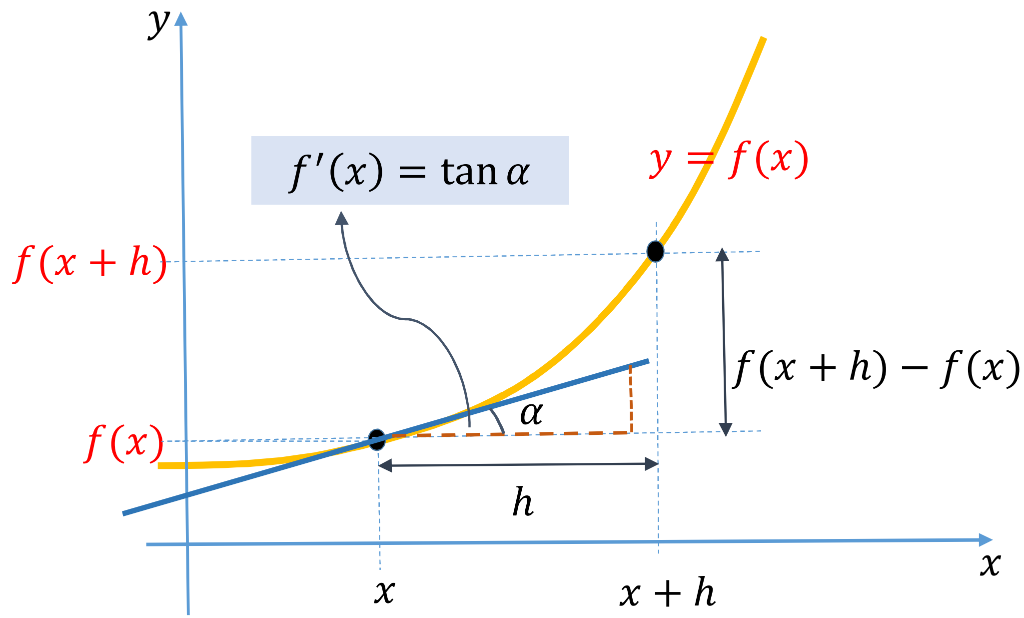
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Hatırlatma: Sayısal Türev

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$y = f(x)$ reel fonksiyonunun x *noktasındaki türevi*



Küçük h değerleri için

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =: D_h f(x)$$

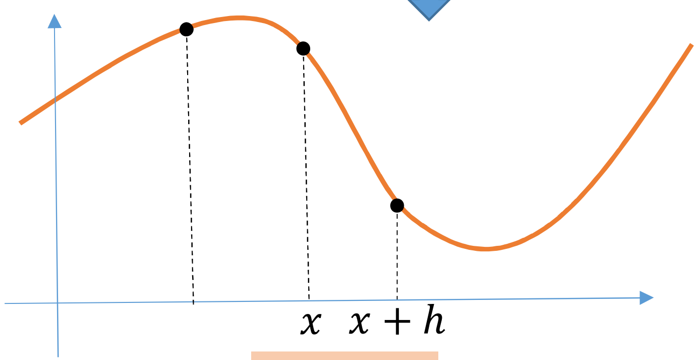
Sayısal Türev

$D_h f(x)$: $f(x)$ fonksiyonunun h adım aralığı için x noktasındaki sayısal türevi

SAYISAL TÜREV (hatırlatma)

Sayısal Türev için **İleri Fark Formülü**

$$h > 0 \; iken \;\; f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = D_h f(x)$$



İleri Fark

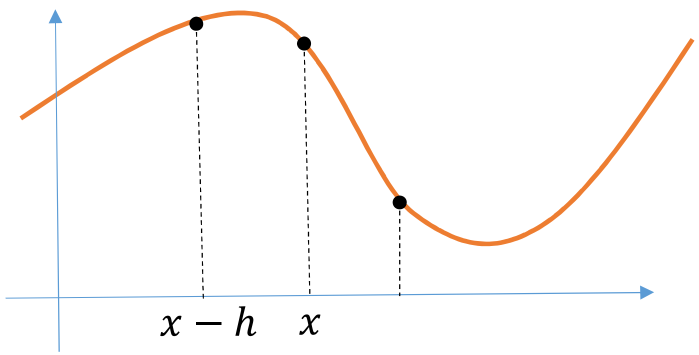
$$Hata = f'(x) - D_h f(x) = -\frac{h}{2} f''(c); \quad c \in (x, x+h)$$

$h \longrightarrow -h$ yapılırsa

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \; ; h > 0 \Longrightarrow$$

Sayısal Türev için **Geri Fark Formülü**

$$h > 0 \; iken \;\; f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = D_h f(x)$$



Geri Fark

$$Hata = f'(x) - D_h f(x) = \frac{h}{2} f''(c); \quad c \in (x-h, x)$$

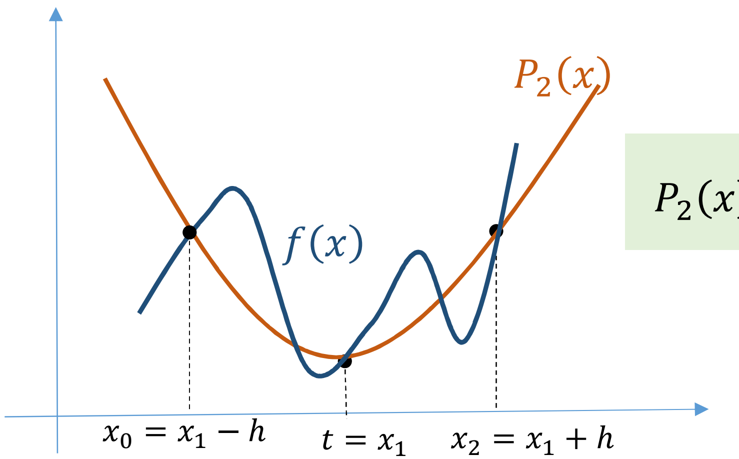
SAYISAL TÜREV (hatırlatma)

