Otomatik Kontrol Sistemleri

Hafta 2

Doç. Dr. Volkan Sezer

*Blok Diyagramlar
*Kapalı ve Açık Çevrim Transfer Fonksiyonu Hesabı
*Çıkışta Bozucu Etkisi

Blok Diyagramlar

Blok diyagramlar, sistemleri oluşturan parçaların ve sinyal akışlarının görsel ifadeleridir.

Sistemdeki değişkenler birbirlerine fonksiyonel bloklarla bağlanmaktadır. Genelde içlerine, sistem bileşenlerinin transfer fonksiyonları yazılır.

Sistemi analiz etmeyi oldukça kolaylaştırır. 4 temel elemandan oluşurlar:

- Bloklar
- Toplam noktaları (işaret + veya – olabilir)
- Ayrılma noktaları
- Oklar (Sinyallerin yönü önemlidir)

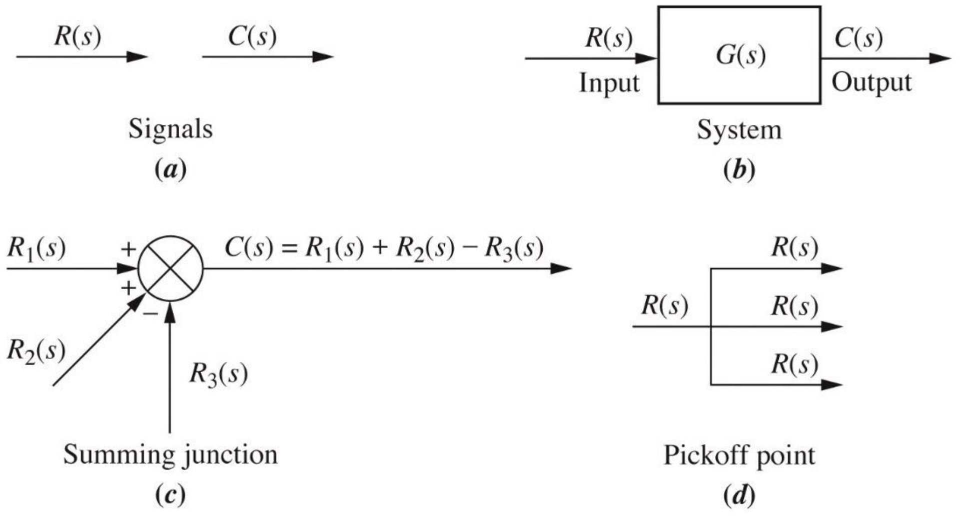


Figure 5.2

Blok Diyagramların Bazı Özellikleri

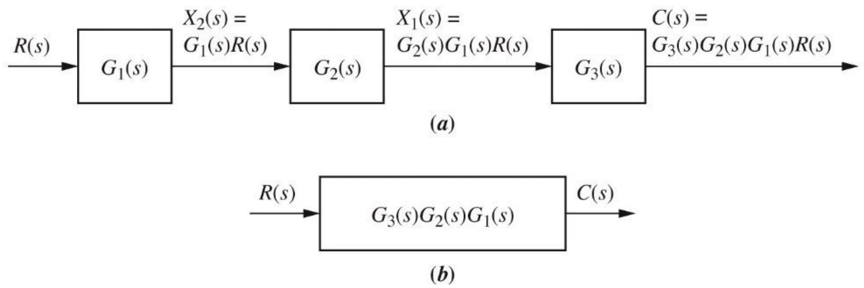
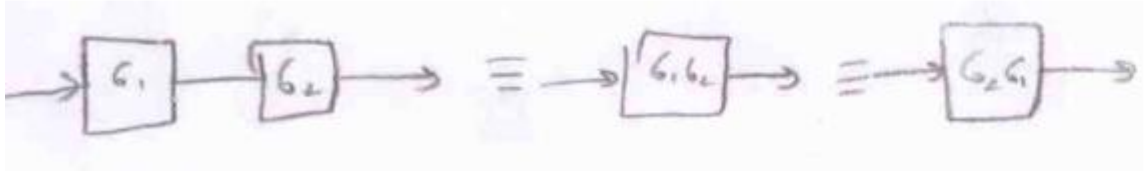


Figure 5.3

Kaskad bağlı bloklar çarpılır



Blok çarpma işlemi, komutatiftir.

