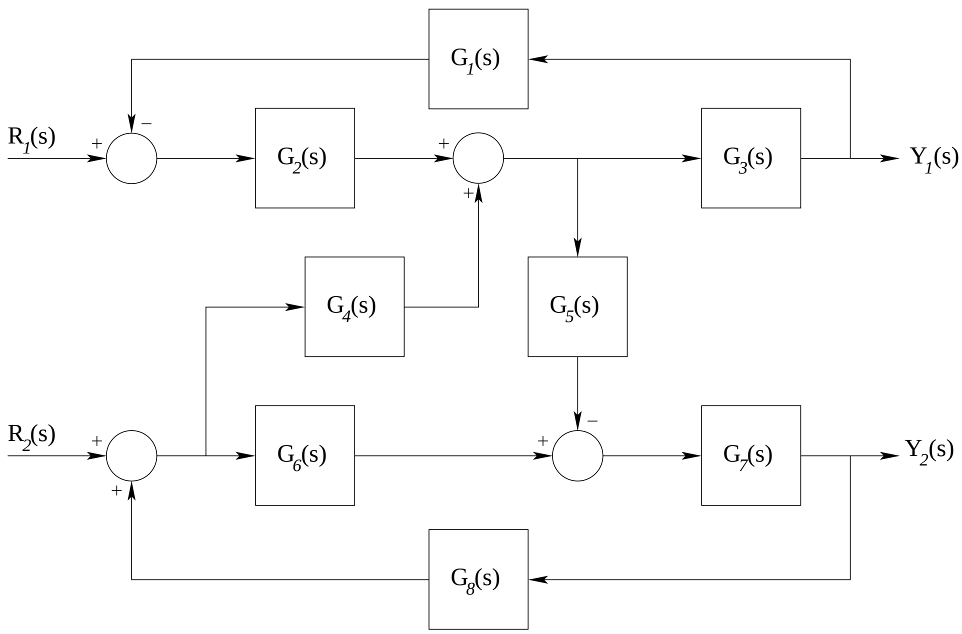
KON317 – Otomatik Kontrol Sistemleri	15 Temmuz 2008
Dr. Murat Yeşiloğlu	
Vize Sınavı	

Soru 1: Şekil 1'de verilen sistemin transfer fonksiyonu

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \\ T_3(s) & T_4(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edildiğine göre $T_1(s), T_2(s), T_3(s), T_4(s)$'i bulunuz.



Şekil 1: İki girişi ve iki çıkışı olan bir sistem

Çözüm:

Öncelikle $T_i(s)$ transfer fonksiyonlarını tanımlayalım.

$$T_1(s) = \left.\frac{Y_1(s)}{R_1(s)}\right|_{R_2(s)=0} \qquad T_2(s) = \left.\frac{Y_1(s)}{R_2(s)}\right|_{R_1(s)=0} \qquad T_3(s) = \left.\frac{Y_2(s)}{R_1(s)}\right|_{R_2(s)=0} \qquad T_4(s) = \left.\frac{Y_2(s)}{R_2(s)}\right|_{R_1(s)=0}$$

Bu transfer fonksiyonlarını bulmak için farklı yollar kullanılabilir. Bu yollardan iki tanesi uzunluğuna göre adlandırılarak aşağıda verilmiştir.

Kısa Yol:

Okumada kolaylık olması için "(s)" ifadesi transfer fonksiyonlarında gösterilmemiştir.

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= [(R_1 - G_1Y_1)G_2 + (R_2 + G_8Y_2)G_4]G_3 \\
Y_2 &= [(R_2 + G_8Y_2)G_6 - \frac{G_5}{G_3}Y_1]G_7
\end{aligned}
$$

Bu denklemleri açarsak

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= G_2G_3R_1 - G_1G_2G_3Y_1 + G_3G_4R_2 + G_3G_4G_8Y_2 \\
Y_2 &= G_6G_7R_2 + G_6G_7G_8Y_2 - \frac{G_5G_7}{G_3}Y_1
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Şimdi bu denklemleri matris formunda yazalım

$$
\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2G_3 & G_3G_4 \\ 0 & G_6G_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -G_1G_2G_3 & G_3G_4G_8 \\ -\frac{G_5G_7}{G_3} & G_6G_7G_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}
$$

ve düzenleyelim

$$
\begin{bmatrix} 1 + G_1G_2G_3 & -G_3G_4G_8 \\ \frac{G_5G_7}{G_3} & 1 - G_6G_7G_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2G_3 & G_3G_4 \\ 0 & G_6G_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}
$$

Sonuç olarak

$$
\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + G_1G_2G_3 & -G_3G_4G_8 \\ \frac{G_5G_7}{G_3} & 1 - G_6G_7G_8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_2G_3 & G_3G_4 \\ 0 & G_6G_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}
$$

bulunur.

