SAYISAL İNTEGRASYON

$\int_a^b f(x)dx$ ifadesi $f(x)$ reel fonksiyonunun (a,b) aralığında belirli integrali olarak adlandırılır.

$$\int_a^b f(x)dx =: \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

Riemann anlamında integral

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \Longrightarrow I(f) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Analizin (Kalkülüs) Temel Teoremi

$f(x)$ i türev kabul eden $F(x)$ doğrudan bulunamıyorsa
integral hesap sayısal olarak gerçekleştirilmek zorundadır

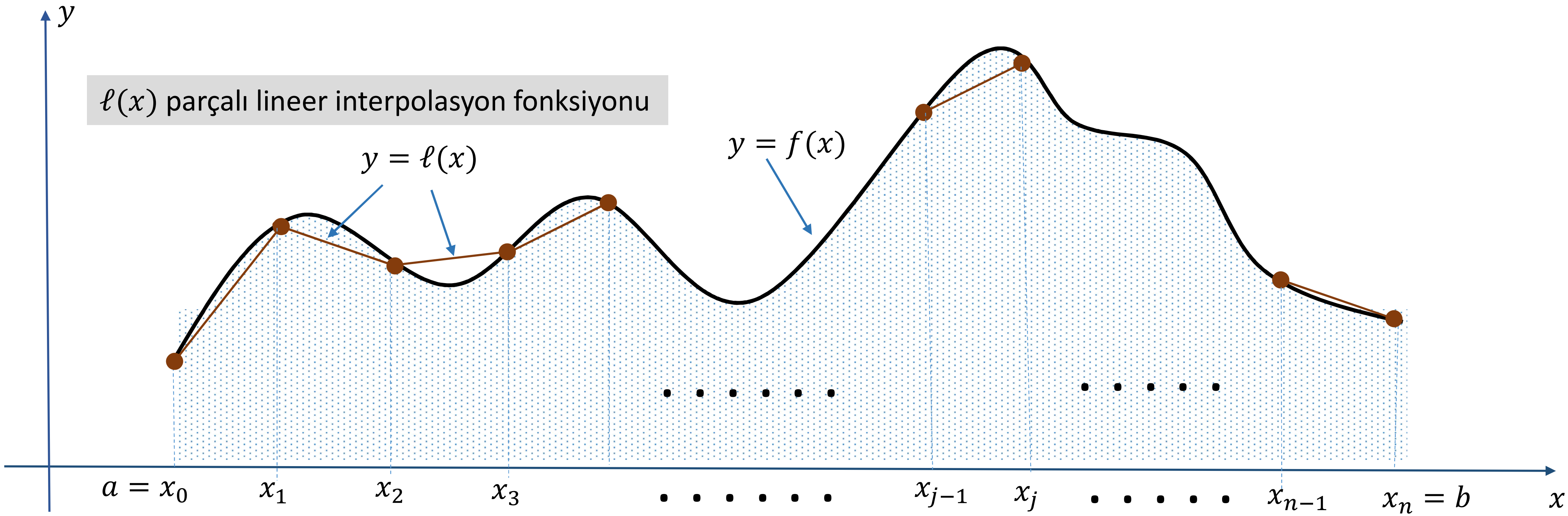
$$\int_0^1 e^{-x^2}dx, \qquad \int_0^\pi \sqrt{x}\cos(x^3)dx, \qquad \int_0^\infty \frac{\log(x+\gamma)}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} e^{-\beta x}dx$$

İntegrallerini doğrudan hesaplamak mümkün görünmüyor

SAYISAL İNTEGRASYON : Trapez Yöntemi

İki Temel Sayısal İntegrasyon Yöntemi:

