Otomatik Kontrol Sistemleri

Hafta 5

Doç. Dr. Volkan Sezer

2. Derece Az Sönümlü Sistem

$$G(s) = \frac{K\,\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

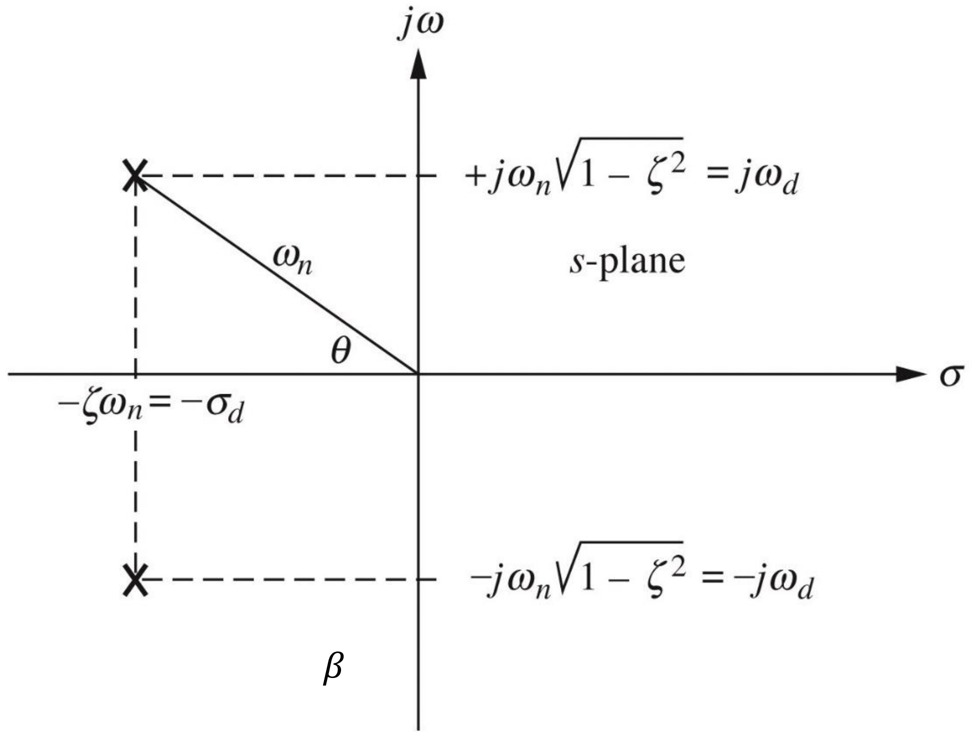


Figure 4.17

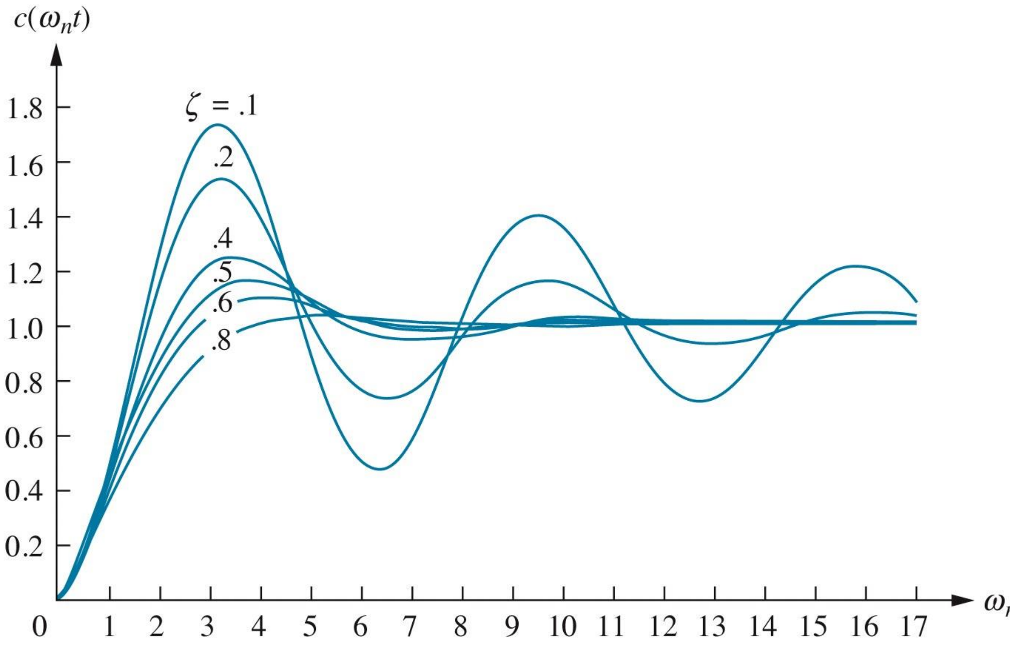


Figure 4.13

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$$

