Kaynak: Haykin, "Signals and Systems"
Oppenheim, Wilsky, "Signals and Systems"

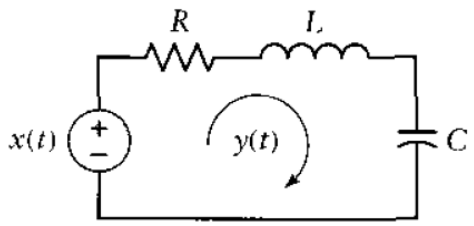
LZD Sistemlerin Zaman Domeni Analizi II

(Diferansiyel denklem/Fark denklemi gösterilimleri)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Örnek:



$$Ry(t) + L\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\, d\tau = x(t)$$

$$\frac{1}{C}y(t) + R\frac{dy(t)}{dt} + L\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{dx(t)}{dt}$$

Örnek:

$$y[n] + y[n-1] + \tfrac{1}{4}y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

Fark denklemlerinin rekürsif çözümü

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] - y[n-1] - \tfrac{1}{4}y[n-2]$$

$n = 0$

dan başlanarak

$$\begin{aligned}
y[0] &= x[0] + 2x[-1] - y[-1] - \tfrac{1}{4}y[-2] \\
y[1] &= x[1] + 2x[0] - y[0] - \tfrac{1}{4}y[-1] \\
y[2] &= x[2] + 2x[1] - y[1] - \tfrac{1}{4}y[0] \\
y[3] &= x[3] + 2x[2] - y[2] - \tfrac{1}{4}y[1] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$y[-1]$

$y[-2]$

Sistemin başlangıç koşullarıdır. Benzer şekilde sürekli zamanlı sistemi tanımlayan diferansiyel denklem için başlangıç koşulları

$$y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}$$

Örnek:

