

# Sayısal Haberleşme

Prof. Dr. İbrahim Altunbaş

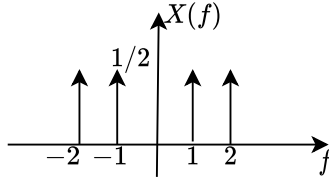
## 1 Soru: Pulse Amplitude Modulation (PAM)

$x(t) = \cos 2\pi t + \cos 4\pi t$  işareti düz tepeli örnekleme yöntemiyle örnekleniyor.

- a)  $x(t)$ 'ye ilişkin Nyquist frekansını bulunuz.
- b) Örnekleme hızı 6 örnek/sn ve tutma süresi  $\tau = \frac{1}{12}$  sn olduğuna göre, örneklenmiş ve tutulmuş işaretin (PAM) işaretinin değişimini çiziniz.
- c) Örneklenmiş tutulmuş (PAM) işaretin frekans spektrumunu çiziniz.
- d) Bu işaret alıcı kısımda doğrudan kesim frekansı 3 Hz olan ideal bir alçak geçiren süzgeçten (AGS) geçirildiğine göre çıkış işaretini bulunuz. Çıkış işareti  $x(t)$  ile aynı mıdır?
- e) Örneklenip tutulmuş PAM işaretten  $x(t)$ 'yi yeniden elde edebilmek için kullanılacak denkleştirici süzgecin frekans yanıtını belirleyiniz.

### 1.1 Cevap:

a)  $x(t)$ 'nin Fourier dönüşümü  $X(f) = \frac{1}{2} (\delta(f-1) + \delta(f+1) + \delta(f-2) + \delta(f+2))$  şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla  $W = 2$  Hz'dir.



Şekil 1:  $x(t)$ 'nin genlik spektrumu.

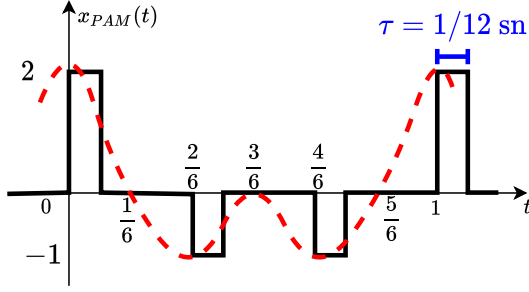
$$f_s \geq 2W = 2 \cdot 2 = 4 \text{ Hz}$$

$$T_s = \frac{1}{f_s} = 0,25 \text{ sn}$$

$$T_s \leq 0,25$$

Yani saniyede en az 4 örnek alınmalıdır.

b)  $f_s = 6$  ve  $T_s = 1/6$  ise



Şekil 2:  $x_{PAM}(t)$

$$x(t) = \cos 2\pi t + \cos 4\pi t$$

$$t = 0, \quad x(t) = 2$$

$$t = 1/6, \quad x(t) = \cos \frac{2\pi}{6} + \cos \frac{4\pi}{6} = 1/2 - 1/2 = 0$$

$$t = 2/6, \quad x(t) = -1/2 - 1/2 = -1$$

$$t = 3/6, \quad x(t) = 0$$

$$t = 4/6, \quad x(t) = -1$$

$$t = 5/6, \quad x(t) = 0$$

$$t = 1, \quad x(t) = 2$$

c) Örneklenmiş işaret

$$x_s(t) = x(t)s(t)$$

şeklinde yazılmakta olup burada

$$s(t) = \sum_k \delta(t - kT_s)$$

şeklinde dir. İmpuls katarı  $s(t)$ 'nin Fourier dönüşümü  $S(f) = \mathbb{F}\{s(t)\} = f_s \sum_k \delta(f - kf_s)$  olarak yazılabilir. Dolayısıyla örneklenmiş işaretin Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned} X_s(f) &= \mathbb{F}\{x_s(t)\} = \mathbb{F}\{x(t)s(t)\} = \mathbb{F}\{x(t)\} * \mathbb{F}\{s(t)\} \\ &= f_s (X(f)) * \sum_k \delta(f - kf_s) = f_s \sum_k X(f - kf_s) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Düz tepeli PAM işaretinin elde edilebilmesi için kullanılan  $p(t) = \Pi\left(\frac{t-1/24}{1/12}\right)$  impuls cevabına sahip süzgecin frekans spektrumu

