İşaretler ve Sistemler

İşaret nedir?

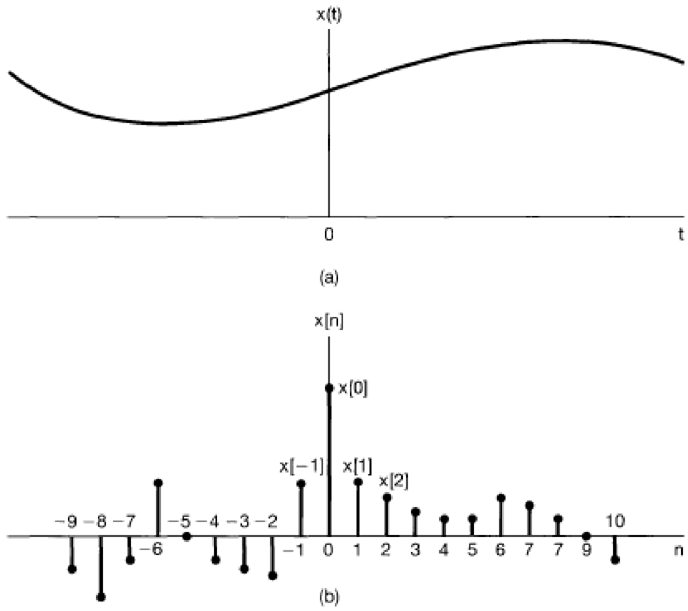
Fiziksel bir büyüklüğü(ısı, akustik basınç, görüntünün parlaklık seviyesi, devrede akan akım vb.) temsil eden u=x(t) şeklindeki fonksiyon

t: bağımsız, u: bağımlı değişken

İşaret İşleme nedir?

İşaretlerin temsil ettikleri fiziksel büyüklüğe ait bilgilerin kısmen veya tamamen çıkartılması için gerçekleştirilen işlemler

Sürekli zamanlı-ayrık zamanlı işaretler



Enerji işaretleri-Güç işaretleri

$t_1 \leq t \leq t_2$

Aralığında işaretin enerjisi

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt,$$

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2,$$

Tüm zaman aralığında bakılması durumunda

$$E_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt,$$

$$E_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2.$$

Sonlu enerjili işaretler

$E_\infty < \infty$

Enerji işareti olarak adlandırılır. Bu işaretler için güç

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{E_\infty}{2T} = 0.$$

İşaretin gücü

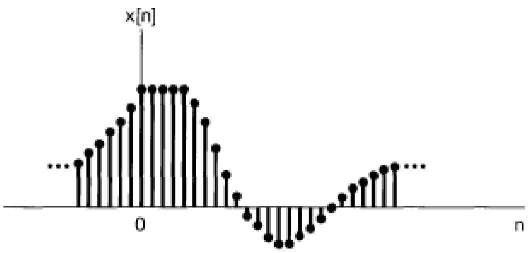
$$P_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt$$

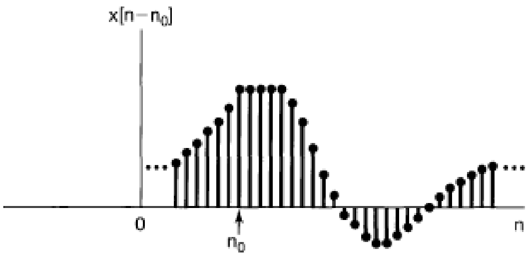
$$P_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2$$

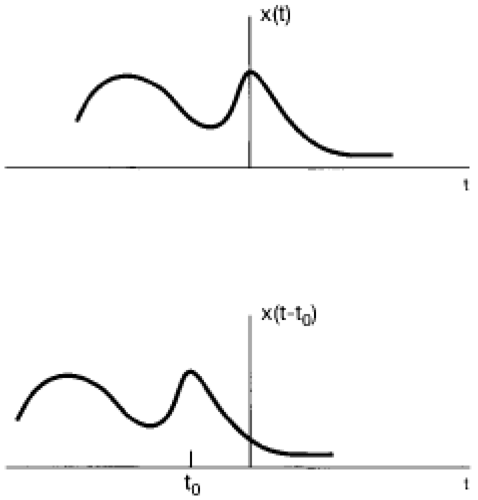
Sonlu güçlü işaretler güç işareti olarak adlandırılır. Bu işaretlerin enerjileri sonsuzdur.

