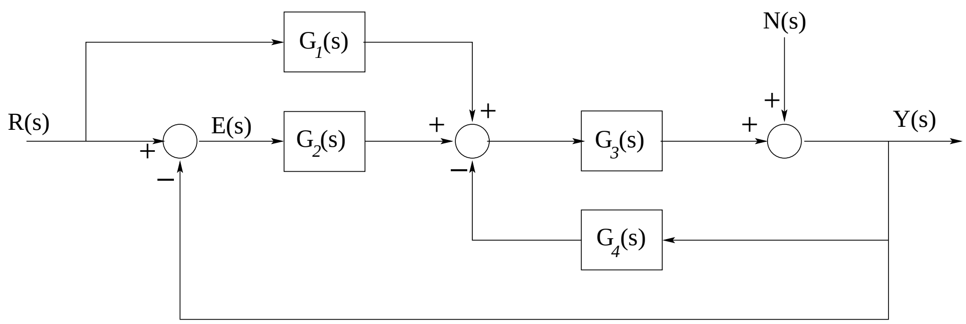
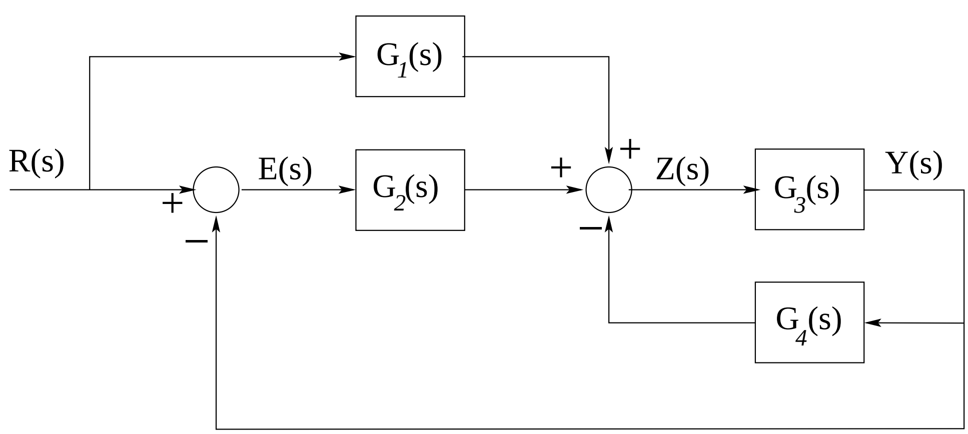
KON317 – Otomatik Kontrol Sistemleri 24 Haziran 2008
Dr. Murat Yeşiloğlu

Kısa Sınav 1 **C**



Soru : Şekilde blok diyagramı verilen sistemde $G_1(s) = \frac{1}{s+3}$, $G_2(s) = \frac{1}{s+4}$, $G_3(s) = \frac{1}{s+1}$ ve $G_4(s) = \frac{1}{s+2}$ olarak verildiğine göre, $\frac{E(s)}{R(s)}$ transfer fonksiyonuna ilişkin durum denklemlerini (A, B, C, D matrislerini) elde ediniz.

Çözüm :$N(s) = 0$ için verilen sistemin blok diyagramı aşağıdaki şekilde düzenlenebilir:



Soruda istenen transfer fonksiyonunu elde etmek için yukarıdaki blok diyagramında gösterilen bir Z işareti tanımlayalım. Bu diyagrama bakarak aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$E = R - Y \quad (1)$$
$$Z = RG_1 + EG_2 - YG_4 \quad (2)$$
$$Y = ZG_3 \quad (3)$$

(3) numaralı denklemi (2) numaralı denklem içinde kullanır ve buradan Z çözülürse

$$Z = \frac{RG_1 + EG_2}{1 + G_3G_4} \tag{4}$$

elde edilir. (1) ve (3) kullanılırsa $E = R - ZG_3$ olur. (4) burada yerine konur ve gerekli düzenlemeler yapıldığında soruda istenen transfer fonksiyonununa ulaşırız.

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 + G_3(G_4 - G_1)}{1 + G_3(G_2 + G_4)}$$

G_1, G_2, G_3, G_4 için soruda verilen değerler yerine konduğunda

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{6s^2 + 11s + 14}{s^4 + 10s^3 + 41s^2 + 62s + 42} \tag{5}$$

bulunur. Sistem 4. derecedendir ve dolayısıyla 4 tane durum değişkeni kullanılarak durum uzayında ifade edilebilir. Bu (5) denkleminin sağ tarafındaki 1 değeri durum uzayındaki D'ye karşı gelmektedir. (eşitliğin her iki tarafı $R(s)$ ile çarpılırsa bu terimin neden D'ye karşı düştüğü görülür.) Dolayısıyla

$$D = 1$$

Durum uzayındaki diğer terimler olan A, B ve C matrislerini bulmak üzere kalan transfer fonksiyonunu ele alalım. $\bar{E}(s) = E(s) - R(s)$ olmak üzere

$$\frac{\bar{E}(s)}{R(s)} = -\frac{6s^2 + 11s + 14}{s^4 + 10s^3 + 41s^2 + 62s + 42}$$

Transfer fonksiyonunu $\frac{u(s)}{u(s)}$ ile çarpalım.

$$\frac{\bar{E}(s)}{R(s)} = \frac{-6s^2 - 11s - 14}{s^4 + 10s^3 + 41s^2 + 62s + 42}\frac{u(s)}{u(s)}$$

Bu $u(s)$ öyle bir fonksiyon olsun ki

$$\begin{aligned} \bar{E}(s) &= -(6s^2 + 11s + 14)u(s) && (6) \\ R(s) &= (s^4 + 10s^3 + 41s^2 + 62s + 42)u(s) && (7) \end{aligned}$$

olsun. Şimdi şu tanımları yapalım:

$$\begin{aligned} x_1(s) &\triangleq u(s) \\ x_2(s) &\triangleq su(s) \\ x_3(s) &\triangleq s^2u(s) \\ x_4(s) &\triangleq s^3u(s) \end{aligned}$$

Bu tanımları kullanarak (6) ve (7) denklemleri şu hale gelir:

$$\begin{aligned} \bar{E}(s) &= -6x_3(s) - 11x_2(s) - 14x_1(s) && (8) \\ R(s) &= sx_4(s) + 10x_4(s) + 41x_3(s) + 62x_2(s) + 42x_1(s) && (9) \end{aligned}$$

(9) denklemini sx_4 için düzenleyelim

$$sx_4(s) = R(s) - 10x_4(s) - 41x_3(s) - 62x_2(s) - 42x_1(s) \tag{10}$$

Böylelikle bütün durum denklemlerimizi elde etmiş olduk. Şimdi bunları alt alta yazalım.

$$\begin{aligned}
sx_1(s) &= x_2(s) \\
sx_2(s) &= x_3(s) \\
sx_3(s) &= x_4(s) \\
sx_4(s) &= R(s) - 10x_4(s) - 41x_3(s) - 62x_2(s) - 42x_1(s) \\
E(s) &= R(s) - 6x_3(s) - 11x_2(s) - 14x_1(s)
\end{aligned}$$

Bunları matris formunda ifade edersek

$$s\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \\ x_3(s) \\ x_4(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -42 & -62 & -41 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \\ x_3(s) \\ x_4(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} R(s)$$

$$E(s) = \begin{bmatrix} -14 & -11 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \\ x_3(s) \\ x_4(s) \end{bmatrix} + 1R(s)$$