Uzun Yol:

$T_1(s)$ ile başlayalım. Şekil 1'i, $T_1(s)$ için şekil 2 haline getirelim. Blok diyagramın en altında bulunan $G_6(s), G_7(s), G_8(s)$ bloklarından oluşan çevrimi düzenleyerek ve $G_4(s)$ bloğunun girişini $G_6(s)$ bloğunun çıkışına kaydırarak şekil 3 elde edilir. Bu şekilde kesikli çizgiyle gösterilen çevrimin transfer fonksiyonuna $A_1(s)$ diyelim. (Okumada kolaylık olması için "(s)" ifadesi transfer fonksiyonlarında gösterilmeyecektir.)

$$
A_1 = -\frac{G_6G_7G_8}{1 - G_6G_7G_8}
$$

Bu $A_1(s)$ bloğu kullanılarak şekil 4 elde edilir. Bu şekilde kesikli çizgiyle gösterilen çevrimin transfer fonksiyonuna da $A_2(s)$ diyelim.

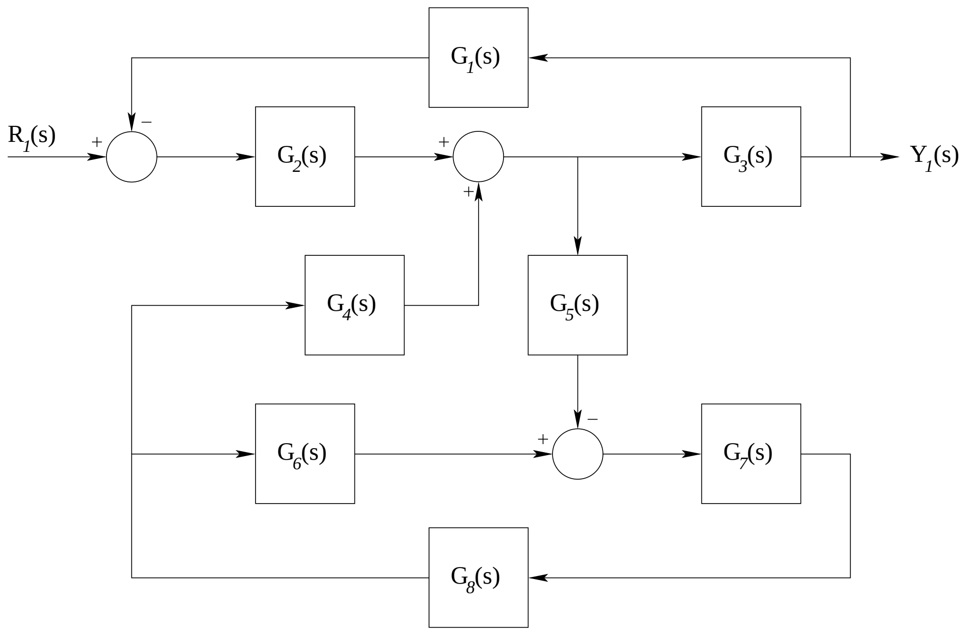
$$
A_2 = \frac{G_6}{G_6 - G_4G_5A_1}
$$

Şekil 4'den

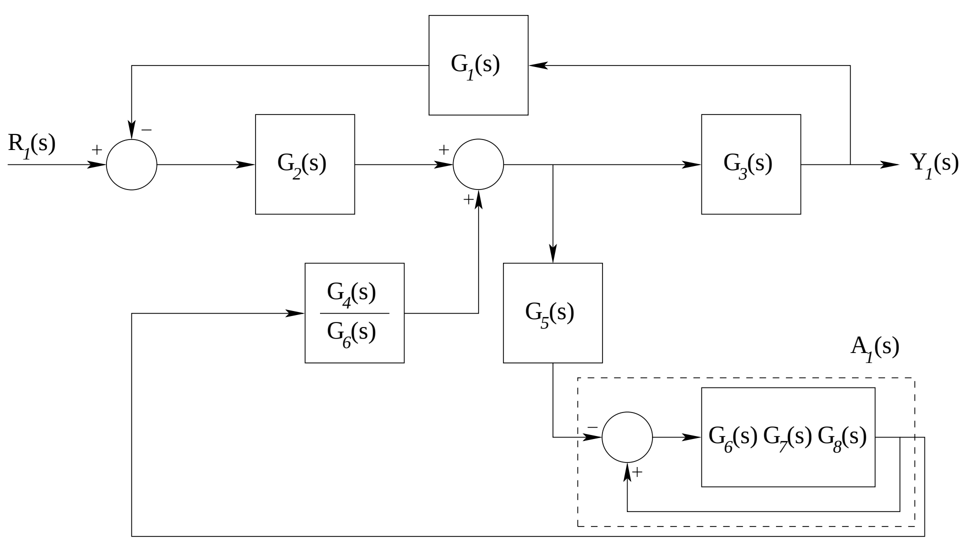
$$
T_1 = \frac{G_2G_3A_2}{1 + G_1G_2G_3A_2}
$$

elde edilir. $A_1(s)$ ve $A_2(s)$'in $G_i(s)$ cinsinden eşdeğerleri de yerine konursa