Bağımsız Değişken üzerine işlemler

Zamanda öteleme

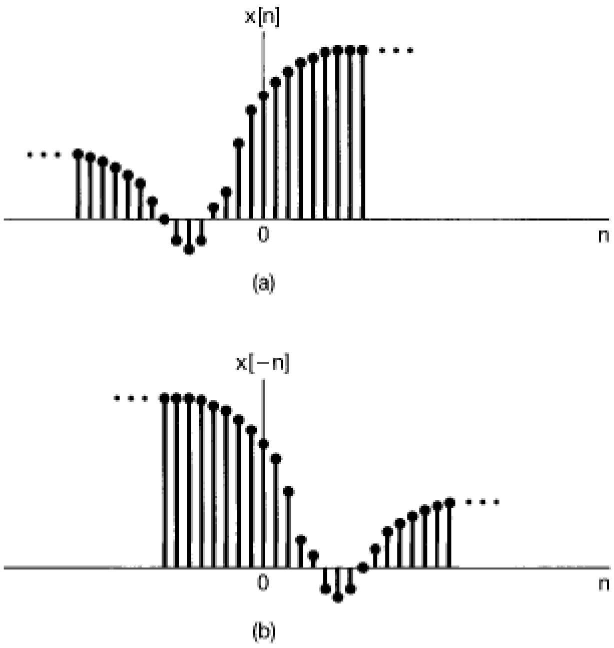


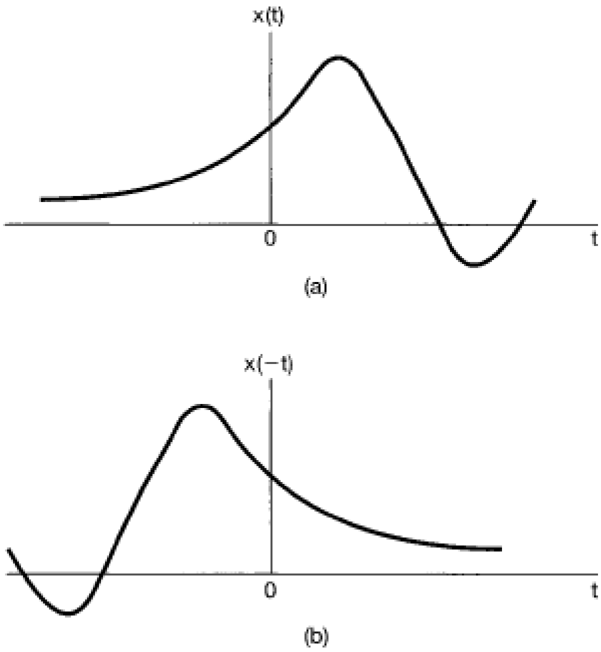




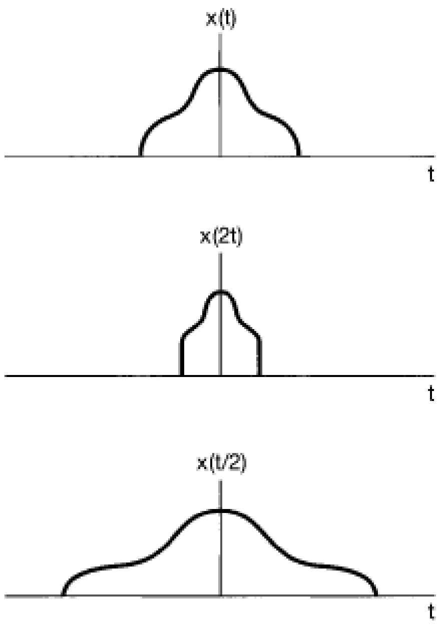
$t_0 < 0$,

Zamanda katlama



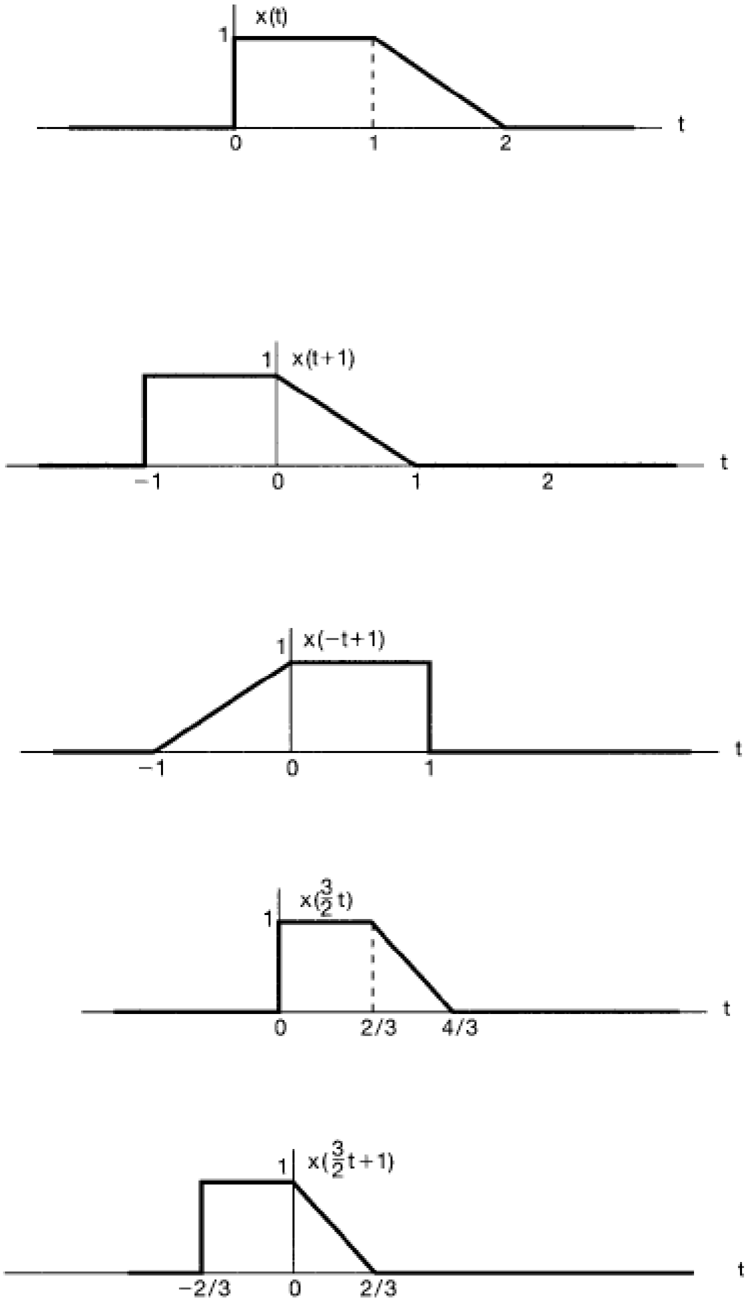


Zamanda ölçekleme



Kaynak:A.W. Oppenheim, “Signals and Systems”

