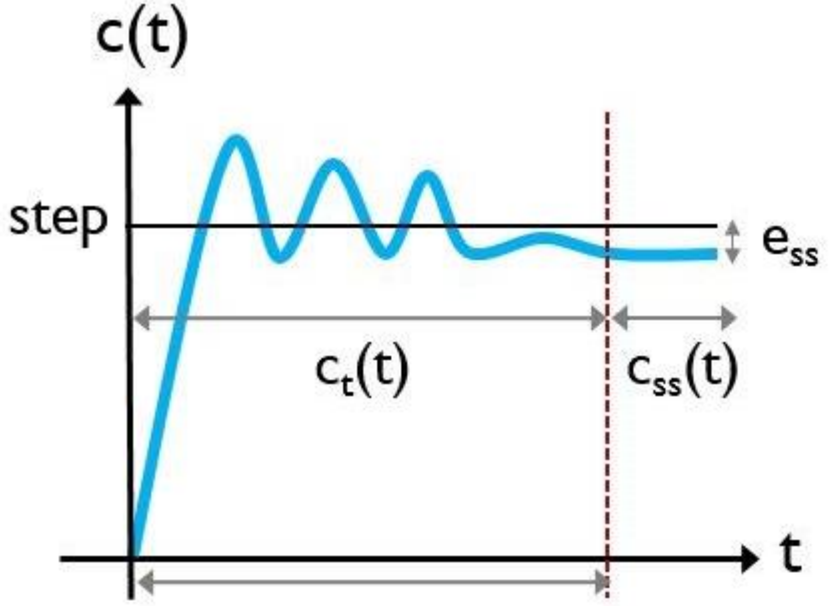
Otomatik Kontrol Sistemleri

Hafta 4

Doç. Dr. Volkan Sezer

Zaman Tanım Bölgesi Analizi

1. dereceden sistemler
2. dereceden sistemler



Zaman Tanım Bölgesi Analizi

- Sistem analizi 2 biçimde yapılabilir

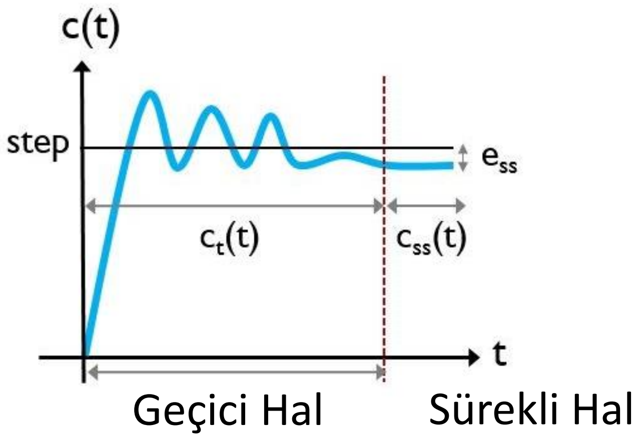
Zaman tanım bölgesi analizi

Frekans tanım bölgesi analizi

Bir otomatik kontrol sisteminin zaman cevabı 2 kısımdan oluşur:

1) Geçici (transient) hal cevabı

2) Sürekli hal cevabı



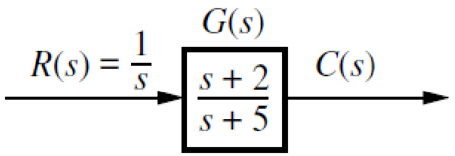
Transfer Fonksiyonlarının Sıfır ve Kutupları

- Transfer fonksiyonlarının payının kökleri, sistemin ‘sıfırları’dır.
- Transfer fonksiyonlarının paydasının kökleri, sistemin ‘kutupları’dır.
- Her ikisinin de cevaba etkisi vardır.

Transfer Fonksiyonlarının Sıfır ve Kutupları

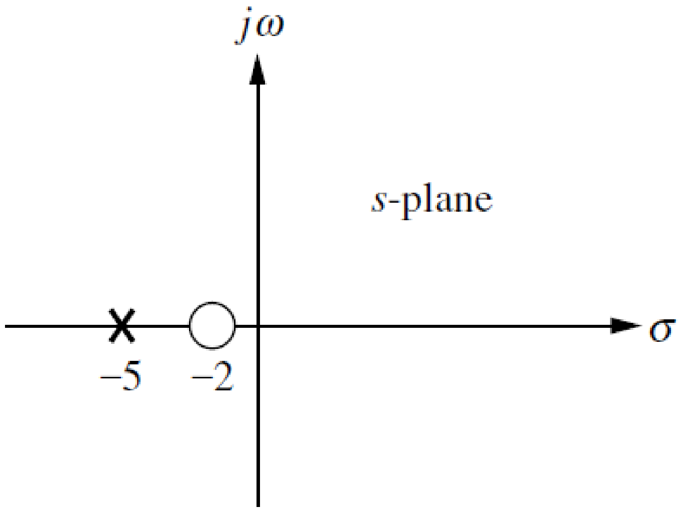
- Transfer fonksiyonlarının payının kökleri, sistemin «sıfırları»dır.
- Transfer fonksiyonlarının paydasının kökleri, sistemin «kutupları»dır.
- Her ikisinin de cevaba etkisi vardır.