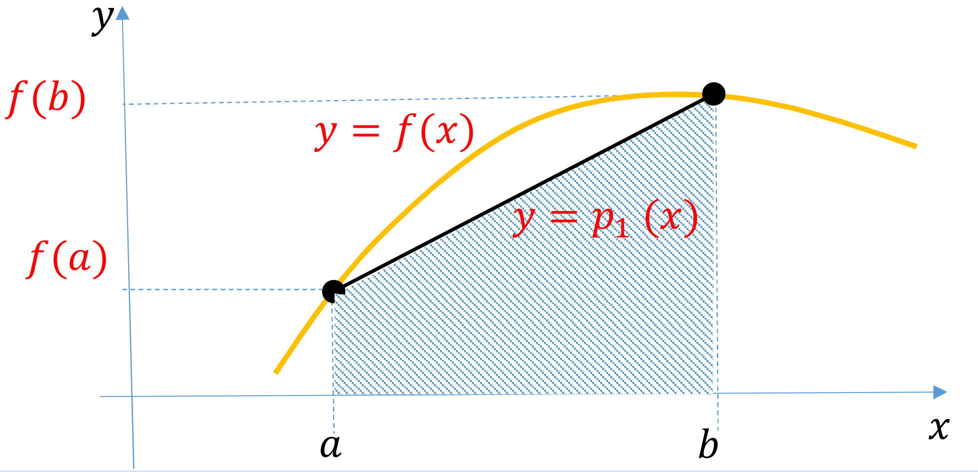
- Trapez Yöntemi: (Lineer İnterpolasyon)
- Simpson Yöntemi: (Kuadratik İnterpolasyon)



Trapez Yöntemi: (Lineer İnterpolasyon) $\Longrightarrow$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b \ell(x)dx$$

SAYISAL İNTEGRASYON : Trapez Yöntemi



$$p_1(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p_1(x)dx = Taralı\ Alan$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \cong T_1(f) = \int_a^b p_1(x)dx = (b-a)[\frac{f(a)+f(b)}{2}]$$

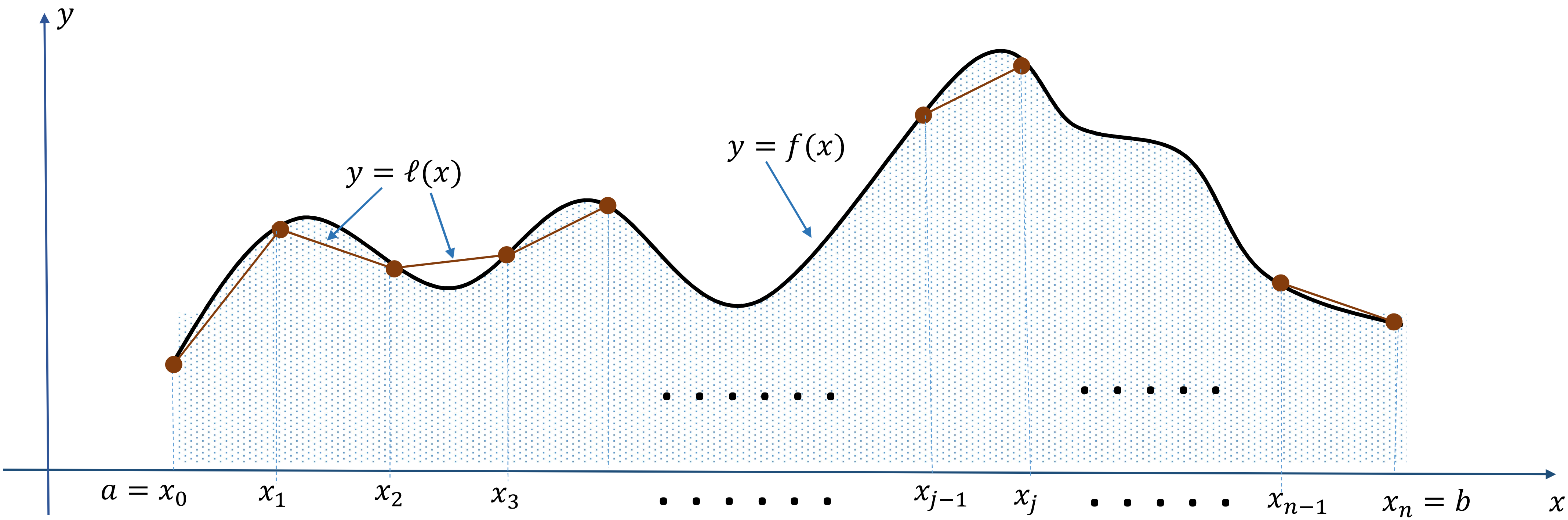
Aralıkta fonksiyonun değişimi lineere yakınsa bu şekilde çok kabaca sadece 2 nokta ile integrasyon gerçekleştirilebilir.