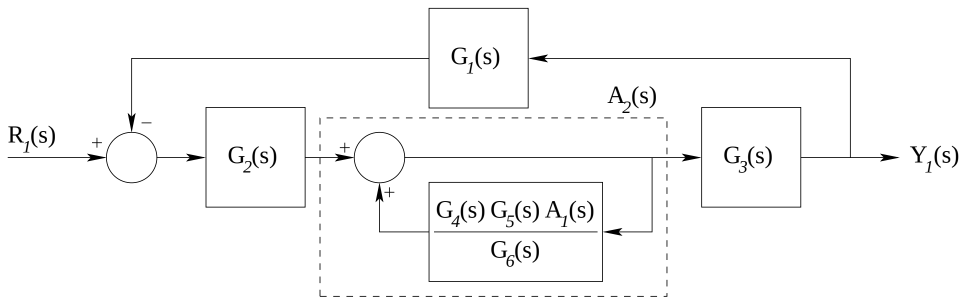
$$
T_1 = \frac{1 - G_6G_7G_8}{1 - (G_6 - G_4G_5)G_7G_8}
$$



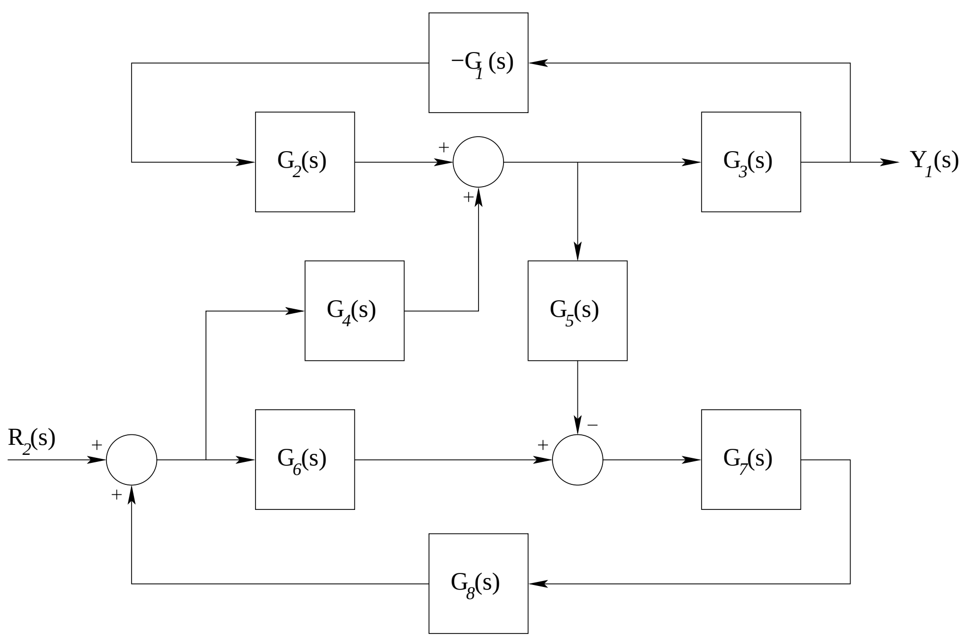
Şekil 2: $T_1(s) = \left.\frac{Y_1(s)}{R_1(s)}\right|_{R_2(s)=0}$ transfer fonksiyonu için blok diyagram