Birim basamak cevabı

2. Derece Az Sönümlü Sistem Zaman Cevabı

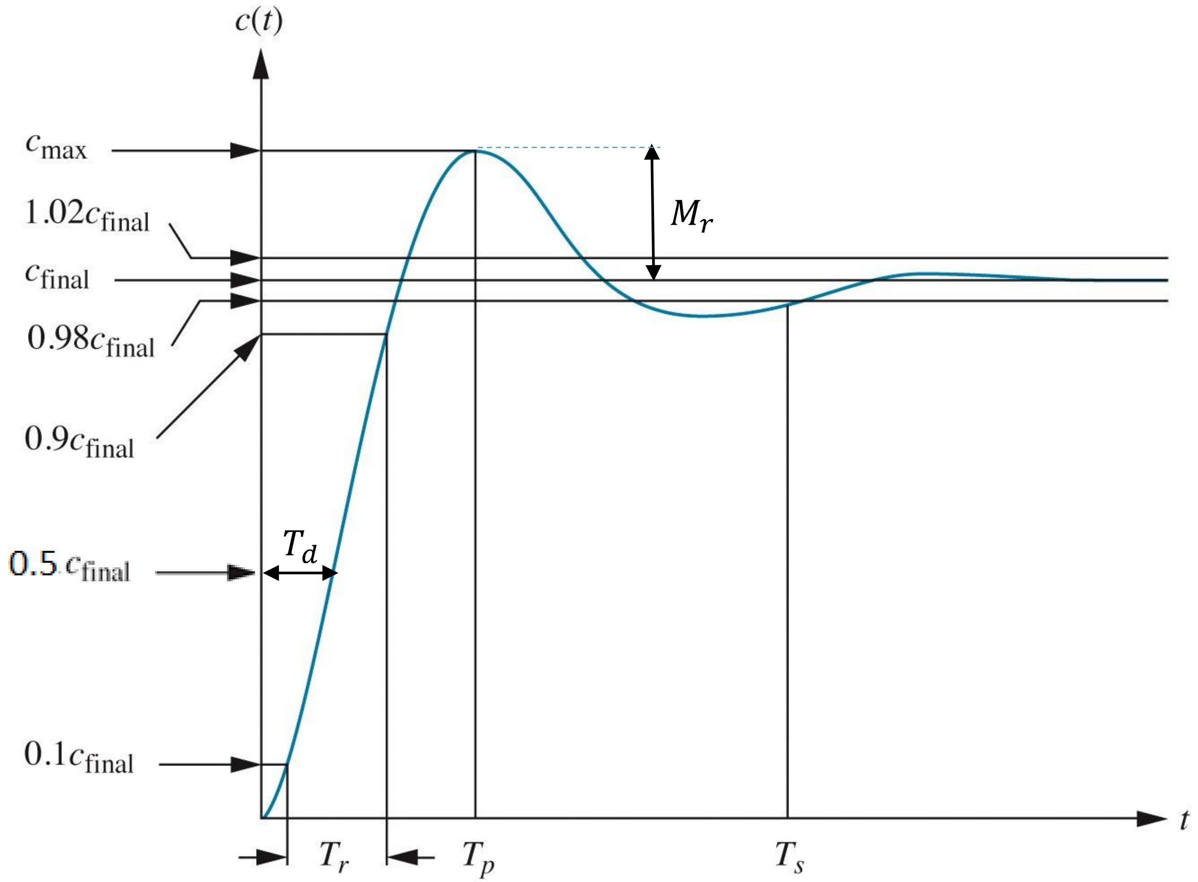


Figure 4.14

2. Derece Az Sönümlü Sistem Zaman Cevabı

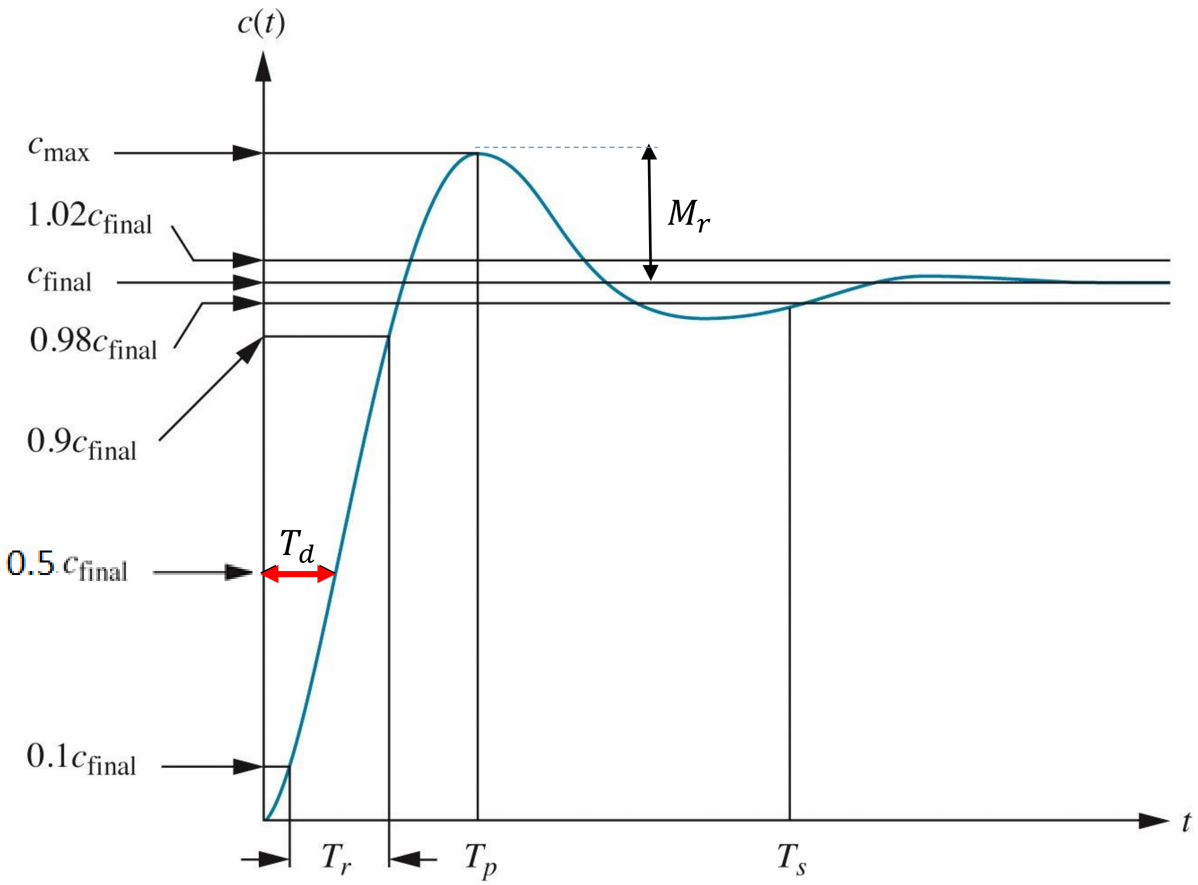


Figure 4.14

1) Td: Gecikme Zamanı (Delay Time)

Sistem cevabının varış değerinin %50'sine ilk defa ulaştığı zaman olarak tanımlanır.