Örnek



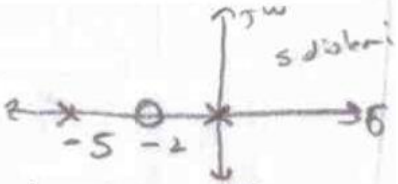
Sistemin sıfırı $s + 2 = 0 \rightarrow s = -2$

Sistemin kutbu $s + 5 = 0 \rightarrow s = -5$



Girişe birim basamak fonksiyonu uygulayalım (1/s)

$$C(s) = R(s) \cdot \frac{s+2}{s+5} = \frac{1}{s}\,\frac{s+2}{s+5}$$



..biraz diferansiyel denklemler bilgilerimizi hatırlayalım (partial fraction)...

$$C(s) = \frac{(s+2)}{s(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5}$$

$$\frac{A(s+5)+Bs}{s(s+5)} = \frac{s+2}{s(s+5)} \Rightarrow s(A+B) + 5A = s + 2 \qquad A = \frac{2}{5},\ B = \frac{3}{5}$$

$$C(s) = \frac{2/5}{s} + \frac{3/5}{s+5}$$

$$\left\{ \text{ters laplace} \left\{ L\{u(t)\} = \frac{1}{s},\ L\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a} \right\} \right\}$$

$$c(t) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^{-5t}$$

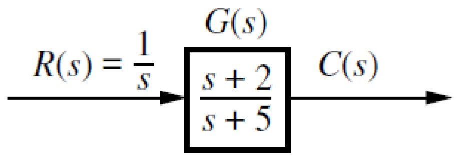
Zorlanmış cevap

Doğal (tabii)cevap

Transfer Fonksiyonlarının Sıfır ve Kutupları

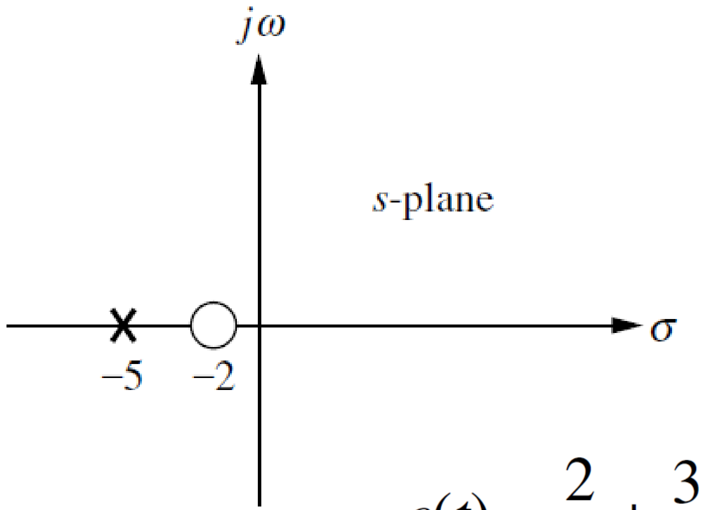
- Transfer fonksiyonlarının payının kökleri, sistemin «sıfırları»dır.
- Transfer fonksiyonlarının paydasının kökleri, sistemin «kutupları»dır.
- Her ikisinin de cevaba etkisi vardır.

Örnek



Sistemin sıfırı $s + 2 = 0 \rightarrow s = -2$

Sistemin kutbu $s + 5 = 0 \rightarrow s = -5$



$$c(t) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^{-5t}$$

Zorlanmış cevap

Doğal (tabii)cevap

Giriş fonksiyonundan gelen kutup, zorlanmış çözümü oluşturur (1/s olmasaydı, 2/5 olmazdı)

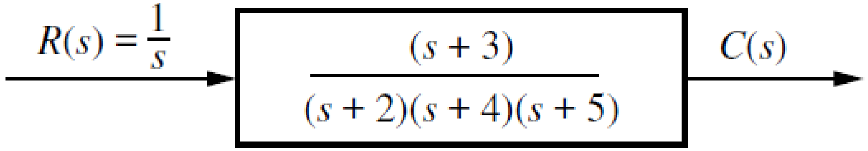
Transfer fonksiyonunun kutbu , doğal cevabı oluşturur (-5'teki kutup, e^{-st}'yi oluşturur.

Reel eksendeki kutup, e^{-at} formunda bir üstel etki oluşturur. Bu nedenle kutup ne kadar solda ise, doğal cevap o kadar çabuk sıfırlanır.

Sıfırlar ve kutuplar, zorlanmış ve doğal cevapların genliklerini doğrudan etkiler. (A ve B'nin hesabı)

Transfer Fonksiyonlarının Sıfır ve Kutupları

Örnek



Çıkış işaretini hesaplayınız, zorlanmış ve doğal cevapları gösteriniz.

$$C(s) \equiv \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+4} + \frac{K_4}{s+5}$$

$$c(t) = \underbrace{K_1}_{\text{Zorlanmış cevap}} + \underbrace{K_2 e^{-2t} + K_3 e^{-4t} + K_4 e^{-5t}}_{\text{Doğal (tabii) cevap}}$$

1. Derece Sistemler

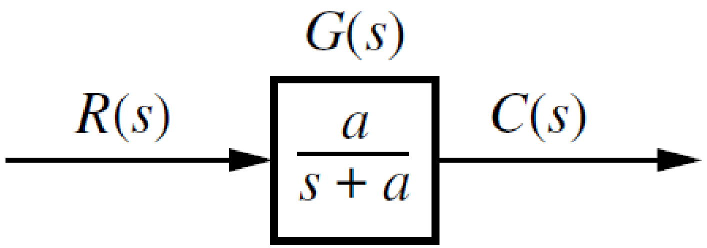
- Sistem performansını tanımlamak amacıyla, sıfırı olmayan 1. derece sistemleri inceleyeceğiz.
- En genel gösterimi

$$\text{TF}=\frac{K}{S+a}$$

- Kolaylık olması açısından özel bir hali olan aşağıdaki sistemi inceleyeceğiz.

$$\text{TF}=\frac{a}{S+a}$$

1. Derece Sistemler



Girişe birim basamak uygulayalım (1/s)

