

Sayısal Haberleşme

Prof. Dr. İbrahim Altunbaş

1 Soru: Nyquist Frekansı

Aşağıda verilen sinyallerin Nyquist frekanslarını ve Nyquist aralıklarını bulunuz.

a) $m_1(t) = 5 \cos 1000\pi t \cos 4000\pi t$

b) $m_2(t) = \frac{\sin 200\pi t}{\pi t} = 200 \text{ sinc } 200t$

c) $m_3(t) = \left(\frac{\sin 200\pi t}{\pi t}\right)^2 = (200 \text{ sinc } 200t)^2$

1.1 Cevap:

a)

$$m_1(t) = 5 \cos 1000\pi t \cos 4000\pi t = 2,5 (\cos 5000\pi t + \cos 3000\pi t)$$

$m_1(t)$ band sınırlı bir işarettir.

Maksimum frekans $f_{maks} = 2500$ Hz.

Nyquist frekansı: $f_{Nyq} = 2f_{maks} = 5000$ Hz = 5 kHz

Nyquist aralığı: $T_{Nyq} = \frac{1}{f_{Nyq}} = \frac{1}{5000} = 0,2$ msn.

b)

$$m_2(t) = \frac{\sin 200\pi t}{\pi t} = 200 \text{ sinc } 200t \text{ ise Fourier dönüşümü}$$

$$\mathbb{F}\{m_2(t)\} = \Pi\left(\frac{f}{200}\right)$$

$m_2(t)$ band sınırlı bir işarettir.

Maksimum frekans $f_{maks} = 100$ Hz.

Nyquist frekansı: $f_{Nyq} = 2f_{maks} = 200$ Hz.

Nyquist aralığı: $T_{Nyq} = \frac{1}{f_{Nyq}} = \frac{1}{200} = 5$ msn.

c)

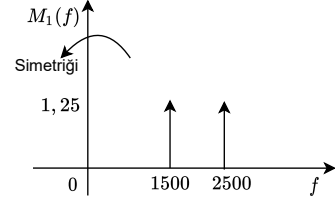
$$m_3(t) = m_2(t)m_2(t) \xrightarrow{\mathbb{F}} M_3(f) = M_2(f) * M_2(f)$$

$m_3(t)$ band sınırlı bir işarettir.

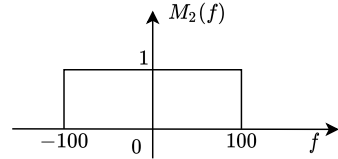
Maksimum frekans $f_{maks} = 200$ Hz.

Nyquist frekansı: $f_{Nyq} = 2f_{maks} = 400$ Hz.

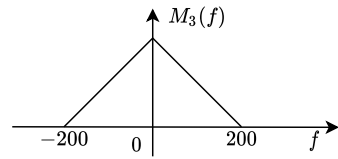
Nyquist aralığı: $T_{Nyq} = \frac{1}{f_{Nyq}} = \frac{1}{400} = 2,5$ msn.



Şekil 1: $m_1(t)$ işaretinin genlik spektrumu.



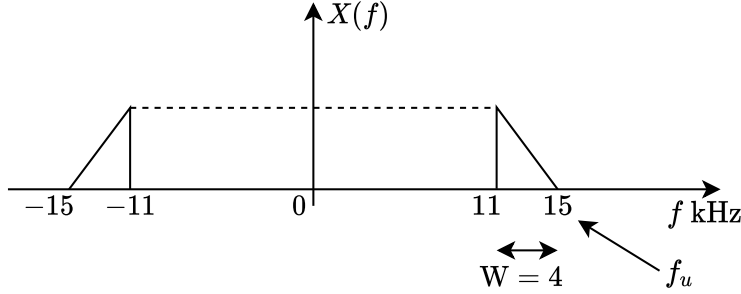
Şekil 2: $m_2(t)$ işaretinin genlik spektrumu.



Şekil 3: $m_3(t)$ işaretinin genlik spektrumu.

2 Soru: Örnekleme

a) Frekans spektrumu şekilde verilen $x(t)$ işaretinin alıcı kısımda yeniden elde edilebilmesi için f_s örnekleme frekansının alacağı en düşük değer ne olmalıdır?



Şekil 4: $x(t)$ işaretinin frekans spektrumu.

b) $x(t)$ işareti i. $f_s = 10$ kHz, ii. $f_s = 12$ kHz, iii. $f_s = 30$ kHz'de örneklenirse örneklenmiş işaretin spektrumunu çiziniz.

c) Örneklenmiş işarettten, tekrar bilgi işaretini elde edebilmek için $H(f)$ band geçiren süzgeci nasıl olmalıdır? $f_s = 12$ kHz için bu süzgeç kullanılabilir mi?