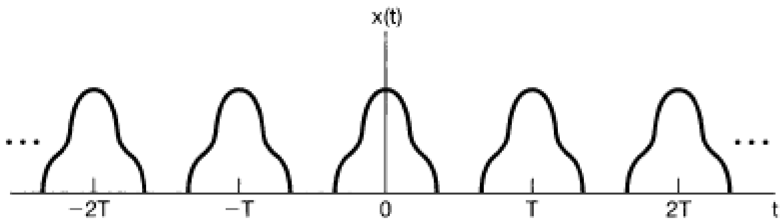
Örnek:



Periyodik İşaretler

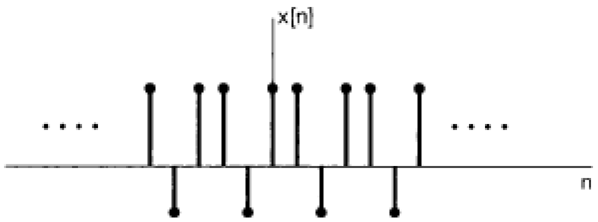
$$x(t) = x(t + T)$$

Şartını sağlayan en küçük T işaretin temel periyodu T_o



$$x[n] = x[n + N]$$

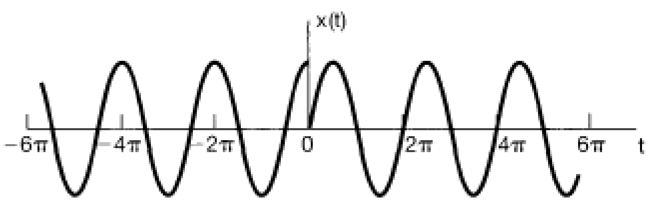
Şartını sağlayan en küçük N, temel periyod N_o



N_o=3

Örnek:

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{if } t < 0 \\ \sin(t) & \text{if } t \geq 0 \end{cases}.$$



İşaret periyodik değildir.

Tek ve çift simetrik İşaretler

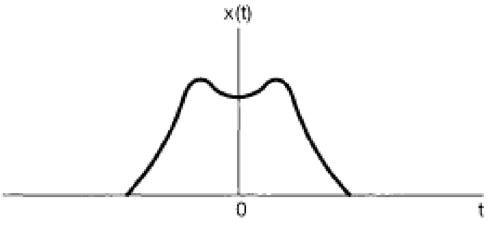
Çift simetrik işaret

$$x(-t) = x(t),$$

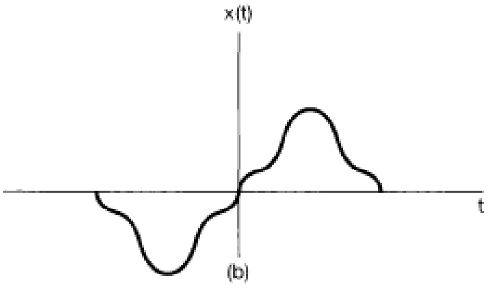
$$x[-n] = x[n].$$

Tek simetrik işaret

$$x(-t) = -x(t),$$
$$x[-n] = -x[n].$$



(a)

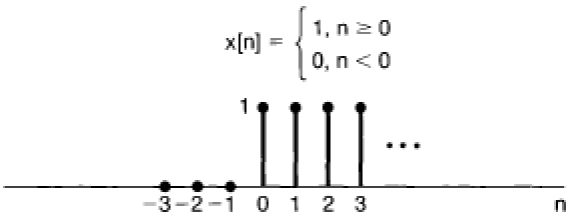


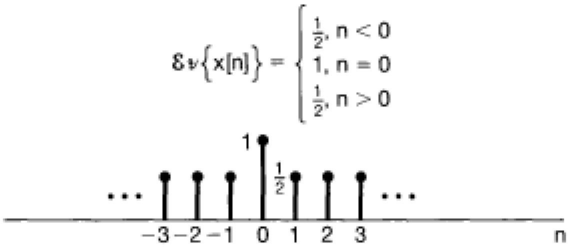
(b)

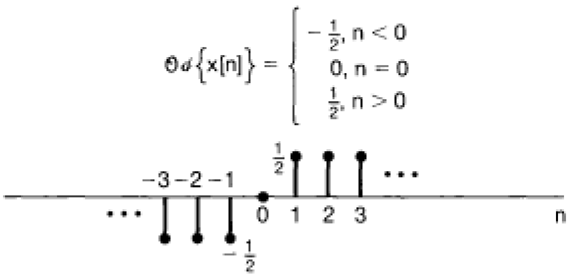
Ayrık-zamanlı işaretin tek ve çift simetrik bileşenlerine ayrılması