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log(1+x)\Big|_0^1 = \log(2) \cong 0.693147$$

$$Hata = I - T_1 \cong -0.0569 \longmapsto \approx \%8\ \boldsymbol{bağıl\ hata}$$

$$T_1(f) = \int_a^b p_1(x)dx = (b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right] = (1-0)\left[\frac{\frac{1}{1+0}+\frac{1}{1+1}}{2}\right] = 0.75$$

SAYISAL İNTEGRASYON : Trapez Yöntemi



Genel halde ise aralığın tamamı daha küçük parçalara bölünerek her bir alt aralıkta fonksiyon lineer polinomlarla yaklaşık olarak temsil edilir ve bir toplama ile integrasyon gerçekleştirilmiş olur.

SAYISAL İNTEGRASYON : Trapez Yöntemi

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$ İntegralinde $(0,1)$ aralığı 2 eşit parçaya bölünürse;

$$Hata = I - T_2 = -0.0152 \longmapsto \approx \%2\ \textbf{bağıl hata}$$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{1+x} \cong T_2(f) = \frac{1}{2}\left[\frac{1+\frac{2}{3}}{2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{2}\right] = \frac{17}{24} = 0.70833$$

Genel Formül :
Aralık Sayısı n ve aralıklar eşit uzunlukta ise:

$$h = \frac{b-a}{n};\ \ x_j = a + j\,h;\ \ j = 0,1,2,\dots,n$$ Alt aralıkların uç noktaları x_j ler olmak üzere

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{a=x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x)dx$$

$$I(f) \approx T_n(f) = h\left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\right] + h\left[\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right] + \dots + h\left[\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right]$$

SAYISAL İNTEGRASYON : Trapez Yöntemi

$$I(f) \approx T_n(f) = h\left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\right] + h\left[\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right] + \quad \dots + h\left[\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right] \longrightarrow$$

$$I(f) \approx T_n(f) = h[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)]$$

Trapezoidal Sayısal İntegrasyon Formülü

$Örnek$:

$$I^{(1)} = \int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.746824132812427$$

$$I^{(2)} = \int_0^4 \frac{dx}{1+x^2} = tan^{-1}(4) = 1.32581766366803$$

$$I^{(3)} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = 3.627598722846844$$

Tüm iç noktalar toplamaya 2 defa giriyorlar
Uç noktalar ise bir kez gözüküyorlar.
Tüm terimler $h/2$ ile çarpılıyorlar

SAYISAL İNTEGRASYON : Trapez Yöntemi

n	Hata($I^{(1)}$)	Oran($I^{(1)}$)	Hata($I^{(2)}$)	Oran($I^{(2)}$)	Hata($I^{(3)}$)	Oran($I^{(3)}$)
2	$1.55\ 10^{-2}$	-	$-1.33\ 10^{-1}$	-	$-5.61\ 10^{-1}$	-
4	$3.84\ 10^{-3}$	4.02	$-3.59\ 10^{-3}$	37	$-3.76\ 10^{-2}$	14.9
8	$9.59\ 10^{-4}$	4.01	$5.64\ 10^{-4}$	-6.37	$-1.93\ 10^{-4}$	195
16	$2.4\ 10^{-4}$	4.0	$1.44\ 10^{-4}$	3.92	$-5.19\ 10^{-9}$	37600
32	$5.99\ 10^{-5}$	4.0	$3.60\ 10^{-5}$	4.0	---	
64	$1.5\ 10^{-5}$	4.0	$9.01\ 10^{-6}$	4.0	---	
128	$3.74\ 10^{-6}$	4.0	$2.25\ 10^{-6}$	4.0	---	