$f(t)$	$F(s)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$

$$C(s) = R(s)G(s) = \frac{a}{s(s+a)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a}$$

$$\frac{A(s+a)+Bs}{s(s+a)} = \frac{a}{s(s+a)}$$

$$\Rightarrow s(A+B) + A.a = a$$

$$\Rightarrow A = 1 \,, \quad B = -1$$

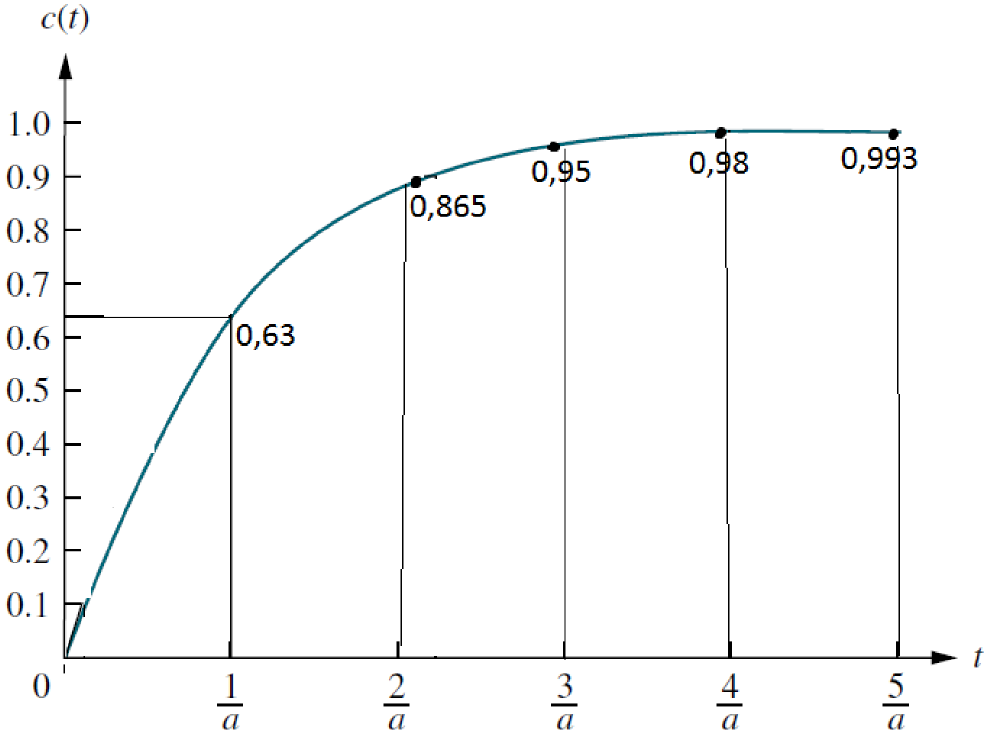
$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}$$

$$c(t) = 1 - e^{-at}$$

$\lim_{t \to 0} c(t) = 0, \quad \lim_{t \to \infty} c(t) \cong 1$

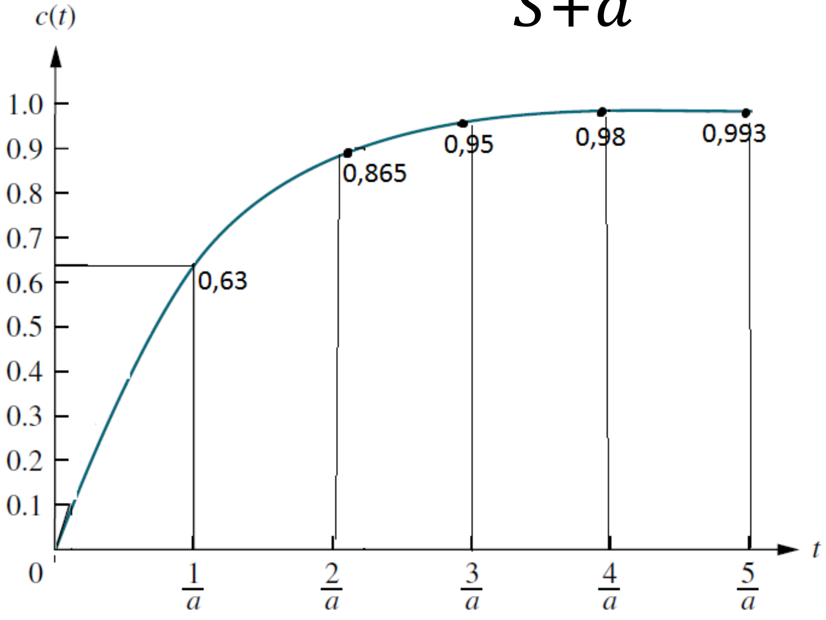
Zorlanmış cevap

Doğal (tabii) cevap



1. Derece Sistemler

$$\text{TF}=\frac{a}{s+a}$$



$\frac{1}{a}$ değeri sistemin **zaman sabitidir**.

Cevabın yakınsadığı değerin %63'üne kadar geçen süredir.

