Sayısal Yöntemler - MAT202 **Dersi veren:** *Prof. Dr. Ali Yapar*
Bahar 2020-2021 **Dersin yardımcısı:** *Araş. Gör. Furkan Şahin*
1. Uygulama 09.03.2021

1. Aşağıdaki $f(x)$ fonksiyonlarının a noktasında birinci ve ikinci dereceden Taylor polinomlarını bulunuz.

   (a) $f(x) = \sqrt{x},\ a = 1$

   (b) $f(x) = \sin(x),\ a = \pi/4$

   (c) $f(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)},\ a = 0$

   (d) $f(x) = \ln(1+x),\ a = 0$

Çözüm: a noktasında açılan $n.$ dereceden bir Taylor polinomunun genel ifadesini şu şekilde yazılır.

$$p_n(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + ... + \frac{1}{n!}f^n(a)(x-a)^n$$

Birinci ve ikinci dereceden Taylor polinomları bu ifadeden bulunabilir.

$$p_1(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(x-a)$$
$$p_2(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2$$

a. $(a = 1)$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(a) = 1$$
$$f'(x) = (1/2)x^{-1/2} \Rightarrow f'(a) = 0.5$$
$$f''(x) = -(1/4)x^{-3/2} \Rightarrow f''(a) = -0.25$$

$$p_1(x) = 1 + 0.5(x-1)$$
$$p_2(x) = 1 + 0.5(x-1) - 0.125(x-1)^2$$

b. $(a = \pi/4)$

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f(a) = 0.70711$$
$$f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(a) = 0.70711$$
$$f''(x) = -\sin(x) \Rightarrow f''(a) = -0.70711$$

$$p_1(x) = 0.70711 + 0.70711(x - \pi/4)$$

$$p_2(x) = 0.70711 + 0.70711(x - \pi/4) - 0.35355(x - \pi/4)^2$$

c. $(a = 0)$

$$f(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)} \Rightarrow f(a) = \mathrm{e}$$
$$f'(x) = -\sin(x)\,\mathrm{e}^{\cos(x)} \Rightarrow f'(a) = 0$$
$$f''(x) = -\cos(x)\,\mathrm{e}^{\cos(x)} + \sin^2(x)\,\mathrm{e}^{\cos(x)} \Rightarrow f''(a) = -\mathrm{e}$$

$$p_1(x) = \mathrm{e}$$
$$p_2(x) = \mathrm{e} - (\mathrm{e}/2)x^2$$

d. $(a = 0)$

$$f(x) = \ln(1 + x) \Rightarrow f(a) = 0$$
$$f'(x) = (1 + x)^{-1} \Rightarrow f'(a) = 1$$
$$f''(x) = -(1 + x)^{-2} \Rightarrow f''(a) = -1$$

$$p_1(x) = x$$
$$p_2(x) = x - (1/2)x^2$$

2. Aşağıdaki fonksiyonların $a = 0$ noktasında n. dereceden Taylor polinomlarını bulunuz.

   (a) $1/(1 - x)$ (b) $\sin(x)$ (c) $\sqrt{1 + x}$

Çözüm: $a = 0$ için n. dereceden Taylor polinomu şu şekilde yazılır.

$$p_n(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + ... + \frac{1}{n!}f^n(0)x^n$$

a.

$$f(x) = 1/(1 - x) \Rightarrow f(0) = 1$$
$$f'(x) = (1 - x)^{-2} \Rightarrow f'(0) = 1$$
$$f''(x) = 2(1 - x)^{-3} \Rightarrow f''(0) = 2$$
$$f'''(x) = 6(1 - x)^{-4} \Rightarrow f'''(0) = 6$$
$$f^{(4)}(x) = 24(1 - x)^{-5} \Rightarrow f^{(4)}(0) = 24$$
$$f^{(5)}(x) = 120(1 - x)^{-6} \Rightarrow f^{(5)}(0) = 120$$

Genel halde $f^{(n)}(0)=n!$ eşitliğini yazabiliriz. Bu durumda $p_n(x)$ polinomunun ifadesi yazılabilir.

$$p_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + ... + x^n$$

b.

$$\begin{aligned} f(x) = \sin(x) &\Rightarrow f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos(x) &\Rightarrow f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin(x) &\Rightarrow f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos(x) &\Rightarrow f'''(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) = \sin(x) &\Rightarrow f^{(4)}(0) = 0 \\ f^{(5)}(x) = \cos(x) &\Rightarrow f^{(5)}(0) = 1 \end{aligned}$$

Bu eşitlikler $p_n(x)$ polinomunda yerine konulur.

$$p_n(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + ...$$

Son terimin (yani x^n terimi) katsayını belirlemek için n sayısının tek veya çift olma durumu dikkate alınır. Tek olduğunda son terimin katsayısı için

$$\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n!}$$

yazılabilir. Çift olduğunda ise son terimin katsayısı 0 olur. Bu durumda sondan bir önceki terim (yani x^{n-1} terimi) ile $p_n(x)$ polinomunun ifadesi bitirilir. Bu terimin katsayısı için

$$\frac{(-1)^{((n-1)-1)/2}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^{(n-2)/2}}{(n-1)!}$$

yazılabilir. Böylelikle $p_n(x)$ polinomunun açık ifadesi bulanabilir.

$$p_n(x) = \begin{cases} x + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ... + \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n!}x^n & n \text{ tek ise} \\ x + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ... + \frac{(-1)^{(n-2)/2}}{(n-1)!}x^{n-1} & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

c.