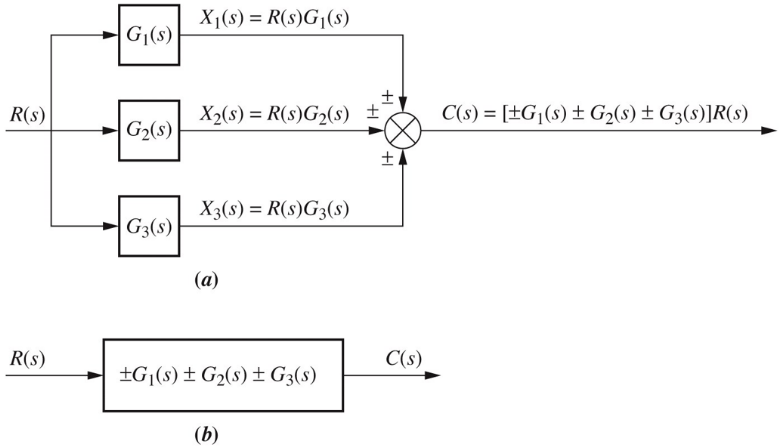


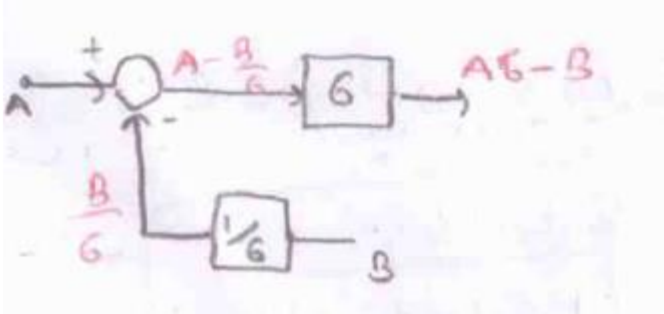
Figure 5.5

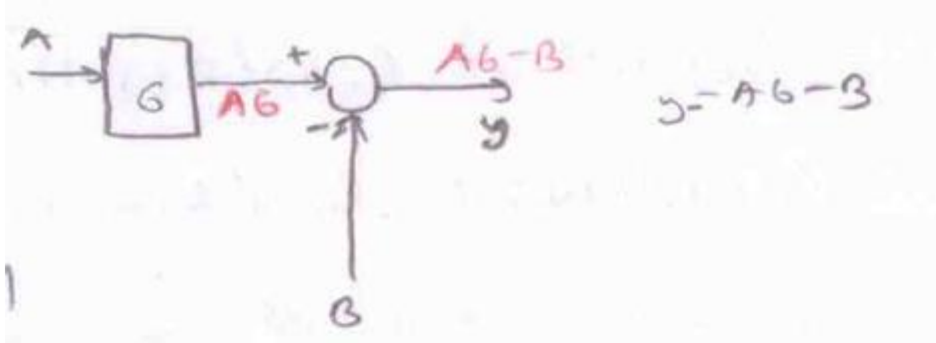
Girişleri aynı noktada ve çıkışları aynı toplam noktasında olan paralel bloklar toplanır