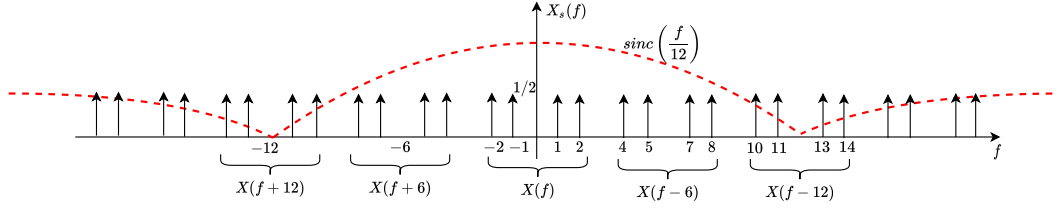
(Biliyoruz ki  $z(t) = A \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$  ise  $Z(f) = A\tau \text{sinc}(f\tau)$ 'dur. Zamanda öteleme teoreminden  $z(t - t_0) = Z(f)e^{-j2\pi f t_0}$  yararlanabiliriz.)

$$P(f) = \frac{1}{12} \text{sinc}\left(\frac{f}{12}\right) e^{-j\frac{2\pi f}{24}}$$

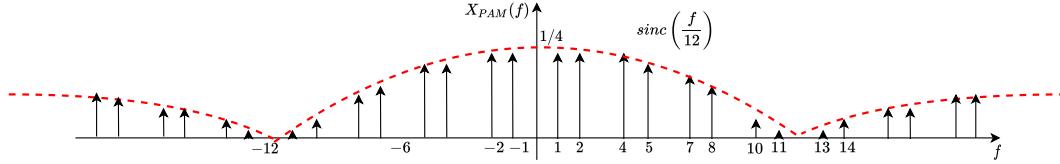
şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla  $f_s = 6$  için düz tepeli PAM işaretin frekans dönüşümü

$$\begin{aligned} X_{PAM}(f) &= X_s(f) \cdot P(f) \\ X_{PAM}(f) &= 6 \sum_k X(f - 6k) \frac{1}{12} \text{sinc}\left(\frac{f}{12}\right) e^{-j\frac{2\pi f}{24}} \\ X_{PAM}(f) &= \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{f}{12}\right) e^{-j\frac{2\pi f}{24}} \sum_k X(f - 6k) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Görüleceği üzere  $X_{PAM}(f)$  in genlik spektrumunu çizmek için fazı sıfır olan  $\frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{f}{12}\right)$  işareti ile  $\sum_k X(f - 6k)$  işareti çarpılmalıdır.  $e^{-j\frac{2\pi f}{24}}$  ifadesinin genliği 1'dir.



Şekil 3:  $X_s(f)$  ve  $P(f)$ 'e dair frekans spektrumunun zarfı.

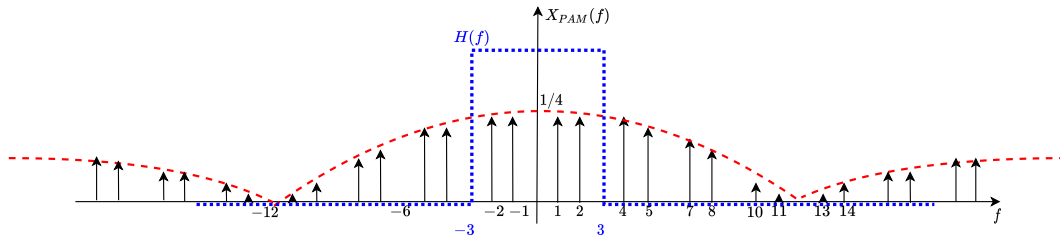


Şekil 4:  $X_{PAM}(f)$  genlik spektrumu.

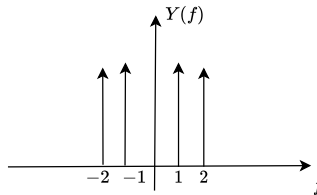
d) Süzgeçten geçmiş PAM işaretinin Fourier dönüşümü,

$$\begin{aligned}
 Y(f) &= X_{PAM}(f)H(f) \\
 Y(f) &= \frac{1}{4} \operatorname{sinc}\left(\frac{f}{12}\right) e^{-j\frac{2\pi f}{24}} \left( \delta(f-1) + \delta(f+1) + \delta(f-2) + \delta(f+2) \right) \\
 Y(f) &= \frac{1}{4} \left( \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{12}\right) e^{-j\frac{2\pi}{24}} \delta(f-1) + \operatorname{sinc}\left(\frac{-1}{12}\right) e^{+j\frac{2\pi}{24}} \delta(f+1) \right. \\
 &\quad \left. + \operatorname{sinc}\left(\frac{2}{12}\right) e^{-j\frac{2\pi 2}{24}} \delta(f-2) + \operatorname{sinc}\left(\frac{-2}{12}\right) e^{+j\frac{2\pi 2}{24}} \delta(f+2) \right)
 \end{aligned}$$

şeklindedir.



Şekil 5:  $X_{PAM}(f)$  ve  $H(f)$  frekans cevabının zarfı.



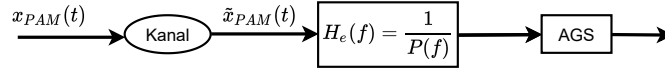
Şekil 6: Süzgeç çıkışındaki işaretin frekans spektrumu.

$y(t)$  işareti,

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathbb{F}^{-1}\{Y(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f)e^{j2\pi ft} df \\
&= \frac{1}{4} \left( \text{sinc}\left(\frac{1}{12}\right) e^{+j2\pi(t-\frac{1}{24})} + \text{sinc}\left(\frac{-1}{12}\right) e^{-j2\pi(t-\frac{1}{24})} + \text{sinc}\left(\frac{2}{12}\right) e^{+j2\pi(t-\frac{2}{24})} + \text{sinc}\left(\frac{-2}{12}\right) e^{+j2\pi(t-\frac{2}{24})} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \text{sinc}\left(\frac{1}{12}\right) \cos 2\pi \left(t - \frac{1}{24}\right) + \text{sinc}\left(\frac{2}{12}\right) \cos 2\pi \left(t - \frac{2}{24}\right) \right) \\
&= 0,494 \cdot \text{sinc}\left(\frac{1}{12}\right) \cos 2\pi \left(t - \frac{1}{24}\right) + 0,477 \cos 2\pi \left(t - \frac{2}{24}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunabilir.

e)



Şekil 7: Alıcı blok şeması.

$$H_e(f) = \frac{1}{P(f)} = e^{j\frac{2\pi f\tau}{2}} \frac{1}{\tau \text{sinc}(f\tau)} = e^{j\frac{2\pi f}{24}} \frac{12}{\text{sinc}\left(\frac{f}{12}\right)}$$

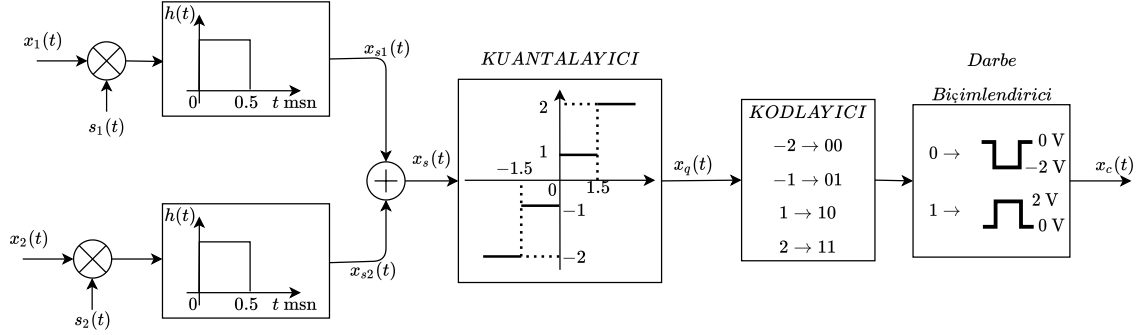
AGS girişindeki spektrum

$$X_{PAM}(f)H_e(f) = X_s(f)P(f)\frac{1}{P(f)} = X_s(f)$$

şeklinde yazılabilir. Bu işaret AGS'den geçirilirse tam olarak  $x(t)$  elde edilebilir.