$$\mathcal{E}v\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)],$$

$$\mathcal{O}d\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)].$$





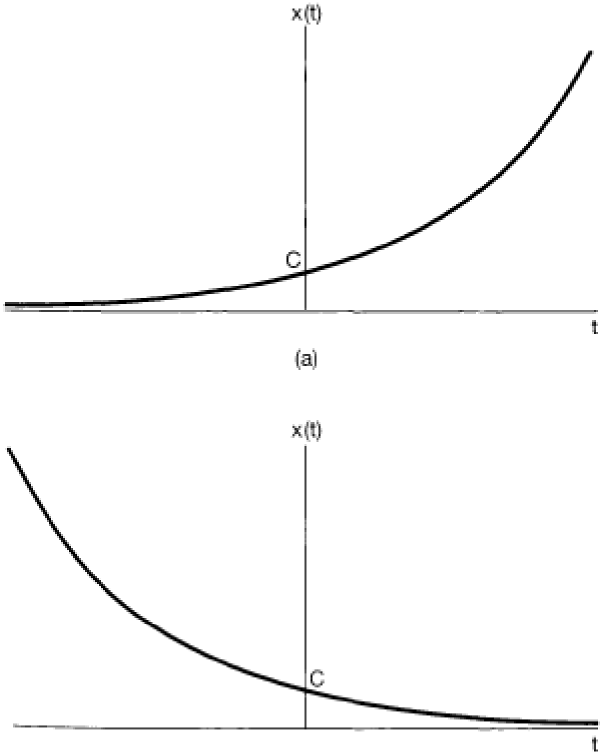


Üstel İşaretler-Sinüzoidal İşaretler

Kompleks üstel işaret

$$x(t) = Ce^{at},$$

C reel değerli ise ⇨ Reel üstel işaret

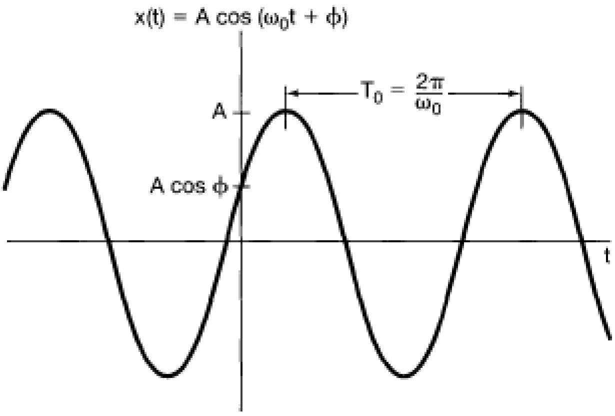


$x(t) = Ce^{at}$: (a) $a > 0$;

(b) $a < 0$.

Sinüzoidal işaret

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi),$$



Periyodik kompleks üstel işaret

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0(t+T)}.$$

$$e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t}e^{j\omega_0 T}$$

İşaretin periyodik olması için

$$e^{j\omega_0 T} = 1.$$

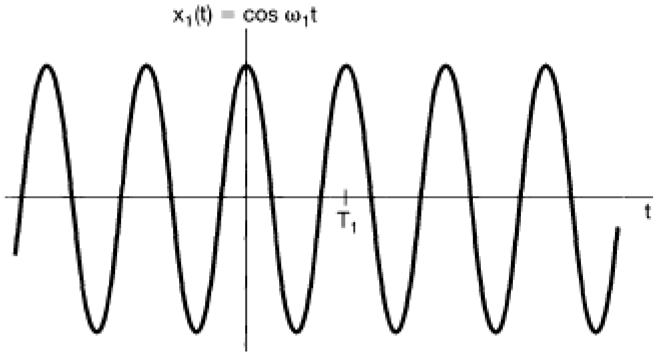
$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}.$$

$$e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t.$$

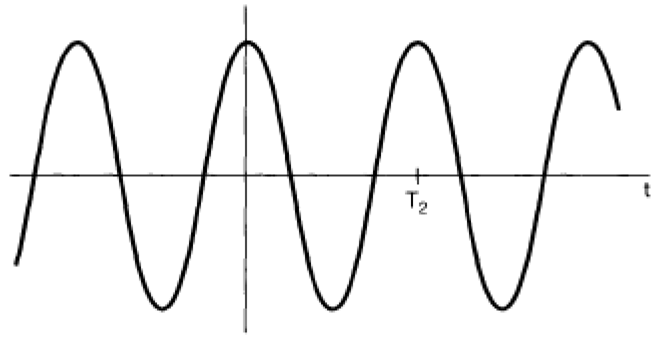
$$A\cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 t}.$$

$$A\cos(\omega_0 t + \phi) = A\,\mathcal{R}e\{e^{j(\omega_0 t+\phi)}\},$$

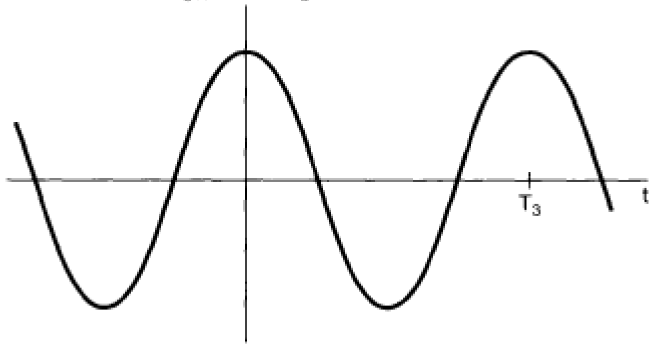
$$A\sin(\omega_0 t + \phi) = A\,\mathcal{I}m\{e^{j(\omega_0 t+\phi)}\}.$$



(a)



(b)



(c)