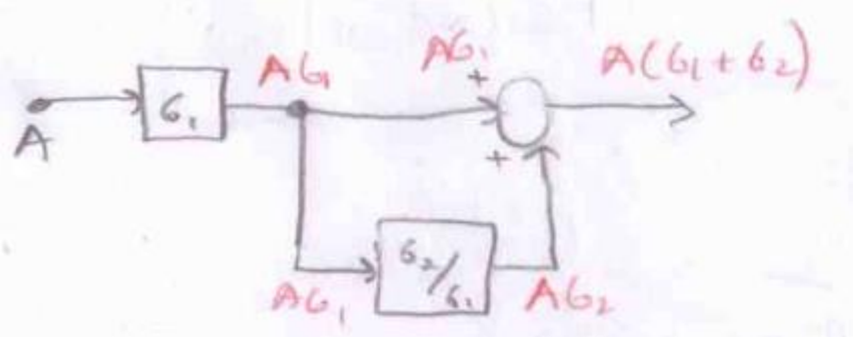
Blok Diyagramların Bazı Özellikleri

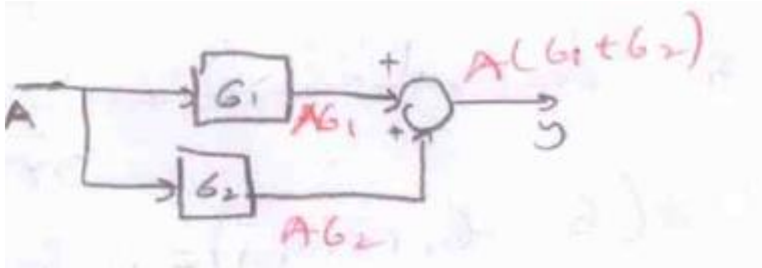
Örnekler

Aşağıdaki blok diyagramlarda, çıkış işaretlerini giriş işaretleri cinsinden elde ediniz:

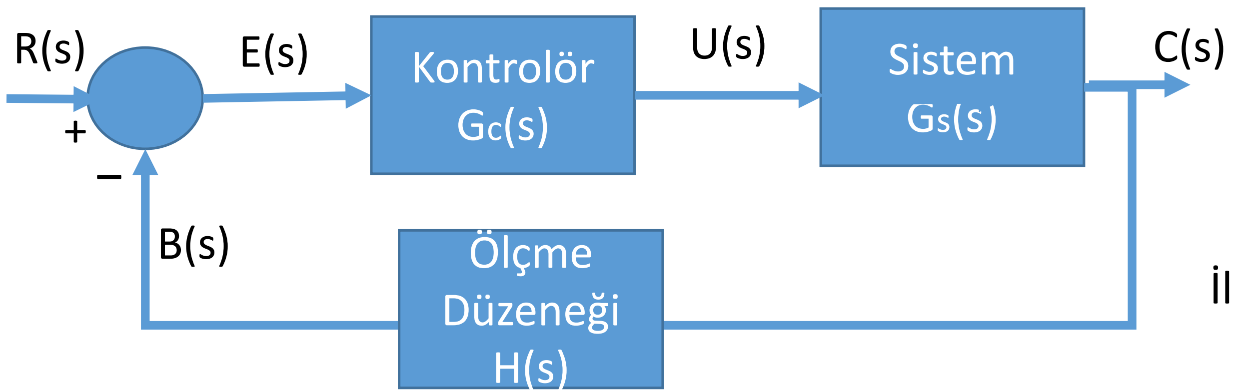








Kapalı ve Açık Çevrim Transfer Fonksiyonunun Blok Diyagramlar Yardımıyla Hesaplanması



Açık Çevrim TF: $\dfrac{B(s)}{E(s)} = G_c(s)G_s(s)H(s)$

İleri Yol (Feedforward) TF: $\dfrac{C(s)}{E(s)} = G_c(s)G_s(s)$

Kapalı Çevrim (Feedback) TF: $\dfrac{C(s)}{R(s)}$

R(s): Referans Giriş
U(s): Kontrol İşareti

E(s) : Hata İşareti
C(s): Çıkış İşareti
B(s): Ölçüm İşareti

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)C(s)$$

$$U(s) = G_c(s)E(s) = G_c(s)[R(s) - H(s)C(s)]$$

$$C(s) = G_s(s)U(s) = G_s(s)G_c(s)[R(s) - H(s)C(s)]$$

Her şeyi C(s) ve R(s) cinsinden yazdığımıza göre, son denklem üzerinden gruplama işlemi yaparsak:

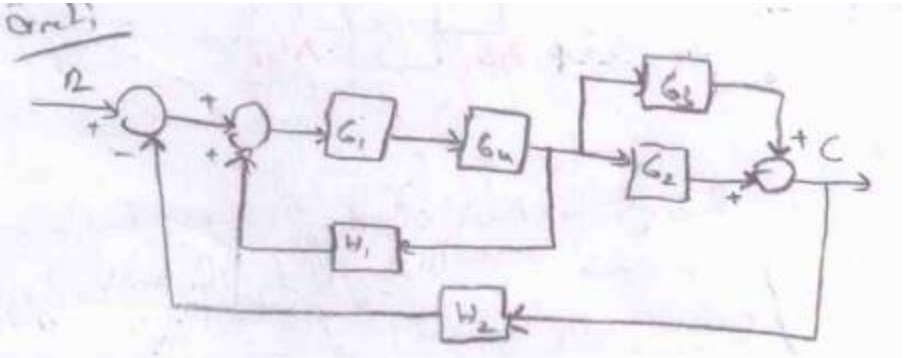
$$C(s) + C(s)[G_s(s)G_c(s)H(s)] = G_s(s)G_c(s)R(s)$$