İnterpolasyon Yardımıyla Türev Hesabı

$x_0, x_1, \dots x_n$ noktaları ve $f(x)$ fonksiyonu için

$P_n(x), f(x)'i$ interpole eden polinom olmak üzere $f'(t) \approx P_n'(t)$

$n = 2; \quad t = x_1, x_0 = x_1 - h,\ x_2 = x_1 + h \Longrightarrow f'(t) \approx P_2'(t)$



$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{2h^2} + f(x_1)\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{-h^2} + f(x_2)\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2} \Longrightarrow$$

$$P_2'(x) = f(x_0)\frac{(2x - x_1 - x_2)}{2h^2} + f(x_1)\frac{(2x - x_0 - x_2)}{-h^2} + f(x_2)\frac{(2x - x_0 - x_1)}{2h^2}$$

$$P_2'(x_1) = f(x_0)\frac{\overbrace{(x_1 - x_2)}^{-h}}{2h^2} + f(x_1)\frac{\overbrace{(2x_1 - x_0 - x_2)}^{0}}{-h^2} + f(x_2)\frac{\overbrace{(x_1 - x_0)}^{h}}{2h^2}$$

$$P_2'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} \Longrightarrow \quad P_2'(x_1) = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1 - h)}{2h}$$

$$f'(x_1) \approx \frac{f(x_1 + h) - f(x_1 - h)}{2h} = D_h f(x)$$

Sayısal Türev için **Merkezi Fark Formülü**

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Hatırlatma : DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$x \in (a, b)$ olmak üzere $y = y(x)$ fonksiyonu için

$$f\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0$$

$n.$ inci mertebe adi diferansiyel denklem (Kapalı (Implicit)Form)

$$y^{(n)}(x) = g\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right)$$

En yüksek mertebeden türev yani $n.$ inci mertebe türev cinsinden denklem bu forma indirgenebiliyorsa (Açık (Explicit) Form)

$$a_0(x)y(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y''(x) + \cdots + a_n(x)y^{(n)}(x) = Q(x)$$

$n.$ inci mertebe lineer diferansiyel denklem

$$y' = f(x, y(x))$$

1. inci mertebe adi diferansiyel denklem (Açık (Explicit) Form)

$x \in (a, b)$ serbest değişken, $y = y(x)$ bilinmeyen fonksiyon, $f\left(x, y(x)\right)$ hem serbest değişken x in hem de bilinmeyen y' nin bir fonksiyonu

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Hatırlatma : 1. Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemler

$Y' = f\big(x, Y(x)\big); \;\; x \geq x_0$

1. Mertebeden Adi Diferansiyel Denklem

$Y(x)$: Bilinmeyen Fonksiyon
$f(x, z)$: Genel halde iki değişkenli bir fonksiyon

$$Y' = g(x) \Longrightarrow Y(x) = \int g(x)dx + C \quad \text{Genel Çözüm}$$

$Y(x_0) = Y_0$ başlangıç (sınır) değeri verilmişse C sabiti Y_0 cinsinden belirlenir

Örnek:

$$Y' = sin(x); Y(\pi/3) = 2 \Longrightarrow Y(x) = \int sin(x)dx + C \;\; = -\cos(x) + C; \;\; \text{Genel Çözüm}$$

$$Y(\pi/3) = [-\cos(x) + C]_{x=\pi/3} = 2 \Longrightarrow -\frac{1}{2} + C = 2 \Longrightarrow C = 5/2$$

$$Y(x) = -\cos(x) + 5/2$$

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Hatırlatma : 1. Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemler

Daha genel halde f sadece x i değil Y yi de içerir ve çözüm bu kadar kolay elde edilemeyebilir.

Örneğin $a(x)$ ve b(x) sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$Y'(x) = a(x)Y(x) + b(x)$$

İntegrasyon Faktörleri Yöntemi

$$Y'(x) = \lambda Y(x) + b(x); \quad x \geq x_0$$

$$e^{-\lambda x}Y'(x) = \lambda e^{-\lambda x}Y(x) + e^{-\lambda x}b(x) \Longrightarrow e^{-\lambda x}Y'(x) - \lambda e^{-\lambda x}Y(x) = e^{-\lambda x}b(x) \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left[e^{-\lambda x}Y(x)\right] = e^{-\lambda x}b(x) \Longrightarrow$$

$$Y(x) = e^{\lambda(x)}[C + \int_{x_0}^{x} e^{-\lambda t}b(t)dt]$$

$Y(x_0) = Y_0$ koşulu kullanılırsa

$$Y(x) = e^{-\lambda(x_0 - x)}Y(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{\lambda(x-t)}b(t)dt$$

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Hatırlatma : 1. Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemler

$$\begin{cases} Y' = f\big(x, Y(x)\big); \;\; x \geq x_0 \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases} \quad ; \;\; \text{Başlangıç Değer Problemi}$$

Örnek:

$$\begin{cases} Y' = -[Y(x)]^2 + Y(x); \;\; x \geq 0 \\ Y(0) = 4 \end{cases} \Longrightarrow \quad Y(x) = \frac{1}{1 + Ce^{-x}} \; ; \; \text{genel çözüm}$$

$$Y(0) = 4 \Longrightarrow C = -3/4$$

$$Y(x) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-x}} \; ; \;\; x \geq 0$$

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

1. Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemlerde Stabilite

$$\begin{cases} Y'(x) = f\big(x, Y(x)\big); \quad x \geq x_0 \\ \qquad Y(x_0) = Y_0 \end{cases} \quad ; \text{ Başlangıç Değer Problemi verilsin}$$