Temel frekans ile periyod arasındaki ilişki

$\omega_1 > \omega_2 > \omega_3,$
$T_1 < T_2 < T_3.$

Kompleks üstel işaret

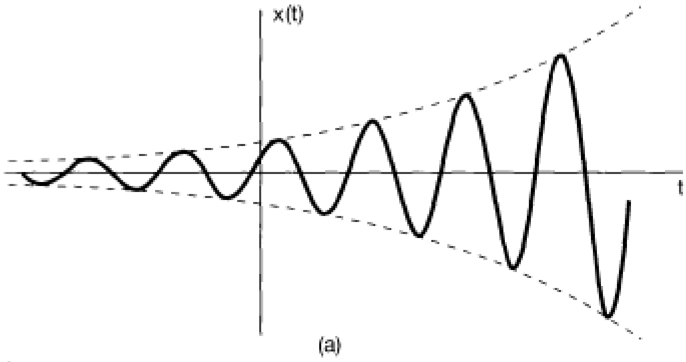
$$C = |C|e^{j\theta}$$

$$a = r + j\omega_0.$$

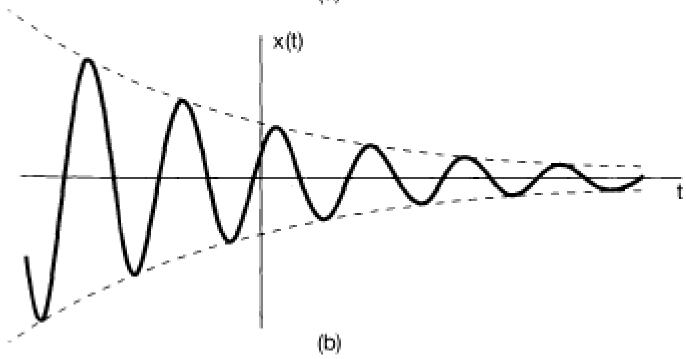
$$Ce^{at} = |C|e^{j\theta}e^{(r+j\omega_0)t} = |C|e^{rt}e^{j(\omega_0 t+\theta)}.$$

Euler bağıntısından yararlanarak,

$$Ce^{at} = |C|e^{rt}\cos(\omega_0 t + \theta) + j|C|e^{rt}\sin(\omega_0 t + \theta).$$



(a)



(b)

a) Artan
b) Azalan

Ayrık-zaman için

$$x[n] = C\alpha^n$$

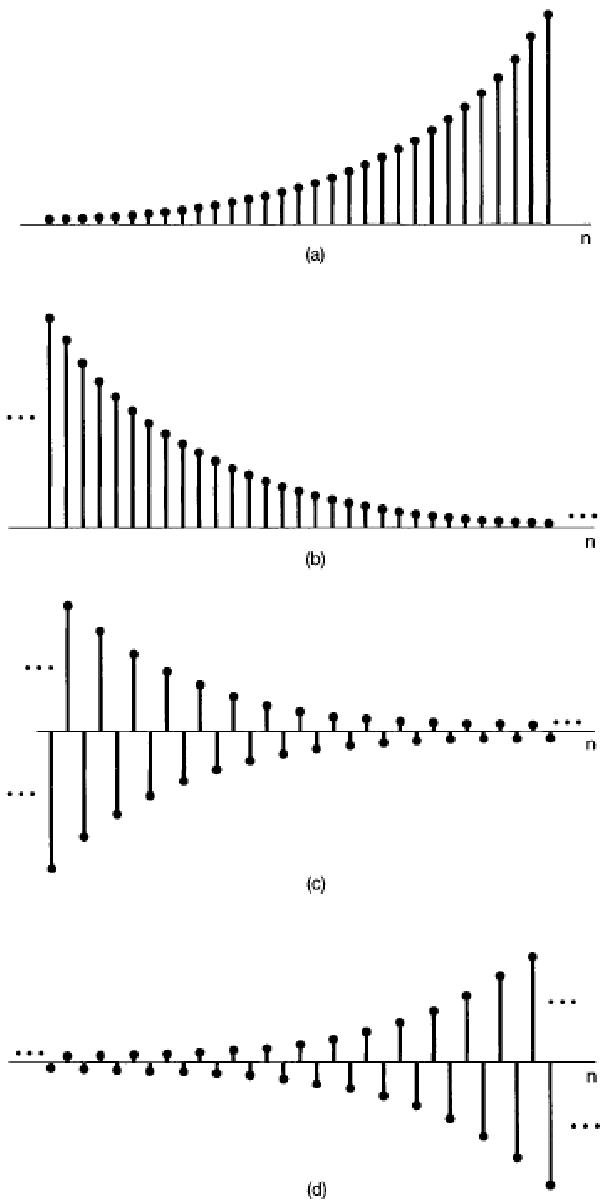
$$x[n] = e^{j\omega_0 n}$$

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi).$$

$$e^{j\omega_0 n} = \cos\omega_0 n + j\sin\omega_0 n$$

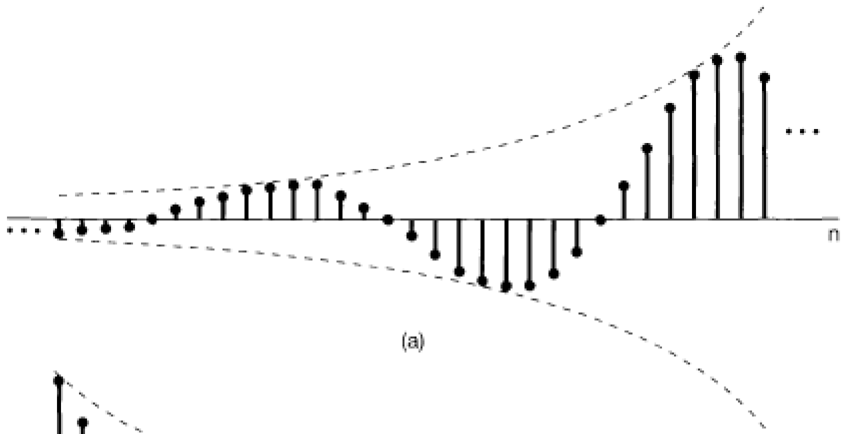
$$A\cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}$$