$$C(s)[1 + G_s(s)G_c(s)H(s)] = G_s(s)G_c(s)R(s)$$

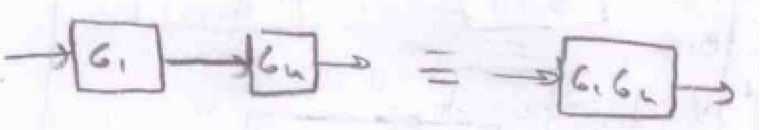
$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_s(s)G_c(s)}{1+G_s(s)G_c(s)H(s)}}$$

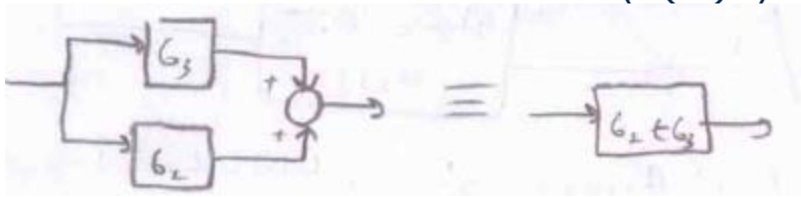
Blok Diyagram - Örnek

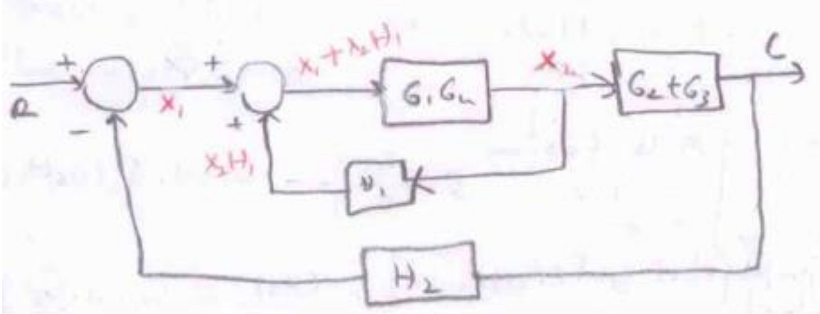
Örnek:



$\frac{C}{R}$ [illegible] nedir ?





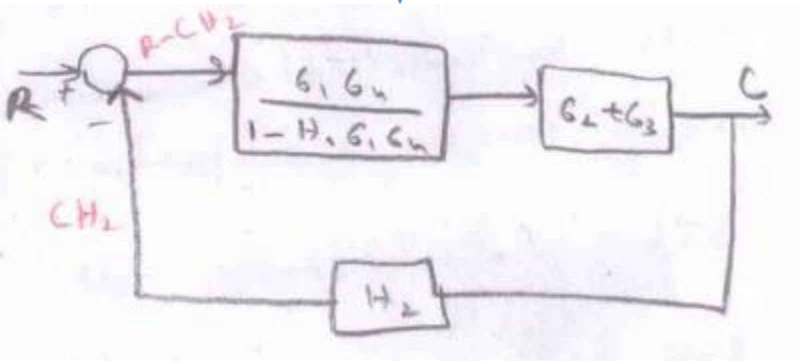


X2 ile X1 arasındaki transfer fonksiyonunu bulalım (görüldüğü gibi kapalı çevrimdir)