Başlangıç değerinde küçük bir değişiklik (pertürbasyon) yapıldığında yeni sistem

$$\begin{cases} Y_\varepsilon'(x) = f(x, Y_\varepsilon(x)); \quad x \geq x_0 \\ \qquad Y_\varepsilon(x_0) = Y_0 + \varepsilon \end{cases} \quad ; \text{ (Pertürbe Başlangıç Değer Problemi)}$$

$\max\limits_{x_0 \leq x \leq b} |Y(x) - Y_\varepsilon(x)| < c\varepsilon$ olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti mevcut olmalı ki stabiliteden söz edilebilsin

örnek:

$$\begin{cases} Y'(x) = -Y(x) + 1; \quad 0 \leq x \leq b \\ \qquad Y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow \text{tam (gerçek)çözüm: } Y(x) = 1$$

$$\begin{cases} Y_\varepsilon'(x) = -Y_\varepsilon(x) + 1; \quad 0 \leq x \leq b \\ \qquad Y_\varepsilon(0) = 1 + \varepsilon \end{cases} \rightarrow \text{pertürbe çözüm } : Y_\varepsilon(x) = 1 + \varepsilon e^{-x}$$

$$|Y(x) - Y_\varepsilon(x)| = |-\varepsilon e^{-x}| \leq \varepsilon \Longrightarrow \text{ problem stabil } \quad (\mathrm{c} = 1)$$

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

1. Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemlerde Stabilite

örnek: $\begin{cases} Y'(x) = \lambda[Y(x) - 1]; \quad 0 \le x \le b \\ Y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow$ tam (gerçek)çözüm: $Y(x) = 1$

$\begin{cases} Y_\varepsilon'(x) = \lambda[Y_\varepsilon(x) - 1]; \quad 0 \le x \le b \\ Y_\varepsilon(0) = 1 + \varepsilon \end{cases} \rightarrow$ pertürbe çözüm $: Y_\varepsilon(x) = 1 + \varepsilon e^{\lambda x}$

$$Y(x) - Y_\varepsilon(x) = -\varepsilon e^{\lambda x} \Longrightarrow$$

$$\max_{0 \le x \le b} |Y(x) - Y_\varepsilon(x)| = \begin{cases} |\varepsilon|, \lambda \le 0 \\ |\varepsilon| e^{\lambda b}, \lambda \ge 0 \end{cases}$$

$\lambda < 0$ ise hata $Y(x) - Y_\varepsilon(x) = -\varepsilon e^{\lambda x}$; x arttıkça azalır $\Longrightarrow$ problem stabil (c = 1)

$\lambda > 0$ ise hata $Y(x) - Y_\varepsilon(x) = -\varepsilon e^{\lambda x}$; x arttıkça artar $\Longrightarrow$ problem stabil değil (c = $e^{\lambda b}$)

Genel halde $\dfrac{\partial f(x, Y(x))}{\partial z} \le 0$; $x_0 \le x \le b$ ise problem iyi koşulludur

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Euler Yöntemi

$$\begin{cases} Y' = f\big(x, Y(x)\big); \;\; x_0 \le x \le b \\ \qquad Y(x_0) = Y_0 \end{cases} \quad ; \;\; \text{Başlangıç Değer Problemi}$$

$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N \le b$ *ayrık noktaları için* ; $x_n = x_0 + nh; n = 0,1,2, \dots, N$ olarak alınırsa

Numerik Çözüm $y(x) \to y(x_n) = y_h(x_n) = y_n; n = 0,1,2, \dots, N$

İleri Fark Nümerik Türev Formülü : $Y'(x) \approx \frac{1}{h}[Y(x+h) - Y(x)]$

$x = x_n$ noktası için dif. denklem $Y'(x_n) = f\big(x_n, Y(x_n)\big)$

$$\Rightarrow \frac{1}{h}[Y(x_{n+1}) - Y(x_n)] \approx f\big(x_n, Y(x_n)\big) \Rightarrow$$