Şekil 3: $G_6(s), G_7(s), G_8(s)$ çevrimi düzenlendi ve $G_4(s)$ kaydırıldı



Şekil 4: $\frac{G_4(s)}{G_6(s)}, G_5(s), A_1(s)$ çevrimi düzenlendi

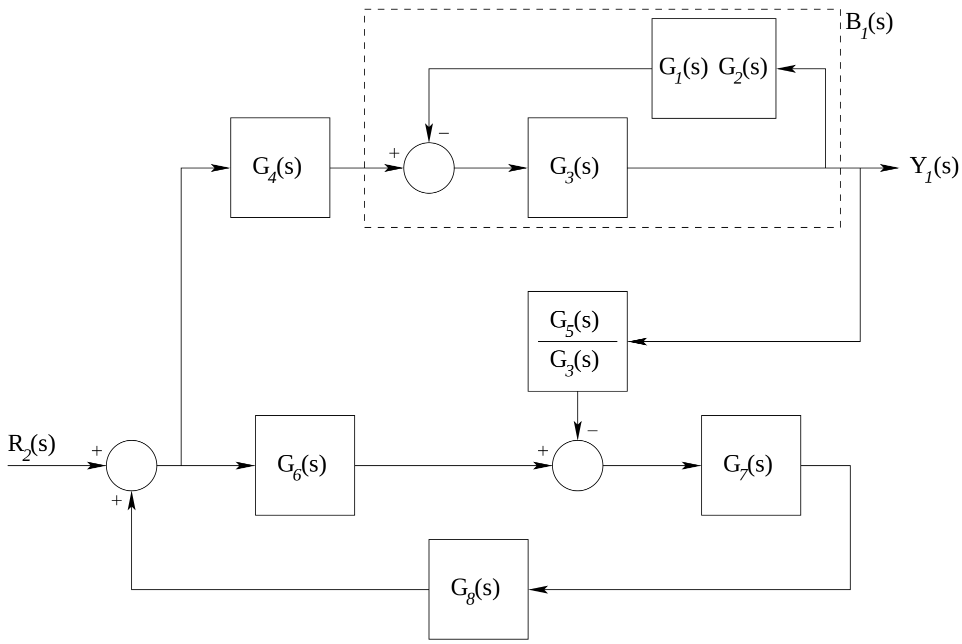


Şekil 5: $T_2(s) = \left.\frac{Y_1(s)}{R_2(s)}\right|_{R_1(s)=0}$ transfer fonksiyonu için blok diyagram

bulunur.

Şimdi $T_2(s)$'e bakalım. Şekil 1'i, $T_2(s)$ için şekil 5 haline getirelim. Blok diyagramın en üstünde bulunan $G_1(s), G_2(s), G_3(s)$ bloklarından oluşan çevrimi düzenleyerek ve $G_5(s)$ bloğunun girişini $Y_1(s)$'e kaydırarak şekil 6 elde edilir. Bu şekilde kesikli çizgiyle gösterilen çevrimin transfer fonksiyonuna $B_1(s)$ diyelim. (Okumada kolaylık olması için "(s)" ifadesi transfer fonksiyonlarında gösterilmeyecektir.)

$$B_1 = \frac{G_3}{1 + G_1 G_2 G_3}$$



Şekil 6: $G_1(s), G_2(s), G_3(s)$ çevrimi düzenlendi ve $G_5(s)$ kaydırıldı

Bu $B_1(s)$ bloğu kullanılarak şekil 7 elde edilir. Bu şekilde kesikli çizgiyle gösterilen çevrimin transfer fonksiyonuna da $B_2(s)$ diyelim.

$$B_2 = \frac{G_4 B_1}{1 - G_4 G_6 G_7 G_8 B_1}$$

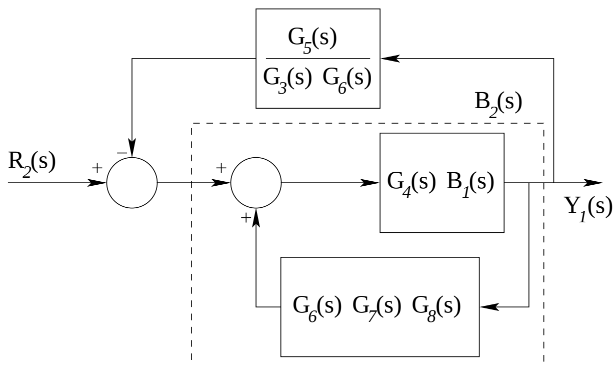
Şekil 7'den

$$T_2 = \frac{G_3 G_6 B_2}{G_3 G_6 + G_5 B_2}$$

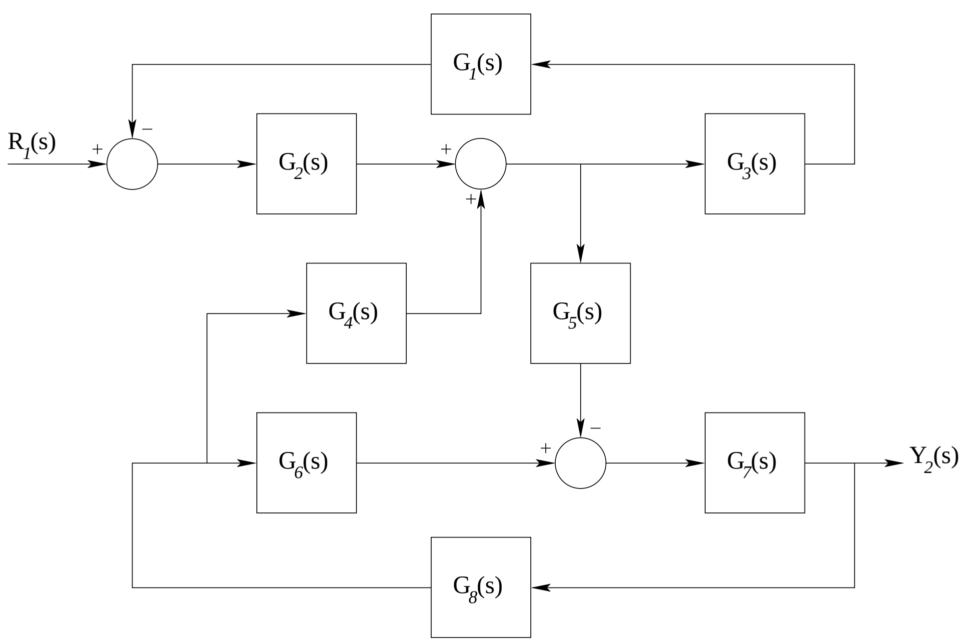
elde edilir. $B_1(s)$ ve $B_2(s)$'in $G_i(s)$ cinsinden eşdeğerleri de yerine konursa