2.1 Cevap:

a)

Biliyoruz ki $f_u = 15$ kHz, $W = 15 - 11 = 4$ kHz, $f_s = \frac{2f_u}{\nu}$ ve $\nu = \lfloor \frac{f_u}{W} \rfloor$ olmak üzere $\nu = \lfloor \frac{15}{4} \rfloor = 3$ olarak bulunur. ν yerine konursa $f_s = \frac{2 \cdot 15 \cdot 10^3}{3} = 10$ kHz olarak bulunur.

b)

Örneklenmiş işaret

$$x_s(t) = x(t)s(t)$$

şeklinde yazılmakta olup burada

$$s(t) = \sum_k \delta(t - kT_s)$$

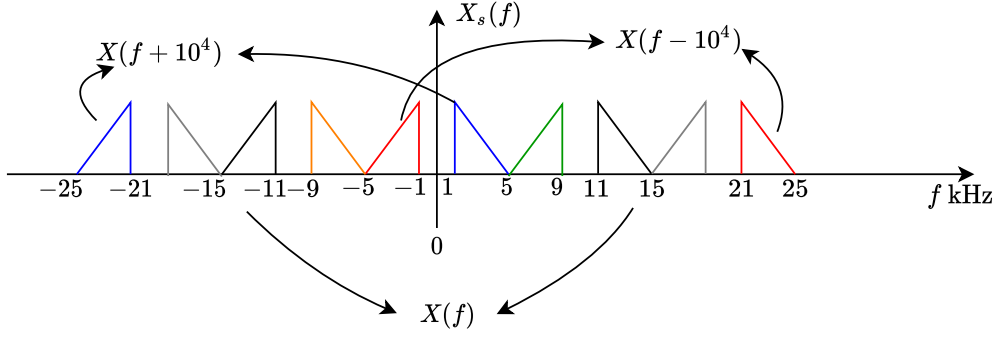
şeklindedir. İmpuls katarı $s(t)$ 'nin Fourier dönüşümü $S(f) = \mathbb{F}\{s(t)\} = f_s \sum_k \delta(f - kf_s)$ olarak yazılabilir. Dolayısıyla örneklenmiş işaretin Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned} X_s(f) &= \mathbb{F}\{x_s(t)\} = \mathbb{F}\{x(t)s(t)\} = \mathbb{F}\{x(t)\} * \mathbb{F}\{s(t)\} \\ &= f_s (X(f)) * \sum_k \delta(f - kf_s) = f_s \sum_k X(f - kf_s) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

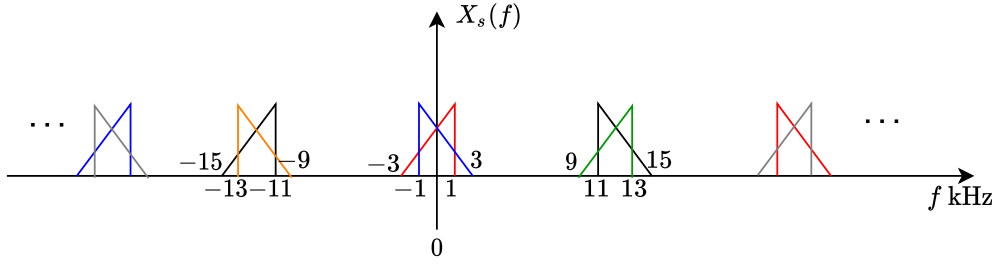
Farklı f_s 'ler için $X_s(f)$ 'ler aşağıdaki gibi çizilebilir.

i.



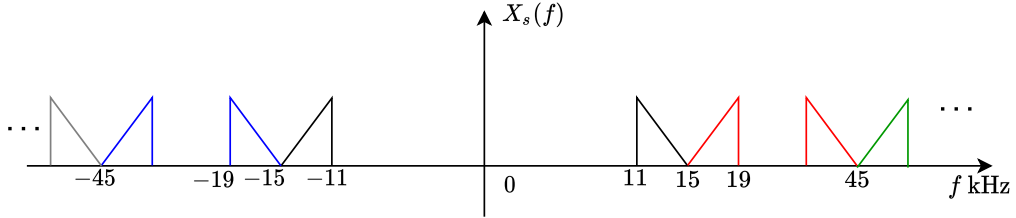
Şekil 5: $f_s = 10$ kHz olduğu durumda $X_s(f)$.

ii.