$$I^{(1)} = \int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.746824132812427$$

$$I^{(2)} = \int_0^4 \frac{dx}{1+x^2} = tan^{-1}(4) = 1.32581766366803$$

$$I^{(3)} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = 3.627598722846844$$

$$oran = \frac{I - T_n}{I - T_{2n}} = \frac{(hata)_n}{(hata)_{2n}}$$

SAYISAL İNTEGRASYON : Trapez Yöntemi

Trapez Yöntemi İçin Hata Analizi

Teorem: $f(x)$, $[a,b]$ aralığında 2 defa türevlenebilir bir fonksiyon ve $n > 0$ tam sayı olmak üzere $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ integralinin Trapez yöntemi ile hesaplanan yaklaşık değeri $T_n(f)$ ise hata

$$E_n^T(f) = I(f) - T_n(f) = \frac{-h^2(b-a)}{12} f''(c_n); \quad c_n \in (a,b), \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = log2\,; \ [a,b] = [0,1] \Longrightarrow (b-a) = 1; h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n};$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$E_n^T(f) = \frac{-h^2(b-a)}{12} f''(c_n) = \frac{-h^2}{12} f''(c_n); \quad 0 < c_n < 1$$

$$\max_{0<c_n<1} f''(c_n) = \max_{0<c_n<1} \frac{2}{(1+x)^3} = 2$$

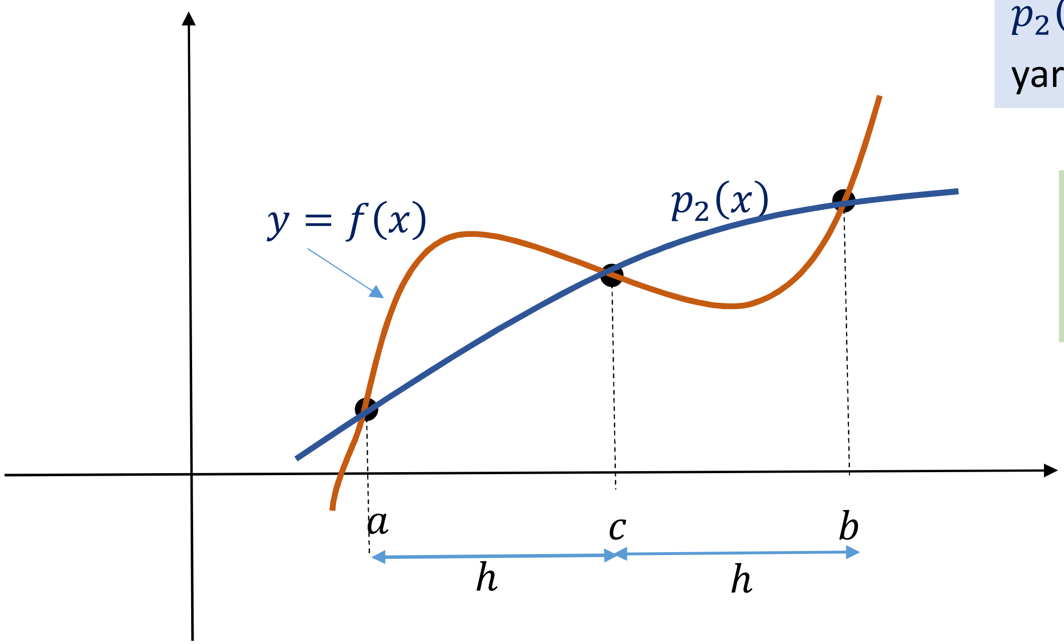
$$|E_n^T(f)| \le \frac{2h^2}{12} = \frac{h^2}{6} \Longrightarrow |E_n^T(f)| \le \frac{1}{6n^2}$$