$$T_2 = \frac{G_3 G_4 G_6}{(1 + G_1 G_2 G_3 - G_4 G_5 G_6 G_7 G_8) G_6 + G_4 G_5}$$

bulunur.



Şekil 7: Düzenlemeler yapıldı



Şekil 8: $T_3(s) = \left.\frac{Y_2(s)}{R_1(s)}\right|_{R_2(s)=0}$ transfer fonksiyonu için blok diyagram

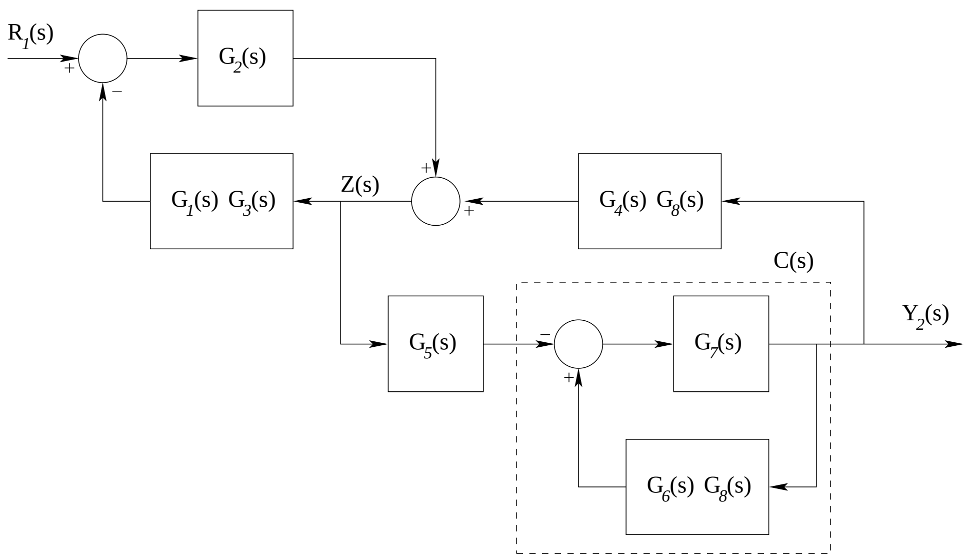
Şimdi $T_3(s)$'e bakalım. Şekil 1'i, $T_3(s)$ için şekil 8 haline getirelim. Blok diyagramın en üstünde bulunan $G_1(s), G_2(s), G_3(s)$ bloklarından oluşan çevrimle en altında bulunan $G_6(s), G_7(s), G_8(s)$ bloklarından oluşan çevrimi düzenleyerek ve $G_4(s)$ bloğunun girişini $Y_1(s)$'e kaydırarak şekil 9 elde edilir. Bu şekilde kesikli çizgiyle gösterilen çevrimin transfer fonksiyonuna $C(s)$ diyelim. (Okumada kolaylık olması için "(s)" ifadesi transfer fonksiyonlarında gösterilmeyecektir.)

$$C = -\frac{G_7}{1 - G_6G_7G_8}$$

transfer fonksiyonunu elde ederiz. Ayrıca, şekil 9'da gösterilen $Z(s)$ işaretini de kullanarak

$$(R - G_1G_3Z)G_2 + G_4G_8Y_2 = Z \tag{1}$$

denklemini yazarız.



Şekil 9: $Z(s)$ işareti tanımlandı

Bu $C(s)$ bloğu kullanılarak şekil 10 elde edilir. Bu şekilde verilen blok diyagramın transfer fonksiyonunu elde edelim.

