial x}}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial z}}_{0} \right) = 0 \quad \checkmark$$

Manyetik için Gauss yasası,

$$\nabla . \vec{B} = 0 \Rightarrow \mu \nabla . \vec{H} = 0 \Rightarrow \nabla . \vec{H} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cancel{\frac{\partial H_x}{\partial x}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial H_y}{\partial y}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial H_z}{\partial z}}}_{0} = 0 \quad \checkmark$$