$$n = 1 \Longrightarrow |E_1^T(f)| \le \frac{1}{6} \cong 0.167$$

$$n = 2 \Longrightarrow |E_2^T(f)| \le \frac{1}{24} \cong 0.0417$$

$$n = 16 \Longrightarrow |E_2^T(f)| \le \frac{1}{6\ 16^2} \cong 0.00065$$

SAYISAL İNTEGRASYON : Simpson Yöntemi



$p_2(x)$; $f(x)$ fonksiyonunu $x = a, x = c = \frac{a+b}{2}, ve\ x = b$ noktaları yardımıyla interpole eden 2. derece polinom olmak üzere

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \cong S_2\,(f) = \int_a^b p_2(x)dx$$

$$h = \frac{b-a}{2} \qquad \text{c} = \frac{b+a}{2}$$

$$p_2(x) = f(a)\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} + f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}$$

$$\int_a^b \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}dx = \int_a^b \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}dx = \frac{1}{2h^2}\int_0^{2h} (u-h)(u-2h)du = \frac{h}{3},$$

$$\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = \frac{4h}{3}$$

SAYISAL İNTEGRASYON : Simpson Yöntemi

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \cong S_2\ (f) = \int_a^b p_2(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

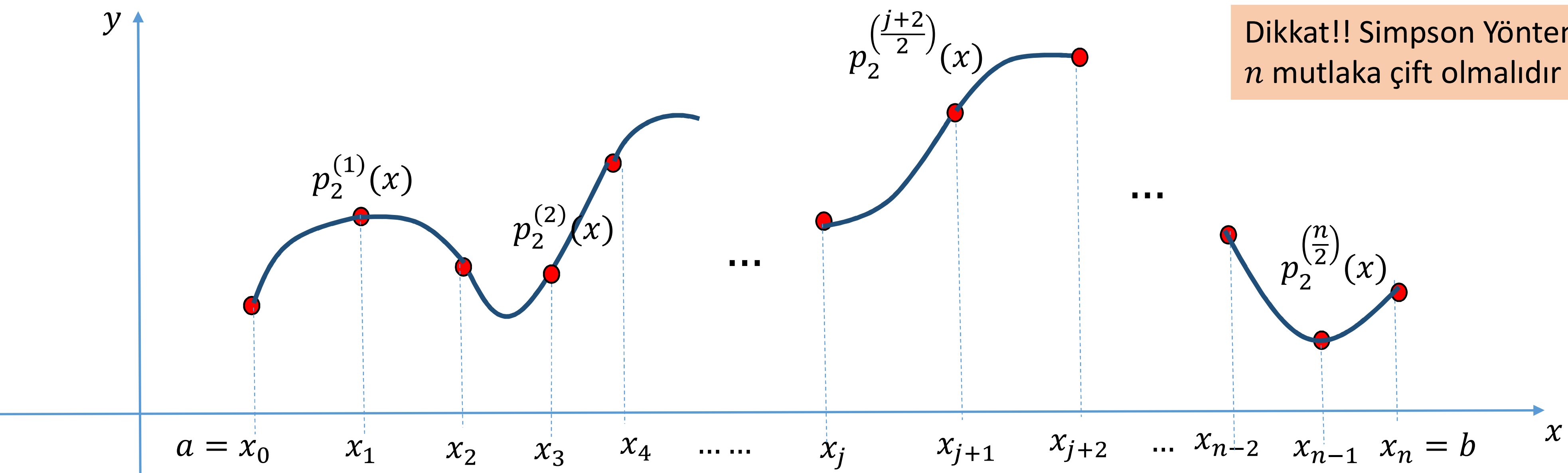
Örnek:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \Longrightarrow h = \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow I \cong S_2\ (f) = \int_a^b p_2(x)dx = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{3}\left[1 + 4.\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right] = \frac{25}{36} = 0.69\bar{4}$$

$$Hata = log2 - S_2 = -0.0013 \longmapsto \approx \%\ \mathbf{0.2\ ba\breve{g}\imath l\ hata}$$