$$y[n] - 1.143y[n-1] + 0.4128y[n-2] = 0.0675x[n] + 0.1349x[n-1] + 0.0675x[n-2]$$

Şeklinde verilen fark denklemi ve

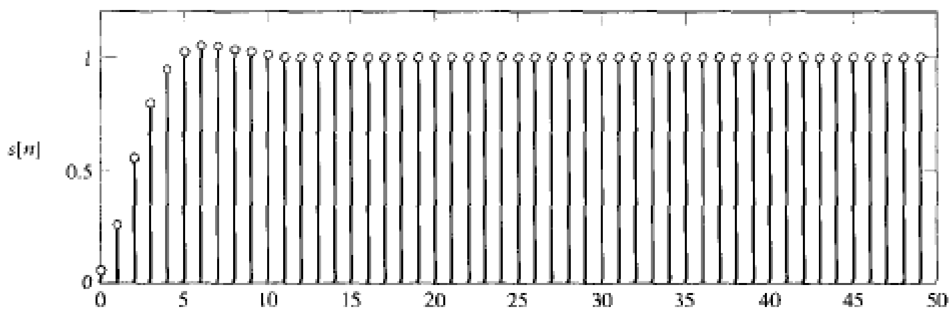
$y[-1] = 1, y[-2] = 2$

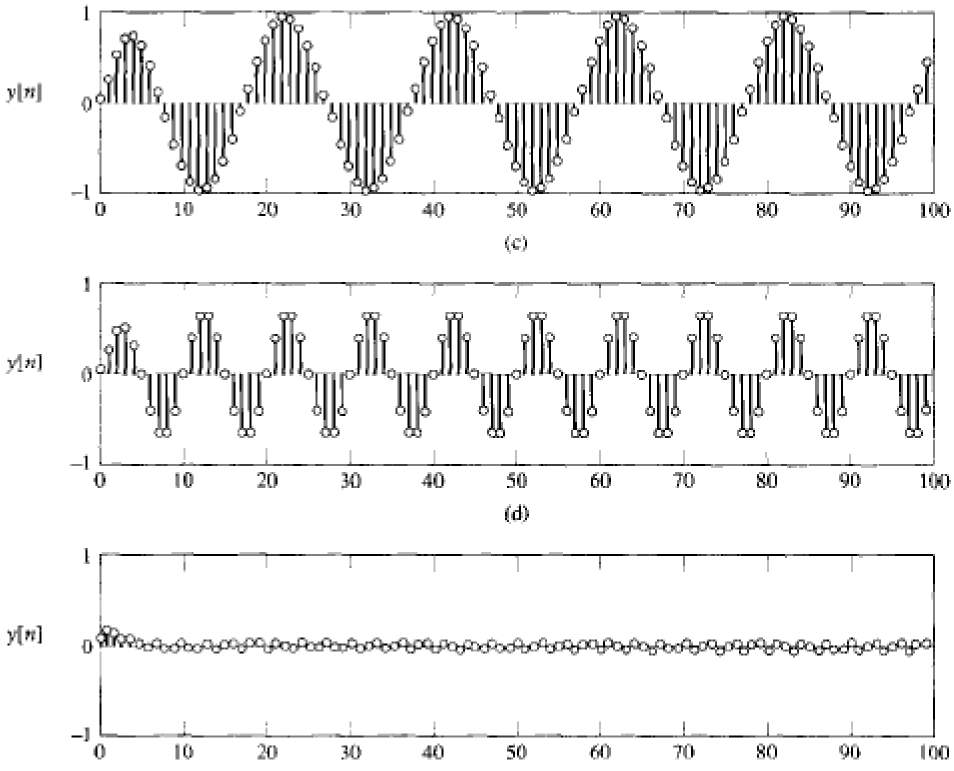
Başlangıç koşulları için sistemin birim basamak cevabını ve

$x_1[n] = \cos(\frac{1}{10}\pi n), x_2[n] = \cos(\frac{1}{5}\pi n)$, and $x_3[n] = \cos(\frac{7}{10}\pi n)$

Giriş işaretleri için sistemin çıkışını çizelim.

$$y[n] = 1.143y[n-1] - 0.4128y[n-2] + 0.0675x[n] + 0.1349x[n-1] + 0.0675x[n-2]$$





(c) (d) (e)

Örnek:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n].$$

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1],$$

Fark denklemi ile modellenen sistemin

$$x[n] = K\delta[n].$$

giriş işareti için çıkışını rekürsif olarak bulalım. (sıfır başlangıç koşulu, sistem dinlenmede)

$$x[n] = 0 \text{ for } n \leq -1,$$

$$y[0] = x[0] + \frac{1}{2}y[-1] = K,$$

$$y[1] = x[1] + \frac{1}{2}y[0] = \frac{1}{2}K,$$

$$y[2] = x[2] + \frac{1}{2}y[1] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 K,$$

$$\vdots$$

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n K.$$

Öz çözüm (Natural Response)

Başlangıç koşullarına bağlı olan çözüm

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y^{(n)}(t) = 0$$

Şeklinde tanımlanan homojen denklemin çözümü

$$y^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i e^{r_i t}$$

Karakteristik denklemin

$$\sum_{k=0}^{N} a_k r^k = 0$$

kökleri bulunur.

Ayrık-zamanlı sistemler için,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(n)}[n-k] = 0$$

$$y^{(n)}[n] = \sum_{i=1}^{N} c_i r_i^n$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k r^{N-k} = 0$$

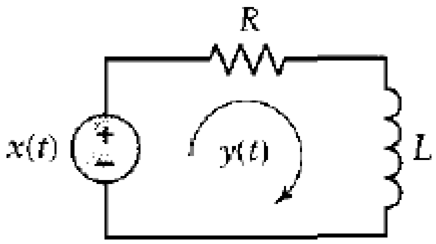
Katlı kök durumunda

$$e^{r_i t},\ te^{r_i t},\ \ldots,\ t^{p-1}e^{r_i t}$$

$$r_i^n,\ nr_i^n,\ \ldots,\ n^{p-1}r_i^n$$

Şeklinde çözüm oluşturulur.

Örnek:



şekilde verilen devreyi (sistemi) tanımlayan diferansiyel denklem için öz çözümü bulalım.

$$Ry(t) + L\frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

Homojen denklem

$$Ry(t) + L\frac{dy(t)}{dt} = 0$$

$$y^{(h)}(t) = c_1 e^{r_1 t}\ \text{A}$$

$$R + Lr = 0$$

$$r_1 = -R/L$$

Başlangıç koşulundan yararlanarak,

$$y^{(h)}(t) = 2e^{-(R/L)t}\ \text{A},\ t \geq 0$$

Öz Çözüm (Particular response)

Verilen giriş için elde edilen çözüm)

Kaynak: Haykin, “Signals and Systems”
Oppenheim, Wilsky, “Signals and Systems”

Continuous Time		Discrete Time	
Input	*Particular Solution*	*Input*	*Particular Solution*
1	c	1	c
e^{-at}	ce^{-at}	α^n	$c\alpha^n$
$\cos(\omega t + \phi)$	$c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$	$\cos(\Omega n + \phi)$	$c_1 \cos(\Omega n) + c_2 \sin(\Omega n)$

Örnek: Önceki örnekte verilen sistem için

$x(t) = \cos(\omega_0 t)$ V.

şeklinde giriş işareti verilmesi durumunda öz çözümü bulalım.

$$Ry(t) + L\frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

Çözüm önerisi

$y^{(p)}(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t).$

denklemde yerleştirilerek katsayılar bulunur.

$$Rc_1 \cos(\omega_0 t) + Rc_2 \sin(\omega_0 t) - L\omega_0 c_1 \sin(\omega_0 t) + L\omega_0 c_2 \cos(\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$Rc_1 + L\omega_0 c_2 = 1$$
$$-L\omega_0 c_1 + Rc_2 = 0$$

$$c_1 = \frac{R}{R^2 + L^2\omega_0^2}$$
$$c_2 = \frac{L\omega_0}{R^2 + L^2\omega_0^2}$$

Özel çözüm

$$y^{(p)}(t) = \frac{R}{R^2 + L^2\omega_0^2}\cos(\omega_0 t) + \frac{L\omega_0}{R^2 + L^2\omega_0^2}\sin(\omega_0 t) \quad \text{A}$$

Kaynak: Haykin, “Signals and Systems”
Oppenheim, Wilsky, “Signals and Systems”

Zorlanmış çözüm (Forced response)

Sıfır başlangıç koşulları için sistemin çözümü (sıfır başlangıç koşulları için öz çözüm ve özel çözümün toplamı)

Örnek:

$$x(t) = \cos(t)\ \mathrm{V}$$

$$R = 1\ \Omega$$

$$L = 1\ \mathrm{H}$$

Öz çözüm önceki örnekten

$$y^{(n)}(t) = ce^{-(R/L)t} \quad \mathrm{A}$$

Özel çözüm (önceki örnekten)

$$y^{(p)}(t) = \frac{R}{R^2 + L^2}\cos(t) + \frac{L}{R^2 + L^2}\sin(t) \quad \mathrm{A}$$

Verilen değerler yerleştirilerek, zorlanmış çözüm

$$y^{(f)}(t) = ce^{-t} + \tfrac{1}{2}\cos t + \tfrac{1}{2}\sin t \quad \mathrm{A}$$

C katsayısı sıfır başlangıç koşulu ile bulunur.

$$\begin{aligned} 0 &= ce^{-0} + \tfrac{1}{2}\cos 0 + \tfrac{1}{2}\sin 0 \\ &= c + \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$c = -\tfrac{1}{2}$$

Tam Çözüm (Complete response)

Sistemin verilen giriş işareti için çıkışı, verilen başlangıç koşulları için öz ve özel çözümlerin toplamı

Örnek:

RL devresi için

$$x(t) = \cos(t)\ \mathrm{V}$$

$$y(0) = 2\ \mathrm{A}$$

Verilen giriş işareti ve başlangıç koşulları için,

Kaynak: Haykin, “Signals and Systems”
Oppenheim, Wilsky, “Signals and Systems”

$$y(t) = ce^{-t} + \tfrac{1}{2}\cos t + \tfrac{1}{2}\sin t \quad \text{A}$$

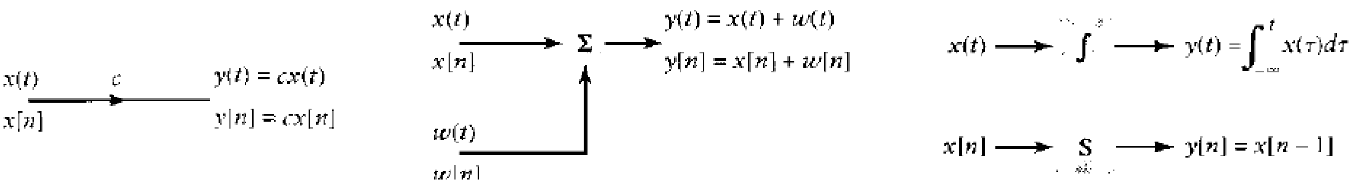
Başlangıç koşulu yerleştirilerek,

$$2 = c + \tfrac{1}{2}(1) + \tfrac{1}{2}(0)$$

Tam çözüm (sistemin çıkışı)

$$y(t) = \tfrac{3}{2}e^{-t} + \tfrac{1}{2}\cos t + \tfrac{1}{2}\sin t \quad \text{A},\ t \geq 0$$