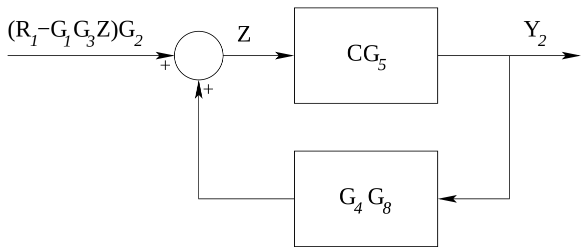
$$\frac{Y_2}{(R_1 - G_1G_3Z)G_2} = \frac{CG_5}{1 - CG_4G_5G_8} \tag{2}$$

(1) ve (2) numaralı denklemleri kullanarak

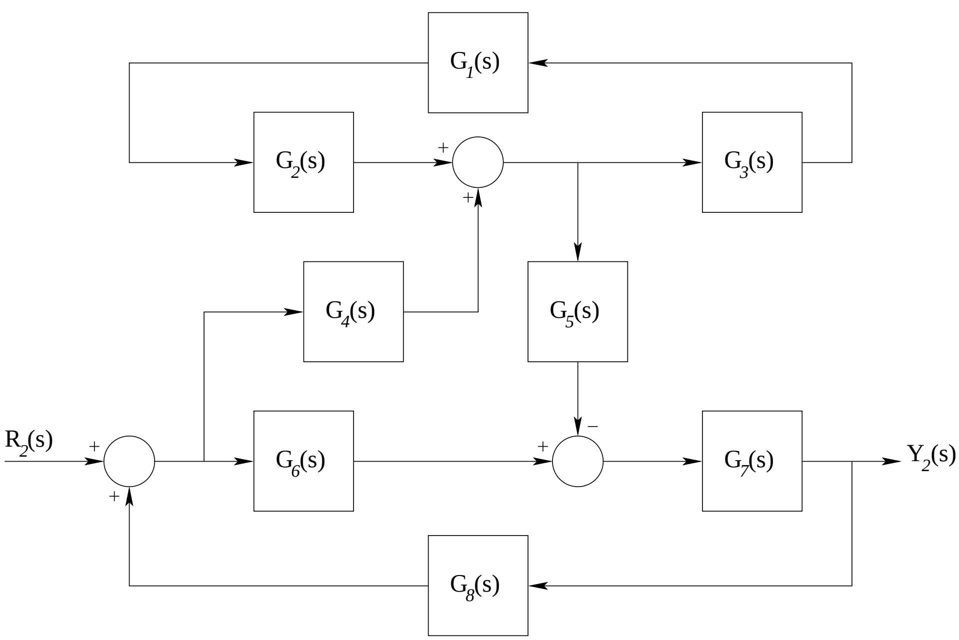
$$T_3 = -\frac{G_2G_5G_7}{(1 + G_1G_2G_3)(1 - G_6G_7G_8) + G_4G_5G_7G_8}$$

bulunur.

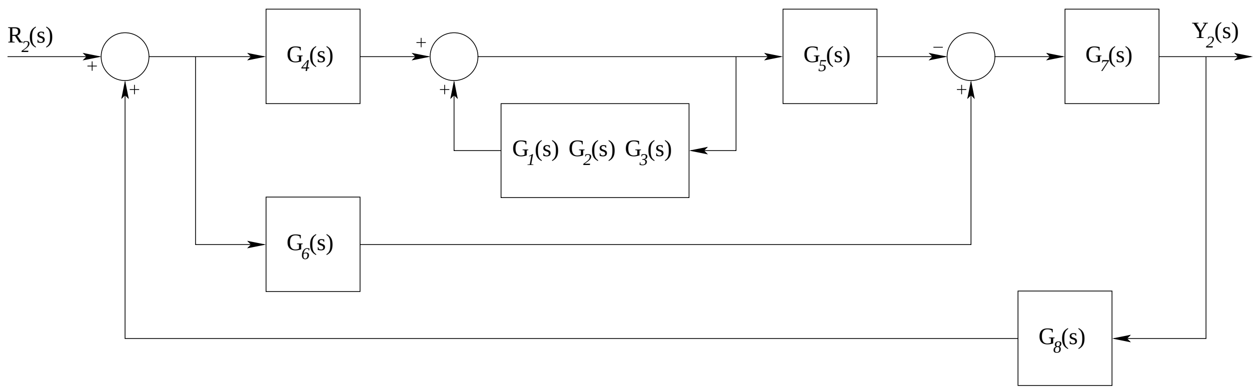
Son olarak $T_4(s)$'e bakalım. Şekil 1'i, $T_4(s)$ için önce şekil 11 haline daha sonra da bunu düzenleyerek şekil 12 haline getirelim. Şekil 12'de görülen en içteki çevrimi $D_1(s)$ ile, onun bir üstündeki ileri yol toplam bloğunu da $D_2(s)$ ile gösterelim. (Okumada kolaylık olması için "(s)" ifadesi transfer fonksiyonlarında gösterilmeyecektir.)