$$C_{(T_d)} = 0.5$$

$$T_d \approx \frac{1+0.7\xi}{W_n}$$

2. Derece Az Sönümlü Sistem Zaman Cevabı

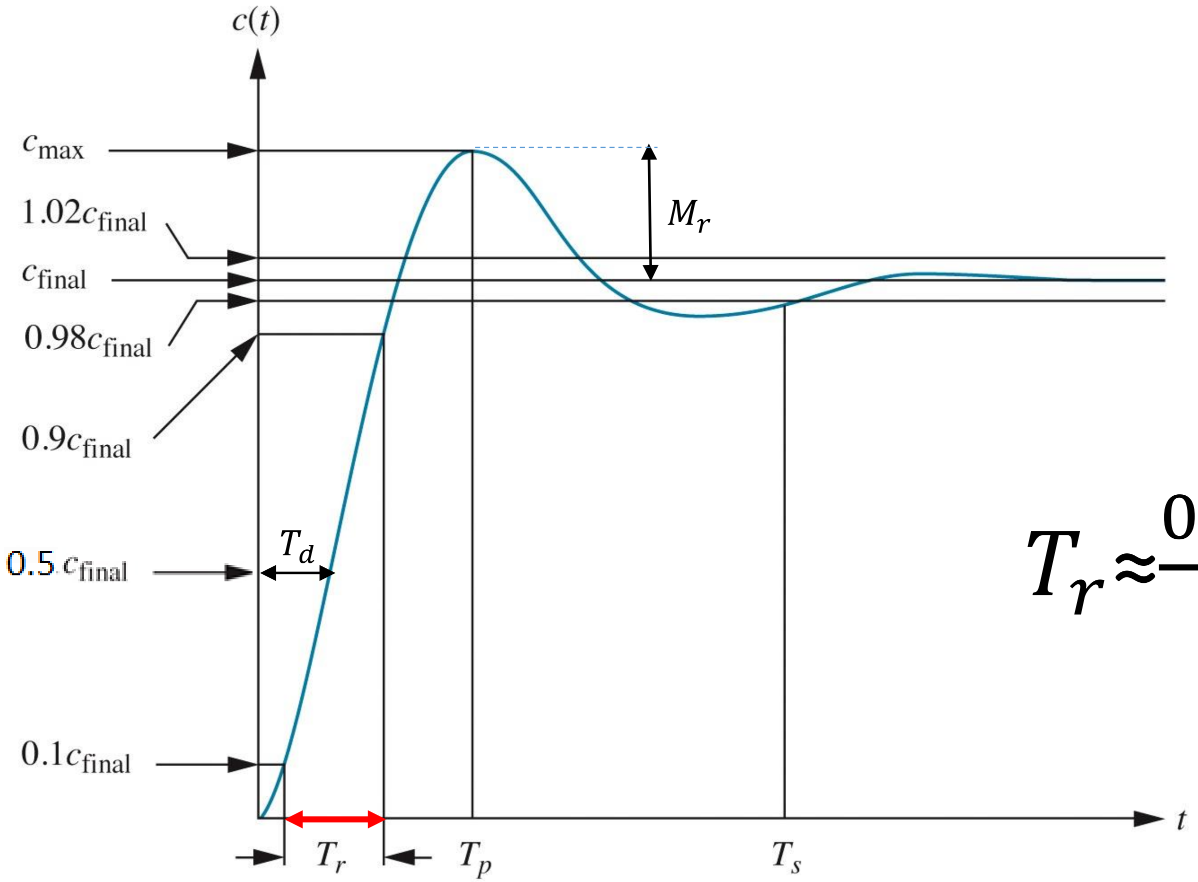


Figure 4.14

2) Tr: Yükselme Zamanı (Rising Time)
Farklı tanımları vardır. Fakat 1. derece sistemle benzer şekilde, son değerin %10'u ile %90'ı arasında geçen süre tanımı idealdir.

$$T_r \approx \frac{0.8+2.5\xi}{W_n} \quad \text{veya} \quad T_r \approx \frac{1-0.4167\xi+2.917\xi^2}{W_n}$$

olarak ifade edilebilir.

2. Derece Az Sönümlü Sistem Zaman Cevabı

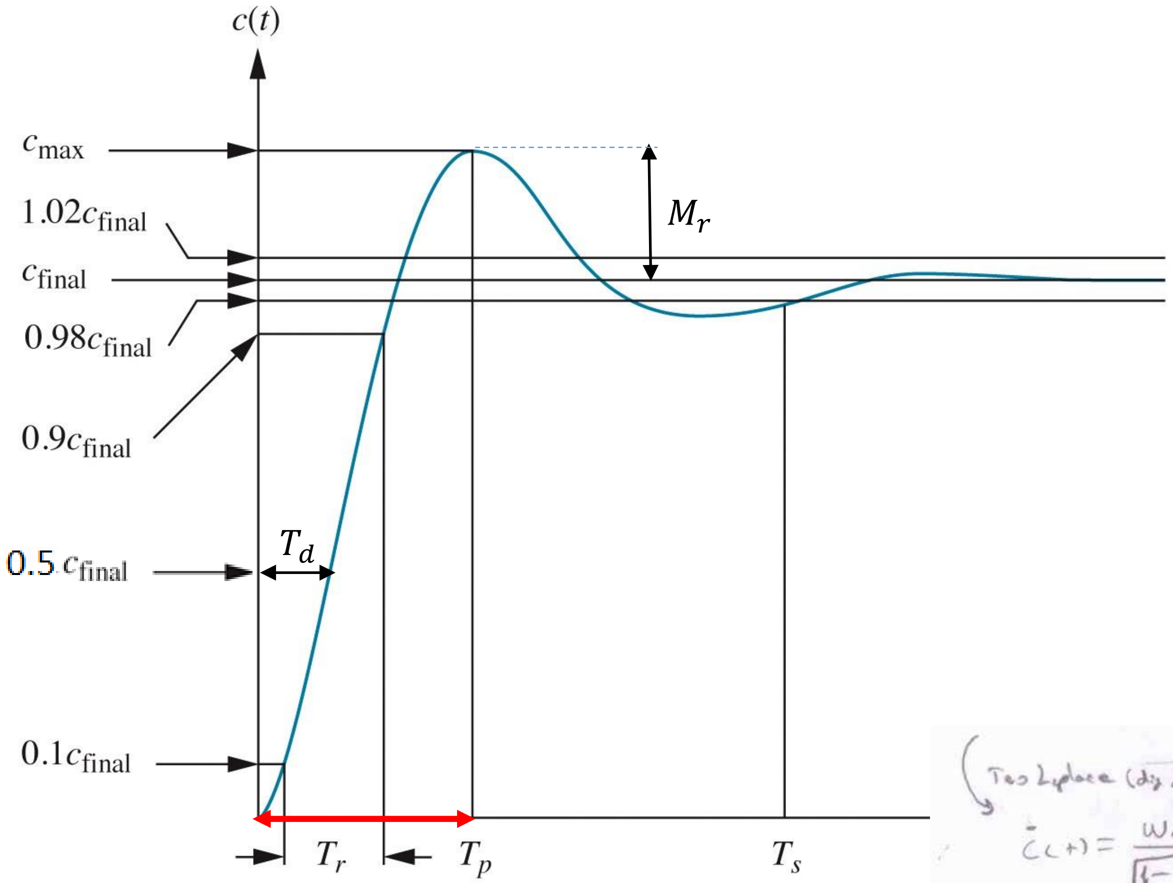


Figure 4.14

3) Tp: Tepe Zamanı (Peak Time)

Cevap eğrisinin maksimum değerine erişme zamanıdır. Cevabın türevini sıfıra eşitleyerek bulabiliriz.

$$C(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\mathcal{L}\{\dot{c}(t)\} = s \cdot C(s) = \cancel{s} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$= \frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)} = \frac{\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)}$$

(Ters Laplace ([illegible]))

$$\dot{c}(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \sin\left(\omega_n\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)\right)$$

$$\dot{c}(t) = 0 \Rightarrow \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t = n\pi$$

n'nin her değeri lokal minimum veya maksimuma denk gelir. En küçük değer ilk maksimum olduğu için n=1 diyebiliriz:

$$\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t = \pi \Rightarrow \boxed{T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

2. Derece Az Sönümlü Sistem Zaman Cevabı

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_r\sqrt{1-\zeta^2}}$$

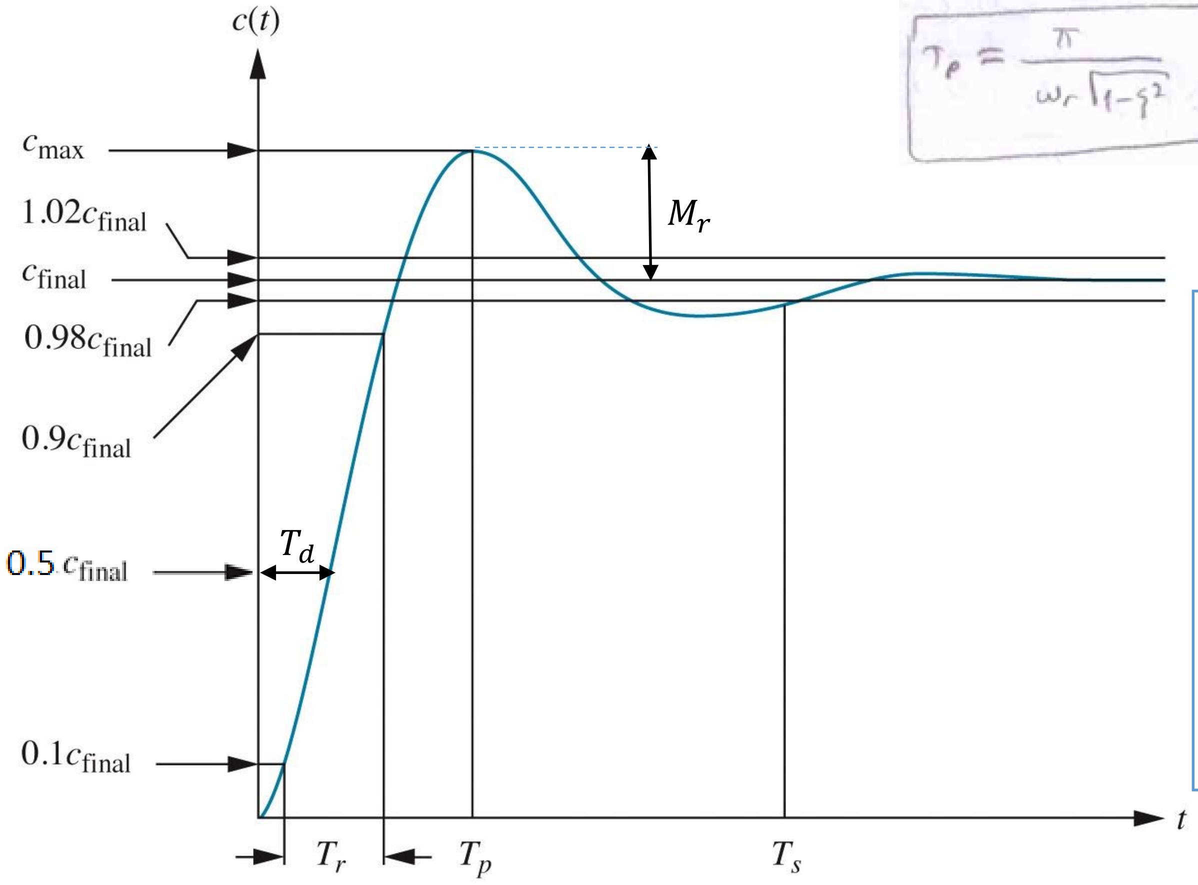


Figure 4.14

4) Mp: Maksimum %Aşım (Percent Overshoot)

Cevap eğrisinin maksimum değeri ile varış değeri arasındaki farkın yüzdesidir.

$$\%\text{Aşım} = \frac{c_{max} - c_{final}}{c_{final}} \times 100$$

$$c_{max} = c(T_p) = 1 - e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})}\left(\cos\pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\pi\right)$$

$$= 1 + e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})}$$

$$c_{final} = 1$$

$$\%\text{Azm} = \frac{\cancel{1+}\, e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \cancel{-1}}{1} \times 100$$

$$\%\text{Aşım} = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100$$

2. Derece Az Sönümlü Sistem Zaman Cevabı

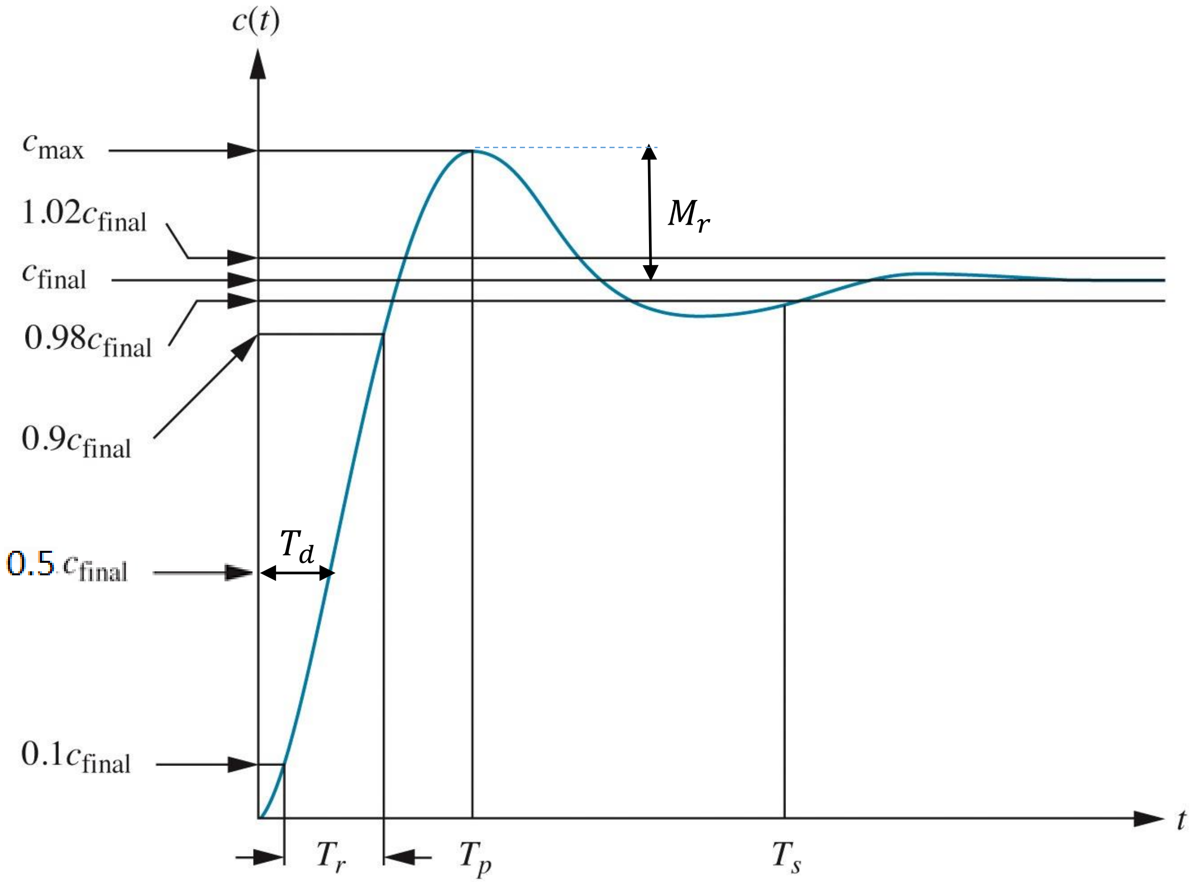


Figure 4.14

4) Mp: Maksimum %Aşım (Percent Overshoot)

Cevap eğrisinin maksimum değeri ile varış değeri arasındaki farkın yüzdesidir.

$$\%\text{Aşım} = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100$$

Aşım oranı yalnızca sönüm oranına bağlıdır!