$$t=1/a \Rightarrow = 1 - e^{-at}\Big|_{t=1/a}$$

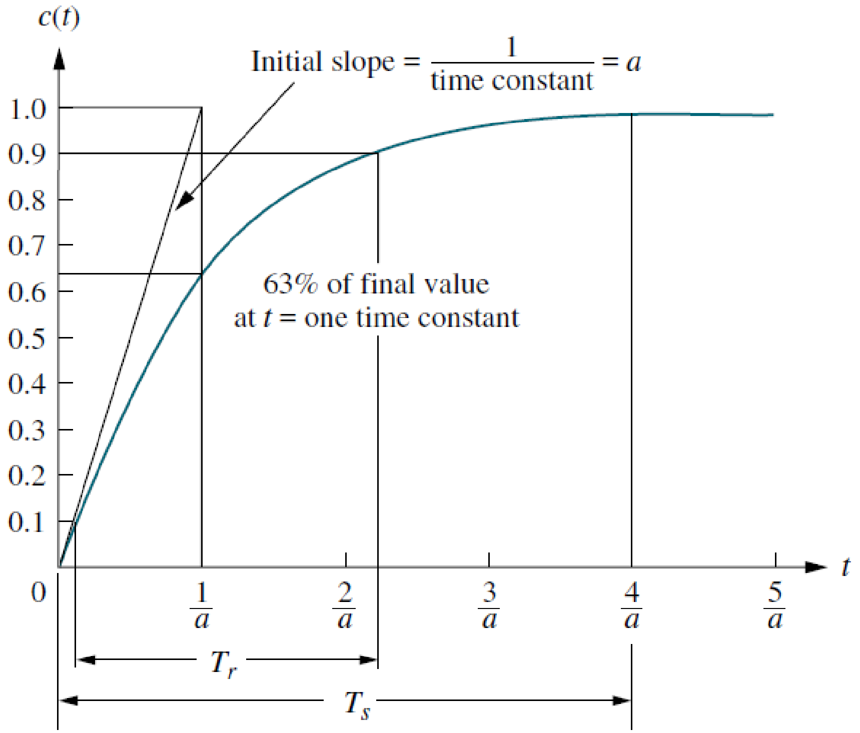
$$c(t) = 1 - e^{-at}$$

$$= 1 - e^{-1} = 1 - 0.37 = 0.63$$

1. Derece Sistemler

$$TF = \frac{a}{s+a}$$

Yükselme Zamanı (Tr): Cevap grafiğinde son değerin %10’u ile %90’ı arasında geçen süredir.



$$T_r = t_{(c(t)=0,90)} - t_{(c(t)=0,10)}$$

$t_{(c(t)=0,90)}$:

$$0,9 = 1 - e^{-at} \Rightarrow e^{-at} = 0,1 \Rightarrow -at = \ln(0,1)$$

$$t_{(c(t)=0,90)} \simeq \frac{2,31}{a}$$

$t_{(c(t)=0,1)}$

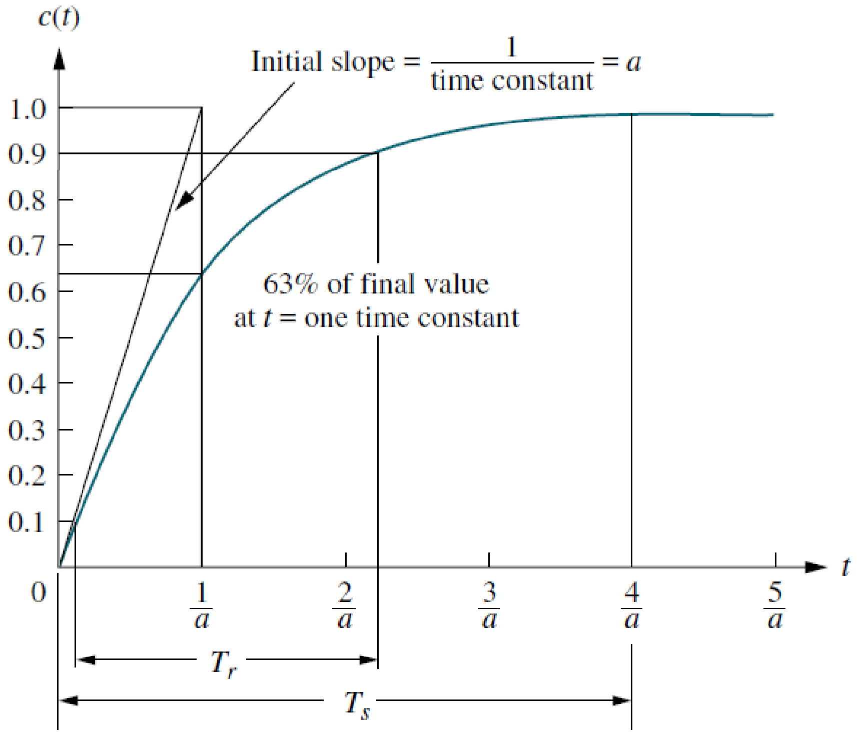
$$0,1 = 1 - e^{-at} \Rightarrow e^{-at} = 0,9 \Rightarrow -at = \ln(0,9)$$

$$t_{(c(t)=0,1)} \simeq \frac{0,11}{a}$$

$$T_r = \frac{2.31}{a} - \frac{0.11}{a} = \frac{2.2}{a}$$

1. Derece Sistemler

$$\text{TF} = \frac{a}{s+a}$$



YerleşmeZamanı (Ts): Cevap grafiğinde başlangıçtan, son değerin %98’ine kadar geçen süredir.

$$T_s = t(c(t) = 0{,}98)$$

$$0{,}98 = 1 - e^{-at} \Rightarrow e^{-at} = 0{,}02 \Rightarrow$$

$$-at = \ln(0{,}02)$$

$$t(c(t)=0{,}98) \cong \frac{3{,}91}{a}$$

$$T_s = \frac{4}{a}$$

1. Derece Sistemler (Transfer Fonksiyonunun Deneysel Yoldan Elde Edilmesi)

Bir sistemin transfer fonksiyonu analitik olarak elde edilemiyorsa, birim basamak yanıtına bakarak sistem 1. derece transfer fonksiyonu olarak ifade edilebilir.