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{1+x} &\Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) = (1/2)(1+x)^{-1/2} &\Rightarrow f'(0) = 1/2 \\ f''(x) = -(1/4)(1+x)^{-3/2} &\Rightarrow f''(0) = -1/4 \\ f'''(x) = (3/8)(1+x)^{-5/2} &\Rightarrow f'''(0) = 3/8 \\ f^{(4)}(x) = -(15/16)(1+x)^{-7/2} &\Rightarrow f^{(4)}(0) = -15/16 \end{aligned}$$

$$f^{(5)}(x) = (105/32)(1+x)^{-9/2} \Rightarrow f^{(5)}(0) = 105/32$$

Genel halde

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}\frac{1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-3)}{2^n}, \quad n \geq 2$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu durumda $p_n(x)$ polinomunun ifadesi yazılabilir.

$$\begin{aligned} p_n(x) = 1 + & \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} \\ & + \frac{7x^5}{256} + ... + (-1)^{n+1}\frac{1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-3)}{n! 2^n} x^n \end{aligned}$$

3. (2c) probleminde elde edilen ifadeyi kullanarak $f(x) = \sqrt{1+x}$ fonksiyonunun 1., 2. ve 3. dereceden Taylor polinomlarını yazınız. Ayrıca bu polinomlar yardımıyla $\sqrt{0.9}$, $\sqrt{1.1}$, $\sqrt{1.5}$ ve $\sqrt{2.0}$ değerlerini hesaplayınız ve gerçek değerleri ile kıyaslayınız.

Çözüm:

$$p_1(x) = 1 + \frac{x}{2}$$

$$p_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

$$p_3(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

$\underline{\sqrt{0.9} \text{ için:}}$ $\sqrt{1+x} = \sqrt{0.9} \Rightarrow x = -0.1$

$$p_1(x) = 1 - \frac{0.1}{2} = 0.95$$

$$p_2(x) = 1 - \frac{0.1}{2} - \frac{(0.1)^2}{8} = 0.94875$$

$$p_3(x) = 1 - \frac{0.1}{2} - \frac{(0.1)^2}{8} - \frac{(0.1)^3}{16} = 0.94869$$

Hesap makinesinden bulunan değer ise

$$f(x) \approx 0.94868$$

şeklindedir.

$\mathbf{n}$	$\mathbf{p_n(x)}$	$\dfrac{\mathbf{f(x)-p_n(x)}}{\mathbf{f(x)}}$
1	0.95	-0.00139
2	0.94875	-0.00007
3	0.94869	-0.00001

$\underline{\sqrt{1.1}\text{ için:}}$ $\sqrt{1+x} = \sqrt{1.1} \Rightarrow x = 0.1$

$$p_1(x) = 1 + \frac{0.1}{2} = 1.05$$
$$p_2(x) = 1 + \frac{0.1}{2} - \frac{(0.1)^2}{8} = 1.04875$$
$$p_3(x) = 1 + \frac{0.1}{2} - \frac{(0.1)^2}{8} + \frac{(0.1)^3}{16} = 1.04881$$

Hesap makinesinden bulunan değer ise

$$f(x) \approx 1.04881$$

şeklindedir.

$\mathbf{n}$	$\mathbf{p_n(x)}$	$\dfrac{\mathbf{f(x)-p_n(x)}}{\mathbf{f(x)}}$
1	1.05	-0.00114
2	1.04875	0.00005
3	1.04881	0

$\underline{\sqrt{1.5}\text{ için:}}$ $\sqrt{1+x} = \sqrt{1.5} \Rightarrow x = 0.5$

$$p_1(x) = 1 + \frac{0.5}{2} = 1.25$$
$$p_2(x) = 1 + \frac{0.5}{2} - \frac{(0.5)^2}{8} = 1.21875$$
$$p_3(x) = 1 + \frac{0.5}{2} - \frac{(0.5)^2}{8} + \frac{(0.5)^3}{16} = 1.22656$$

Hesap makinesinden bulunan değer ise

$$f(x) \approx 1.22474$$

şeklindedir.

$\mathbf{n}$	$\mathbf{p_n(x)}$	$\dfrac{\mathbf{f(x) - p_n(x)}}{\mathbf{f(x)}}$
1	1.25	-0.02062
2	1.21875	0.00489
3	1.22656	-0.00149

$\sqrt{2.0}$ için: $\sqrt{1+x} = \sqrt{2} \Rightarrow x = 1$

$$p_1(x) = 1 + \frac{1}{2} = 1.5$$
$$p_2(x) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = 1.375$$
$$p_3(x) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1.4375$$

Hesap makinesinden bulunan değer ise

$$f(x) \approx 1.41421$$

şeklindedir.

$\mathbf{n}$	$\mathbf{p_n(x)}$	$\dfrac{\mathbf{f(x) - p_n(x)}}{\mathbf{f(x)}}$
1	1.5	-0.06066
2	1.375	0.02773
3	1.4375	-0.01647