$$Y(x_{n+1}) \approx Y(x_n) + hf\big(x_n, Y(x_n)\big) \Rightarrow$$

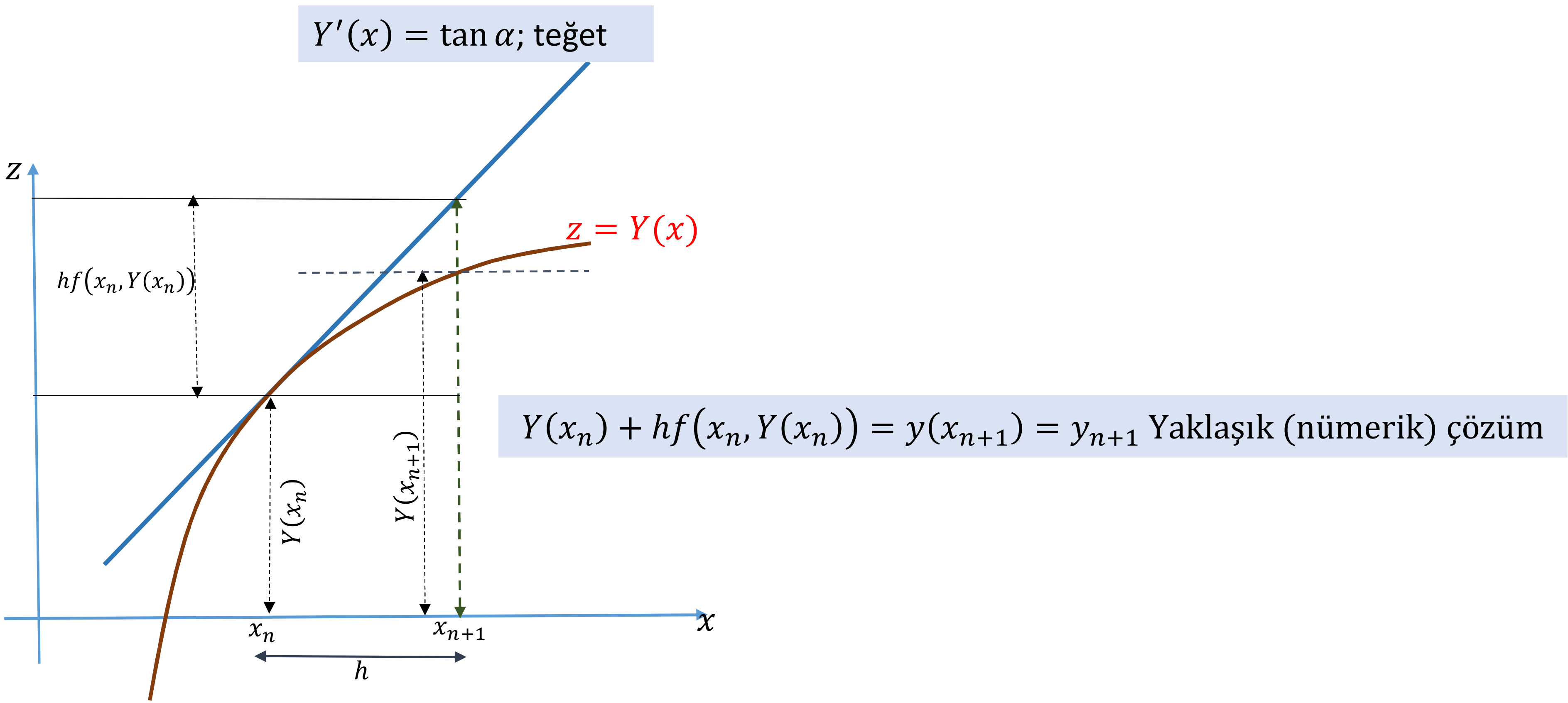
$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)\,; n = 0,1,2, \dots, N-1$$

$$y_1 = \underset{\uparrow\, Y_0}{y_0} + hf(x_0, \underset{\uparrow\, Y_0}{y_0}); \;\; y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1); \dots\dots$$

Nümerik Çözüm
(Klasik Euler Yönt.)

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Euler Yöntemi



DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Euler Yöntemi

örnek: $\begin{cases} Y'(x) = -Y(x); \;\; 0 \leq x \\ \qquad Y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow$ tam (gerçek)çözüm: $Y(x) = e^{-x}$

Euler Formülü: $\quad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \;\rightarrow y_{n+1} = y_n - hy_n \;;\; n \geq 0$

$$Y(0) = Y_0 = y_0 = 1 \; ve \; h = 0.1 \;\Longrightarrow x_1 = 0.1, \;\; x_2 = 0.2, \;\; x_3 = 0.3$$

$$y_1 = y_0 - hy_0 = 1 - 0.1 = 0.9$$

$$y_2 = y_1 - hy_1 = 0.9 - 0.1\;0.9 = 0.81$$

$$y_3 = y_2 - hy_2 = 0.81 - 0.1\;0.81 = 0.729$$

$$Y(x_1) - y_1 = e^{-0.1} - 0.9 = 0.004837$$

$$Y(x_2) - y_2 = e^{-0.2} - 0.81 = 0.001873$$

$$Y(x_3) - y_3 = e^{-0.3} - 0.729 = 0.0118182$$

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Euler Yöntemi

örnek: $\begin{cases} Y'(x) = \dfrac{Y(x) + x^2 - 2}{x+1}; \quad x \geq 0 \\ Y(0) = 2 \end{cases}$ $\rightarrow$ tam (gerçek)çözüm: $Y(x) = x^2 + 2x + 2 - 2(x+1)\log(x+1)$

Euler Formülü: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \rightarrow y_{n+1} = y_n + h\dfrac{y_n + x_n^2 - 2}{x_n + 1}$; $n \geq 0$

$Y(0) = 2 \rightarrow y_0 = 2 \;\; ve \;\; x_n = nh \rightarrow$

h	x	$y_h(x)$	Hata	Relatif Hata
0.2	1.0	$3.2768E-1$	$4.02E-2$	0.109
	2.0	$1.0738E-1$	$2.80E-2$	0.207
	3.0	$3.5184E-2$	$1.46E-2$	0.293
	4.0	$1.1529E-2$	$6.79E-3$	0.371
	5.0	$3.7779E-3$	$2.96E-3$	0.439

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Euler Yöntemi

h	x	$y_h(x)$	Hata	Relatif Hata
0.2	1.0	$3.2768E-1$	$4.02E-2$	0.109
	2.0	$1.0738E-1$	$2.80E-2$	0.207
	3.0	$3.5184E-2$	$1.46E-2$	0.293
	4.0	$1.1529E-2$	$6.79E-3$	0.371
	5.0	$3.7779E-3$	$2.96E-3$	0.439
0.1	1.0	$3.4867E-1$	$1.92E-2$	0.052
	2.0	$1.2158E-1$	$1.38E-2$	0.102
	3.0	$4.2391E-2$	$7.40E-3$	0.149
	4.0	$1.4781E-2$	$3.53E-3$	0.193
	5.0	$5.1538E-3$	$1.58E-3$	0.234
0.05	1.0	$3.5849E-1$	$9.39E-3$	0.0255
	2.0	$1.2851E-1$	$6.82E-3$	0.0504
	3.0	$4.6070E-2$	$3.72E-3$	0.0747
	4.0	$1.6515E-2$	$1.80E-3$	0.0983
	5.0	$5.9205E-3$	$8.17E-4$	0.121

$$\begin{cases} Y'(x) = \dfrac{Y(x) + x^2 - 2}{x+1}; \quad x \geq 0 \\ Y(0) = 2 \end{cases}$$

