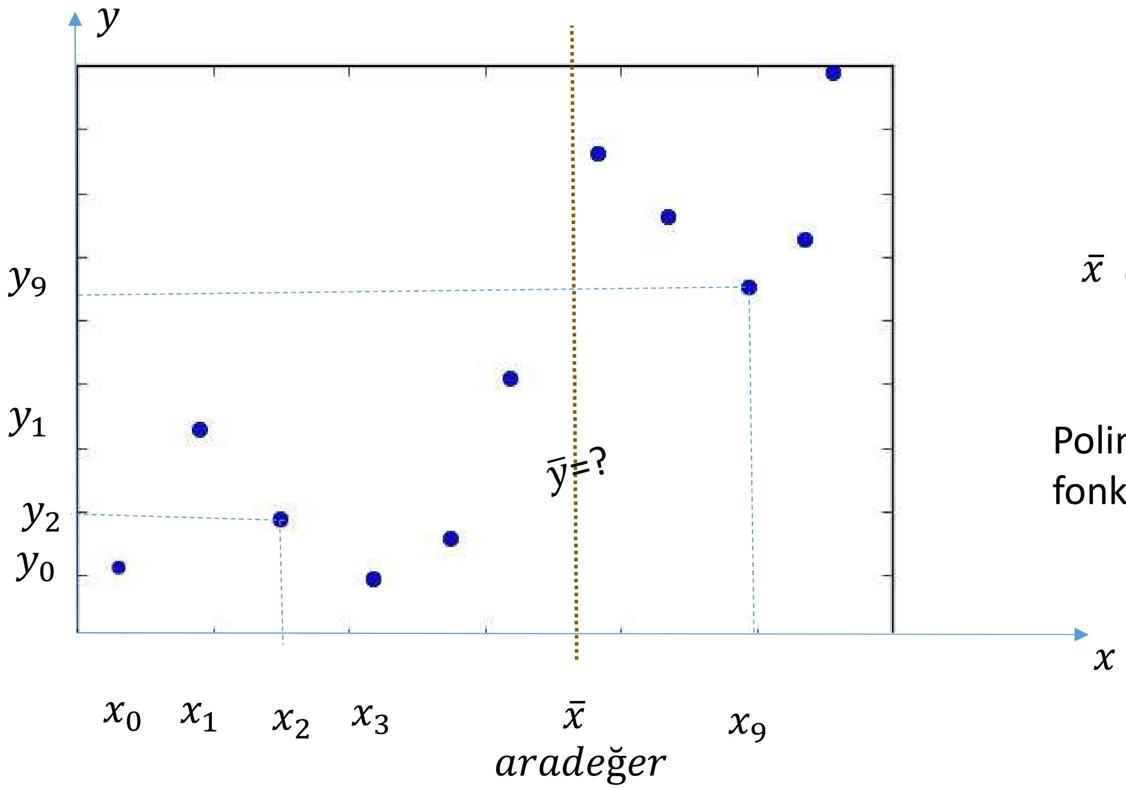
İNTERPOLASYON

Verilen bir data kümesinden hareketle bir fonksiyon belirleyerek başka noktalardaki değerleri hesaplamaya interpolasyon denir.

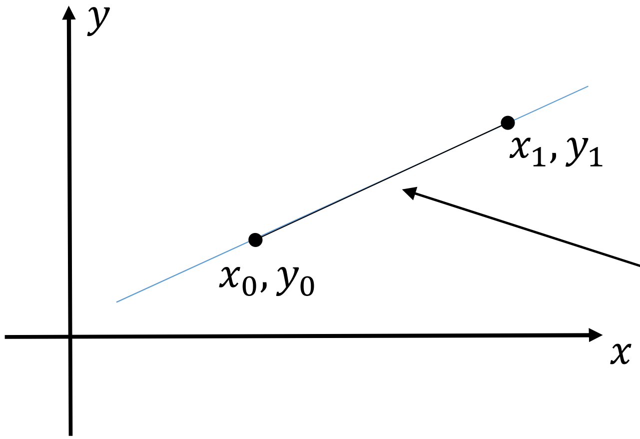


$\bar{x}$ $ara\ değeri\ için\ \bar{y}$=?

Polinomlar interpolasyon için en uygun fonksiyonlardır.