1. Derece transfer fonksiyonu genel gösterimi: $$G(s)=\frac{K}{(s+a)}$$

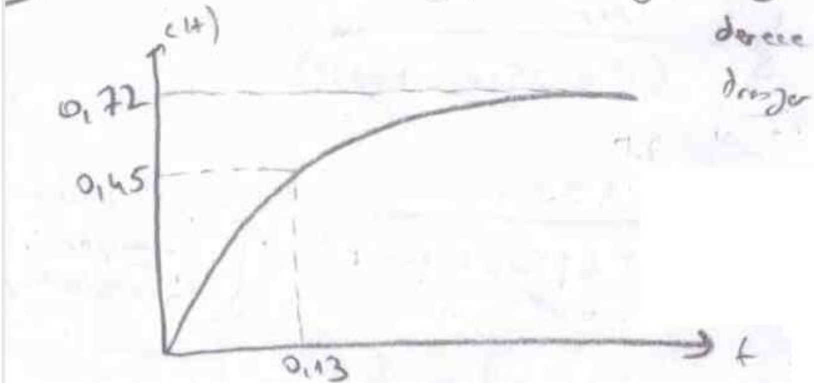
Buna, R(s)=1/s uygulayalım.

$$C(s)=G(s)\mathrm{R}(s)=\frac{K}{s(s+a)} \xrightarrow{\text{Partial fraction..}} =\frac{K/a}{s}-\frac{K/a}{(s+a)}$$

1. Derece Sistemler (Transfer Fonksiyonunun Deneysel Yoldan Elde Edilmesi)

$$G(s) = \frac{K}{(s+a)} \qquad R(s) = \frac{1}{s} \qquad C(s) = \frac{K/a}{s} - \frac{K/a}{(s+a)}$$

Örnek; Birim basamak cevabı aşağıdaki gibi olan 1. derece sistemin transfer fonksiyonu nedir?



1. dereceden sistemin T.F.'si $\frac{K}{s+a}$ olsun. Girişe $\frac{1}{s}$ uygulanırsa:

$C(s) = \frac{K}{s(s+a)}$ olur. $= \frac{K/a}{s} - \frac{K/a}{s+a}$ olur.

Son değeri 0,72 olarak alındığında

$\boxed{\frac{K}{a} = 0{,}72}$ olur.

Son değerin %63'üne geçen süre; zaman sabitidir.

$0{,}72 \cdot 0{,}63 = 0{,}45$. grafiğe göre $t = 0{,}13$ 'dür geçen süre

$\boxed{0{,}13 = \underbrace{\frac{1}{a}}_{\text{zaman sabiti}}}$ ... dolayısıyla $a = 7{,}7$

$K = 5{,}54$

$G(s) = \frac{5{,}54}{s+7{,}7}$ olur.

2. Derece Sistemler

2. Derece sistemlerin en genel gösterimi şu biçimdedir.

$$G(s) = \frac{K\,\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$W_n = Doğal\ Frekans$
ξ: Sönüm oranı
K: Kazanç

sistemin kökleri :

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-2\xi\omega_n \mp \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2}$$

$$= \frac{-2\xi\omega_n \mp 2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}{2}$$

$$= -\xi\omega_n \mp \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

2. Derece Sistemler

2. Derece sistemlerin en genel gösterimi şu biçimdedir.

$$G(s) = \frac{K\,\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$W_n = Doğal\ Frekans$
ξ: Sönüm oranı
K: Kazanç

örnek)

$G(s) = \frac{144}{2s^2 + 8{,}4s + 72}$ transfer fonksiyonunun kazancını (K), sönüm oranı ξ ve doğal frekansını W_n bulunuz.

$$G(s) = \frac{72}{s^2 + 4{,}2s + 36} = 2 \cdot \frac{36}{s^2 + 4{,}2s + 36}$$

$\boxed{K=2}$

$\omega_n^2 = 36 \Rightarrow \boxed{\omega_n = 6}$

$2\xi\omega_n = 4{,}2 \Rightarrow \boxed{\xi = 0{,}35}$

2. Derece Sistemler

2. Derece sistemlerin en genel gösterimi şu biçimdedir.

$$G(s) = \frac{K\,\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

sistem kutupları:

$$s^2 + 2\xi w_n + w_n^2 = 0$$

$$= -\xi w_n \mp w_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$W_n = Doğal\ Frekans$

ξ: Sönüm oranı

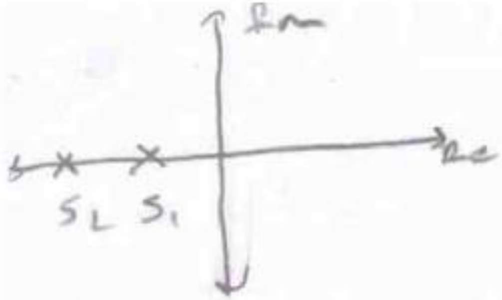
K: Kazanç

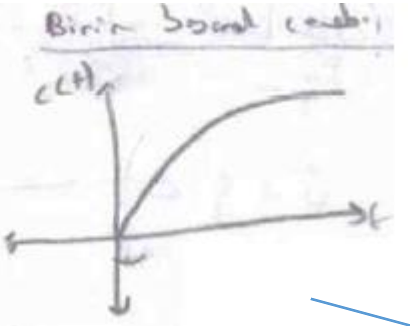
w_n ve ξ değerleri, kutupların yerlerini belirler.

$\xi^2 > 1$ ise, kutuplar gerçektir ve

$$s_1 = -\xi w_n + w_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$s_2 = -\xi w_n - w_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$





Çok sönümlü!