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{y_n + x_n^2 - 2}{x_n + 1} \; ; \; n \geq 0$$

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Euler Yönteminde Yakınsaklık Analizi

Taylor teoremi kullanılarak

$$Y(x_{n+1}) = Y(x_n) + hY'(x_n) + \frac{h^2}{2}Y''(\xi_n); \quad x_n < \xi_n < x_{n+1}$$

$$Y' = f\big(x, Y(x)\big) \Longrightarrow$$

$$Y(x_{n+1}) = Y(x_n) + hf\big(x, Y(x)\big) + \frac{h^2}{2}Y''(\xi_n); \quad x_n < \xi_n < x_{n+1}$$

$$T_{n+1} = \frac{h^2}{2}Y''(\xi_n) \quad : \quad \text{Kesme Hatası (Truncation Error)}$$

$Y(x_{n+1}) \approx Y(x_n) + hf\big(x, Y(x)\big)$ yaklaşıklığının hatası $T_{n+1} = \frac{h^2}{2}Y''(\xi_n)$ dir

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Euler Yönteminde Yakınsaklık Analizi

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$Y(x_{n+1}) = Y(x_n) + hf\big(x, Y(x)\big) + \frac{h^2}{2}Y''(\xi_n); \quad x_n < \xi_n < x_{n+1}$$

$$\underbrace{Y(x_{n+1}) - y_{n+1}}_{\text{Toplam Hata}} = \underbrace{\underbrace{\boxed{Y(x_n) - y_n}}_{\text{Önceki adımdaki hata}} + h\big[f\big(x_n, Y(x_n)\big) - f(x_n, y_n)\big]}_{\text{Sonraki adıma geçişteki hata (propagated error)}} + \underbrace{\frac{h^2}{2}Y''(\xi_n)}_{\text{Kesme Hatası}}$$

Ortalama değer teoreminden

$$h\big[f\big(x_n, Y(x_n)\big) - f(x_n, y_n)\big] = \frac{\partial f(x_n, z_n)}{\partial z}[Y(x_n) - y_n]\,; \quad z_n, y_n \text{ ile } Y(x_n) \text{ arasında bir değer}$$

$e_k = Y(x_n) - y_k; \quad k > 0$; hata olmak üzere

$$e_{n+1} = \left[1 + h\frac{\partial f(x_n, z_n)}{\partial z}\right]e_n + \frac{h^2}{2}Y''(\xi_n)$$

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Euler Yönteminde Yakınsaklık Analizi

örnek: $\begin{cases} Y'(x) = 2x; \ \ x \geq 0 \\ \quad Y(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \text{tam (gerçek)çözüm: } Y(x) = x^2$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \Longrightarrow \ e_{n+1} = \left[1 + h\frac{\partial f(x_n, z_n)}{\partial z}\right] e_n + \frac{h^2}{2} Y''(\xi_n) \Longrightarrow e_{n+1} = e_n + h^2$$

$(Y''(\xi_n) = 2\ )$

$e_0 = 0$

$e_n = nh^2\ ; n \geq 0$

$nh = x_n \Longrightarrow e_n = hx_n \Longrightarrow$ Hata her noktada h ile orantılı

Kesme (truncation) hatası h^2 ile orantılı olmasına rağmen toplam hata (birikimsel olduğundan) h ile orantılı

Sonuç: Euler yönteminde hata h ile orantılı olduğundan bu yöntem çok etkin bir yöntem değildir.

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Euler Yönteminde Yakınsaklık Analizi

Teorem : $Y(x), [x_0, b]$ aralığında 2 kez türevlenebilir ve $Y'(x) = f\big(x, Y(x)\big)$ denkleminin gerçek çözümü ve

$$K = \sup_{\substack{-\infty<z<\infty \\ x_0\leq x\leq b}} \left|\frac{\partial f(x,z)}{\partial z}\right| < \infty \quad \text{olmak üzere}$$

$$|Y(x_n) - y_h(x_n)| \leq e^{(b-x_0)K}|Y_0 - y_0| + h\left[\frac{e^{(b-x_0)K} - 1}{2K}\right] \max_{x_0\leq x\leq b} |Y''(x)| \,;\, x_0 \leq x_n \leq b$$

$$y_0 = Y_0 \Longrightarrow |Y(x_n) - y_h(x_n)| \leq ch \;\; ; x_0 \leq x_n \leq b$$

Euler yönteminde $|Y(x_n) - y_h(x_n)|$: hata sınırı h ile orantılı. $\Longrightarrow$ Euler yöntemi 1. mertebeden doğrulukta (First order accuracy)

Genel halde $|Y(x_n) - y_h(x_n)| \leq ch^p \;\; ; x_0 \leq x_n \leq b \Longrightarrow$ p.mertebeden doğruluk

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Geri Fark Euler Yöntemi

İleri Fark Nümerik Türev Formülü : $Y'(x) \approx \frac{1}{h}[Y(x+h) - Y(x)]$

$x = x_n$ noktası için dif. denklem $Y'(x_n) = f\big(x_n, Y(x_n)\big)$

$$\frac{1}{h}[Y(x_{n+1}) - Y(x_n)] \approx f\big(x_n, Y(x_n)\big)$$

$$Y(x_{n+1}) \approx Y(x_n) + hf\big(x_n, Y(x_n)\big)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)\,;\, n = 0,1,2,\dots, N-1$$