$$T_2\ deki\ hataya\ g\ddot{o}re\ 10\ kat\ daha\ az!$$

SAYISAL İNTEGRASYON : Simpson Yöntemi



Dikkat!! Simpson Yönteminde
n mutlaka çift olmalıdır

Genel Formül :
Aralık Sayısı n ve aralıklar eşit uzunlukta ise:

$$h = \frac{b-a}{n}; \quad x_j = a + j\,h; \quad j = 0,1,2,\dots,n$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{a=x_0}^{x_2} f(x)dx \;+\; \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \;+\; \dots \;+ \int_{x_{n-4}}^{x_{n-2}} f(x)dx + \int_{x_{n-2}}^{x_n=b} f(x)dx$$

SAYISAL İNTEGRASYON : Simpson Yöntemi

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{a=x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-4}}^{x_{n-2}} f(x)dx + \int_{x_{n-2}}^{x_n=b} f(x)dx$$

Herbir integral 3 noktalı Simpson Yöntemi ile hesaplanarak

$$I(f) \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3}[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \cdots + \frac{h}{3}[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \Longrightarrow$$

$$I(f) \cong S_n\ (f) = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

- **İlk ve son değer 1 ile çarpılıyor**
- **Aradaki tek indisli noktalar 4 ile çarpılıyor**
- **Aradaki çift indisli noktalar 2 ile çarpılıyor**

SAYISAL İNTEGRASYON : Simpson Yöntemi

n	Hata($I^{(1)}$)	Oran($I^{(1)}$)	Hata($I^{(2)}$)	Oran($I^{(2)}$)	Hata($I^{(3)}$)	Oran($I^{(3)}$)
2	$-3.56\ 10^{-4}$	-	$8.66\ 10^{-2}$	-	-1.26	-
4	$-3.12\ 10^{-5}$	11.4	$3.95\ 10^{-2}$	2.2	$1.37\ 10^{-1}$	-9.2
8	$-1.99\ 10^{-6}$	15.7	$1.95\ 10^{-3}$	20.3	$1.23\ 10^{-2}$	11.2
16	$-1.25\ 10^{-7}$	15.9	$4.02\ 10^{-6}$	485.0	$6.43\ 10^{-5}$	191
32	$-7.79\ 10^{-9}$	16.0	$2.33\ 10^{-8}$	172.0	$1.71\ 10^{-9}$	37600
64	$-4.87\ 10^{-10}$	16.0	$1.46\ 10^{-9}$	16.0	---	
128	$-3.04\ 10^{-11}$	16.0	$9.15 10^{-11}$	16.0	---	

$$I^{(1)} = \int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.746824132812427$$

$$I^{(2)} = \int_0^4 \frac{dx}{1+x^2} = tan^{-1}(4) = 1.32581766366803$$

$$I^{(3)} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = 3.627598722846844$$

$$oran = \frac{I - S_n}{I - S_{2n}} = \frac{(hata)_n}{(hata)_{2n}}$$

SAYISAL İNTEGRASYON : Simpson Yöntemi

Simpson Yöntemi İçin Hata Analizi

Teorem: $f(x)$, $[a,b]$ aralığında 4 defa türevlenebilir bir fonksiyon ve $n > 0$ tam sayı olmak üzere
$I(f) = \int_a^b f(x)dx$ integralinin Simpson yöntemi ile hesaplanan yaklaşık değeri $S_n(f)$ ise hata

$$E_n^S(f) = I(f) - S_n(f) = \frac{-h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(c_n); \quad c_n \in (a,b), \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = log2\,; \;\; [a,b] = [0,1] \;\Longrightarrow (b-a) = 1; h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n};$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

$$E_n^S(f) = \frac{-h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(c_n) = \frac{-h^4}{180} f^{(4)}(c_n); \quad 0 < c_n < 1$$