Blok diagram Gösterilimleri

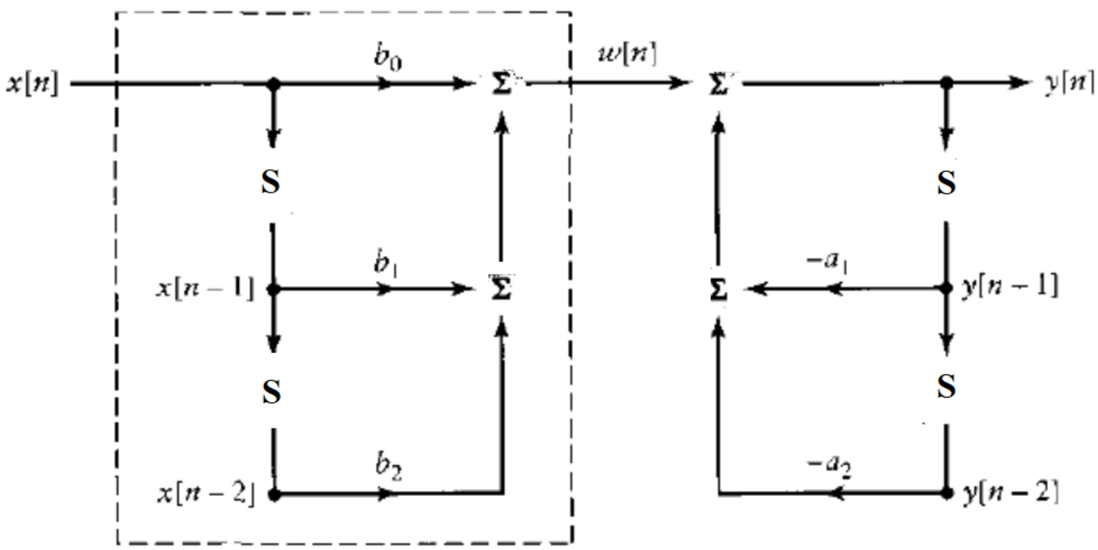


$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

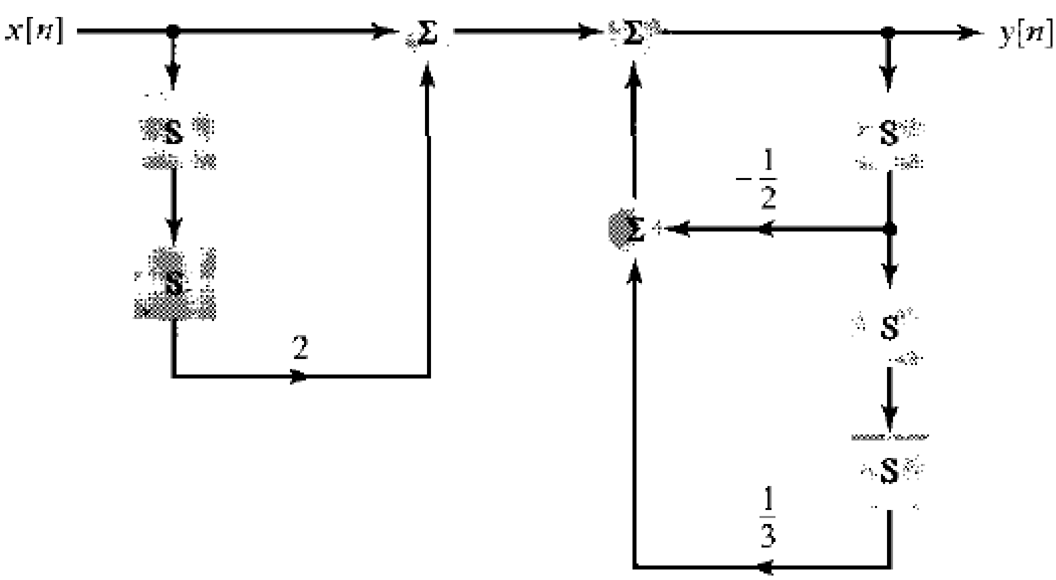
Direkt form I

Direkt form I



Kaynak: Haykin, “Signals and Systems”
Oppenheim, Wilsky, “Signals and Systems”

Örnek:



$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

Kısmı türev oprratörü yerine integral operatörü tercih edilir (gürültü nedeniyle)

$$v^{(0)}(t) = v(t)$$

$$v^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{t} v^{(n-1)}(\tau)\, d\tau, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

tanımlayalım

Başlangıç koşulları da gözönüne alınarak,

$$v^{(n)}(t) = \int_{0}^{t} v^{(n-1)}(\tau)\, d\tau + v^{(n)}(0), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Sıfır başlangıç koşulları için

$$\frac{d}{dt} v^{(n)}(t) = v^{(n-1)}(t), \qquad t > 0 \text{ and } n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$N \geq M$$

Durumunda N kez integral alınarak

Kaynak: Haykin, “Signals and Systems”
Oppenheim, Wilsky, “Signals and Systems”

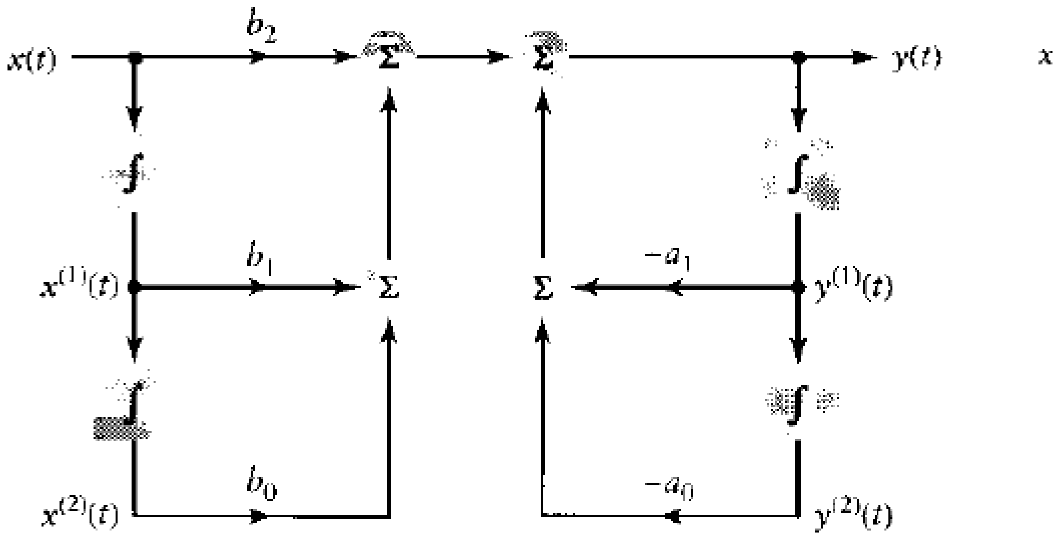
$$\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(N-k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(N-k)}(t)$$

Örnek:

N=2 için sistemi tanımlayan denklem

$$y(t) = -a_1 y^{(1)}(t) - a_0 y^{(2)}(t) + b_2 x(t) + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x^{(2)}(t)$$

Direkt form II



Konvolüsyon kommütatif özellik (seri bağlı sistemlerde sistemlerin sırası sistemin giriş-çıkışı etkilenmeden değiştirilebilir) kullanılarak

Kaynak: Haykin, “Signals and Systems”
Oppenheim, Wilsky, “Signals and Systems”