Olması gereken aşım verildiğinde, buna karşılık olması gereken sönüm oranı elde edilebilir.

$$\zeta = \frac{-\ln(\%\,\text{Aşım}/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%\,\text{Aşım}/100)}}$$

..elde ediniz..

2. Derece Az Sönümlü Sistem Zaman Cevabı

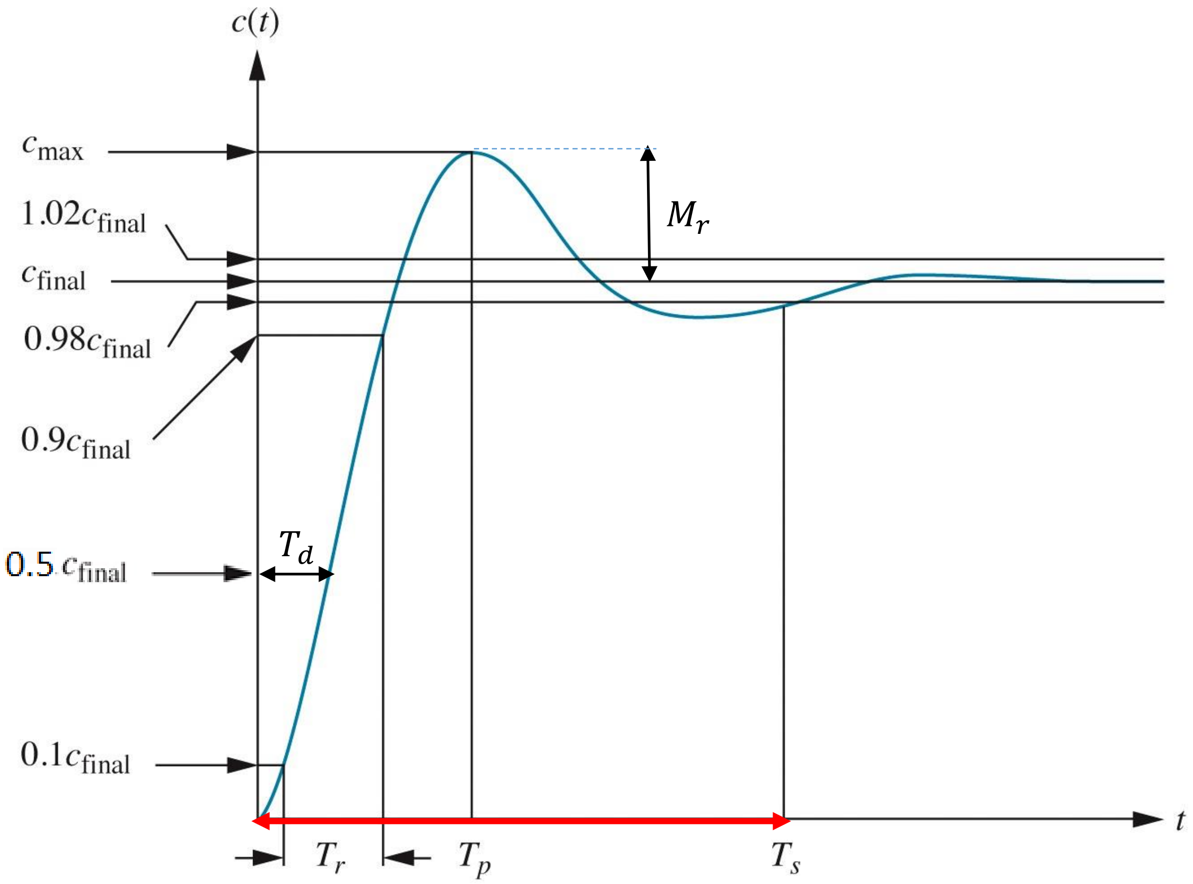


Figure 4.14

5) Ts: Yerleşme(Oturma) Zamanı (Settling Time)

Cevap eğrisinin, varış değerinin belirli bir % bölgesine bir daha hiç çıkmamak üzere ilk girdiği zaman değeridir (%2 veya %5'lik bandlar kullanılır). Biz genel olarak %2'lik bandı kullanacağız.

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \longrightarrow$$ %2'lik band..

$$T_s = \frac{3}{\xi w_n} \longrightarrow$$ %5'lik band..

2. Derece Az Sönümlü Sistem Zaman Cevabı

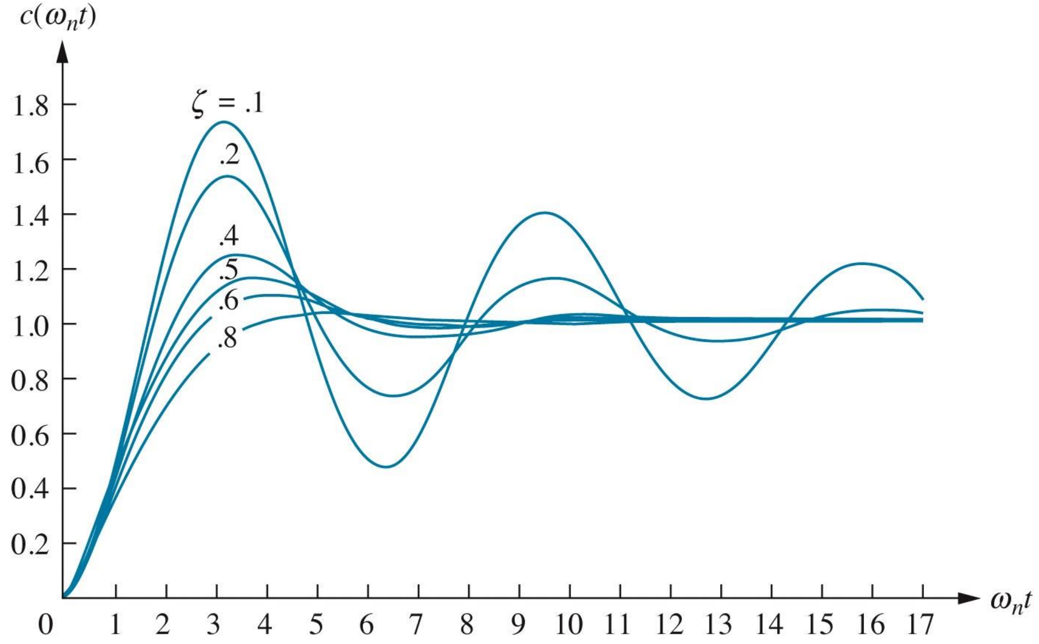


Figure 4.13

Geçici hal cevabının yeteri kadar hızlı ve yeteri kadar sönümlü olması beklenir

Aşım ve yükselme zamanı birbirleriyle çelişen büyüklüklerdir.