Şekil 10: $T_3(s) = \left.\frac{Y_2(s)}{R_1(s)}\right|_{R_2(s)=0}$ transfer fonksiyonu için blok diyagram



Şekil 11: $T_4(s) = \left.\frac{Y_2(s)}{R_2(s)}\right|_{R_1(s)=0}$ transfer fonksiyonu için blok diyagram



Şekil 12: $T_4(s) = \left.\frac{Y_2(s)}{R_2(s)}\right|_{R_1(s)=0}$ transfer fonksiyonu için blok diyagram

$$D_1 = \frac{1}{1 - G_1G_2G_3} \quad (3)$$

$$D_2 = G_6 - G_4G_5D_1 \quad (4)$$

Şekil 12'ye bakarak ve yukarıdaki tanımları kullanarak

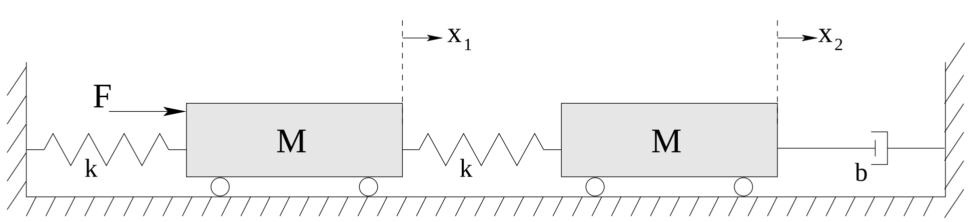
$$T_4 = \frac{D_2G_7}{1 - D_2G_7G_8}$$

elde edilir. (3) ve (4) numaralı denklemler de yerine konursa

$$T_4 = \frac{(G_6 - G_1G_2G_3G_7 - G_4G_5)G_7}{(1 - G_1G_2G_3)(1 - G_6G_7G_8) + G_4G_5G_7G_8}$$

bulunur.

Soru 2: Şekil 13'de verilen sistemde kütle ve yay sabiti değerlerinin eşit olduğu kabul edilmektedir. Sisteme F kuvveti uygulanmakta ve x_2 konumu gözlenmektedir. Sistemi durum uzayında modelleyiniz.



Şekil 13: İki yay, iki araba ve bir sönümlendiriciden oluşan sistem

Çözüm:

Herbir arabaya ilişkin kuvvetlerin denge denklemlerini yazalım:

$$\begin{aligned} (Ms^2 + 2k)x_1 &= F + kx_2 \qquad (5) \\ (Ms^2 + bs + k)x_2 &= kx_1 \qquad (6) \end{aligned}$$

Durum değişkenlerini tanımlayalım:

$$\begin{aligned} q_1(s) &= x_1(s) \\ q_2(s) &= sx_1(s) \\ q_3(s) &= x_2(s) \\ q_4(s) &= sx_2(s) \end{aligned}$$

Şimdi de (5) ve (6) numaralı denklemleri yukarıda tanımladığımız durum değişkenlerini kullanarak matris formunda ifade edelim.

$$s\begin{bmatrix} q_1(s) \\ q_2(s) \\ q_3(s) \\ q_4(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-2k}{M} & 0 & \frac{k}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{M} & 0 & \frac{-k}{M} & \frac{-b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(s) \\ q_2(s) \\ q_3(s) \\ q_4(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F(s)$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(s) \\ q_2(s) \\ q_3(s) \\ q_4(s) \end{bmatrix} + 0F(s)$$

Alternatif Çözüm:

(5) ve (6) numaralı denklemlerden $\frac{x_2(s)}{F(s)}$ transfer fonksiyonunu elde edelim.

$$\frac{x_2(s)}{F(s)} = \frac{k}{M^2s^4 + Mbs^3 + 3Mks^2 + 2kbs + k^2}$$

Durum değişkenlerini tanımlayalım:

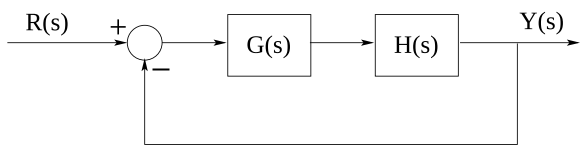
$$\begin{aligned} r_1(s) &= x_2(s) \\ r_2(s) &= sx_2(s) \\ r_3(s) &= s^2x_2(s) \\ r_4(s) &= s^3x_2(s) \end{aligned}$$

Şimdi de bulduğumuz transfer fonksiyonunu yukarıda tanımladığımız durum değişkenlerini kullanarak matris formunda ifade edelim.

$$s\begin{bmatrix} r_1(s) \\ r_2(s) \\ r_3(s) \\ r_4(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k^2}{M^2} & \frac{-2kb}{M^2} & \frac{-3k}{M} & \frac{-b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1(s) \\ r_2(s) \\ r_3(s) \\ r_4(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k}{M^2} \end{bmatrix} F(s)$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(s) \\ q_2(s) \\ q_3(s) \\ q_4(s) \end{bmatrix} + 0F(s)$$