2. Derece Sistemler

2. Derece sistemlerin en genel gösterimi şu biçimdedir.

$$\longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{K\,\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}} \longrightarrow$$

$W_n = Doğal\ Frekans$
ξ: Sönüm oranı
K: Kazanç

sistem kutupları:

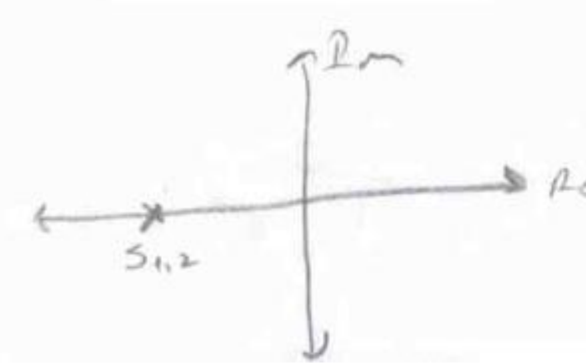
$$s^2 + 2\xi w_n + w_n^2 = 0$$

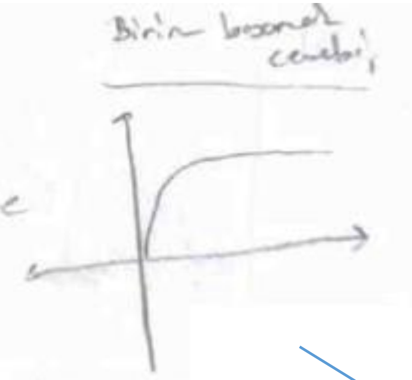
$$= -\xi w_n \mp w_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

w_n ve ξ değerleri, kutupların yerlerini belirler.

* $\xi^2 = 1$ ise, kutuplar birbirine eşit ve gerçektir.

$$s_{1,2} = -\xi w_n$$





Kritik sönümlü!
(Aşım yapmayan en hızlı cevap)

2. Derece Sistemler

2. Derece sistemlerin en genel gösterimi şu biçimdedir.

$$G(s) = \frac{K\,\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$W_n = Doğal\ Frekans$
ξ: Sönüm oranı
K: Kazanç

sistemin kutupları:

$s^2 + 2\xi w_n + w_n^2 = 0$

$= -\xi w_n \mp w_n\sqrt{\xi^2-1}$

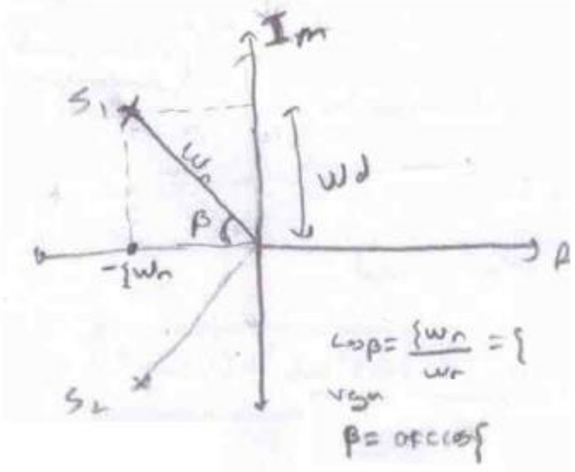
w_n ve ξ değerleri, kutupların yerlerini belirler.

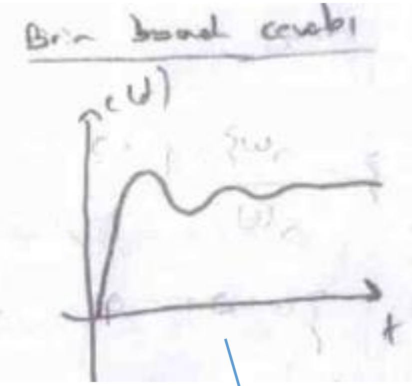
* $\xi^2 < 1$ ise kutuplar imajiner ve eşleniktir
(reel kısımları aynı)

$$s_{1,2} = -\xi w_n \mp j\,\underbrace{w_n\sqrt{1-\xi^2}}_{w_d \text{ olarak adlandır}}$$

ξ, w_n, w_d, ve kutupların yerleriyle alakalı geometrik ilişkiler şu şekildedir

($w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2}$)
sönümlü frekans (damped freq.)





Az sönümlü!

2. Derece Sistemler

2. Derece sistemlerin en genel gösterimi şu biçimdedir.

$$G(s) = \frac{K\,\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$W_n = Doğal\ Frekans$
ξ: Sönüm oranı
K: Kazanç

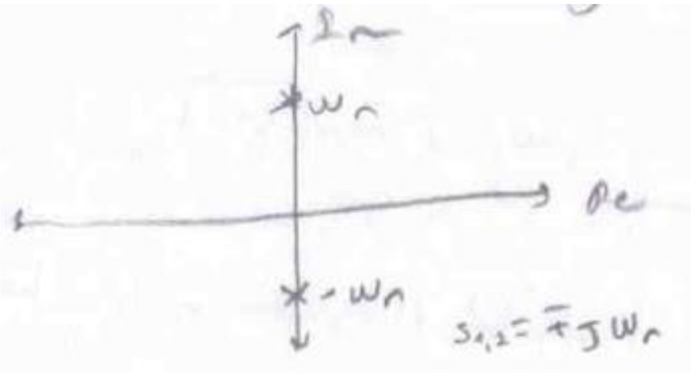
sistemin kutupları:

$$s^2 + 2\xi w_n + w_n^2 = 0$$

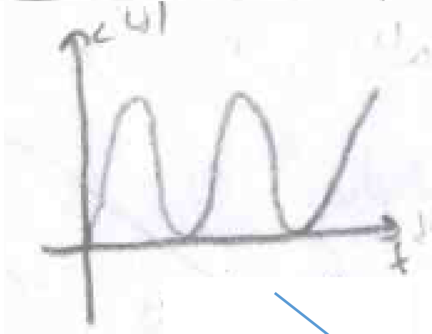
$$= -\xi w_n \mp w_n\sqrt{\xi^2-1}$$

w_n ve ξ değerleri, kutupların yerlerini belirler

* $\xi = 0$ ise kutupların reel kısmı sıfırdır
İmajiner kısmı ise eşleniktir



Birim Basamak cevabı



Sönümsüz

2. Derece Sistemler

2. Derece sistemlerin en genel gösterimi şu biçimdedir.

$$G(s) = \frac{K\,\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$W_n = Doğal\ Frekans$
ξ: Sönüm oranı
K: Kazanç

sistemin kutupları:

$s^2 + 2\xi w_n + w_n^2 = 0$

$= -\xi w_n \mp w_n\sqrt{\xi^2-1}$

w_n ve ξ değerleri, kutupların yerlerini belirler.

2. dereceden sistemlerin birim basamak cevabı

$$\frac{w_n^2}{s^2+2\xi w_n s+w_n^2}$$

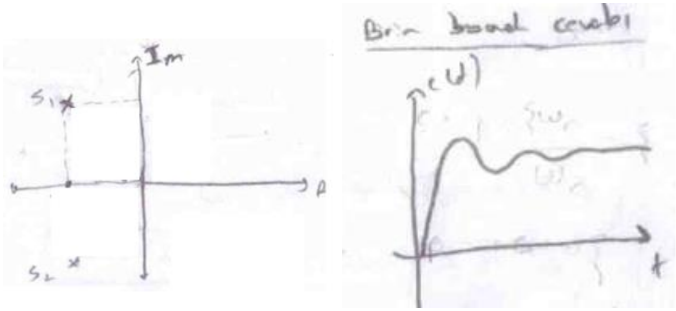
$\frac{1}{s}$

$0<\xi<1 \rightarrow$ az sönümlü

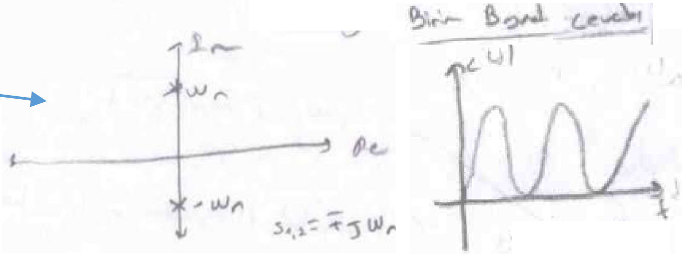
$\xi=1 \rightarrow$ kritik sönümlü

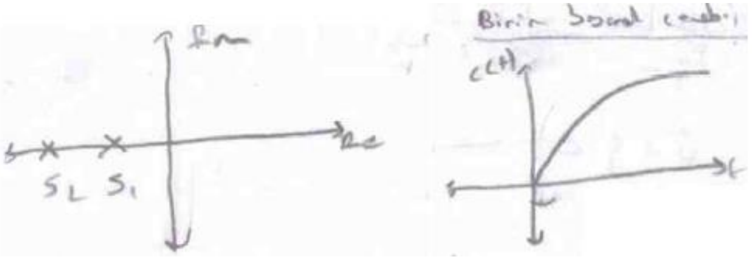
$\xi>1 \rightarrow$ ağır sönümlü

$\xi=0 \rightarrow$ sönümsüz



$W_n = Doğal\ Frekans$
ξ: Sönüm oranı
K: Kazanç





2. Derece Sistemler

2. Derece sistemlerin en genel gösterimi şu biçimdedir.

$W_n = Doğal\ Frekans$
ξ: Sönüm oranı
K: Kazanç

$$G(s) = \frac{K\,\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

sistemin kutupları:

$s^2 + 2\xi w_n + w_n^2 = 0$

$= -\xi w_n \mp w_n\sqrt{\xi^2 - 1}$

w_n ve ξ değerleri, kutupların yerlerini belirler.

2. derecede sistemlerin birim basamak cevabı

$R(s) = \frac{1}{s}$ → $\frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$ →

$0 < \xi < 1$ → az sönümlü

$\xi = 1$ → kritik sönümlü

$\xi > 1$ → aşırı sönümlü

$\xi = 0$ → sönümsüz

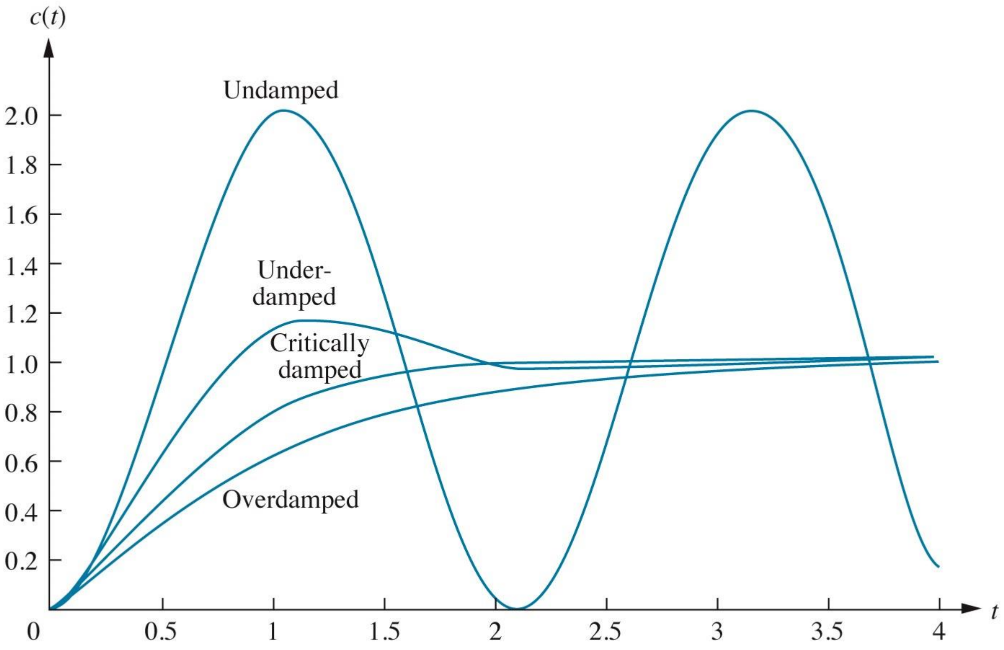
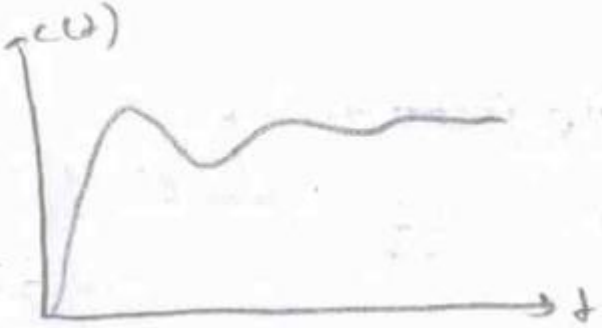