Tasarımlarda genellikle $0.5 < \xi < 0.8$ eşitsizliğinin sağlanmasına dikkat edilir.

2. Derece Az Sönümlü Sistem Zaman Cevabı

Örnek

$$TF = \frac{100}{s^2 + 15s + 100}$$

Sistemine ait birim basamak cevabı için, Tp, %Aşım, Ts ve Tr değerlerini bulunuz.

$\omega_n^2 = 100 \Rightarrow \omega_n = 10$

$2\zeta\omega_n = 15 \Rightarrow \zeta = 0,75$

$T_p \cong \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0,47 \, sn$

$\%A_{şım} \cong e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100 = 2,838$

$T_s \cong \dfrac{4}{\zeta\omega_n} = 0,53 \, sn$

$T_r \cong \dfrac{0,8 + 2,5\zeta}{\omega_n} \cong 0,27 \, sn$

2. Derece Az Sönümlü Sistem Zaman Cevabı

Örnek

Yerleşme zamanı (%2'lik bandda) 1.107sn olan ve maksimum aşımı %16 olan bir 2. derece sistem elde ediniz. Sistemin kutuplarını bulunuz.

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = 1{,}107 \Rightarrow \zeta \omega_n = 3{,}614$$

$$\zeta \simeq \frac{-\ln\left(\frac{\%Aşım}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{\%Aşım}{100}\right)}} = \frac{-\ln(0{,}16)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0{,}16)}} \simeq 0{,}504$$

$$\zeta = 0{,}504 \Rightarrow \omega_n = \frac{3{,}614}{0{,}504} = 7{,}17$$

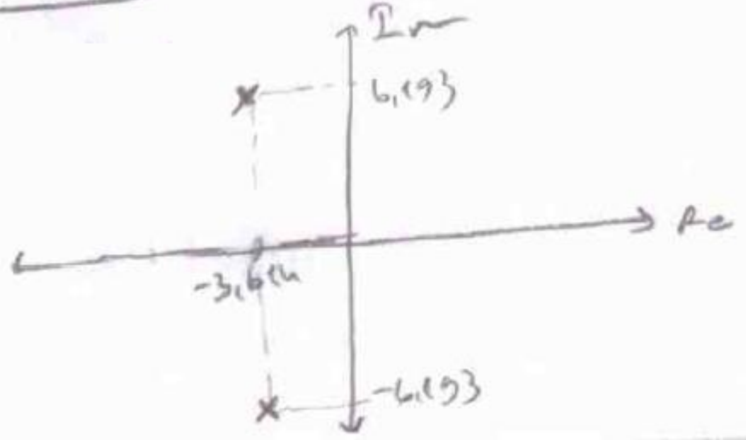
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{7{,}17^2}{s^2 + 2 \cdot 0{,}504 \cdot 7{,}17 s + 7{,}17^2}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{51{,}4}{s^2 + 7{,}23 s + 51{,}4}}$$

Kutuplar için: $s^2 + 7{,}23 s + 51{,}4 = 0$

$$s_{1,2} = \frac{-7{,}23 \mp \sqrt{7{,}23^2 - 4 \cdot 1 \cdot 51{,}4}}{2}$$

$$\boxed{s_{1,2} = -3{,}614 \mp 6{,}193 j}$$



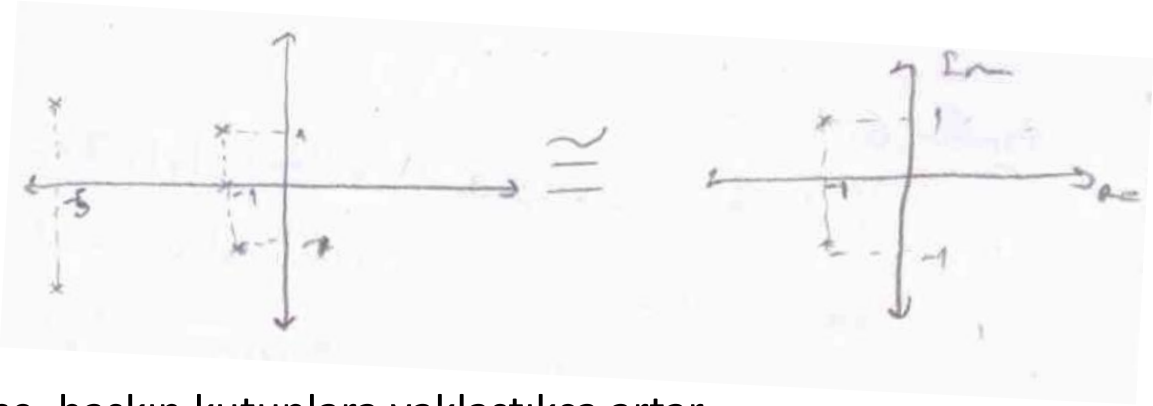
2. Derece Az Sönümlü Sistem Zaman Cevabı

Ekstra Sıfır ve Kutupların Etkileri

Buraya kadar, sıfırı olmayan ve 2 kutupa sahip 2. dereceden sistemleri inceledik

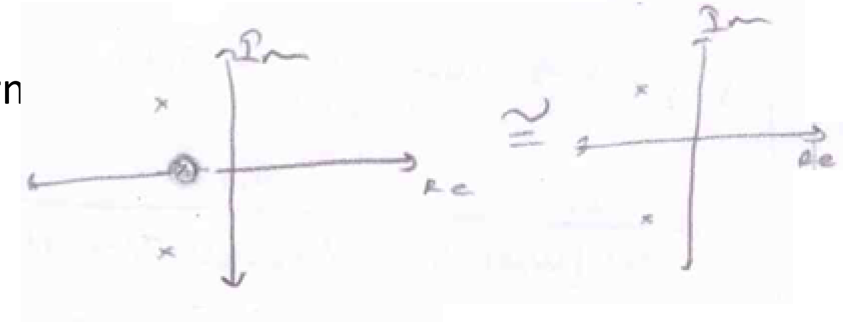
2’den fazla kutba sahip olan yüksek dereceli sistemler de genellikle 2. derece gibi kabul edilebilir.

Kutuplar imajiner eksenden uzaklaştıkça, cevaba olan etkileri azalır. Pratik olarak 5 kat daha soldaki kutupların etkisi ihmal ed



Sistemdeki sıfırların etkisi ise, baskın kutuplara yaklaştıkça artar.

Sıfırlar baskın kutbun tam üzerine geldiğinde, kutup-sıfır götürn
meydana gelir. Ve birbirlerinin etkisini götürürler.