$$(X_1 + X_2H_1)\,G_1G_4 = X_2$$

$$\Rightarrow X_1G_1G_4 = X_2(1 - H_1G_1G_4)$$

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{G_1G_4}{1 - H_1G_1G_4}$$



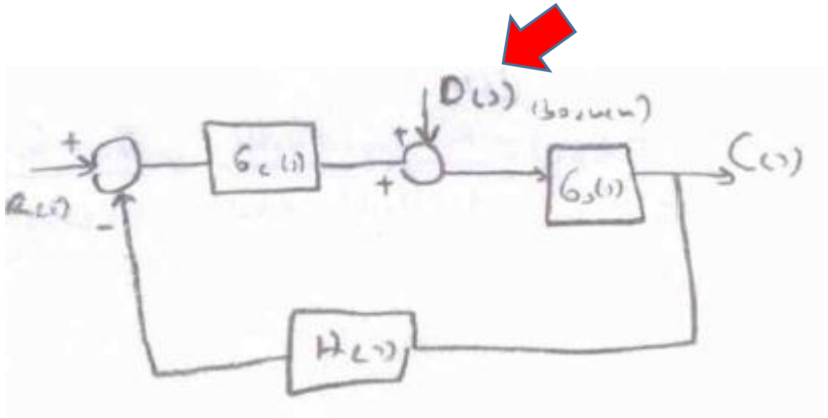
$$(R - CH_2)\left(\frac{G_1G_4}{1 - H_1G_1G_4}\right)(G_2+G_3) = C$$

$$R\cdot\frac{G_1G_4(G_2+G_3)}{1-H_1G_1G_4} = C\left(1 + \frac{H_2G_1G_4(G_2+G_3)}{1-H_1G_1G_4}\right)$$

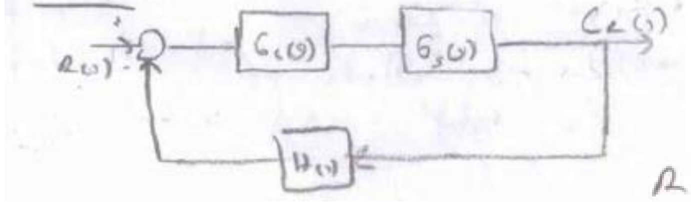
$$\frac{C}{R} = \frac{\dfrac{G_1G_4(G_2+G_3)}{1-H_1G_1G_4}}{1 + \dfrac{H_2G_1G_4(G_2+G_3)}{1-H_1G_1G_4}}$$

$$\boxed{\frac{C}{R} = \frac{G_1G_4(G_2+G_3)}{1 - H_1G_1G_4 + H_2G_1G_4(G_2+G_3)}}$$

Sistemde Bozucu Etki Varsa..



$C_R(s)$:



$$(R(s) - H(s)\, C_R(s))\, G_c(s)\, G_s(s) = C_R(s)$$

$$R(s)(G_c(s)\, G_s(s)) = C_R(s)(1 + H(s)\, G_c(s)\, G_s(s))$$

$$C_R(s) = \frac{R(s)\, G_c(s)\, G_s(s)}{1 + H(s)\, G_c(s)\, G_s(s)}$$

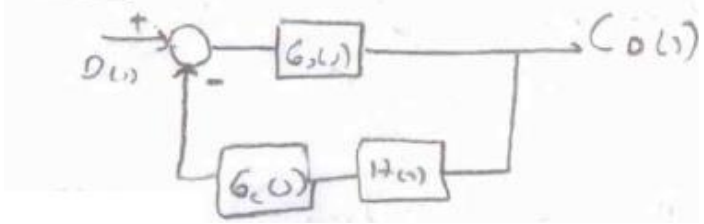
Bu durumda çıkış işaretini, süperpozisyon ilkesini kullanarak hesaplayabiliriz.

$$C(s) = C_R(s) + C_D(s)$$

sadece referans var, bozucu yok

sadece bozucu var giriş yok.

$C_D(s)$:



$$(D(s) - C_D(s)(G_c(s)\, H(s)))\, G_s(s) = C_D(s)$$

$$D(s)\, G_s(s) = C_D(s)(1 + G_c(s)\, H(s)\, G_s(s))$$

$$C_D(s) = \frac{D(s)\, G_s(s)}{1 + G_c(s)\, H(s)\, G_s(s)}$$

$$C = C_R(s) + C_D(s) = \frac{R(s)\, G_c(s)\, G_s(s)}{1 + H(s)\, G_c(s)\, G_s(s)} + \frac{D(s)\, G_s(s)}{1 + G_c(s)\, H(s)\, G_s(s)}$$

*Sistem Modelleme Yaklaşımları (Transfer Fonksiyonu / Durum Uzay Gösterimi)
*Durum Uzay Modeli
*Transfer Fonksiyonundan Durum Uzay Modeli Hesaplama
*Durum Uzay Modelinden Transfer Fonksiyonu Hesaplama

Sistem Modelleme

Sistem Modelleme

Frekans Domeni
Laplace dönüşümü yardımıyla transfer fonksiyonu elde edilir.