Reel üstel işaret için

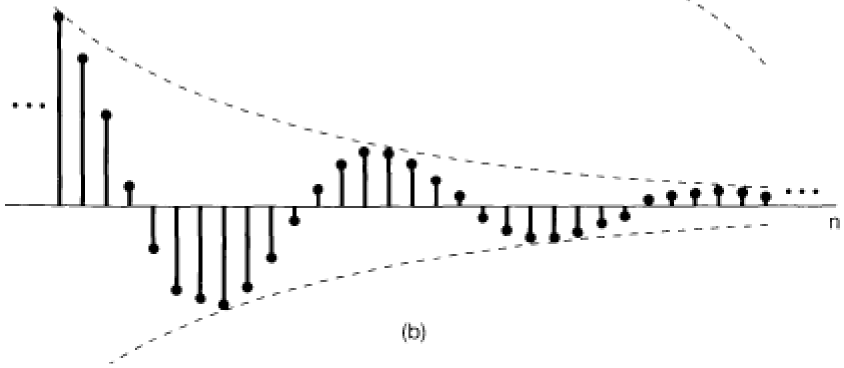


(a) $\alpha > 1$; (b) $0 < \alpha < 1$;
(c) $-1 < \alpha < 0$; (d) $\alpha < -1$

Kompleks üstel işaret



(a)



(b)

$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j2\pi n}e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n}$$

$$e^{j\pi n} = (e^{j\pi})^n = (-1)^n,$$

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n},$$

$$e^{j\omega_0 N} = 1.$$

$$\omega_0 N = 2\pi m,$$

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}.$$

$$N = m\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right).$$

$$x[n] = \cos(2\pi n/12),$$

$$x(t) = \cos(2\pi t/12)$$

için temel periyod 12

$$x[n] = \cos(8\pi n/31)$$

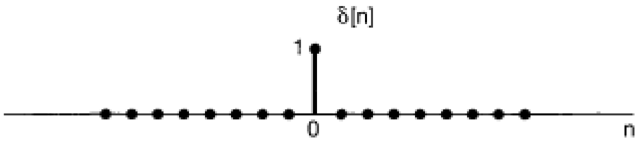
$$x(t) = \cos(8\pi t/31)$$

x(t) için temel periyod 31/4, x[n] için temel periyod 31

Ayrık-zamanlı birim impuls - birim basamak işaretleri

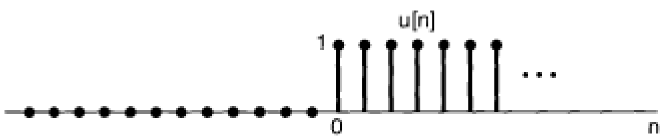
Birim impuls

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$



Birim basamak

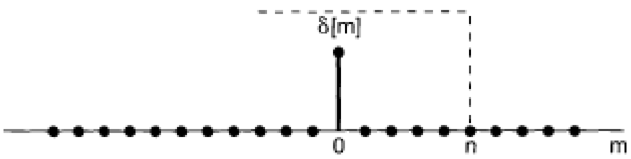
$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}.$$



Birim impuls ve birim basamak işaretleri arasındaki ilişki

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1].$$

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m].$$



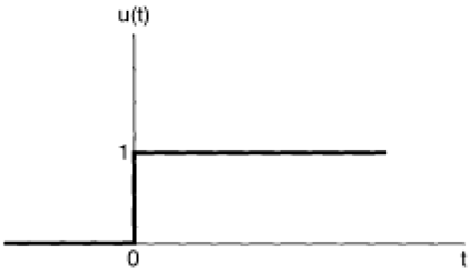
$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n].$$

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0].$$

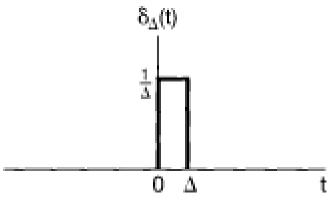
Sürekli zamanlı birim impuls-birim basamak işaretleri

Birim basamak işareti

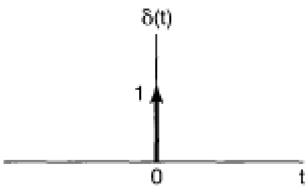
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases},$$



Birim impuls işareti



$$\delta(t) = \lim_{\Delta\to 0} \delta_\Delta(t),$$



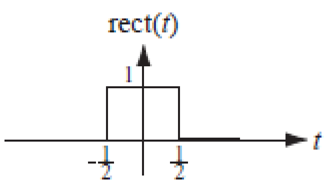
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau.$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t).$$

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0).$$

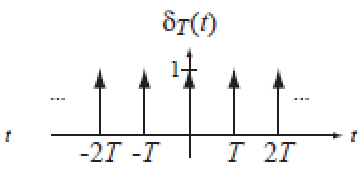
Dikdörtgen darbe



$$\boxed{\mathrm{rect}(t) = \begin{Bmatrix} 1, & |t| < 1/2 \\ 1/2, & |t| = 1/2 \\ 0, & |t| > 1/2 \end{Bmatrix} = \mathrm{u}(t + 1/2) - \mathrm{u}(t - 1/2)}$$

