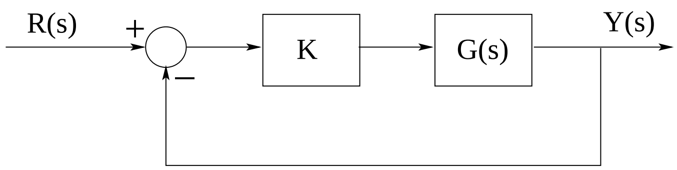
KON317 – Otomatik Kontrol Sistemleri 8 Temmuz 2008
Dr. Murat Yeşiloğlu

Kısa Sınav 5 **A**



Soru : Yukarıda verilen kapalı çevrim sistemde Routh-Hurwitz yöntemini kullanarak

a) $G(s) = \frac{s+6}{(s+1)(s+2)}$ için sistemi kararlı kılan K kazanç değer aralığını bulun.

b) $K = 1$ ve $G(s) = \frac{1}{4s^2(s^2+1)}$ olarak verildiğine göre kapalı çevrim sistem kutuplarının s-düzleminde hangi bölgede olduğunu belirleyin.

c) $K = 1$ ve $G(s) = \frac{s+8}{s^5-s^4+4s^3-4s^2+2s-10}$ olarak verildiğine göre kapalı çevrim sistem kutuplarının s-düzleminde hangi bölgede olduğunu belirleyin.

Çözüm:

a) Kapalı çevrim transfer fonksiyonu $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s+6)}{s^2+(K+3)s+6K+2}$ olarak hesaplanır. Dolayısıyla, sistemin karakteristik denklemi $s^2 + (K + 3)s + 6K + 2 = 0$ kullanılarak aşağıdaki Routh tablosu oluşturulur.

s^2	1	6K+2
s^1	K+3	0
s^0	6K+2	0

Birinci sütunda işaret değişikliği olmaması için s^1 satırından $K > -3$ koşulu, s^0 satırından da $K > -\frac{1}{3}$ koşulu gelir. Her ikisinin de sağlanması gerektiğinden $K > -\frac{1}{3}$ koşulu sistemin kararlılığı için K'nın alabileceği değerlerin sınırını belirler.

b) Kapalı çevrim transfer fonksiyonu $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{4s^4+4s^2+1}$ olarak hesaplanır. Dolayısıyla, sistemin karakteristik denklemi $4s^4 + 0s^3 + 4s^2 + 0s + 1 = 0$ kullanılarak aşağıdaki Routh tablosu oluşturulur.

s^4	4	4	1
s^3	$\cancel{0}$ $\cancel{16}$ 2	$\cancel{0}$ $\cancel{8}$ 1	0
s^2	2	1	0
s^1	$\cancel{0}$ 4	0	0
s^0	1	0	0

s^3 satırının tüm elemanları sıfırdır. Bu durumda s^4 satırını oluşturan fonksiyonun s'e göre türevi alınır. $\frac{d[4s^4+4s^2+1]}{ds} = 16s^3 + 8$ olarak bulunan fonksiyon s^3 satırında yerine konur ve sadeleştirme amacıyla 8'e bölünür.

Bu sefer de s^1 satırının tüm elemanları sıfır çıkar. Bu durumda da s^2 satırını oluşturan fonksiyonun s'e göre türevi alınır. $\frac{d[2s^2+1]}{ds} = 4s$ olarak bulunan fonksiyon s^1 satırında yerine konarak Routh tablosu oluşturulur.

s^3 satırının tüm elemanları sıfır olması fonksiyonun 4. dereceden bir çift fonksiyon olduğundan kaynaklanmıştır. Dolayısıyla, bu fonksiyonun 4 kökü orijine göre simetriktir. Routh tablosunun ilk sütununda işaret değişikliği olmadığı için bu köklerin hiçbirisinin sağ yarı düzlemde olmadığını anlıyoruz. Öyleyse bu 4 kök $j\omega$ ekseni üzerinde olmalı. s^1 satırının tüm elemanlarının sıfır olması ise bu köklerin katlı kök olduğunu gösterir.

c) Kapalı çevrim transfer fonksiyonu $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+8}{s^5-s^4+4s^3-4s^2+3s-2}$ olarak hesaplanır. Dolayısıyla, sistemin karakteristik denklemi $s^5 - s^4 + 4s^3 - 4s^2 + 3s - 2 = 0$ kullanılarak aşağıdaki Routh tablosu oluşturulur.

s^5	1	4	3
s^4	-1	-4	-3
s^3	$\cancel{0}\ \epsilon$	1	0
s^2	$\frac{1-4\epsilon}{\epsilon}$	-2	0
s^1	$\frac{2\epsilon^2-4\epsilon+1}{1-4\epsilon}$	0	0
s^0	-2	0	0

s^3 satırının ilk elemanı sıfır olduğu için bu elemanın yerine sıfıra yakın ama sıfırdan farklı bir değerde olduğunu kabul ettiğimiz ϵ koyarız. ϵ'un pozitif ya da negatif değerli olması sonucu değiştirmez. Aşağıdaki tabloda bu her iki durum için de toplam işaret değişikliğinin 3 olduğunu görürüz.

$\epsilon = 0^+$	$\epsilon = 0^-$	ilk sütun
+	+	1
- $\Downarrow$	- $\Downarrow$	-1
+ $\Downarrow$	-	ϵ
+	-	$\frac{1-4\epsilon}{\epsilon}$
+	+ $\Downarrow$	$\frac{2\epsilon^2-4\epsilon+1}{1-4\epsilon}$
- $\Downarrow$	- $\Downarrow$	-2

O halde sistemin 3 kökü sağ yarı düzlemdedir. 5. dereceden bir sistem olduğu için toplam 5 kökü vardır. Kalan 2 kök sol yarı düzlemdedir.