## 2 Soru: İki Kanallı Pulse Code Modulation (PCM)

$x_1(t) = 2 \sin\left(\frac{\pi 10^3 t}{6}\right)$  ve  $x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi 10^3 t}{6}\right)$  sürekli işaretleri şekilde gösterilen iki kanallı PCM sistemine uygulanmaktadır.  $(s_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - (2k+1)10^{-3}), s_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k10^{-3}))$

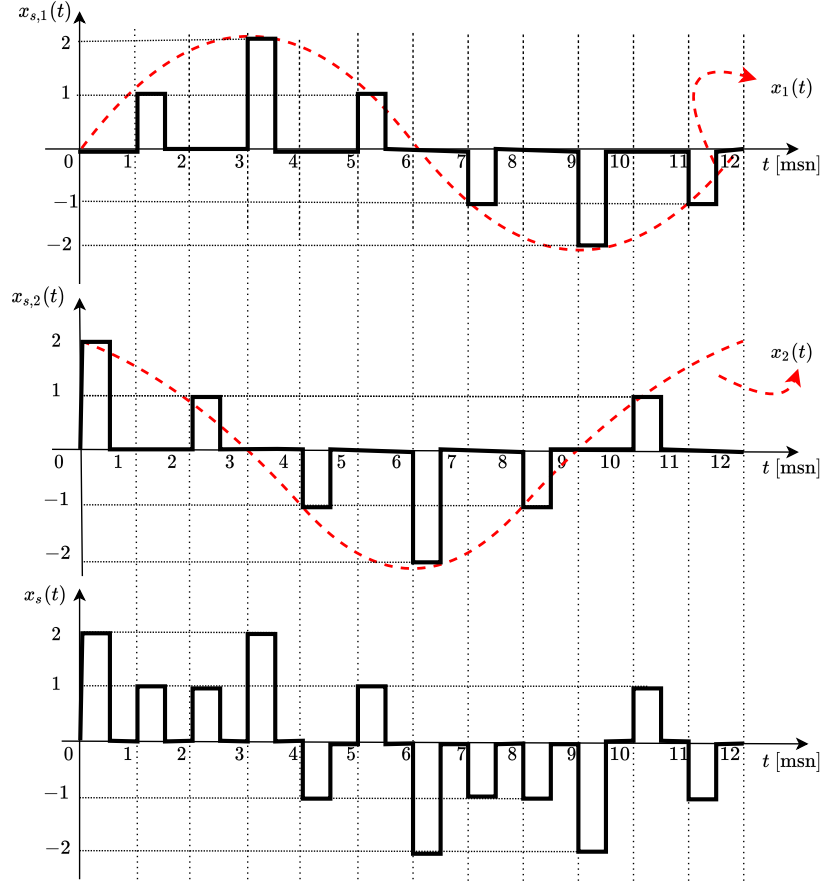


Şekil 8: İki kanallı PCM sistemi.

- $x_s(t) = x_{s,1}(t) + x_{s,2}(t)$  çoğullanmış işaretin değişimini çiziniz.
- $x_s(t)$  işareti, özegrisi şekilde görülen kuantalayıcıdan geçirilerek  $x_q(t)$  kuantalanmış işareti elde ediliyor.  $x_q(t)$  kuantalanmış işaretin değişimini çizerek ortalama gücünü bulunuz.
- $x_q(t)$  işaretinin kuanta düzeyleri şekildeki biçimde kodlanıyor. Kodlayıcının 0 ve 1 üretme olasılıklarını bulunuz.
- Kanala verilen PCM işaretinde  $x_c(t)$  darbe başına %50 güven aralığı için gerekli darbe süresini bulunuz.
- $x_c(t)$  işaretinin iletilebilmesi için gerekli minimum band genişliğini ve  $R$  [bit/sn] iletim hızını bulunuz. (Kuantalama düzeyi sayısı 2 katına çıkartılırsa bu değerler ne olur? Kuantalama gürültüsü ne olur?)

## 2.1 Cevap:

a)



Şekil 9:  $x_{s,1}(t)$ ,  $x_{s,2}(t)$  ve  $x_s(t) = x_{s,1}(t) + x_{s,2}(t)$  işaretleri.

b) Kuantalayıcı yapısından dolayı  $x_s(t) = x_q(t)$  olduğu gözükmemektedir.