Lineer İnterpolasyon

Verilen iki noktadan geçen lineer polinomu oluşturalım:



$$p_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$p_1(x_i) = y_i, \qquad i = 0,1$$

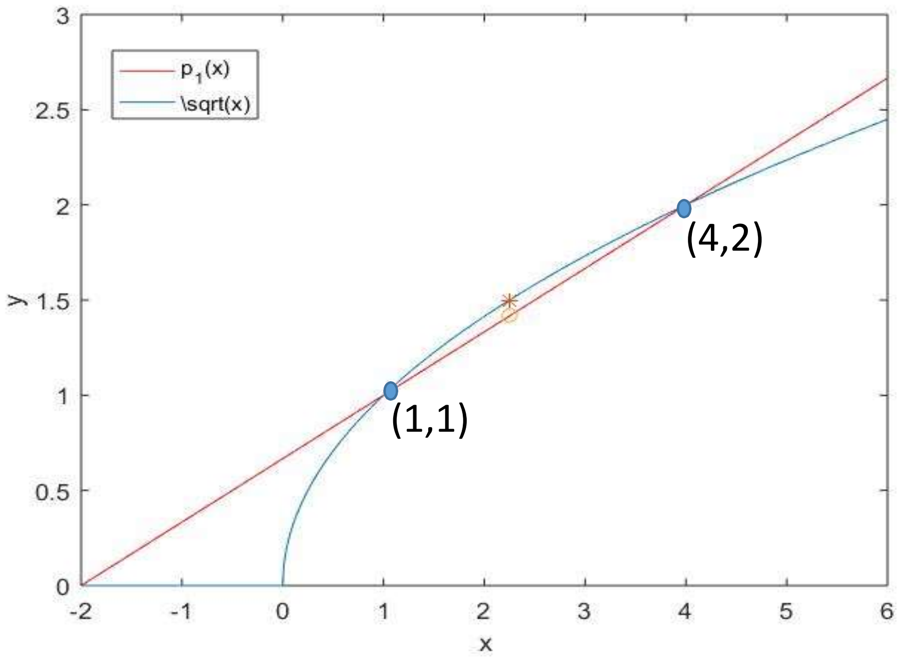
Bu iki nokta arasındaki tüm x değerleri için $p_1(x)$ kullanılarak karşı düşen y belirlenebilir.

Örneğin (1,1) ve (4,2) *noktaları için lineer polinom*

$$p_1(x) = 1\frac{x - 4}{-3} + 2\frac{x - 1}{3} = \frac{1}{3}(x + 2)$$

$$p_1(2.25) = 1.4166$$

$y = \sqrt{x}$ eğrisi üzerindeki (1,1) ve (4,2) noktalarından geçen doğru ve $y = \sqrt{x}$ eğrisi



$y = \sqrt{2.25}$=1.5

$p_1(2.25) = 1.4166$

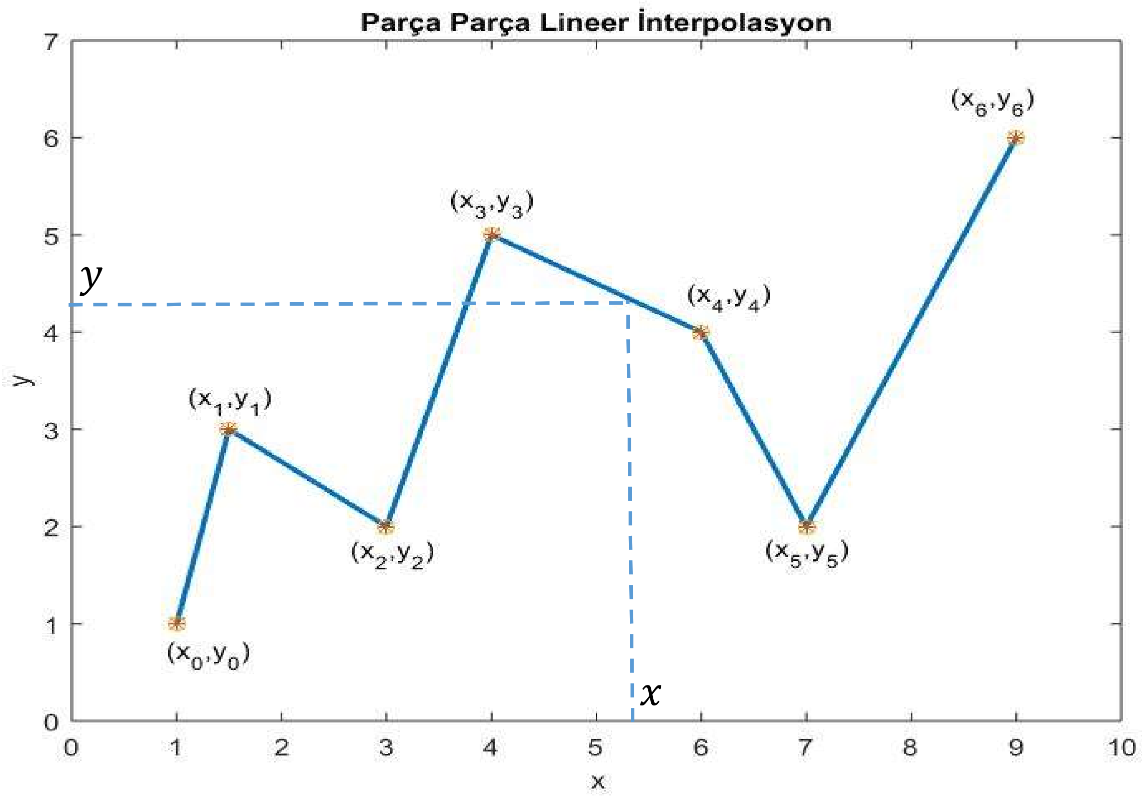
Örnek: $e^{0.82} = 2.2705\ \ ve\ \ e^{0.83} = 2.293319$ değerlerinden yararlanarak $e^{0.826}$ değerini hesaplayalım