Soru 3: Şekil 14'de blok diyagramı verilen sistemde $G(s) = 1$ olduğu bilinmekte ancak $H(s)$ bilinmemektedir. $H(s)$ yerine transfer fonksiyonu $\frac{45}{s(5s+18)}$ olan bir modül koyulduğunda $Y(s)$'de gözlemlenen birim basamak cevabı ile $H(s)$'li sistemin birim basamak cevabının aynı aşımı yaptığı, $H(s)$ yerine transfer fonksiyonu $\frac{10}{s(s+6)}$ olan bir modül koyulduğunda $Y(s)$'de gözlemlenen birim basamak cevabı ile $H(s)$'li sistemin birim basamak cevabının aynı zarf eğrisine (üstel azalım fonksiyonuna) sahip oldukları gözlenmiştir. $H(s)$'in ikinci dereceden bir sistem olduğu bilindiğine ve $G(s) = \frac{(s+1)K}{s^3-4s^2+2s-1}$ olarak değiştirildiğine göre, sistemi kararlı kılan K değer aralığını bulunuz.



Şekil 14: Üçüncü soru için verilen kapalı çevrim sistem

Çözüm:

Öncelikle $H(s)$'i bulmamız gerekiyor. $H(s)$ yerine $\frac{45}{s(5s+18)}$ konduğunda $Y(s)$'de gözlemlenen birim basamak cevabı ile $H(s)$'li sistemin birim basamak cevabının aynı aşımı yaptığını biliyoruz. Demek ki bu iki durumda için kapalı çevrime ilişkin sönüm oranları aynı. $G(s)$ yerine 1 ve $H(s)$ yerine $\frac{45}{s(5s+18)}$ koyarsak kapalı çevrim transfer fonksiyonunu $\frac{9}{s^2+\frac{18}{5}s+9}$ bulunur. Bu sistem için $\omega_n = 3$ ve $\xi = \frac{3}{5}$ olduğu görülür. Şimdi de $H(s)$ yerine $\frac{10}{s(s+6)}$ koyalım. Bu sefer kapalı çevrim transfer fonksiyonunu $\frac{10}{s^2+6s+10}$ bulunur. Bu sistemle $H(s)$'li sistemin aynı zarf eğrisine sahip olduklarına göre her iki sitemin kutuplarının gerçel kısımlarının aynı olması gerekir. $s^2 + 6s + 10 = 0$ 'dan $s = -3 \pm j$ elde edilir. Sonuç olarak $H(s)$'li kapalı çevrim sistemin kutuplarının gerçel kısımlarının -3 olduğunu ve sönüm oranının $\xi = \frac{3}{5}$ olduğu bulmuş olduk. Buradan da köklerin sanal kısımlarının $\pm 4j$ olduğunu buluruz. Dolayısıyla kapalı çevrim transfer fonksiyonu $\frac{25}{s^2+6s+25}$ çıkar. Demek ki

$$H(s) = \frac{25}{s(s+6)}$$

olduğunu görürüz. Bu noktada $G(s) = \frac{(s+1)K}{s^3-4s^2+2s-1}$ almamız söylendiğine göre

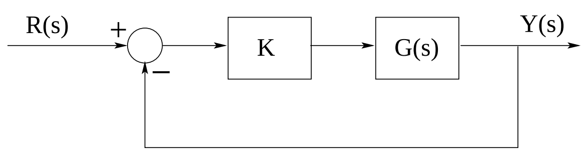
$$G(s)H(s) = \frac{25K(s+1)}{s(s^4+2s^3-22s^2+11s-6)}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla kapalı çevrim sistemin karakteristik polinomu $s^5+2s^4-22s^3+11s^2+(25K-6)s+25K$ olur. Buna ilişkin Routh tablosunu oluşturalım.

s^5	1	-22	25K-6
s^4	2	11	25K
s^3	$\frac{-55}{2}$	$\frac{25K}{2} - 6$	0
s^2	$\frac{10K}{11} + \frac{585}{55}$	$25K$	0
s^1	$\frac{625K^2+44775K-3486}{50K+581}$	0	0
s^0	$25K$	0	0

Her ne kadar Routh tablosu tam olarak verilmişse de, doğrusu s^3 satırında $\frac{-55}{2}$ terimine ulaştıktan sonra tabloya devam etmek anlamını yitirmiştir. K ne olursa olsun bu sistemin bütün köklerinin sol yarı düzlemde olması mümkün değildir. Bu yüzden sistem, K'dan bağımsız olarak kararsızdır.

Soru 4: Şekil 15'de blok diyagramı verilen sistemde $G(s) = \frac{s+2}{s^2(s+5)}$ olduğuna göre kapalı çevrim sistemin köklerinin yer eğrisini çizin.



Şekil 15: Dördüncü soru için verilen kapalı çevrim sistem

Çözüm: