Elektromagnetik Alanlara Giriş - EHB212 **Dersi veren:** *Prof. Dr. Ali Yapar*
Bahar 2020-2021 **Dersin yardımcısı:** *Araş. Gör. Furkan Şahin*
1. Ödev **Son Teslim Tarihi:** 23.03.2021

1. $\vec{A} = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - \vec{e}_z$, $\vec{B} = -3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + \vec{e}_z$, $\vec{C} = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z$ ve $\vec{D} = \vec{e}_x - 2\vec{e}_y - \vec{e}_z$ vektörleri verilsin.
   (a) $\vec{A}.\vec{B}$ işlemini hesaplayınız.
   (b) $\vec{A} \times \vec{B}$ işlemini hesaplayınız.
   (c) $\vec{A}$ vektörünün $\vec{B}$ yönündeki bileşenini bulunuz.
   (d) $\vec{B}$ vektörünün $\vec{A}$ yönündeki bileşenini bulunuz.
   (e) $\vec{C}$ vektörü $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir mi?
   (f) $\vec{D}$ vektörü $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir mi?
   (g) $\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$ eşitliğini gösteriniz.

2. Aşağıda verilen yüzeylerin normal vektörlerini bulunuz.
   (a) $z = 0$ (b) $x + y + z = 1$ (c) $x^2 + y^2 = 1$
   (d) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (e) $\rho = 1$ (f) $r = 1$

3. Aşağıdaki eğrilerin teğetlerini bulunuz.
   (a) $y = x,\ x > 0,\ z = 0$ (b) $y = x^2,\ x \in (-\infty, \infty),\ z = 0$
   (c) $x^2 + y^2 = 1,\ z = 1$ (d) $x{=}2\cos(t),\ y{=}2\sin(t),\ z{=}t,\ t{\in}[0, \infty)$

4. Aşağıda verilmiş olan $\vec{A}$ vektörleri ve C eğrileri $\int_C \vec{A}\, d\vec{\ell}$ için hesaplayınız.
   Not: Kapalı eğrilerde yön ayrıca belirtilmediği sürece saatin dönüş yönünün tersini (counter-clockwise) baz alınız. Diğer integrallerde integralin başlangıç ve bitiş noktalarını keyfi olarak seçebilirsiniz.
   (a) $\vec{A} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y,\ C : \{y = x, z = 0, x \in (0, 1)\}$
   (b) $\vec{A} = y\vec{e}_x - x\vec{e}_y,\ C : \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$
   (c) $\vec{A} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y,\ C : \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$
   (d) $\vec{A} = \dfrac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{x^2 + y^2},\ C : \{y = x, z = 0, x \in (0, \infty)\}$
   (e) $\vec{A} = \dfrac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{x^2 + y^2},\ C : \{y = 0, z = 0, x \in (0, \infty)\}$
   (f) $\vec{A} = \dfrac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{x^2 + y^2},\ C : \{x = 0, z = 0, y \in (0, \infty)\}$
   (g) $\vec{A} = \dfrac{-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y}{x^2 + y^2},\ C : \{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$

5. Aşağıda kartezyen, silindirik ve küresel koordinatlarda çeşitli vektörler verilmiştir. Verilen vektörleri ifade edildiği koordinat sisteminin dışındaki diğer iki koordinat sisteminde ifade ediniz. Örneğin kartezyen koordinat sisteminde verilmiş olan $x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ vektörünün silindirik koordinatlardaki ifadesi $\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$ ve küresel koordinatlardaki ifadesi $r\vec{e}_r$ şeklindedir.

(a) $\vec{A}(x,y,z) = \vec{e}_x$ (b) $\vec{A}(x,y,z) = \vec{e}_y$ (c) $\vec{A}(x,y,z) = \vec{e}_z$

(d) $\vec{A}(\rho,\phi,z) = \vec{e}_\rho$ (e) $\vec{A}(\rho,\phi,z) = \vec{e}_\phi$ (f) $\vec{A}(r,\theta,\phi) = \vec{e}_r$

(g) $\vec{A}(r,\theta,\phi) = \vec{e}_\theta$ (h) $\vec{A}(x,y,z) = y\vec{e}_x - x\vec{e}_y$ (i) $\vec{A}(x,y,z) = \dfrac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{x^2+y^2}$

(j) $\vec{A}(x,y,z) = \dfrac{-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y}{x^2+y^2}$ (k) $\vec{A}(\rho,\phi,z) = \dfrac{1}{\rho}\vec{e}_\rho$ (l) $\vec{A}(r,\theta,\phi) = \dfrac{1}{r^2}\vec{e}_\theta$

6. ∇ yardımıyla tanımlanmış olan çeşitli vektörel diferansiyel operatörlere ilişkin olarak aşağıdaki problemleri çözünüz.

(a) Aşağıdaki özdeşliklerin doğru olduğunu gösteriniz.

(i) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = 0$

(ii) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$

(iii) $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \nabla^2 f = \Delta f, \quad (\Delta$: Laplace Operatörü$)$

(iv) $\operatorname{grad}(fg) = g\operatorname{grad}(f) + f\operatorname{grad}(g)$

(v) $\operatorname{div}(f\vec{A}) = f\operatorname{div}\vec{A} + \operatorname{grad}(f).\vec{A}$

(vi) $\operatorname{rot}(f\vec{A}) = f\operatorname{rot}\vec{A} + \operatorname{grad}(f)\times\operatorname{rot}\vec{A}$

(vii) $\operatorname{div}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}.\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}.\operatorname{rot}\vec{B}$

(viii) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A}$

(b) Aşağıdaki fonksiyonların gradyanını $(\nabla f = \operatorname{grad} f)$ hesaplayınız.

(i) $f(x,y,z) = x + y + z$

(ii) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

(iii) $f(x,y,z) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(iv) $f(\rho,\phi,z) = \dfrac{\cos\phi}{\rho}$

(v) $f(r,\theta,\phi) = \dfrac{1}{r}$

(c) Aşağıdaki vektörel alanların diverjansını ($\nabla.\vec{A} = \mathrm{div}\,\vec{A}$) ve rotasyonelini ($\nabla \times \vec{A} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$) hesaplayınız.

(i) $\vec{A}(x,y,z) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

(ii) $\vec{A}(x,y,z) = x^2\vec{e}_x + y^2\vec{e}_y + z^2\vec{e}_z$

(iii) $\vec{A}(x,y,z) = \dfrac{\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(iv) $\vec{A}(x,y,z) = \dfrac{\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z}{x^2+y^2+z^2}$

(v) $\vec{A}(x,y,z) = \dfrac{-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y}{x^2+y^2}$

(vi) $\vec{A}(\rho,\phi,z) = \dfrac{1}{\rho}\vec{e}_\rho$

(vii) $\vec{A}(r,\theta,\phi) = \dfrac{1}{r^2}\vec{e}_\theta$

(viii) $\vec{A}(r,\theta,\phi) = \dfrac{1}{r}\vec{e}_\phi$

7. Aşağıdaki problemleri çözünüz.

(a) Aşağıda belirtilen vektörler için verilen hacimler (V) ve bu hacimleri kuşatan yüzeyleri dikkate alarak Gauss (Diverjans) Teoremini gerçekleyiniz.

(i) $\vec{A}(x,y,z) = y\vec{e}_x - x\vec{e}_y,\ V{:}\{(x,y,z)|x \in (0,1), y \in (0,1), z \in (0,1)\}$

(ii) $\vec{A}(x,y,z) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z,\ V{:}\{(x,y,z)|x \in (0,1), y \in (0,1), z \in (0,1)\}$

(iii) $\vec{A}(x,y,z) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z,\ V{:}\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 < 1\}$

(iv) $\vec{A}(x,y,z) = x^2\vec{e}_x + y^2\vec{e}_y + z^2\vec{e}_z,\ V{:}\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 < 1\}$

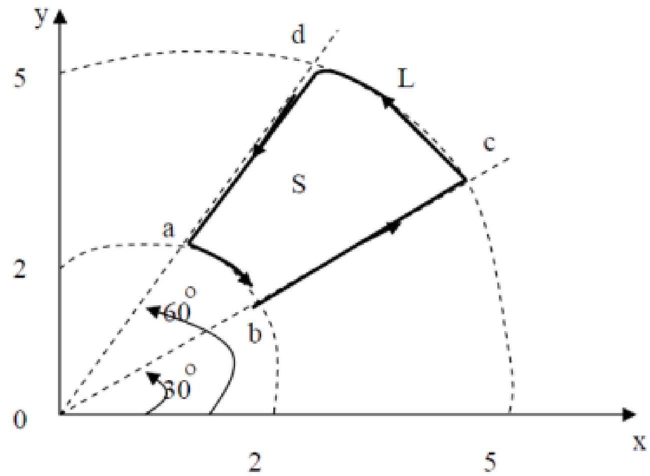
(v) $\vec{A}(\rho,\phi,z) = \dfrac{1}{\rho}\vec{e}_\rho,\ V{:}\{(\rho,\phi,z)|\rho \in (0,1), \phi \in (0,2\pi), z \in (-1,1)\}$

(vi) $\vec{A}(r,\theta,\phi) = \dfrac{1}{r^2}\vec{e}_r,\ V{:}\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 < 1\}$

(b) Aşağıda belirtilen vektörler için verilen yüzeyler S ve bu yüzeyleri kuşatan C eğrilerini dikkate alarak Stokes Teoremini gerçekleyiniz.

(i) $\vec{A}(x,y,z) = y\vec{e}_x - x\vec{e}_y,\ S{:}\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0\}$

(ii) $\vec{A}(\rho,\phi,z) = \rho\cos(\phi)\vec{e}_\rho + \rho\sin(\phi)\vec{e}_\phi$ olmak üzere Stokes Teoremini aşağıda verilen şekle göre doğrulayınız.


y
d
5
L
c
S
a
2
60°
b
30°
0
x
2
5