$$\max_{0<c_n<1} f^{(4)}(c_n) = \max_{0<c_n<1} \frac{24}{(1+x)^5} = 24$$

$$|E_n^S(f)| \le \frac{h^4}{180} 24 = \frac{2h^4}{15} \Longrightarrow |E_n^S(f)| \le \frac{2}{15n^4}$$

$$n = 1 \Longrightarrow |E_1^S(f)| \le \frac{2}{15} \cong 0.133$$

$$n = 2 \Longrightarrow |E_2^S(f)| \le \frac{2}{15.16} \cong 0.00833$$

$$n = 16 \Longrightarrow |E_2^S(f)| \le \frac{1}{6\;16^2} \cong 2.03\;10^{-6}$$

SAYISAL İNTEGRASYON : Hata Kestirimleri ve Yöntemlerin Düzeltilmiş Versiyonları

$$E_n^T(f) = I(f) - T_n(f) = \frac{-h^2(b-a)}{12} f''(c_n); \quad c_n \in (a,b), \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

Trapez Yönteminde Hata

$$E_n^S(f) = I(f) - S_n(f) = \frac{-h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(c_n); \quad c_n \in (a,b), \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

Simpson Yönteminde Hata

Asimptotik Hata Formülleri:

$$\tilde{E}_n^T(f) \approx \frac{-h^2}{12}[f'(b) - f'(a)]$$

Trapez Yöntemi için Asimptotik hata kestirimi

$$\tilde{E}_n^S(f) \approx \frac{-h^4}{180}[f'''(b) - f'''(a)]$$

Simpson Yöntemi için Asimptotik hata kestirimi

SAYISAL İNTEGRASYON : Hata Kestirimleri ve Yöntemlerin Düzeltilmiş Versiyonları

Düzeltilmiş Trapez Kuralı:

$$I(f) - T_n(f) \approx \frac{-h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Longrightarrow I(f) \approx T_n(f) - \frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Longrightarrow$$

$$C\,T_n(f) = T_n(f) - \frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)]$$

Düzeltilmiş Simpson Kuralı:

$$I(f) - S_n(f) \approx \frac{-h^4}{180}[f'''(b) - f'''(a)] \Longrightarrow I(f) \approx S_n(f) - \frac{h^4}{180}[f'''(b) - f''\,(a)] \Longrightarrow$$

$$CS_n(f) = S_n(f) - \frac{h^4}{180}[f'''(b) - f'''(a)]$$

SAYISAL İNTEGRASYON : Hata Kestirimleri ve Yöntemlerin Düzeltilmiş Versiyonları

n	Gerçek Hata $(I^{(1)} - T_n(f))$	Hata Kestirimi $\tilde{E}_n^T(f)$	$CT_n(f)$	Hata $(I^{(1)} - CT_n(f))$	Oran
2	$1.545\ 10^{-2}$	$1.533\ 10^{-2}$	0.746998561877	$1.26\ 10^{-4}$	-
4	$3.840\ 10^{-3}$	$3.832\ 10^{-3}$	0.746816175313	$7.96\ 10^{-6}$	15.8
8	$9.585\ 10^{-4}$	$9.580\ 10^{-4}$	0.746823634224	$4.99\ 10^{-7}$	16
16	$2.395\ 10^{-4}$	$2.395\ 10^{-4}$	0.746824101633	$3.12\ 10^{-8}$	16
32	$5.988\ 10^{-5}$	$5.988\ 10^{-5}$	0.746824130863	$1.95\ 10^{-9}$	16
64	$1.497\ 10^{-5}$	$1.497\ 10^{-5}$	0.746824132690	$2.22\ 10^{-10}$	16

$$I^{(1)} = \int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.746824132812427$$

$$\tilde{E}_n^T(f) = \frac{-h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] = \frac{-h^2}{12}\left[-2xe^{-x^2}\right]\Big|_{x=1} = \frac{h^2}{6e}$$

$$h = \frac{1}{n}$$

Gaussian (Sayısal) İntegrasyon

http://mathforcollege.com/nm/mws/gen/07int/mws_gen_int_txt_gaussquadrature.pdf