Lineer Denklem Sistemleri / İteratif Çözümler

$ax = c \Longrightarrow x = \frac{c}{a}$; $(a \neq 0)$ tek *lineer denklem* ve çözümü

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{ed - bf}{ad - bc} \qquad y = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

$(ad - bc \neq 0)$ İki tane *lineer denklem* ve çözümü (Basit eliminasyon)

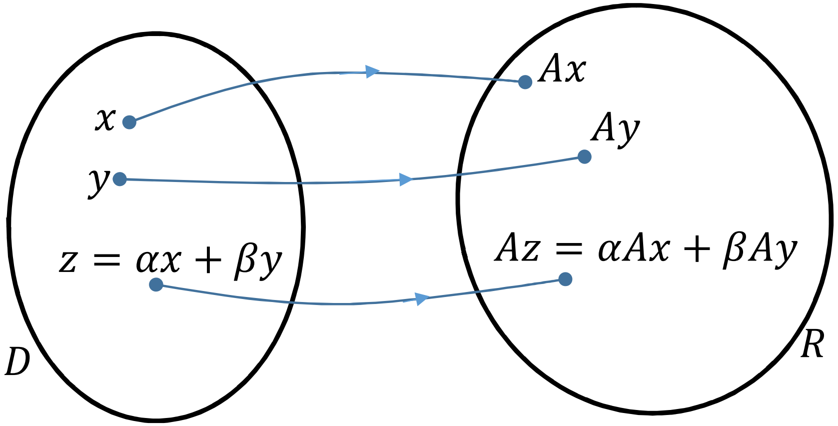
$$\begin{aligned} c_{11}x^2y + c_{12}ye^x &= d_1 \\ c_{21}xy^3 + c_{22}\sin x\sqrt{y} &= d_2 \end{aligned}$$

İki Tane Lineer Olmayan Denklem; Bilinmeyenler x ve y

Lineerlik:

- Denklemlerde tüm bilinmeyenler direk olarak sadece belli sabit katsayılarla çarpılıyorlar
- Her bir bilinmeyen ayrı ayrı gözüküyor
- Bilinmeyenlerin karesi, karekökü, üsleri, çeşitli fonksiyonları veya birbirleri ile çarpımları/bölümleri/üs işlemleri vb. yok

Lineerlik (Genel Tanım)
$A: D \to R$ operatörü bir D kümesinin elemanlarını bir R kümesinin elemanlarına dönüştüren bir operatör olsun
A operatörünün (işlemci) üzerine etkidiği iki büyüklük $x \in D$ ve $y \in D$ ve α ve β iki sabit olmak üzere
$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A x + \beta A y$ sağlanıyorsa A lineerdir.



Örnek: Reel fonksiyonların belirli bir aralıktaki Riemann anlamında belirli integrali bir operatör gibi düşünülebilir. Açıktır ki bu **integral operatörü <u>Lineer</u>dir.**

Örnek: $Lu = a_2 \frac{d^2u}{dx^2} + a_1 \frac{du}{dx} + a_0 u$ **diferansiyel operatörü <u>Lineer</u>dir**

Örnek: $\mathrm{T}u = u \frac{d^2u}{dx^2} + f(x) \frac{du}{dx} + u^2$ **diferansiyel operatörü <u>Lineer Değil</u>dir.**

Lineer Denklem Sistemleri / İteratif Çözümler

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_2 \end{aligned}$$

n tane bilinmeyen içeren n tane lineer denklem $\Longrightarrow$ **Lineer Denklem Sistemi**

Lineer Denklem Sisteminin Matris-Vektör Çarpımı Gösterilimi

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]; i,j = 1,2,\dots,n$$

Matris

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

Vektör

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$$

Vektör

Klasik Çözüm Tekniği: Eliminasyon
Eliminasyon Versiyonları:
- Gauss Eliminasyonu (Temel Yaklaşım)
- Gauss-Jordan
- LU Faktörizasyon

$$\boldsymbol{det\ A} \neq \boldsymbol{0} \rightarrow \text{çözüm}: \ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A^{-1}b}$$

Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü için İteratif Yöntemler

1. Jacobi Yöntemi

2. Gauss-Seidel Yöntemi

$$\begin{aligned} 9x_1 + x_2 + x_3 &= b_1 & (E1) \\ 2x_1 + 10x_2 + 3x_3 &= b_2 & (E2) \\ 3x_1 + 4x_2 + 11x_3 &= b_3 & (E3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E1) &\rightarrow x_1 = \frac{1}{9}[b_1 - x_2 - x_3] \\ (E2) &\rightarrow x_2 = \frac{1}{10}[b_2 - 2x_1 - 3x_3] \\ (E3) &\rightarrow x_3 = \frac{1}{11}[b_3 - 3x_1 - 4x_2] \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}^{(\mathbf{0})} = \left[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right]$$

$Başlangıç\ değeri\ (Initial\ Guess)$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{9}\left[b_1 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left[b_2 - 2x_1^{(k)} - 3x_3^{(k)}\right] \quad ; \quad k = 0,1,2,\ldots$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{11}\left[b_3 - 3x_1^{(k)} - 4x_2^{(k)}\right]$$

Jacobi İterasyonu

Vektör ve Matris Normu Tanımlar

Vektör Normu

V bir vektör uzayı ve F reel veya kompleks sayılar cismini göstermek üzere

$\rho: V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \;\; ve \;\; \forall\, \beta \in F \; için$

1. $\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \leq \rho(\boldsymbol{x}) + \rho(\boldsymbol{y}) \;\; Alt\ Toplamsallık$

2. $\rho(\beta\boldsymbol{x}) = |\beta|\rho(\boldsymbol{x}) \;\; Pozitif\,Homojenlik$

3. $\rho(\boldsymbol{x}) = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \;\; Pozitif\ Tanımlılık$

Özelliklerini sağlıyorsa bir **Norm** dur

Norm için kullanılan genel notasyon:

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$$

n boyutlu bir $\boldsymbol{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n\,]^T$ vektörü göz önüne alalım. çeşitli **Vektör Normu** tanımları verilebilir:

ℓ_1 Norm: $\rho(\boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{z}\| = |z_1| + |z_2| + \cdots |z_n|$ $\;(Taxicab\ Norm\ (Manhatten\ Norm))$

ℓ_2 Norm: $\rho(\boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{z}\| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + \cdots z_n^2}$ $\;(Öklidyen\ Norm)$

ℓ_p Norm: $\rho(\boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{z}\| = (z_1^p + z_2^p + \cdots z_n^p)^{\frac{1}{p}}$

ℓ_∞ Norm veya Maximum Norm : $\rho(\boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{z}\| = \max\limits_{1 \le i \le n} |z_i|$

Matris Normu

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}=[a_{ij}];\, i,j=1,2,\dots,n \quad matrisi \;\; verilsin$$

$$\boldsymbol{A}\, matrisinin\, normu: \;\; \|\boldsymbol{A}\| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Normun Özellikleri: $\boldsymbol{y}$ *ve* $\boldsymbol{z}$ *iki vektör;* $\boldsymbol{A}$ *ve* $\boldsymbol{B}$ *matrisler olmak üzere*

1. $\|\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\| \le \|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{z}\|$
2. $\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\| \le \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|$
3. $\|\boldsymbol{AB}\| \le \|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{B}\|$
4. $\|\boldsymbol{Az}\| \le \|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{z}\|$

Yakınsaklık/Hata analizinde Bu özelliği kullanacağız!!

Bu toplamların en büyüğü olan sayı A matrisinin normudur

1. Satır: $a_{11} \;\; a_{12} \;\; \dots\dots \;\; a_{1n} \rightarrow \sum_{j=1}^{n} |a_{1j}|$

2. Satır: $a_{21} \;\; a_{22} \;\; \dots\dots \;\; a_{2n} \rightarrow \sum_{j=1}^{n} |a_{2j}|$

$\vdots$

n. Satır: $a_{n1} \;\; a_{n2} \;\; \dots\dots \;\; a_{nn} \rightarrow \sum_{j=1}^{n} |a_{nj}|$

Jacobi Yönteminin Sonuçları

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$hata$	$oran$
0	0	0	0	2	–
1	1,1111	1,9000	0	1	0,5
2	0,9000	1,6788	−0,9939	$3{,}22E-1$	0,322
3	1,0351	2,0182	−0,8556	$1{,}44E-1$	0,448
4	0,9819	1,9496	−1,0162	$5{,}04E-2$	0,349
5	1,0074	2.0085	−0,9768	$2{,}32E-2$	0,462
6	0,9965	1.9915	−1,0051	$8{,}45E-3$	0,364
7	1,0015	2.0022	−0,9960	$4{,}03E-3$	0,477
8	0,9993	1.9985	−1,0012	$1{,}51E-3$	0,375
9	1,0003	2.0005	−0,9993	$7{,}40E-4$	0,489
10	0,9999	1.9997	−1,0003	$2{,}83E-4$	0,382
30	1,0000	2.0000	−1,0000	$3{,}01E-11$	0,447
31	1,0000	2.0000	−1,0000	$1{,}35E-11$	0,447

$$oran \to 0.447 \quad \Leftarrow k \gg 1$$

$$oran = \frac{hata^{(k+1)}}{hata^{(k)}}$$

Örneğin $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 19 \\ 0 \end{bmatrix}$