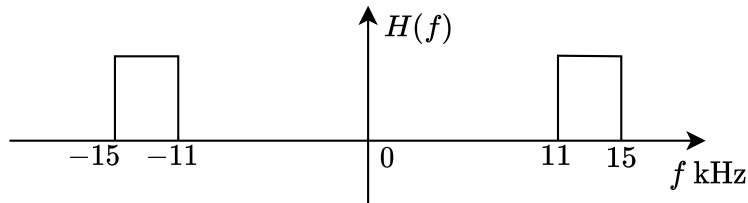
Şekil 6: $f_s = 12$ kHz olduğu durumda $X_s(f)$.

iii.



Şekil 7: $f_s = 30$ kHz olduğu durumda $X_s(f)$.

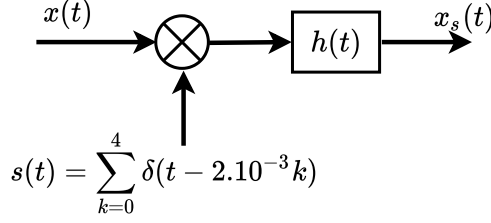
c) $H(f)$ süzgeci aşağıdaki gibi olmalı. $f_s = 12$ kHz için $x(t)$ 'ye ilişkin spektrum bozulduğundan hiç bir süzgeç kullanılamaz.



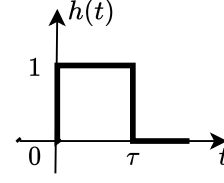
Şekil 8: $H(f)$ frekans cevabı.

3 Soru: Pulse Amplitude Modulation (PAM) işaretin gücü

$$x(t) = \begin{cases} e^{-100t}, & 0 \leq t \leq 10 \text{ msn} \\ 0, & \text{dışında} \end{cases} \quad \text{işareti şekildeki örnekleyci devresinin girişine uygulanıyor.}$$



Şekil 9: Örnekleyci devre.

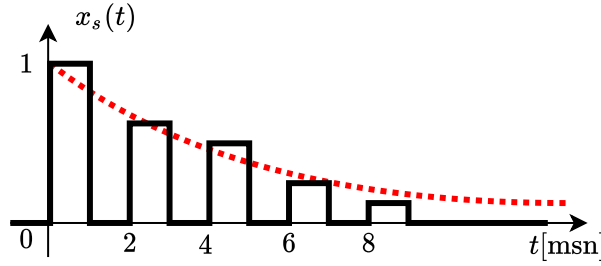


Şekil 10: $h(t)$ impuls cevabı.

- a) Örneklenmiş $x_s(t)$ işaretinin değişimini çiziniz.
- b) Sürekli işaret / örneklenmiş işaret güçleri oranı 6 dB olduğuna göre, τ tutulma süresini bulunuz.

3.1 Cevap:

a)



Şekil 11: $x_s(t)$ işareti.

- b) $T_0 = 10 \cdot 10^{-3}$ olmak üzere T_0 süresince ortalama güç: $S_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^2(t) dt$ dir. Dolayısıyla

$$S_x = \frac{1}{10^{-2}} \int_0^{10^{-2}} x^2(t) dt = \frac{1}{10^{-2}} \int_0^{10^{-2}} e^{-200t} dt = 0,432$$

olarak bulunur. $x_s(t)$ işaretinin T_0 süresince ortalama gücü:

$$\begin{aligned}
S_{x_s} &= \frac{1}{10^{-2}} \int_0^{10^{-2}} x_s^2(t) dt \\
&= \frac{1}{10^{-2}} \left(\int_0^{\tau} 1^2 dt + \int_{2.10^{-3}}^{2.10^{-3}+\tau} (e^{-0,2})^2 dt + \int_{4.10^{-3}}^{4.10^{-3}+\tau} (e^{-0,4})^2 dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{6.10^{-3}}^{6.10^{-3}+\tau} (e^{-0,6})^2 dt + \int_{8.10^{-3}}^{8.10^{-3}+\tau} (e^{-0,8})^2 dt \right) \\
&= \frac{1}{10^{-2}} \left(1 + 0,6 + 0,449 + 0,301 + 0,201 \right) \tau = 262,18\tau
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Sürekli işaret / örneklenmiş şaret güçleri oranı 6 dB ise, $10 \log \left(\frac{S_x}{S_{x_s}} \right) = 10 \log \left(\frac{0,432}{262,18\tau} \right) = 6$ dB olur.

Öyleyse $\frac{0,432}{262,18\tau} = 10^{0,6}$ ve $\tau = 0,417$ msn olarak bulunur.