Yalnızca doğrusal(lineer) zamanla değişmeyen sistemlere uygulanabilir

Kararlılık ve geçici hal davranışı hakkında hızlı bilgi sağlar

Zaman Domeni
Durum Uzay Modeli elde edilir

*Lineer/Nonlineeer
*Zamanla değişen/değişmeyen
*Çok giriş-çok çıkış/Tek giriş-tek çıkış
*Sıfır veya sıfırdan farklı ilk duruma sahip

sistemlere uygulanabilir.

Durum Uzay Modeli

Durum uzayı matematik modeli, aşağıdaki matris-vektör denklemleriyle temsil edilir.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

X: Durum vektörü (n*1)

Y: Çıkış vektörü (q*1)

U: Giriş (kontrol) vektörü (p*1)

A,B,C,D : Durum-Uzay Matrisleri

Durum Uzay Modeli

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

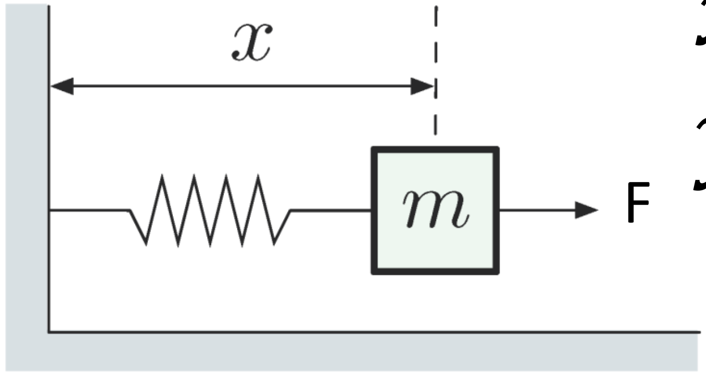
$$y = Cx + Du$$

* Minimum durum derecesi, çıkış/giriş diferansiyel denklemin mertebesi, transfer fonksiyonunun paydasının derecesi aynıdır.

* Durum vektörü elemanları, sistemi ifade edebilecek minimum sayıdaki durum değişkenleri olarak seçilmeli ve lineer bağımsız olmalıdır. (örn: Bir devrede kapasitörlerin gerilimi, endüktansın akımı)

* Genellikle, sistemdeki bağımsız enerji depolayan elemanların sayısı kadar durum değişkeni vardır. (Bir devrede, kapasitör + endüktans) sayısı kadar [illegible]

Durum Uzay Modeli



$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\end{bmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{K}{M} & 0\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}}_{B}\underbrace{F}_{U}$$

Gelecekteki durumu tahmin edebilmek için, hangi değişkenleri bilmemiz yeterlidir?

Enerji depolayan eleman sayısı genelde durum sayısını verir!

$$\underbrace{y}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}}_{C}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{[0]}_{D}\underbrace{F}_{U}$$

(Çıkış yalnızca pozisyon ise!)

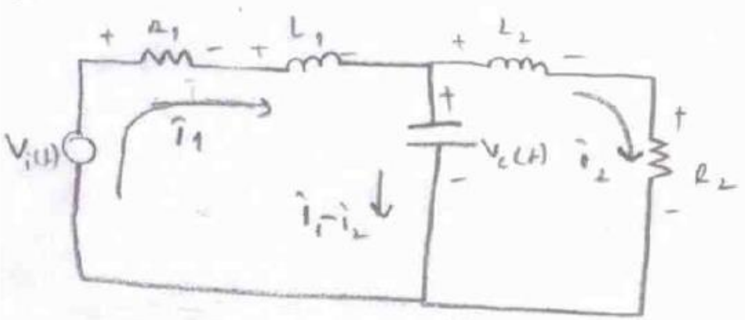
$$X = \begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\end{bmatrix}$$

$$F - Kx = m\ddot{x} \qquad \ddot{x} = \frac{F}{m} - \frac{Kx}{m}$$

Durum Uzay Modeli

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Örnek:



Giriş: $V_i(t)$, çıkışı $V_c(t)$ olan yukarıdaki devrenin durum uzay modelini oluşturunuz.

3 adet enerji depolayan eleman olduğuna göre, 3. derece olmalı model. Yani 3 adet durum değişkeni olmalıdır.

Genelde endüktansın akımı ve kapasitenin gerilimi durum değişkeni olarak alınır. (Denklemlerde bunların türevleri kullanıldığı için!)