Nümerik Çözüm (Euler) ileri fark

$Y'(x) \approx \frac{1}{h}[Y(x) - Y(x-h)]$: Geri Fark Nümerik Türev Formülü kullanılırsa :

$$hY'(x) = Y(x) - Y(x-h) \Longrightarrow Y(x) = Y(x-h) + hY'(x) \Longrightarrow$$

$$Y(x) = Y(x-h) + hf(x, Y(x)) \Longrightarrow y_n = y_{n-1} + hf(x_n, y_n) \Longrightarrow$$

$Y'(x_n) = f\big(x_n, Y(x_n)\big)$ denkleminin ayrıklaştırılmış hali

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_n, y_n)\,;\, n = 1,2,\dots, N$$

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Geri Fark Euler (Backward Euler) Yöntemi

$Y'(x_n) = f\big(x_n, Y(x_n)\big)$ denkleminin ayrıklaştırılmış hali $y_n = y_{n-1} + hf(x_n, y_n)\,; n = 1,2, \dots, N$

indisi sıfırdan başlatabilmek adına 1 adım kaydıralım: $\Longrightarrow$

Çözüm: $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})\,; n = 0,12, \dots, N-1 \\ y_0 = Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$

$|Y(x_n) - y_h(x_n)|$: hata sınırı yine h ile orantılı. $\Longrightarrow$ Geri Fark Euler yöntemi de 1. mertebeden doğrulukta (First order accuracy)

$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ ifadesi klasik Eulerdeki kadar basit değil zira genel halde y_{n+1} lineer olmayan bir denklemden çözülmek zorunda

y_{n+1} bir nonlineer denklemden kök bulma şeklinde elde ediliyorsa bunlara kapalı (implicit) yöntemler denir.
y_{n+1} eğer bu denklemden direk olarak çözülebiliyorsa bu da açık (explicit) yöntem olarak bilinir.

Genel Halde :
Klasik Euler yöntemi :Açık (Explicit)
Geri Fark Euler yöntemi: Kapalı (implicit)

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Geri Fark Euler (Backward Euler) Yöntemi

$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ denkleminden her adımda bir kök bulma problemi çok zahmetli (işlem yükü fazla) $\Longrightarrow$

Bir başlangıç değeri seçilerek basit bir iterasyonla (sabit nokta iterasyonu gibi) çözüm yapılabilir.

$y_{n+1}^{(0)}$ başlangıç değerinden hareketle ; $y_{n+1}^{(j+1)} = y_n + hf\left(x_{n+1},\ y_{n+1}^{(j)}\right); j = 0,1,2, \dots.$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

$$y_{n+1}^{(j+1)} = y_{n+1}^{(j)} + hf\left(x_{n+1},\ y_{n+1}^{(j)}\right)$$

$$y_{n+1} - y_{n+1}^{(j+1)} = h\left[f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f\left(x_{n+1},\ y_{n+1}^{(j)}\right)\right] \approx h\frac{\partial f(x_{n+1}, y_{n+1})}{\partial z}(y_{n+1} - y_{n+1}^{(j)})$$

$'j+1'$ deki hata

$'j'$ deki hata

$\left|h\frac{\partial f(x_{n+1}, y_{n+1})}{\partial z}\right| < 1$ ise hatalar giderek küçülür ve yöntem (fixed point iter.) yakınsar

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Geri Fark Euler (Backward Euler) Yöntemi

Pratikte iyi bir $y_{n+1}^{(0)}$ başlangıç değeri ile küçük h değerleri için tek bir iterasyonla y_{n+1} oldukça yüksek doğrulukta belirlenir

Başlangıç değeri için Klasik Euler kullanılırsa

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Bu halde bu denkleme tahmin yada kestirim (predictor equation) denklemi diyoruz.

Bu halde geri fark Euler için iterasyon şeması:

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) \Longrightarrow$$

$$y_{n+1} = y_n + hf\big(x_{n+1}, y_n + hf(x_{n+1}, y_n)\big)$$

Geri Fark Euler Yöntemi de 1. mertebe doğrulukta

Genel halde $|Y(x_n) - y_h(x_n)| \leq ch^p$; $x_0 \leq x_n \leq b \Longrightarrow$ p.mertebeden doğruluk

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Trapezoidal Yöntemi

Euler yöntemlerinin (ileri ya da geri) dezavantajı düşük doğruluk (düşük yakınsaklık hızı) mertebesi

Trapezoidal Yöntemi:

$Y'(x) = f\big(x, Y(x)\big)$ denklemi integre edilerek:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} Y'(x)dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f\big(x, Y(x)\big)dx \implies Y(x_{n+1}) = Y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f\big(x, Y(x)\big)dx \implies$$

$$Y(x_{n+1}) \approx Y(x_n) + \frac{h}{2}\Big[f\big(x_n, Y(x_n)\big) + f\big(x_{n+1}, Y(x_{n+1})\big)\Big] \implies$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]; n \geq 0 \\ y_0 = Y_0 \end{cases}$$

Trapezoidal Yöntemi : 2. mertebe doğrulukta ve mutlak stabil;
Ancak yine geri fark Euler gibi kapalı (Implicit)
(Yani Nonlineer kök bulma problem içeriyor)

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Trapezoidal Yöntemi

$$y_{n+1}^{(j+1)} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(j)}\right)\right]; j = 0,1,2,\ldots$$

Her bir adımda bu iterasyonun yapılması gerekir

h yeterince küçükse $y_{n+1}^{(j)} \to y_{n+1} \quad (j \to \infty)$

$$\left|h\frac{\partial f(x_{n+1}, y_{n+1})}{\partial z}\right| < 1 \quad \text{(Yakınsaklık Koşulu)}$$

Başlangıç değeri için yine Klasik Euler kullanılırsa

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n); \quad \text{Predictor Eqn}$$

Başlangıç değeri için alternatif olarak Adam−Bashforth formülü de kullanılabilir

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + \frac{h}{2}[3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1}); \quad \text{Predictor Eqn}$$

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Taylor ve Runge-Kutta Yöntemleri

$Y(x_{n+1}) \approx Y(x_n) + h\,Y'(x_n) \leftarrow Lineer\ Taylor\ polinomu\ ile\ bulunan\ \ EULER\ yaklaşımı$

Yakınsama hızını artırmak için daha yüksek mertebeden Taylor polinomu kullanılabilir.