Gerçek (Tam)Çözüm : $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Vektör Normu Yardımıyla Hata Tanımı:

$hata\ norm := \left\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(k)} \right\|$; **Vektör Normu**

$\boldsymbol{x}$: Gerçek (Tam)Çözüm

$\boldsymbol{x}^{(k)}$: k'yıncı adımdaki yaklaşık çözüm

$$\left\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(k)} \right\| = \max_{1 \le i \le n} \left| x_i - x_i^{(k)} \right|$$

Gauss-Seidel Yöntemi:

$$\begin{aligned} 9x_1 + x_2 + x_3 &= b_1 \qquad (E1)\\ 2x_1 + 10x_2 + 3x_3 &= b_2 \qquad (E2)\\ 3x_1 + 4x_2 + 11x_3 &= b_3 \qquad (E3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E1) &\rightarrow x_1 = \frac{1}{9}[b_1 - x_2 - x_3]\\ (E2) &\rightarrow x_2 = \frac{1}{10}[b_2 - 2x_1 - 3x_3]\\ (E3) &\rightarrow x_3 = \frac{1}{11}[b_3 - 3x_1 - 4x_2] \end{aligned}$$

2. Denklemde $x_1^{(k+1)}$ kullanılıyor

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{9}\left[b_1 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left[b_2 - 2x_1^{(k+1)} - 3x_3^{(k)}\right] \quad ; \quad k = 0,1,2,\ldots$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{11}\left[b_3 - 3x_1^{(k+1)} - 4x_2^{(k+1)}\right]$$

3. Denklemde $x_1^{(k+1)}$ ve $x_2^{(k+1)}$ kullanılıyor

$$\boldsymbol{x}^{(\mathbf{0})} = \left[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right]$$

$Başlangıç\ değeri\ (Initial\ Guess)$

Gauss-Seidel Yönteminde
güncellenmiş değer
hemen bir sonraki denklemde kullanılıyor!!!

Gauss-Seidel Yöntemi:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{9}\left[b_1 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left[b_2 - 2x_1^{(k+1)} - 3x_3^{(k)}\right] \quad ; \quad k = 0,1,2,\ldots$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{11}\left[b_3 - 3x_1^{(k+1)} - 4x_2^{(k+1)}\right]$$

Jacobi den daha hızlı yakınsadığı hemen görülüyor!!!

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$hata$	$oran$
0	0	0	0	2	–
1	1,1111	1,6778	−0.9131	3,22E − 1	0,161
2	1,0262	1,9687	−0,9958	3,13E − 2	0,097
3	1,0030	1,9981	−1,0001	3,00E − 3	0,096
4	1,0002	2,000	−1,0001	2,24E − 4	0,074
5	1,0000	2.0000	−1,0000	1,65E − 5	0,074
6	1,0000	2.0000	−1,0000	2,58E − 6	0,156

İteratif Yöntemlerin Genel Prensibi

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ denklemini $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{N} - \boldsymbol{P}$ olmak üzere $\boldsymbol{Nx} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{Px}$ formunda yazalım; Öyle ki burada $\boldsymbol{N}$ tekil olmayan ($\det \boldsymbol{N} \neq 0$) bir matris olup, $\boldsymbol{Nz} = \boldsymbol{f}$ şeklindeki bir lineer sistemi herhangi genel bir $\boldsymbol{f}$ vektörü için kolayca çözmeye olanak veren bir matris olarak seçilir. Örneğin $\boldsymbol{N}$ diagonal veya tridiagonal olarak seçilebilir. Bu halde iterasyon şeması :

$$\boldsymbol{Nx}^{(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1})} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{Px}^{(\boldsymbol{k})} \;;\; k = 0,1,2,\ldots$$

$$\begin{aligned} 9x_1 + x_2 + x_3 &= b_1 \qquad (E1) \\ 2x_1 + 10x_2 + 3x_3 &= b_2 \qquad (E2) \\ 3x_1 + 4x_2 + 11x_3 &= b_3 \qquad (E3) \end{aligned}$$