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ V_c \end{bmatrix}$$

Amacımız, durum değişkenlerini ve durum değişkenlerinin türevlerini ve girişi içeren 1. derece diferansiyel denklemleri yazabilmektir.

① ilk çevrede Kirchhoff gerilimler kanunu;

$$V_i(t) = R_1 . i_1(t) + L_1 . \frac{di_1}{dt} + V_c(t)$$

$$\Rightarrow \frac{di_1(t)}{dt} = \frac{-V_c(t)}{L_1} - \frac{R_1}{L_1} i_1(t) + \frac{V_i(t)}{L_1}$$

② 2. çevrede Kirchhoff gerilimler kanunu

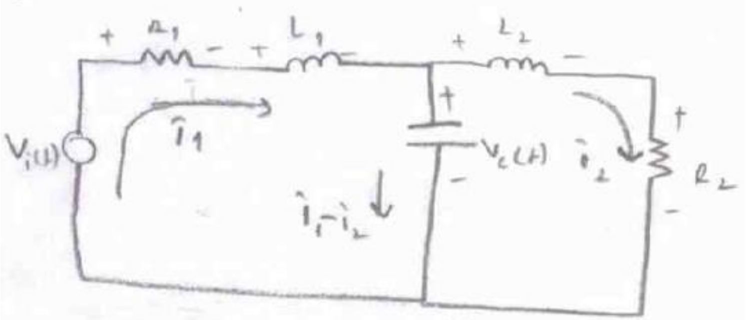
$$V_c(t) = L_2 . \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 . i_2(t)$$

$$\frac{di_2(t)}{dt} = -\frac{R_2}{L_2} i_2(t) + \frac{V_c(t)}{L_2}$$

Durum Uzay Modeli

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

örnek



① ilk çevrede Kirchoff gerilimler kanunu:

$$V_i(t) = R_1 \cdot i_1(t) + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + V_c(t)$$

$$\Rightarrow \frac{di_1(t)}{dt} = \frac{-V_c(t)}{L_1} - \frac{R_1}{L_1} i_1(t) + \frac{V_i(t)}{L_1}$$

② 2. çevrede Kirchoff gerilimler kanunu

$$V_c(t) = L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 \cdot i_2(t)$$

$$\frac{di_2(t)}{dt} = -\frac{R_2}{L_2} i_2(t) + \frac{V_c(t)}{L_2}$$

③ Kapasiteden geçen akım

$$C \frac{dV_c(t)}{dt} = i_1(t) - i_2(t) \qquad \frac{dV_c(t)}{dt} = \frac{i_1(t)}{C} - \frac{i_2(t)}{C}$$

Bu şekilde altında durum denklemlerini şu biçimde yazabiliriz:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{V}_c \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ V_c \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{V_i(t)}_{u}$$

$$\underbrace{V_c}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ V_c \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{(0)}_{D} \underbrace{V_i(t)}_{u}$$

Durum Uzay Modelinden Transfer Fonksiyonu Hesaplama

Transfer fonksiyonu daima göre ilk durumlar sıfır olmak zorunda olduğundan!

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$ transfer fonksiyonu olur.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$
→ durum uzay modeli olur.

Durum uzay model denklemlerinin Laplace'ını hesaplayalım!

$$s.X(s) - X(0) = AX(s) + BU(s) \quad (1)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (2)$$

$$\Rightarrow sX(s) - A.X(s) = B.U(s)$$

$$\Rightarrow (sI - A)X(s) = BU(s)$$

$$\Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1} B U(s)$$ bunu (2)'de yerine koyalım!

$$Y(s) = C.(sI - A)^{-1}.B.U(s) + DU(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \left[C.(sI - A)^{-1}.B + D\right] U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \left[C(sI - A)^{-1}.B + D\right]$$

Yukarıdaki son ifade, 1 giriş 1 çıkış bir sistem için transfer fonksiyonunu doğrudan verir.

Çok giriş ve/veya çok çıkışlı sistemler için ise, içerisinde transfer fonksiyonlarının olduğu bir «Transfer Matrisi» ortaya çıkar.