Periyodik impuls

$$\boxed{\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)}$$

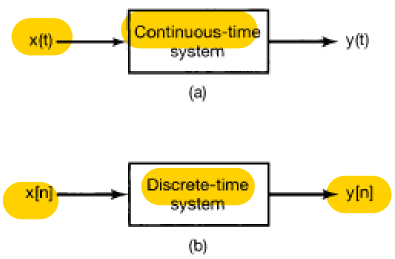


Sistemler

$$x(t) \xrightarrow{T} y(t).$$

$$y(t) = T\,[x(t)]$$

$$x[n] \rightarrow y[n].$$



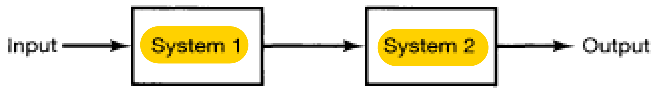
Örnek:

Sistemin giriş-çıkış ilişkisi

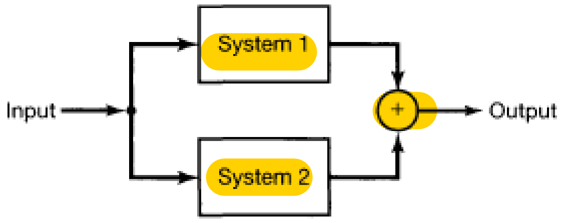
$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t),$$

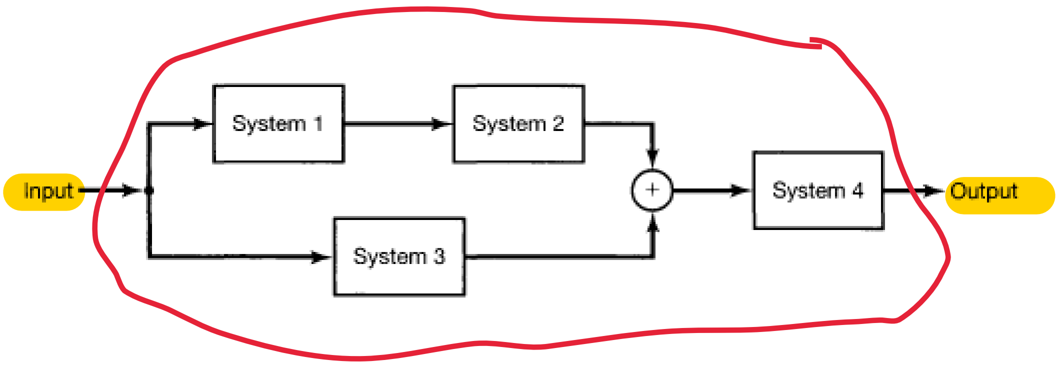
$$y[n] = 1.01y[n-1] + x[n],$$

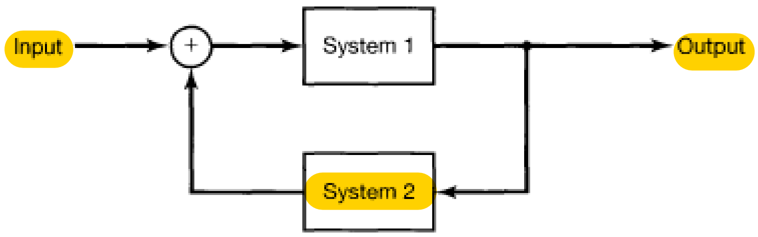
Seri bağlı sistemler



Paralel bağlı sistemler







Sistemlerin özellikleri

Bellek

Sistem çıkışı sadece o anki giriş değerlerini gerektiriyor ise sistem belleksiz, aksi durumda belleklidir.

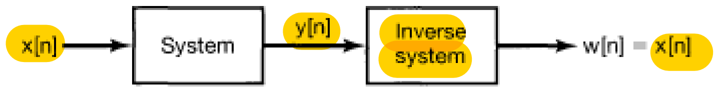
$y(t) = Rx(t),$ belleksiz

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k],$$ bellekli

$y[n] = x[n-1].$ 〃

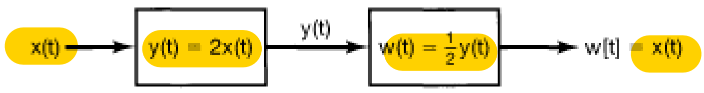
$y[n] = (2x[n] - x^2[n])^2$ belleksiz sistem

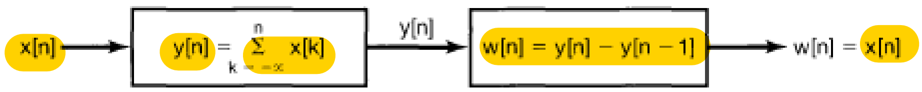
Tersinirlik



İlişkisini sağlayan bir sistem tanımlanabilir ise istem tersinir (tersi alınabilir) sistemdir.

Örnek:





Nedensellik

N anındaki sistem çıkışı $n > n_0$ anındaki giriş bilgisini (girişin gelecek değerlerini)gerektirmiyor ise sistem nedenseldir.

$y[n] = x[n] - x[n+1]$ sistem nedensel değil

$y(t) = x(t+1)$ 〃 〃

Örnek:

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{+M} x[n-k].$$ 〃 〃

Ortalama alan sistem nedensel değildir.

Örnek:

$$y[n] = x[-n].$$

Sistem nedensel değildir.

Örnek:

$$y(t) = x(t)\cos(t+1).$$

Sistem nedenseldir (sistem belleksizdir)

Kararlılık (Sınırlı giriş-sınırlı çıkış anlamında)

Sınırlı bir giriş işareti

$$|x(n)| \leq A < \infty,$$

için sınırlı çıkış işareti

$$|y(n)| \leq B < \infty$$

veren sistem kararlıdır.