$$(x_0 = 0.82, y_0 = 2.2705); (x_1 = 0.83, y_1 = 2.293319) \rightarrow \quad p_1(x) = 2.2705\frac{x - 0.83}{-0.01} + 2.293319\frac{x - 0.82}{0.01}$$

$p_1(0.826) = \mathbf{2.2841914}$ Gerçek (tam) değer $e^{0.826} = \mathbf{2.2841638}$

Parça Parça Lineer İnterpolasyon:

İkiden fazla data noktası halinde ardışık noktaları doğru ile birleştirmeye karşı düşer.



Kuadratik (İkinci Derece Polinom) İnterpolasyon

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ veri kümesi için bu üç noktadan geçen 2. derece polinom

$$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \qquad L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \qquad L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$L_i(x) : i = 0,1,2$; Lagrange interpolasyon baz fonksiyonları 2. dereceden polinomlar

$\deg p_2(x) \leq 2$

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1; i = j \\ 0; i \neq j \end{cases} \qquad p_2(x_j) = y_j, \qquad j = 0,1,2$$

Örnek: (0,-1), (1,-1), (2,7) noktalarından geçen 2. derece polinom

$$p_2(x) = (-1)\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + (-1)\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 7\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}$$

Örnek: $e^{0.82} = 2.2705, \quad e^{0.83} = 2.293319 \;\; ve \; e^{0.84} = 2.316367 \;\; değerlerinden \;\; e^{0.82}$ yı hesaplayalım:

$p_2(0.826) = \mathbf{2.2841639}$ Gerçek (tam) değer $e^{0.826} = \mathbf{2.2841638}$

$p_1(0.826) = \mathbf{2.2841914}$ **idi ---> 2 derece polinom daha yüksek doğrulukta bir sonuç üretir.**

Yüksek Mertebeden İnterpolasyon (LAGRANGE FORMÜLÜ)

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ ayrık noktalarından geçen (derecesi n yada daha küçük olan) $p_n(x)$ polinomu

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots. + y_n L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots.(x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \ldots.(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}; \quad i = 0,1,2, \ldots n$$

Dikkat : Payda Payın x_i deki değerine eşittir ---> $L_i(x_i) = 1$ ve $L_i(x_j) = 0 \; (j \neq i)$ olduğundan

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1; i = j \\ 0; i \neq j \end{cases} \quad i, j = 0,1,2, \ldots, n$$

POLİNOM İNTERPOLASYON İÇİN NEWTON BÖLÜNMÜŞ FARKLAR FORMÜLÜ

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ ayrık noktalarından geçen (derecesi n yada daha küçük olan) $p_n(x)$ polinomunu Lagrange formülü ile ifade ettik.

Lagrange Formülü yapı itibarıyla basit ancak işlem yükü fazla!! Çünkü her bir L polinomu n. dereceden.

n+1 tane ayrık nokta verildiğinde bu noktalardan geçen polinom tektir. O halde daha basit gösterilimler de bulabiliriz.

$x_0, x_1, x_2, \ldots . x_n$ noktaları ve karşı düşen $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ değerleri verilmiş olsun.

Bu noktalardan geçen n. derece polinom

$$p_n(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)(x - x_1) + \ldots . + a_n (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots \ldots (x - x_{n-1})$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $a_0, a_1, \ldots, a_n$ uygun belirlenmiş sabitlerdir.

