OBLIGATORIO

3

Métodos Numéricos

Curso 2010

Grupo Nro.50

Germán Ruiz 4.317743-2

Martín Zanetti 4.585215-3

Federico Mujica 4.786543-9

INDICE

OBJETIVOS

1- Resolver la ecuación diferencial planteada usando dos métodos, Euler hacia adelante y Heun.

2- Comparación de los métodos mencionados en el problema planteado.

3- Observar si se corresponde la teoría con la práctica en la situación específica.

PARTE 1

En nuestro caso de estudio tenemos la ecuación diferencial de Lokta-Volterra siguiente:

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) - (0,5).y_1(t).y_2(t) \\ y_2'(t) = (0,4).y_1(t).y_2(t) - (0,8).y_2(t) \end{cases}$$

Con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

Expresando la ecuación en forma vectorial nos queda de esta forma:

$F(y_1(t) , y_2(t)) = (y_1'(t) , y_2'(t))$

Con las condiciones iniciales ya mencionadas.

[1]

[1] Ver f.m para su implementación.

PARTE 2

Implementación del Método de Euler hacia adelante:

Le pasamos a la función como datos de entrada los valores iniciales de las dos ecuaciones: Y1 corresponde a la condición inicial de la ecuación y1, que se almacena en la posición (1,1) de la matriz solución; Y2 corresponde a la condición inicial de la ecuación y2, almacenándose en la posición (2,1) de la matriz. Luego se comienza a iterar, realizando en total rango/h(incremento) iteraciones. En cada iteración se calcula la solución de las distintas ecuaciones tomando como parámetro el último valor almacenado en la matriz solución y se guarda en un vector columna auxiliar (por ejemplo j) siendo j(1) y j(2) las soluciones para la ecuación y1 e y2 respectivamente. Luego se guarda en la posición (1,i) el resultado de sumar el valor de la posición (1,i-1) con la multiplicación entre h y el valor j(1); de forma similar para la posición (2,i) guardamos la suma entre la posición (2,i-1) con la multiplicación entre h y el valor j(2). De esta manera queda conformada la matriz solución, indicando en la fila 1 todas las soluciones para los distintos valores de la ecuación y1, y en la fila 2 lo mismo relacionado a la ecuación y2.

2

La prueba de este programa la realizamos tomando como datos el incremento h = 0.001 en un rango t desde t = 0 hasta t = 20. Los resultados se pueden observar en las gráficas de la parte 4.

[2] Ver ForwardEuler.m para detalles sobre su implementación.

PARTE 3

Implementación del Método de Heun:

Al igual que para el método de Euler, el programa recibe como datos de entrada las condiciones iniciales de las distintas ecuaciones y1 e y2; también recibe el incremento h y el rango de las iteraciones t. También se construye una matriz solución con dos filas (fila 1 para las soluciones de la ecuación y1 y la fila 2 para la ecuación y2) y t/h columnas. A partir de este punto se comienza con las iteraciones; se realizan t/h iteraciones.

Se toma un vector columna auxiliar (por ejemplo, j) en el cual se guardan los resultados de las ecuaciones evaluadas en los puntos anteriores (en j(1) los de y1, en j(2) los de y2). Luego se toman dos vectores columnas auxiliares (por ejemplo, l1 y l2) en los cuales se almacena lo siguiente: en la posición l1(1) se almacena el resultado de la suma de evaluar la ecuación y1 en el punto anterior mas h; en la posición l1(2) se almacena el resultado de la suma de evaluar la ecuación y2 en el punto anterior mas el producto h*j(1). De forma similar se construye l2 con la diferencia que en el lugar l2(2) se almacena el resultado de la suma de evaluar la ecuación y2 en el punto anterior mas el producto h*j(2).

Luego de estos cálculos se procede a construir la matriz solución. Ésta se forma de la siguiente manera: la posición (1,i) es igual a la suma del valor de la matriz solución en el punto (1, i-1) mas el producto h*0.5*j(1) mas el producto h*0.5*l1(1). La posición (2,i) se construye de forma similar: es la suma del valor de la matriz solución en el punto (2, i-1) mas el producto h*0.5*j(2) mas el producto h*0.5*l2(2).

La prueba de este programa la realizamos tomando como datos el incremento h = 0.001 en un rango t desde t = 0 hasta t = 20. Los resultados se pueden observar en las gráficas de la parte 4.

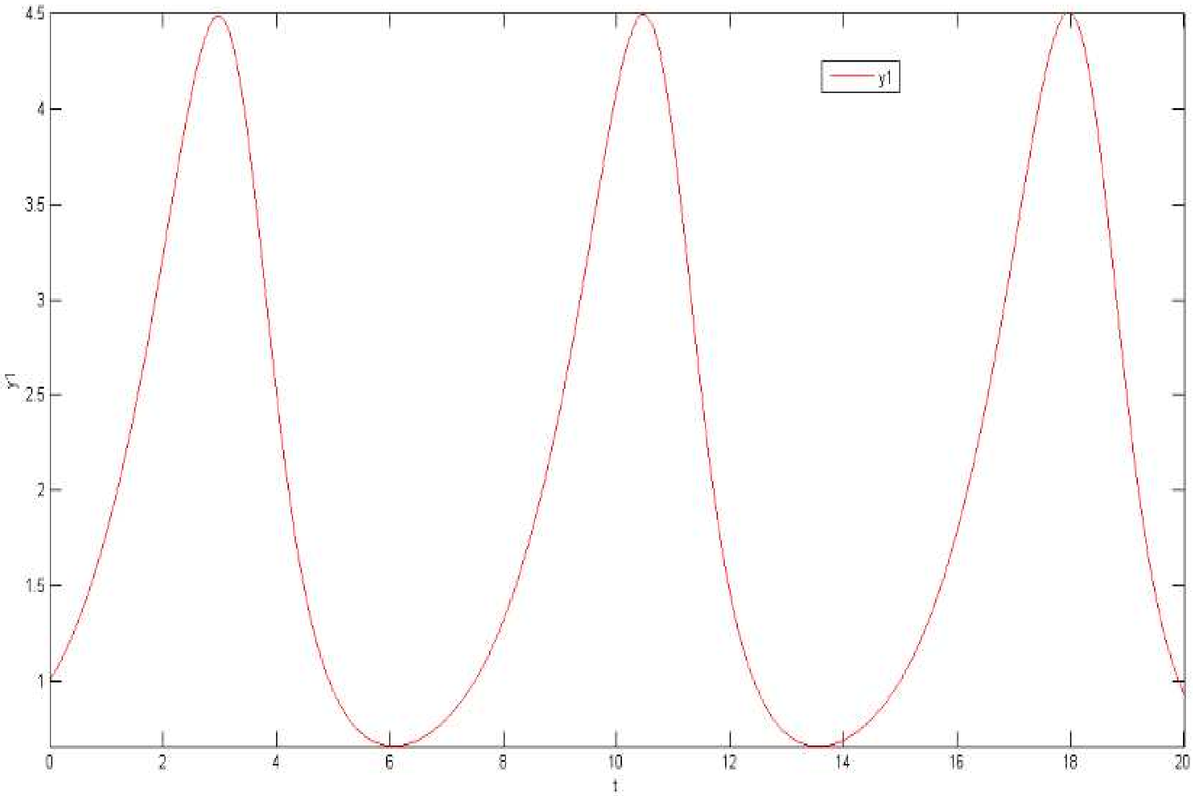
[3]

[3] Ver Heun.m para más detalles sobre su implementación.

PARTE 4

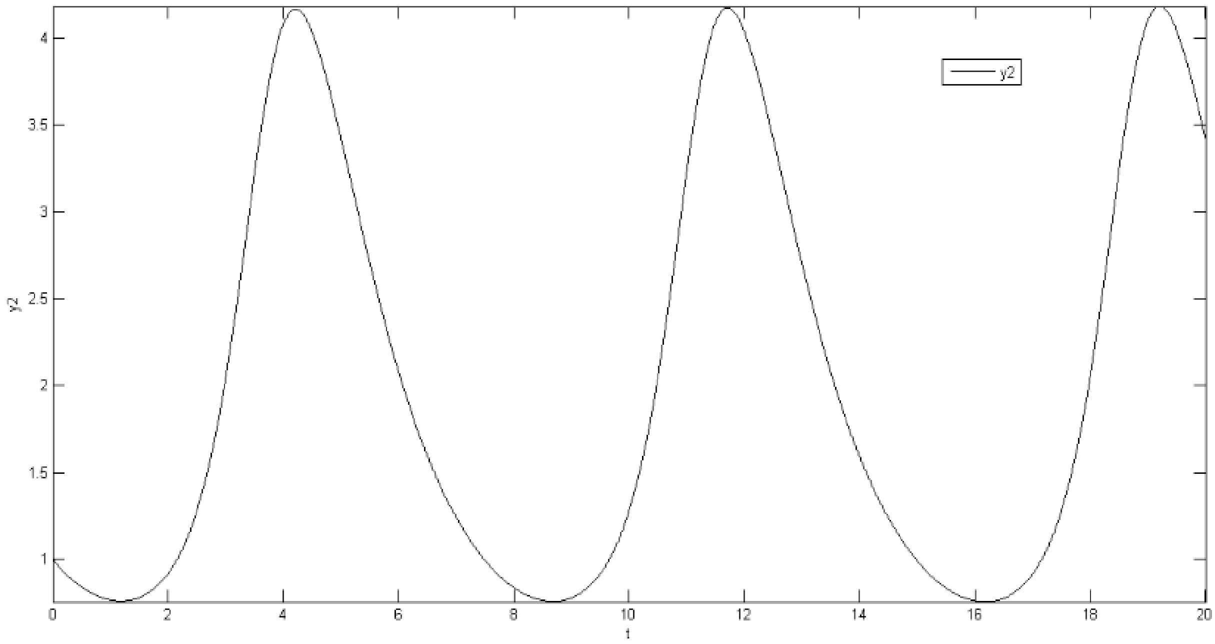
Aquí se pueden ver los resultados de las pruebas de los distintos programas aplicando los distintos métodos. [4]

Grafica1_1: y1 = f(t) usando Euler.

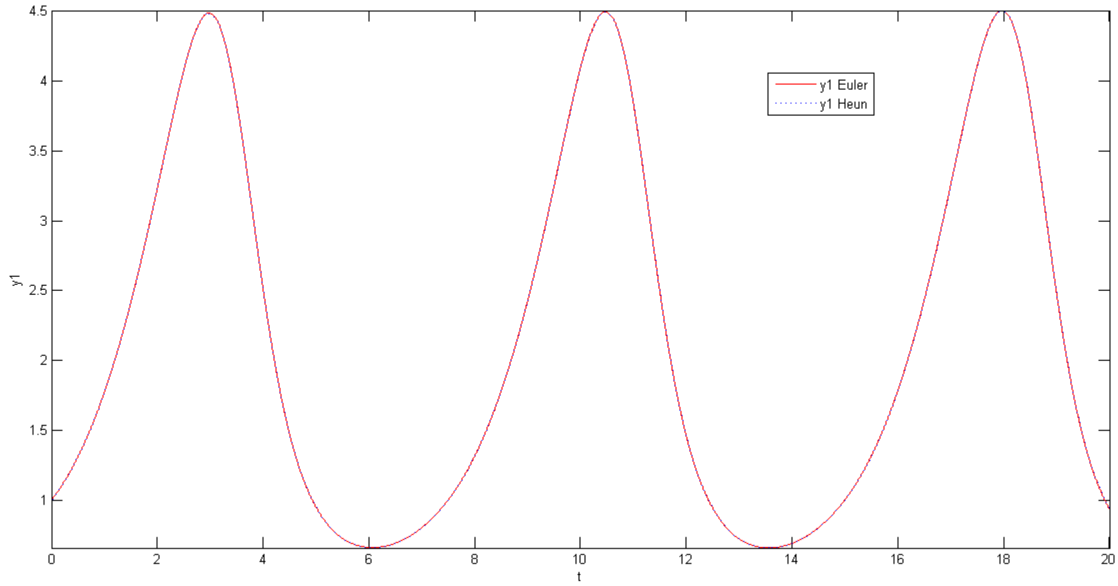


[4] Ver el script Pruebas_Graficas.m para ver la realización de las graficas y pruebas de los métodos.

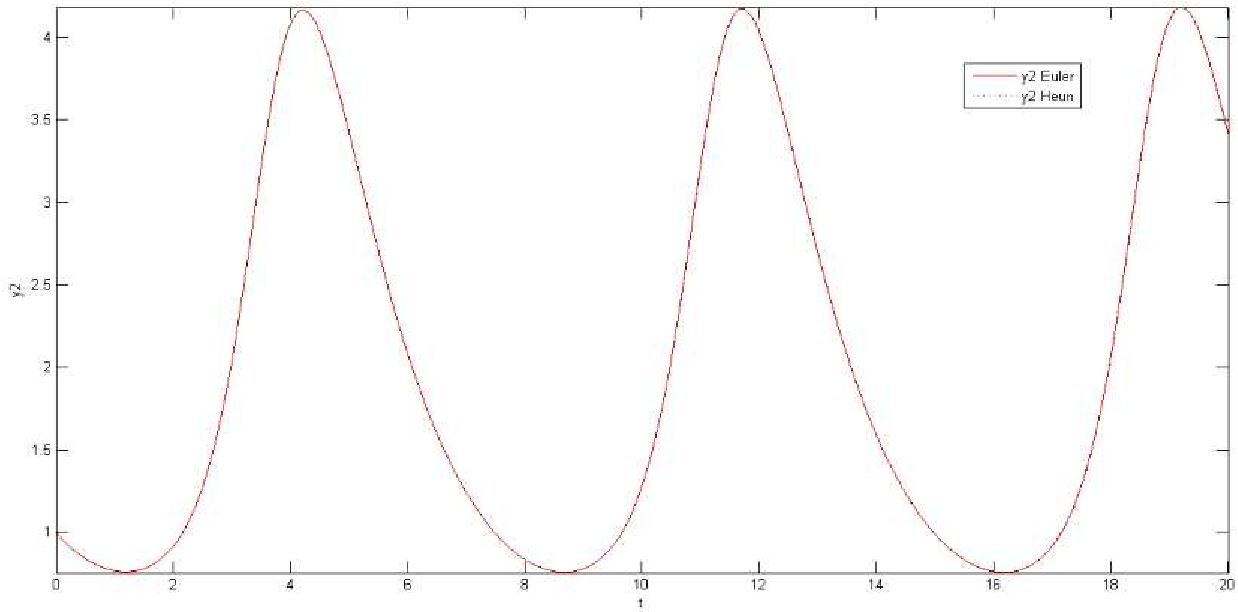
<u>Grafica1_2:</u> y2 = f(t) usando Heun.



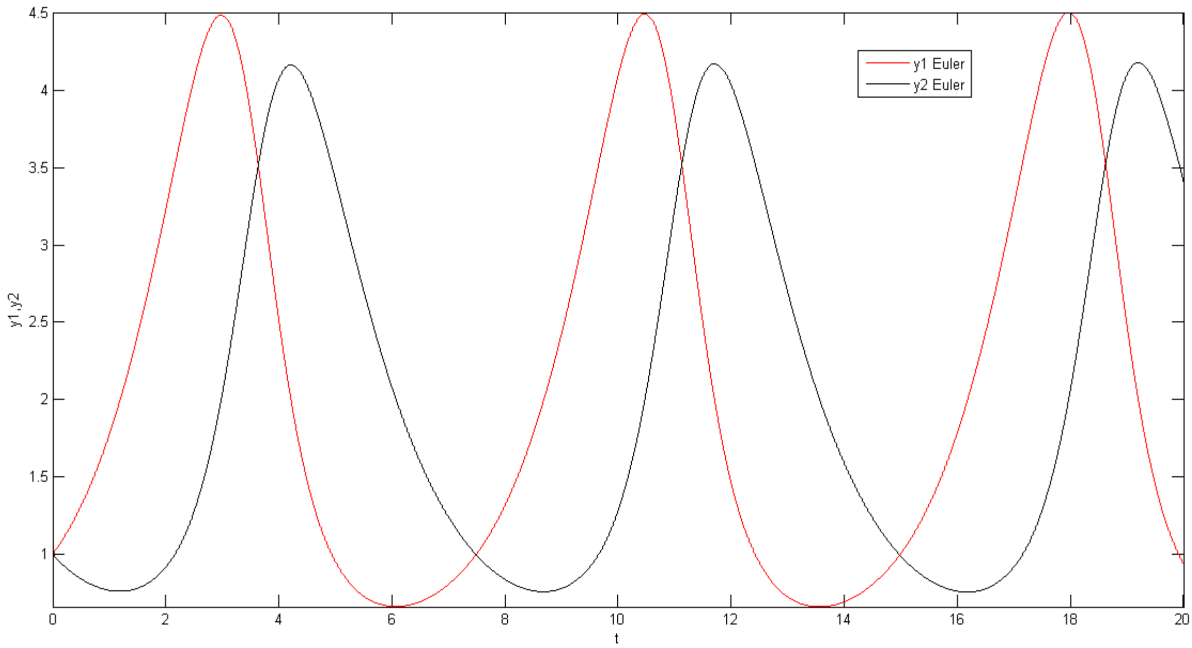
<u>Grafica2_1:</u> y1=f(t) usando Euler con y1=f(t) usando Heun.



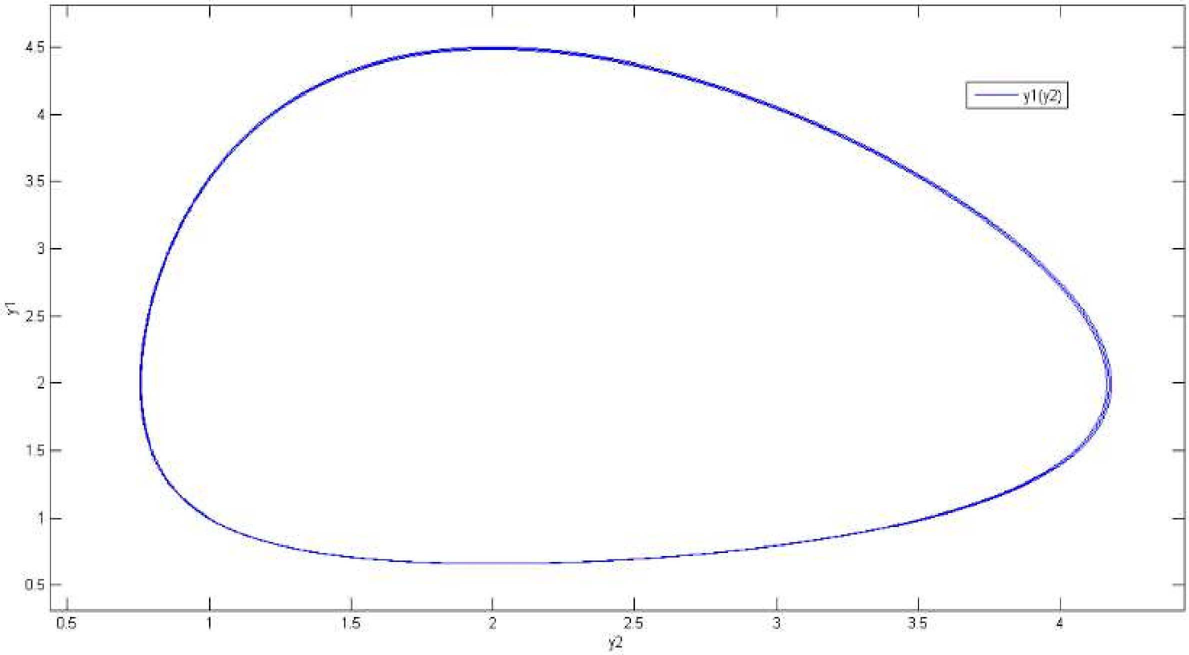
Gráfica2_2: comparación de y2=f(t) usando Euler con y2=f(t) usando Heun.



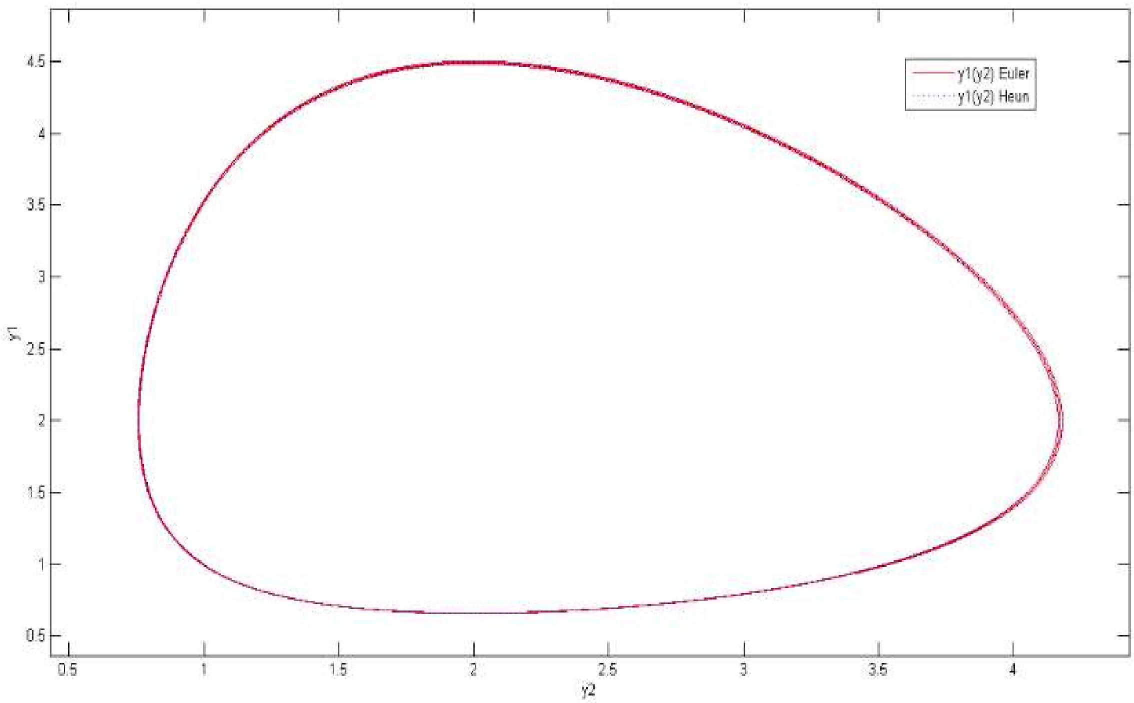
Grafica2_3: y1 = f(t) e y2 = f(t) simultáneamente. (Euler)



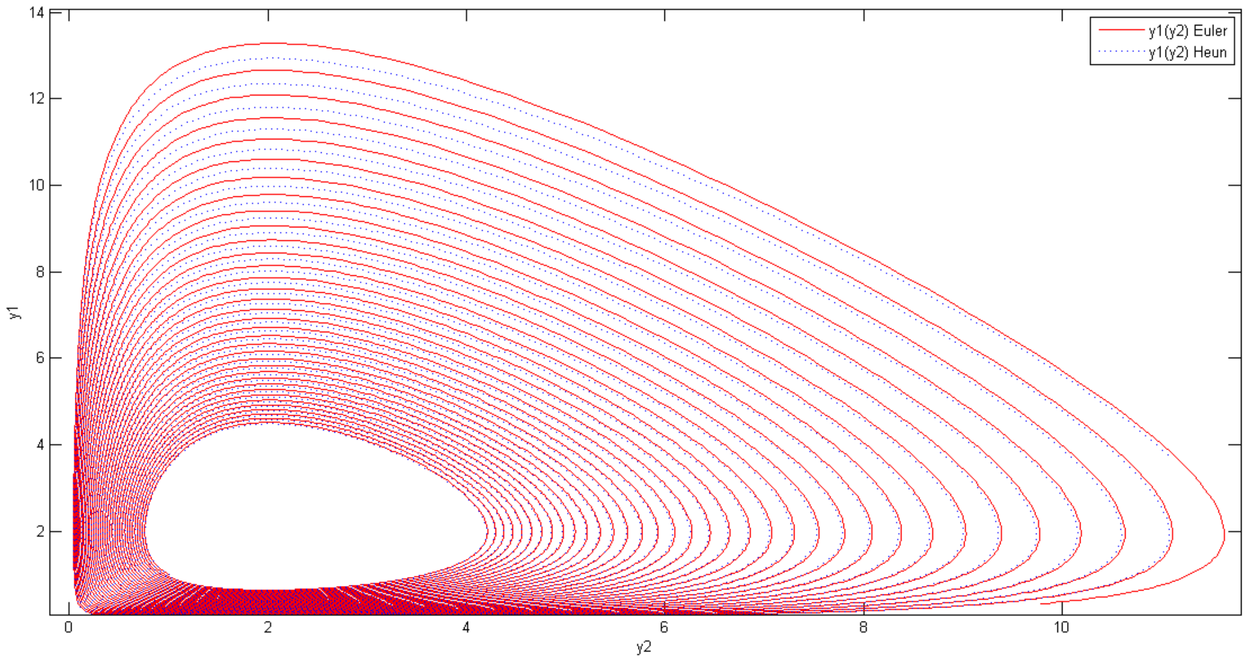
Gráfica3_1: y1 = f(y2)



Gráfica3_2: comparación entre y1=f(y2) usando Euler con y1=f(y2) usando Heun.



Gráfica3_3: comparación entre y1=f(y2) usando Euler con y1=f(y2) usando Heun con h=0.01 y t = 300.



CONCLUSIONES

Una de las características que se puede observar en las pruebas realizadas a los programas es la similitud en las soluciones encontradas mediante los dos métodos. Los resultados a los que se llega son muy parecidos, al extremo que se tiene que agrandar mucho la escala de las gráficas para apreciar que las distintas curvas no se superponen una con la otra, sino que pasan por puntos diferentes pero muy cercanos (diferencia máxima aprox. 0.0099 para y_1 y 0.0096 para y_2).

Al Graficar $y_1(t)$ en función de $y_2(t)$ (Grafica 3_1 y Grafica 3_2), mediante los dos métodos se llegan a graficas muy similares. A simple vista parece ser una sola curva periódica con forma parecida a una elipse, pero al hacer un acercamiento se puede observar como que son varias curvas muy cercanas unas de otra. Con el rango utilizado (0:20) se pueden observar hasta 3 curvas o graficas de fase. Si se agranda el rango (0:40) se pueden distinguir hasta 6 curvas. Al mirar más cuidadosamente las graficas se puede ver que es una sola curva con punto inicial en (1,1) que en cada vuelta se va alejando cada vez más del centro. Esta observación se puede observar claramente en la grafica 3_3. Otra observación en la grafica 3_2 y 3_3 es que la solución de Heun tiene sus curvas de fase un poco más cercanas al centro que las de Euler y mirando en la curva más a la derecha de la grafica 3_3 se observa que la curva de Heun termina antes que la de Euler.

Teóricamente el método de Heun es una optimización del método de Euler siendo más precisa en su solución. Esto se puede ver en esa pequeña diferencia en los gráficos.

En conclusión los métodos llegan a soluciones muy similares con una sutil diferencia que se aprecia en los gráficos. Los dos son métodos muy efectivos para el problema planteado.

A primera vista de las soluciones halladas de y1 e y2 dan la impresión de que son funciones periódicas pero al graficar una en función de la otra con un rango mayor al inicial planteado se puede observar claramente que esto no se cumple.