Örnek:

$$y[n] = x[n] + x[n+1]$$

$$|y[n]| \leq B < \infty$$

kararlı sistem

Örnek:

$$y[n] = nx[n].$$

$$|y[n]| = |nx[n]| \leq |n|\underbrace{|x[n]|}_{\leq A < \infty} \overset{?}{\leq} \infty$$

$$-\infty < n < \infty$$

kararsız sistem

Zamanla değişmezlik

Ötelenmiş bir giriş işareti

$$T[x(n-n_0)]$$

için sistemin çıkışı da öteleniyor ise

$$y(n-n_0)$$

$$y[n-n_0] = T[x[n-n_0]]$$

sistem zamanla değişmeyen sistemdir, aksi durumda sistem zamanla değişen sistemdir.

Örnek:

$$y(t) = \sin[x(t)].$$

$$y_1(t) = \sin[x_1(t)]$$

$$x_2(t) = x_1(t - t_0).$$

$$y_2(t) = \sin[x_2(t)] = \sin[x_1(t - t_0)].$$

$$y_1(t - t_0) = \sin[x_1(t - t_0)].$$

olduğundan sistem zamanla değişmezdir.

Örnek:

$$y[n] = nx[n].$$

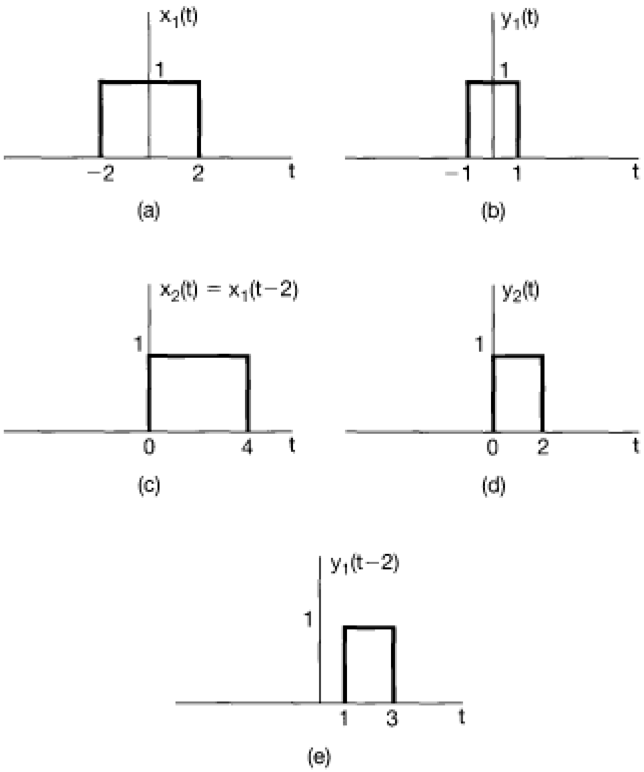
$$y[n-n_0] \overset{?}{=} T[x[n-n_0]]$$

$$(n-n_0)\,x[n-n_0] \overset{?}{\neq} \underbrace{n\,x[n-n_0]}$$

zamanla değişen sistem

Örnek:

$$y(t) = x(2t).$$



olduğundan sistem zamanla değişir. (zamanla değişen sistem)

Lineerlik(doğrusallık)

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t).$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow ay_1[n] + by_2[n]$$

şeklinde süperpozisyon ilkesini(toplamsallık ve çarpımsallık) sağlayan sistem doğrusal(lineer) sistemdir.

Örnek:

$$y(t) = tx(t)$$

$$a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) \stackrel{?}{=} T[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)]$$

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = tx_1(t)$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = tx_2(t)$$

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

$$\begin{aligned} y_3(t) &= tx_3(t) \\ &= t(ax_1(t) + bx_2(t)) \\ &= atx_1(t) + btx_2(t) \\ &= ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

sistem doğrusaldır.

Örnek:

$$y(t) = x^2(t)$$

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t)$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2^2(t)$$

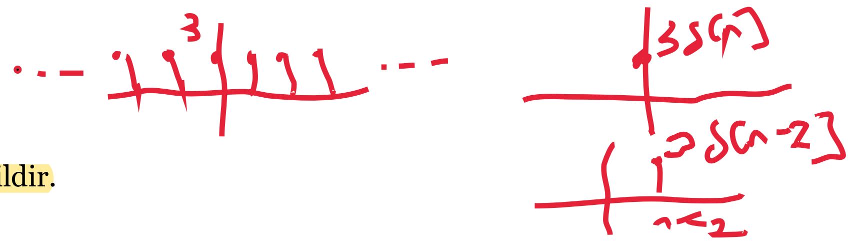
$$\begin{aligned} x_3(t) \rightarrow y_3(t) &= x_3^2(t) \\ &= (ax_1(t) + bx_2(t))^2 \\ &= a^2 x_1^2(t) + b^2 x_2^2(t) + 2abx_1(t)x_2(t) \\ &= a^2 y_1(t) + b^2 y_2(t) + 2abx_1(t)x_2(t) \end{aligned}$$

$$\stackrel{?}{\neq} a\, y_1(t) + b\, y_2(t)$$
$$a\, x_1^2(t) + b\, x_2^2(t)$$

Sistem doğrusal (lineer) değildir.

Örnek:

$$y[n] = 2x[n] + 3.$$



Sistem doğrusal (lineer) değildir.