Bu sabitler $p_n(x_k) = f(x_k)$; $k = 0,1,2, \ldots, n$ denklemleri yardımıyla belirlenir. Bu sabitler Bölünmüş Fark Formülleri ile ifade edilirler.

Bölünmüş Farklar

$f[x_0,x_1]=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ $\quad f(x)'e\ ait$ x_0 ve x_1 noktaları için 1. Mertebe Bölünmüş Fark

$f[x_0,x_1]=f'(c)$ $\quad f(x)$ türevlenebilir ise aradaki bir c noktası için türev 1. Mertebe Bölünmüş Farka eşittir (Ara Değer Teoremi)

x_0 ve x_1 noktaları yeterince yakınsa iyi bir yaklaşıklıkla $f[x_0,x_1]\approx f'(\frac{x_0+x_1}{2})$ yazılabilir

örnek

$$f(x)=\cos(x);\, x_0=0.2\ \ x_1=0.3\ için\ \ f[x_0,x_1]=\frac{cos(0.3)-cos(0.2)}{0.3-0.2}=-0.2473$$

$$f'\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)=-\sin(0.25)=-0.2474$$

Sonuçta bölünmüş fark türev için oldukça iyi bir yaklaşık ifadedir.

Yüksek mertebeden bölünmüş farklar daha düşükler cinsinden rekürsif olarak tanımlanabilir.

x_0, x_1, x_2 Ayrık üç nokta olmak üzere

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$ 2. Mertebeden bölünmüş fark

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$ 3. Mertebeden bölünmüş fark

$$f[x_0, x_1, \dots x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$ n. Mertebeden bölünmüş fark

n. Mertebeden türev ile n. mertebeden bölünmüş fark arasındaki ilişki:

$$f[x_0, x_1, \dots x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c) \quad ; \quad c \in (\min(x_i), \max(x_i)), \qquad i = 0,1,2 \dots, n$$

Örnek: cos(x) fonksiyonu için bölünmüş farklar

i	x_i	$cos(x_i)$	D_i
0	0	1.0	1.0
1	0.2	0.980067	-0.09966711
2	0.4	0.921061	-0.48840200
3	0.6	0.825336	0.04900763
4	0.8	0.696707	0.03812246
5	1.0	0.540302	-0.003962047
6	1.2	0.362358	-0.001134890

$$\boldsymbol{D_i = f[x_0, x_1, \ldots, x_i]}$$

$$\boldsymbol{D_0} = f[x_0] = f(x_0) \quad \boldsymbol{D_1} = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad \boldsymbol{D_2} = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$\boldsymbol{D_3} = f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \ldots\ldots$$

$$p_n(x) = a_0 + a_1\,(x - x_0) + a_2\,(x - x_0)(x - x_1) + \ldots. + a_n\,(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots\ldots(x - x_{n-1})$$

$(x_0, f(x_0)),\ (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ noktalarından geçen polinom $\dashrightarrow$

$p_n(x_0) = f(x_0) = a_0$ ---> $a_0 = f(x_0)$ ⟵ 0. Mertebeden bölünmüş fark $f[x_0]$

$p_n(x_1) = f(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_0) + a_1\,(x_1 - x_0)$ ---> $a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$

1. Mertebeden bölünmüş fark

Benzer şekilde $x = x_2$ de hesap yapılırsa

$$p_n(x_2) = f(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) \qquad \Longrightarrow$$
$$+ a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$a_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}{x_2 - x_0} - \frac{\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2]$$

2. Mertebeden bölünmüş fark

NEWTON BÖLÜNMÜŞ FARKLAR İNTERPOLASYON FORMÜLÜ

$f[x_i] = f(x_i)$ ← 0. Mertebeden bölünmüş fark

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$ ← 1. Mertebeden bölünmüş fark

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$ ← 2. Mertebeden bölünmüş fark

… … … … … … …

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$ ← k. Mertebeden bölünmüş fark

$$p_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]\,(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})$$

cos(x) fonksiyonuna ilişkin polinom interpolasyon

n	$P_n(0.1)$	$P_n(0.3)$	$P_n(0.5)$
1	0.9900333	0.9700999	0.9501664
2	0.9949173	0.9554478	0.8769061
3	0.9950643	0.9553008	0.8776413
4	0.9950071	0.9553351	0.8775841
5	0.9950030	0.9553369	0.8775823
6	0.9950041	0.9553365	0.8775825
Gerçek (tam) Değer	0.9950042	0.9553365	0.8775826