Genel olarak $Y'(x) = f\big(x, Y(x)\big);\ \ x_0 \le x \le b; Y(x_0) = Y_0$ denkleminin çözümü için

$$Y(x_{n+1}) \approx Y(x_n) + h\,Y'(x_n) + \cdots + \frac{h^p}{p!}Y^{(p)}(x_n);\ \ \text{yüksek mertebe yaklaşıklığı kullanılırsa;}$$

Kesme (truncation error) *hatası*: $T_{n+1} = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}Y^{(p+1)}(\xi_n);\ \ x_n \le \xi_n \le x_{n+1}$

$Y'(x), Y''(x), \ldots, Y^{(p)}(x)$ türevlerinin hesabı orjinal dif. denklemi kapalı formda türetilmesiyle bulunur. Bu ifadelerde sadece x_n ve $Y(x_n)$ görünmelidir.

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Taylor ve Runge-Kutta Yöntemleri

$$Y'(x) = f\big(x, Y(x)\big)\ ; z = Y(x) \Longrightarrow\ Y'(x) = f(x, z) \Longrightarrow\ Y''(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = f_x + f_z f$$

$$Y'''(x) = f_{xx} + 2f_{xz}f + f_{zz}f^2 + f_z(f_x + f_z f)$$

$$\ldots$$

Çözüm:

$$y_{n+1} = y_n + h\, y_n' + \frac{h^2}{2} y_n'' + \cdots + \frac{h^p}{p!} y_n^{(p)}$$

Taylor Yöntemi

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Taylor ve Runge-Kutta Yöntemleri

Örnek : $Y'(x) = -Y(x) + 2\cos x\,; Y(0) = 1$ (Gerçek (Tam)Çözüm): $Y(x) = \sin x + \cos x$

2.Mertebe (Kuadratik) Taylor Açılımı ile:

$$Y(x_{n+1}) \approx Y(x_n) + h\,Y'(x_n) + \frac{h^2}{2}Y''(x_n)\ \ ;$$

$$T_{n+1} = \frac{h^3}{6}Y'''(\xi_n);\ x_n \le \xi_n \le x_{n+1}$$

$$Y'(x_n) = -Y(x_n) + 2\cos x_n$$

$$Y''(x_n) = -Y'(x_n) - 2\sin x_n = Y(x_n) - 2\cos x_n - 2\sin x_n$$

$$Y(x_{n+1}) \approx Y(x_n) + h\,[-Y(x_n) + 2\cos x_n] + \frac{h^2}{2}[Y(x_n) - 2\cos x_n - 2\sin x_n]\ \ ;$$

$$y_{n+1} = y_n + h\,[-y_n + 2\cos x_n] + \frac{h^2}{2}[y_n - 2\cos x_n - 2\sin x_n]\,;\ \ n \ge 0$$

$$y_0 = 1$$

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Taylor ve Runge-Kutta Yöntemleri

$$Y'(x) = -Y(x) + 2\cos x\,; Y(0) = 1$$
(Gerçek (Tam)Çözüm): $Y(x) = \sin x + \cos x$

2. Mertebe Taylor Yöntemi

h	x	$y_h(x)$	Hata	Hata (Klasik Euler)
0.1	2.0	0.492225829	$9.25E-4$	$-4.64E-2$
	4.0	-1.411659477	$1.21E-3$	$3.91E-2$
	6.0	0.682420081	$-1.67E-3$	$1.39E-2$
	8.0	0.843648978	$2.09E-4$	$-5.07E-4$
	10.0	-1.384588757	$1.51E-3$	$2.83E-3$
0.05	2.0	0.492919943	$2.31E-4$	$-2.30E-2$
	4.0	-1.410737402	$2.91E-4$	$1.92E-2$
	6.0	0.681162413	$-4.08E-4$	$6.97E-2$
	8.0	0.848301368	$5.68E-5$	$-2.50E-2$
	10.0	-1.383454154	$3.62E-4$	$1.39E-2$

h yarıya indiğinde hata 4 kat azalıyor

Yüksek mertebe Taylor Yöntemi Euler'den daha hızlı yakınsak ve hatası da daha düşük

$$y_{n+1} = y_n + h\,[-y_n + 2\cos x_n] + \frac{h^2}{2}[y_n - 2\cos x_n - 2\sin x_n]\,;\;\; n \geq 0$$
$$y_0 = 1$$

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Runge-Kutta Yöntemleri:

Taylor yöntemi kavramsal olarak kolay ancak zaman alıcı ve yüksek mertebe türev hesapları içeriyor. Bundan kaçınmak ancak doğruluk seviyesini de yine yüksek tutabilmek amacıyla Runge-Kutta yöntemleri uygulanır

Yöntemin temel felsefesi: $Y' = f(x, z)$ yi daha çok nokta ile hesaplayarak eğimi daha yüksek doğrulukta hesaplamak ve Taylor'daki doğruluğa yaklaşmak

Runge-Kutta Yönteminin Genel Yapısı

$$y_{n+1} = y_n + h\, F(x_n, y_n; h)\;; n \geq 0; y_0 = Y_0$$

$F(x_n, y_n; h)$ terimi ortalama eğime karşı düşen bir terimdir. (x_n, x_{n+1}) aralığında daha yüksek doğrulukta bir eğim hesabı yapabilmek için çeşitli yaklaşımlar önerilebilir. Klasik Euler yönteminde bu eğim doğrudan ilk nokta olan x_n noktasında hesaplanıyor. Geriye doğru Euler yönteminde ise son nokta x_{n+1} baz alınmış oluyor

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Runge-Kutta Yöntemleri:

2. Mertebe Runge-Kutta Yöntemi:

Ortalama eğim hesabı için kullanacağımız $F(x_n, y_n, h)$ fonksiyonunu Taylor Polinomuna benzetmeye çalışacağız $\Longrightarrow$

$$F(x, y; h) = \gamma_1 f(x, y) + \gamma_2 f(x + \alpha h, y + \beta h f(x, y))$$

$\{\gamma_1, \gamma_2, \alpha, \beta\}$ katsayılar dörtlüsü uygun şekilde belirlenmeye çalışılır:

$$y_{n+1} = y_n + h\, F(x_n, y_n; h) \Longrightarrow$$

$$y_{n+1} = y_n + h\gamma_1 f(x_n, y_n) + h\gamma_2 f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h f(x_n, y_n))$$

Kesme hatası

$$T_{n+1} = Y(x_{n+1}) - [Y(x_n) + hF(x_n, Y(x_n); h)] \rightarrow \sigma(h^3)$$

(Taylordaki gibi hatanın mertebesi h^3 olsun istiyoruz)

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Runge-Kutta Yöntemleri:

2. Mertebe Runge-Kutta Yöntemi:

$$f(x+\alpha h, y+\beta h f(x,y)) = f(x+\alpha h, y) + \frac{\partial f}{\partial z}(x+\alpha h, y)\beta h f(x,y) + \sigma(h^2) \Longrightarrow$$

$$f(x+\alpha h, y+\beta h f(x,y)) = f + f_x \alpha h + f_z \beta h f(x,y) + \sigma(h^2)$$

$$Y(x+h) = Y(x) + h\,Y'(x) + \frac{h^2}{2} Y''(x) + \sigma(h^3)$$

$$Y'(x) = f$$

$$Y''(x) = f_x + f_z f$$

$$Y(x+h) = Y(x) + h\,f(x, Y(x)) + \frac{h^2}{2}[f_x + f_z f] + \sigma(h^3)$$

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Runge-Kutta Yöntemleri:

2. Mertebe Runge-Kutta Yöntemi:

$$Y(x+h) - [Y(x) + h\,F(x, Y(x); h)]$$

$$= Y + hf + \frac{h^2}{2}[f_x + f_z f] - [Y + h\gamma_1 f + \gamma_2 h(f + \alpha h f_x + \beta h f_z f)] + \sigma(h^3)$$

$$= h(1 - \gamma_1 - \gamma_2)f + \frac{h^2}{2}[(1 - 2\gamma_2\alpha)\, f_x + (1 - 2\gamma_2\beta) f_z f] + \sigma(h^3) \Longrightarrow$$

$$1 - \gamma_1 - \gamma_2 = 0$$

$$1 - 2\gamma_2\alpha = 0$$

$$1 - 2\gamma_2\beta = 0$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2\gamma_2}; \gamma_1 = 1 - \gamma_2$$

γ_2 çeşitli şekillerde seçilebilir:

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}\,; \gamma_2 = \frac{3}{4}; \gamma_2 = 1$$

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Runge-Kutta Yöntemleri:

2. Mertebe Runge-Kutta Yöntemi:

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} \;\; alınırsa; \alpha = \beta = 1; \gamma_1 = \frac{1}{2}$$

HEUN Yöntemi

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f\big(\underset{\substack{\downarrow \\ x_{n+1}}}{x_n + h}, \underbrace{y_n + hf(x_n, y_n)}_{\text{Euler den bulunan } y_{n+1}}\big)\right]; \;\; n \geq 0$$

$f(x_n, y_n)$ ve $f\big(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)\big)$ eğimlerinin ortalaması alınarak

(x_n, x_{n+1}) aralığındaki ortalama eğim bulunmuş oldu

$$F(x_n, y_n; h) = \frac{1}{2}\left[f(x_n, y_n) + f\big(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)\big)\right]$$

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Runge-Kutta Yöntemleri

$$Y'(x) = -Y(x) + 2\cos x\,; Y(0) = 1$$
$$\text{(Gerçek (Tam)Çözüm):} \quad Y(x) = \sin x + \cos x$$

2. Mertebe Runge Kutta (Heun) Yöntemi

h	x	$y_h(x)$	Hata	Hata (Klasik Euler)
0.1	2.0	0.491215673	$1.93E-3$	-$4.64E-2$
	4.0	-1.407898629	-$2.55E-3$	$3.91E-2$
	6.0	0.680696723	$5.81E-5$	$1.39E-2$
	8.0	0.84137339	$2.48E-3$	$-5.07E-4$
	10.0	-1.380966579	$-2.13E-3$	$2.83E-3$
0.05	2.0	0.492682499	$4.68E-4$	-$2.30E-2$
	4.0	-1.409821234	-$6.25E-4$	$1.92E-2$
	6.0	0.680734664	$2.01E-5$	$6.97E-2$
	8.0	0.843254396	$6.04E-4$	$-2.50E-2$
	10.0	-1.3824569379	-$5.23E-4$	$1.39E-2$

h yarıya indiğinde hata 4 kat azalıyor

Heun Yöntemi Euler'den daha hızlı yakınsak ve hatası da daha düşük

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f\big(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)\big)\right]; \quad n \geq 0$$

$$f(x, y) = -y + 2\cos x$$