Transfer Fonksiyonundan Durum Uzay Modeli Hesaplama

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^{n} + a_{n-1}s^{(n-1)} + a_{n-2}s^{(n-2)} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Biçiminde verilen bir transfer fonksiyonunu, aşağıdaki gibi bir diferansiyel denklem olarak yazabiliriz. (Sıfırı olmayan transfer fonksiyonu)

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_0 u$$

Durum değişkenleri şu şekilde seçersek!

$$x_1 = y, \quad \dot{x}_1 = \dot{y}$$

$$x_2 = \dot{y}, \quad \dot{x}_2 = \ddot{y}$$

$$x_3 = \ddot{y}, \quad \dot{x}_3 = \dddot{y}$$

$$\vdots$$

$$x_n = y^{(n-1)}, \quad \dot{x}_n = y^{(n)}$$

Durum denklemlerini şöyle yazabiliriz!

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + b_0 u$$

Transfer Fonksiyonundan Durum Uzay Modeli Hesaplama

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^{n} + a_{n-1}s^{(n-1)} + a_{n-2}s^{(n-2)} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Durum değişkenlerini, vektör-matris biçiminde gösterecek olursak;

Durum denklemlerini şöyle yazabiliriz;

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + b_0 u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + 0 \cdot u$$

Kanonik Form

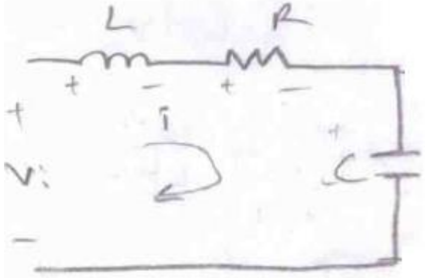
Hatırlatma: Bu işlemleri yapabilmek için, transfer fonksiyonunun sıfırı olmaması gerekmektedir.

Transfer Fonksiyonundan Durum Uzay Modeli Hesaplama-Örnek

Örnek;

Aşağıdaki RLC devresinde, $\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ transfer fonksiyonunu elde ediniz.

Buradan durum uzay modeline geçiniz.



$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{\int I\,dt}{C} = V_i$$

Laplace dönüşümü

$$L.s.I(s) + R.I(s) + \frac{1}{C}\frac{I(s)}{s} = V_i(s)$$

$$I(s)\left(Ls + R + \frac{1}{sC}\right) = V_i(s)$$

$$I(s) = \frac{V_i(s)}{Ls + R + \frac{1}{sC}}$$

$$V_c = \frac{\int I\,dt}{C} = \frac{1}{sC} I = \frac{1}{sC}\frac{V_i(s)}{Ls + R + 1/sC}$$

$$\boxed{\frac{V_c}{V_i} = \frac{1}{s^2LC + sRC + 1}}$$

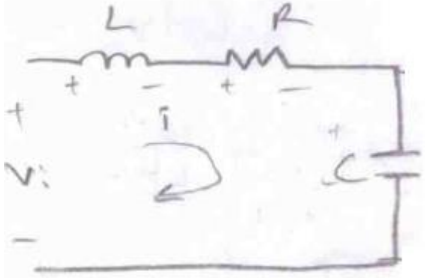
2. dereceden transfer fonksiyonu

Transfer Fonksiyonundan Durum Uzay Modeli Hesaplama-Örnek

Örnek;

Aşağıdaki RLC devresinde, $\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ transfer fonksiyonunu elde ediniz.

Buradan durum uzay modeline geçiniz.



$$\boxed{\frac{V_c}{V_I} = \frac{1}{s^2LC + sRC + 1}}$$

2. dereceden transfer fonksiyonu

Transfer fonksiyonunun diferansiyel denklemi olarak yazalım: $\ddot{V}_c LC + \dot{V}_c RC + V_c = V_I$

$$\Rightarrow \ddot{V}_c + \dot{V}_c \frac{R}{L} + \frac{V_c}{LC} = \frac{V_I}{LC}$$

İlk durum değişkeni, çıkışımız (V_c) olsun.

$x_1 = V_c$

İkinci durum değişkeni ise, çıkışın türevi olsun

$x_2 = \dot{V}_c$

Bu şartlar altında durum denklemlerini şu şekilde yazabiliriz;

$$\begin{pmatrix} y = V_c : \text{çıkış} \\ u = V_I : \text{giriş} \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{x_1}{LC} - \frac{x_2 R}{L} + \frac{u}{LC}$$

Çıkış ifadesi de $y = x_1$ olduğuna göre;

Durum denklemlerini şu şekilde gösterebiliriz;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_{D} u$$