Birim Geribeslemeli Sistemler İçin Sürekli Hal Hata Analizi

TABLE 7.1 Test waveforms for evaluating steady-state errors of position control systems

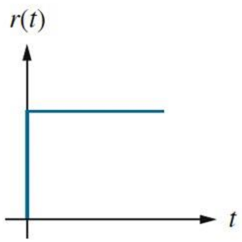
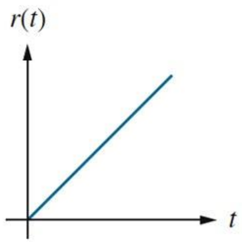
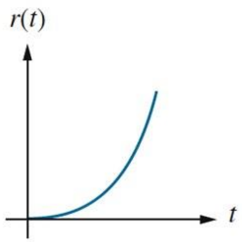
Waveform	Name	Physical interpretation	Time function	Laplace transform
	Step	Constant position	1	$\frac{1}{s}$
	Ramp	Constant velocity	t	$\frac{1}{s^2}$
	Parabola	Constant acceleration	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$

Table 7.1

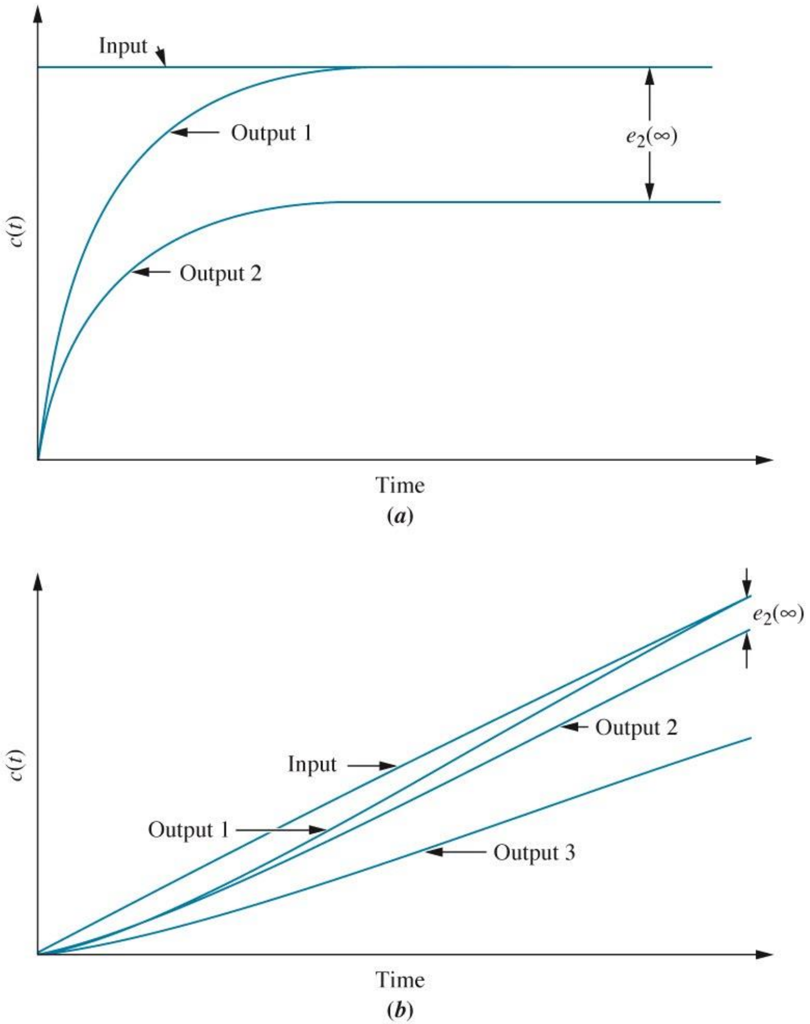
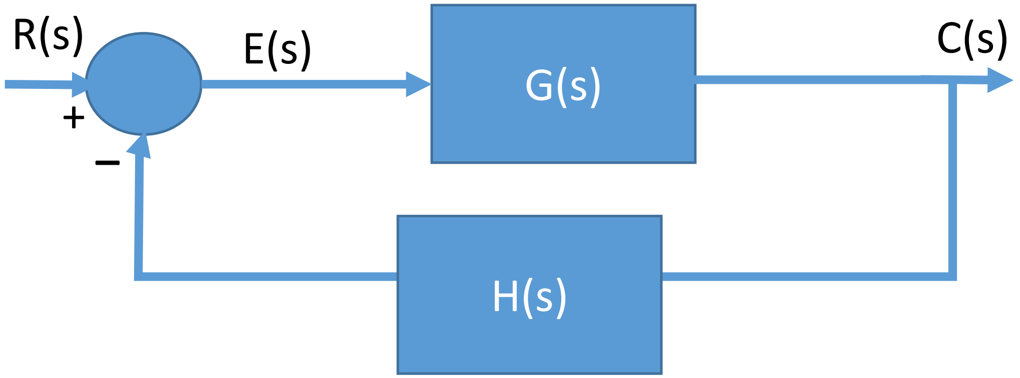


Figure 7.2

Birim Geribeslemeli Sistemler İçin Sürekli Hal Hata Analizi

$t \to \infty$ iken giriş işaretiyle çıkış arasında meydana gelen farka, sürekli hal hatası (e_{ss}) denir.

Yalnızca birim basamak giriş için değil, rampa ve parabol girişler için de analiz edilir.



H(s)=1 ise birim geri beslemeli sistemdir.

G(s)H(s): Açık çevrim transfer fonksiyonu

$$E(s) = R(s) - E(s)\cdot G(s)\cdot H(s)$$

$$E(s)(1+G(s)H(s)) = R(s)$$

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

Birim geribesleme için

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)}$$

Son değer teoremi:

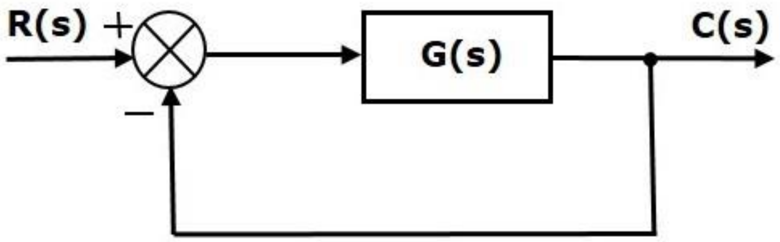
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s.E(s)$$

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)}$$

Birim Geribeslemeli Sistemler İçin Sürekli Hal Hata Analizi

Sistemin Tipi



Birim geri beslemeli sistemde açık çevrim sistemin orijindeki (s=0'daki) kutup sayısı, sistemin tipini verir.

$$G(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{s^n(s+p_1)(s+p_2)\cdots}$$

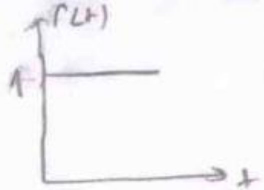
n=0: Sistemin tipi 0 (type-0)
n=1: Sistemin tipi 1 (type-1)
n=2: Sistemin tipi 2 (type-2)
..