*Not:* Boşluk anlarında kuantalayıcı sıfır çıkışı veriyor varsayıldı.

Kuantalanmış işaretin ortalama gücü

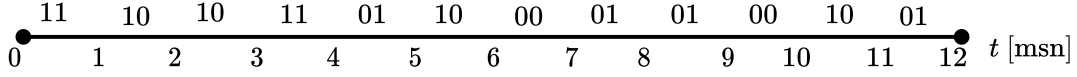
$$\begin{aligned}
 S_q &= \langle x_q^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int x_q^2(t) dt \\
 &= \frac{2 \int_0^{0,5 \cdot 10^{-3}} 2^2 dt + 4 \int_0^{0,5 \cdot 10^{-3}} 1^2 dt + 2 \int_0^{0,5 \cdot 10^{-3}} (-2)^2 dt + 4 \int_0^{0,5 \cdot 10^{-3}} (-1)^2 dt}{12 \cdot 10^{-3}} \\
 &= 1 \text{ W}
 \end{aligned}$$

şeklinde bulunabilir. Aynı ifade aşağıdaki şekilde de elde edilebilir:

$$S_q = (2)^2 \frac{2}{12 \cdot 2} + (1)^2 \frac{4}{12 \cdot 2} + (-1)^2 \frac{4}{12 \cdot 2} + (-2)^2 \underbrace{\frac{2}{12 \cdot 2}}_{\text{Darbe genişliği}}$$

*Hatırlatma:* Rastgele dağılımlı işaretlerin ortalama gücü  $S_q = \sum x_q^2 P(x_q)$ .

c) Kodlayıcı çıkışında elde edilen bit dizisi:



Şekil 10: Çıkış bit dizisi.

Bir periyottaki bit sayısı 24

Bir periyottaki toplam 0 sayısı 12

Bir periyottaki toplam 1 sayısı 12

0 üretilme olasılığı, 00 bitinde 0 gelmesi olasılığı  $\frac{2}{2}$  ve 00 bit dizisinin gelme olasılığı  $\frac{2}{12}$  çarpılarak ve benzer şekilde her bit dizisi için

$$P_0 = \frac{2}{2} \frac{2}{12} + \frac{1}{2} \frac{4}{12} + \frac{1}{2} \frac{4}{12} = 1/2$$

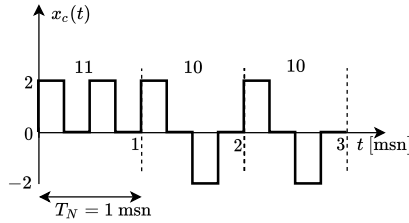
şeklinde hesaplama yapılarak bulunabilir.

0 veya 1 gelme olasılıklarının toplamı 1 olduğuna göre, 1 üretilme olasılığı

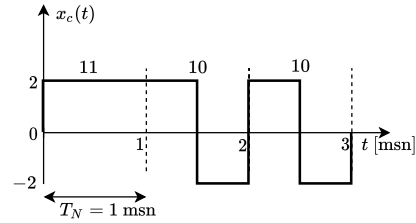
$$P_1 = 1 - P_0 = 1/2$$

olarak bulunur.

d) Bir bitin iletim süresi  $T_N/2$  olmak üzere,  $\frac{\tau}{T_N/2} = \%50$  ise  $\tau = 0,25$  msn olarak bulunur.



Şekil 11: %50 güven aralığı ile darbe şekillendirici çıkışındaki işaret.



Şekil 12: 0 güven aralığı ile darbe şekillendirici çıkışındaki işaret.

e) PCM işaretin band genişliği yaklaşık olarak

$$B \geq \frac{1}{2\tau} = 2000\text{Hz}$$

şeklinde alttan sınırlandırılabilir.

$T_N = 1$  msn'de  $n$  bit iletiliyorsa,

1 sn'de  $R$  bit iletilebilir.

$$R = \frac{n}{T_N} = \frac{2}{10^{-3}} = 2000 \text{ bit/sn}$$

Düzyey sayısı 2 katına çıkarsa  $R$  iki katına çıkar. Kuantalama gürültüsü azalır.