Figure 4.10

Az Sönümlü 2. Derece Sistemler

Bu sistemlerin birim basamak cevabı osim yapar, salınımlı ve sönümlüdür.



Birim basamak yanıtını analitik olarak hesaplayacak olursak:

$$c(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} =$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{(s+\zeta\omega_n) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)}$$

Ters Laplace

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$$

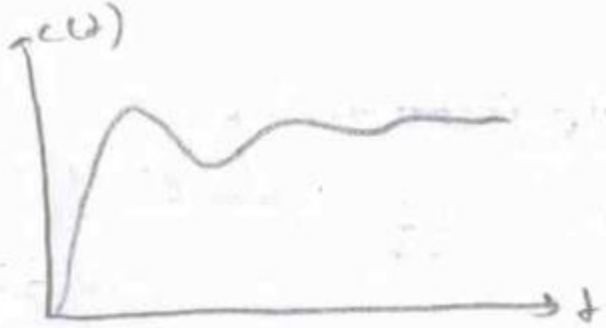
veya

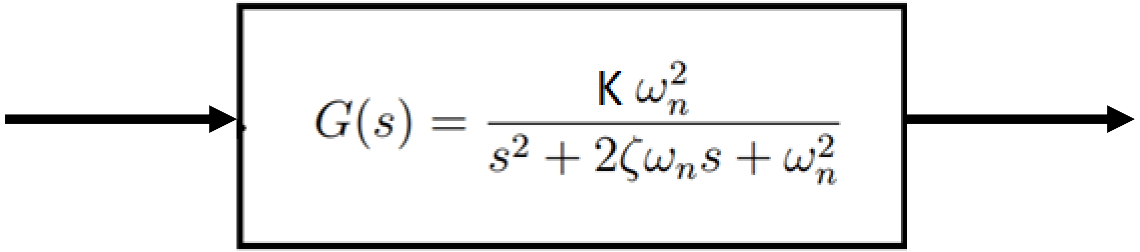
$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t - \phi)$$

where $\phi = \tan^{-1}(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})$.

Az Sönümlü 2. Derece Sistemler

Bu sistemlerin birim basamak cevabı aşım yapar, salınımlı ve sönümlüdür.





$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$$

veya

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t - \phi)$$

where $\phi = \tan^{-1}(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})$.

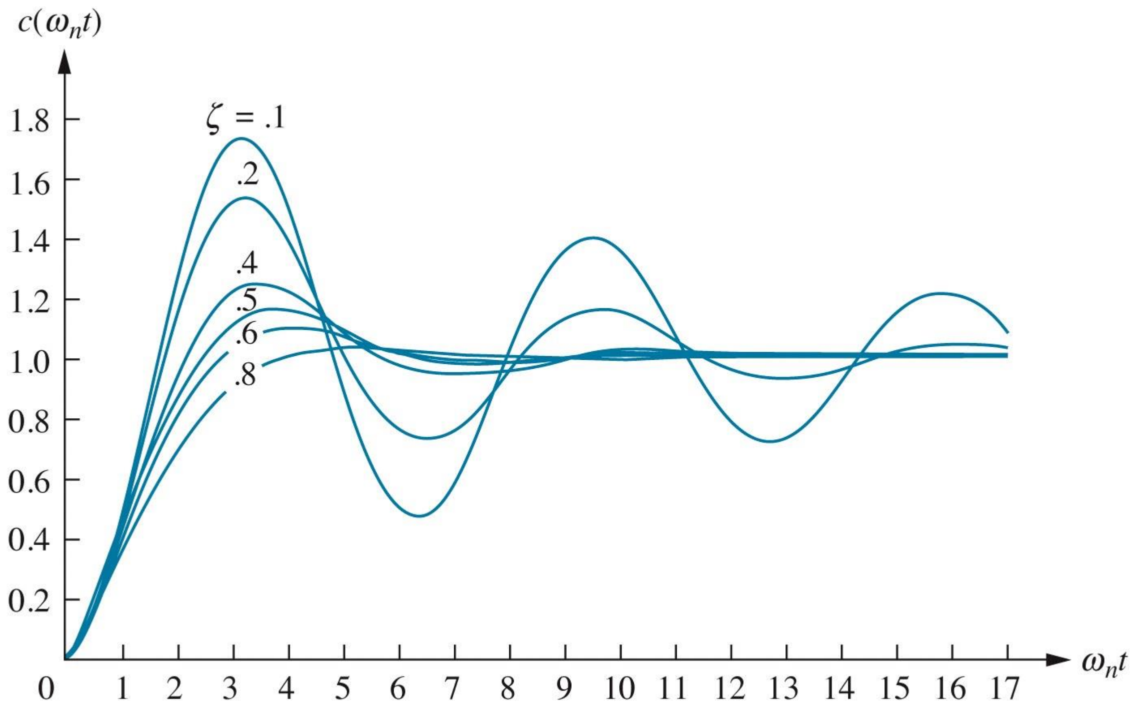


Figure 4.13