Birim Geribeslemeli Sistemler İçin Sürekli Hal Hata Analizi

Birim Basamak Giriş İçin Sürekli Hal Hatası

$r(t) = u(t)$

$R(s) = \frac{1}{s}$



$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

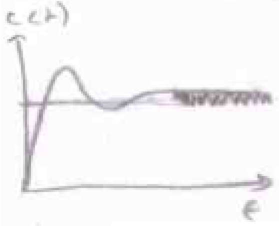
$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{R}{\cancel{s}} \cdot \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{A}{1 + \lim_{s \to 0} G(s)}$$

konum hata sabiti (K_p)

$$\boxed{e_{ss} = \frac{R}{1 + K_p}} \qquad K_p = \lim_{s \to 0} G(s)$$

Tip 0 Sistem İçin Analiz:

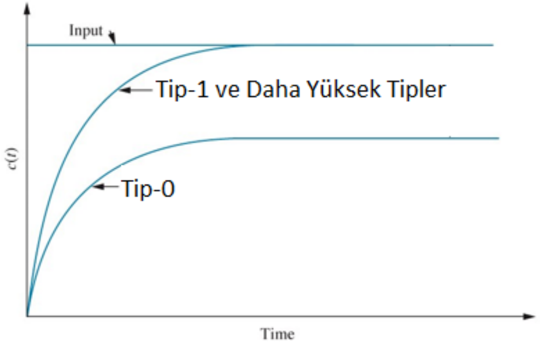
$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{K \cdot (s+z_1)(s+z_2) \cdots (s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2) \cdots (s+p_k)} = M \qquad e_{ss} = \frac{1}{1+M}$$



Tip 1 (Ve daha yüksek tipler için) İçin Analiz:

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{K (s+z_1)(s+z_2) \cdots (s+z_m)}{s \cdot (s+p_1)(s+p_2) \cdots (s+p_k)} = \infty \qquad e_{ss} = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

Yani: tip-1 ve daha yüksek sistemler için birim basamak girişe karşılık sürekli hal hatası "0" dır.

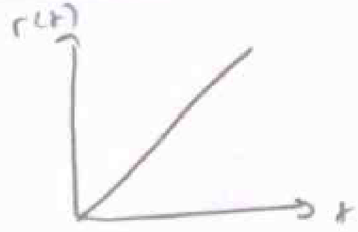


Birim Geribeslemeli Sistemler İçin Sürekli Hal Hata Analizi

Birim Rampa Giriş İçin Sürekli Hal Hatası

$r(t) = t.u(t)$

$R(s) = \dfrac{1}{s^2}$



$$\boxed{e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)}}$$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{R(s)}{1+G(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s \cdot \frac{1}{s^2}}{1+G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s + s.G(s)}$$

hız hata (K_v) sabiti

$$\boxed{e_{ss} = \frac{1}{K_v}} \qquad K_v = \lim_{s\to 0} s.G(s)$$

Tip 0 Sistem İçin Analiz:

$$K_v = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_k)} = 0$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{0} = \infty$$

Cevap, girişi takip edemiyor..

Tip 1 Sistem İçin Analiz:

$$K_v = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{s(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_k)} = M$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{M}$$

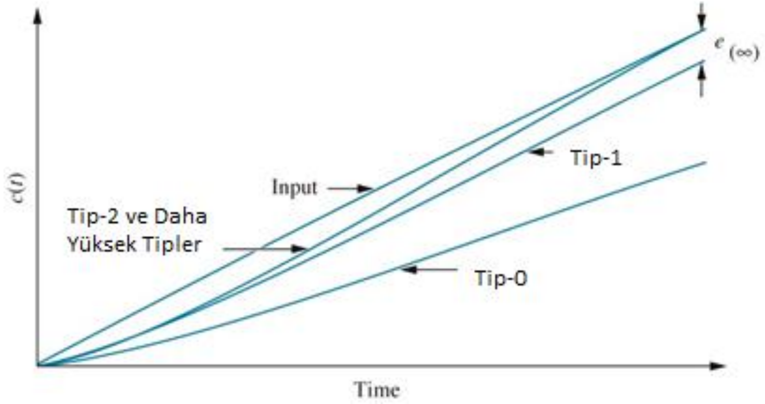
Sabit sürekli hal hatası.

Tip 2 ve Daha Yüksek Tipli Sistemler İçin Analiz:

$$K_v = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{s^2 (s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_k)} = \infty$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Sürekli hal hatası yok.

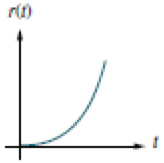


Birim Geribeslemeli Sistemler İçin Sürekli Hal Hata Analizi

Birim Parabol Giriş İçin Sürekli Hal Hatası

$$r(t) = t^2 \cdot u(t)$$

$$R(s) = \frac{1}{s^3}$$



$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{R(s)}{1+G(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s \cdot \frac{1}{s^3}}{1+G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2 + s^2 G(s)}$$

ivme hata sabiti (K_a)

$$\boxed{e_{ss} = \frac{1}{K_a}} \qquad K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$$

Tip 0 Sistem İçin Analiz:

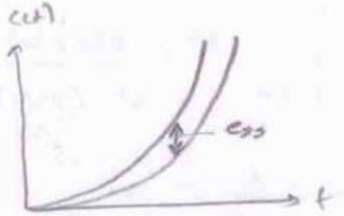
$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 \cdot K \cdot \frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_k)} = 0 \qquad e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{0} = \infty$$

Tip 1 Sistem İçin Analiz:

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 \cdot K \cdot \frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{s(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_k)} = 0 \qquad e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{0} = \infty$$

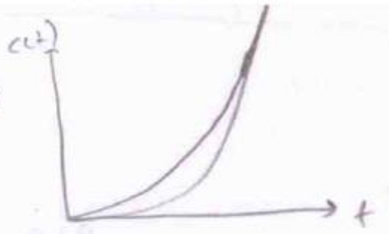
Tip 2 Sistem İçin Analiz:

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 K \frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{s^2 (s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_k)} = M \qquad e_{ss} = \frac{1}{M}$$



Tip 3 ve Daha Yüksek Tipli Sistemler İçin Analiz:

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 \cdot \frac{K \cdot (s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{s^3 (s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_k)} = \infty \qquad e_{ss} = \frac{1}{\infty} = 0$$



Birim Geribeslemeli Sistemler İçin Sürekli Hal Hata Analizi

Özet Tablosu

		Type 0		Type 1		Type 2	
Input	Steady-state error formula	Static error constant	Error	Static error constant	Error	Static error constant	Error
Step, $u(t)$	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p = \text{Constant}$	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$	0
Ramp, $tu(t)$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = 0$	∞	$K_v = \text{Constant}$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = \infty$	0
Parabola, $\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	∞	$K_a = 0$	∞	$K_a = \text{Constant}$	$\frac{1}{K_a}$