Jacobi Yönteminde:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 3 \\ 3 & 4 & 11 \end{bmatrix}; \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}; \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Gauss-Seidel Yönteminde:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 3 \\ 3 & 4 & 11 \end{bmatrix}; \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 0 \\ 3 & 4 & 11 \end{bmatrix}; \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Genel bir $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ matrisi için Jacobi Yönteminde $\boldsymbol{N}$ yi oluştururken $\boldsymbol{A}$'nın diagonal elemanlarını alıp diğer elemanlar sıfır yapılır

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots \dots 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & \dots \dots 0 \\ & & \dots & & \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \dots \; a_{nn} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{N} - \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{Nx}^{(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1})} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{Px}^{(\boldsymbol{k})} \;\; ; k = 0,1,2, \dots$$

Genel bir $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ matrisi için Gauss-Seidel Yönteminde $\boldsymbol{N}$ yi oluştururken $\boldsymbol{A}$'nın diagonal ve altında kalan elemanlarını alıp diğer elemanlar sıfır yapılır

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots \dots 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \dots \dots 0 \\ & & \dots & & \\ & & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots \dots \dots & & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{N} - \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{Nx}^{(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1})} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{Px}^{(\boldsymbol{k})} \;\; ; k = 0,1,2, \dots$$

Yakınsaklık ve Hata Analizi

$$\boldsymbol{Nx = b + Px}$$

$$\boldsymbol{Nx^{(k+1)} = b + Px^{(k)}}$$

$$\boldsymbol{N(x - x^{(k+1)}) = P(x - x^{(k)}) \Longrightarrow Ne^{(k+1)} = Pe^{(k)}}$$

$\boldsymbol{e^{(k)} = x - x^{(k)}}$: k'yıncı adımdaki HATA

$$\boldsymbol{e^{(k+1)} = N^{-1}Pe^{(k)}}$$

$$\left\|\boldsymbol{e^{(k+1)}}\right\| \leq \left\|\boldsymbol{N^{-1}P}\right\| \; \left\|\boldsymbol{e^{(k)}}\right\| \leq \left\|\boldsymbol{N^{-1}P}\right\|^{2} \; \left\|\boldsymbol{e^{(k-1)}}\right\| \leq \cdots \leq \left\|\boldsymbol{N^{-1}P}\right\|^{k+1} \; \left\|\boldsymbol{e^{(0)}}\right\|$$

$$\left\|\boldsymbol{e^{(k)}}\right\| \leq \left\|\boldsymbol{N^{-1}P}\right\|^{k} \; \left\|\boldsymbol{e^{(0)}}\right\|$$

$\boldsymbol{M = N^{-1}P}$ olarak tanımlayalım

Yakınsaklık için $k \to \infty$ $\;halinde$ $\left\|\boldsymbol{e^{(k)}}\right\| \to \boldsymbol{0}$ olmalı $\Longrightarrow$ $\|\boldsymbol{M}\| = \left\|\boldsymbol{N^{-1}P}\right\| < \boldsymbol{1}$

Yakınsaklık ve Hata Analizi

$\boldsymbol{e}^{(k)} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(k)}$: k'yıncı adımdaki HATA

$$\left\|\boldsymbol{e}^{(k)}\right\| \leq \left\|\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{P}\right\|^{k} \left\|\boldsymbol{e}^{(0)}\right\|$$

Yakınsaklık Koşulu $\Rightarrow$ $\|\boldsymbol{M}\| = \left\|\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{P}\right\| < \mathbf{1}$

Jacobi Yönteminde:

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}; \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{M} = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{10} & 0 & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{11} & -\frac{4}{11} & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \|\boldsymbol{M}\| = \frac{7}{11} < 1 \Longrightarrow \text{Yakınsak!}$$

Gauss-Seidel Yönteminde:

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 0 \\ 3 & 4 & 11 \end{bmatrix}; \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{M} = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{45} & -\frac{5}{18} \\ 0 & -\frac{1}{45} & \frac{13}{99} \end{bmatrix} \Longrightarrow \|\boldsymbol{M}\| = 0{,}3 < 1 \Longrightarrow \text{Yakınsak}$$

(Hemde Daha Hızlı)!