OBLIGATORIO

2

Métodos Numéricos

Curso 2010

Grupo Nro.50

Germán Ruiz 4.317743-2

Martín Zanetti 4.585215-3

Federico Mujica 4.786543-9

INDICE

OBJETIVOS

1. Comparación de los métodos de Newton-Raphson y Broyden en cuanto a precisión y eficiencia.
2. Analizar el comportamiento de los métodos y del problema planteado para distintas situaciones.
3. Estimar los resultados de orden y velocidad de convergencia. Comparar los resultados obtenidos con la teoría.

PARTE 1

Tenemos la siguiente ecuación de mínima energía del sistema:

$\Phi(u,w) = (1/2).ks.w^2 + (1/2).E.A.L.[-(u/L) + (z/L).(w/L) + (1/2).(w/L)^2]^2 - Uo.u + Wo.w$

La derivada parcial según u y w son de la forma:

$\Phi u(u,w) = -E.A.[(u/L) + (z/L).(w/L) + (1/2).(w/L)^2] – Uo$

$\Phi w(u,w) = ks.w + (z + w).(E.A/L).[(u/L) + (z/L).(w/L) + (1/2).(w/L)^2] + Wo$

Luego el gradiente de Φ es igual a:

$\text{Grad } \Phi(u,w) = (\Phi u(u,w), \Phi w(u,w))$

Luego, las derivadas parciales segundas son:

$\Phi uu(u,w) = (E.A)/L$

$\Phi ww(u,w) = ks + (E.A/L^2)(-u + z^2/L + 3zw/L + 3w^2/2L)$

$\Phi uw(u,w) = \Phi wu(u,w) = (-E.A/L^2)(z + w)$

La Hessiana de Φ resulta:

$$H(u,w) = \begin{pmatrix} \Phi uu(u,w) & \Phi uw(u,w) \\ \Phi uw(u,w) & \Phi ww(u,w) \end{pmatrix}$$

Condiciones de existencia de mínimo para la función Φ:

Grad Φ(u,w) = (Φu(u,w), Φw(u,w)) = (0,0)

Det(H(u,w)) > 0 y Φuu(u,w) > 0

<u>Observación</u>:

Φuu(u,w) siempre es mayor que cero ya que Φuu(u,w) = EA/L, que son constantes dadas en el problema mayores que cero. Entonces nos queda como condiciones que el gradiente sea el vector nulo y el determinante de la hessiana mayor que cero.

Tomamos el GradΦ como la función f tal que f(X) = 0 a resolver en el sistema no lineal. Nuestro X es un vector de R^2 (u,w). Entonces el sistema no lineal quedaría planteado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \Phi u(u,w) = 0 \\ \Phi w(u,w) = 0 \end{cases}$$

PARTE 2

Implementación del método Newton-Raphson:

Tenemos como entrada los puntos iniciales uo y wo como puntos de arranque para la iteración. También tenemos como entrada las constantes Uo y Wo. Devolvemos la cantidad de iteraciones realizadas en la ejecución del método y devolvemos también el último punto (u,w) utilizado en dicha ejecución y el historial de todos los X hallados.[1]

Como condiciones de salida de la iteración del método definimos un número máximo de iteraciones (MaxIter = 1000), y una tolerancia máxima de cuando parar la iteración (tolMax = 10^{-10}). Esta tolerancia la comparamos con la distancia que calculamos en cada paso entre (u_i,w_i) y (u_{i-1},w_{i-1}) en la iteración i. Otra condición de salida es evaluar la norma de Grad$\phi(u_i,w_i)$ en la iteración i y ver si es lo bastante cercana a cero (10^{-10}).

En cada paso de la iteración i calculamos el X_{i+1} con la formula de Newton-Raphson y termina cuando se llega a una de las condiciones mencionadas arriba.

Implementación del método de Broyden:

Las entradas y salidas del algoritmo son las mismas que las mencionadas para NR. Las condiciones de salida de la iteración son las mismas agregándole una tolerancia al valor absoluto de el determinante de la matriz que se usa en el método.[2] Esta tolerancia la imponemos para evitar que el determinante se

[1] Para ver detalladamente la implementación ver NR.m en los anexos.
[2] Ver Broyden.m para mas detalles

aproxime a cero y en consecuencia que no exista la inversa de la matriz en cuestión.

En cada paso de la iteración i calculamos la matriz Ai y luego aplicando los cálculos correspondientes hallamos el X_{i+1}.

Como primera matriz secante del método usamos una aproximación por cocientes incrementales dejando las entradas fuera de la diagonal como entradas nulas.[3]

Luego probando los dos métodos con las condiciones dadas en la letra del problema llegamos a la misma solución con ambos métodos pero con una diferencia en la cantidad de iteraciones que cada uno emplea, el de NR logrando la solución en menos cantidad.

Evaluando la solución de los dos métodos en Gradϕ y calculando el det(H) observamos que se cumplen las condiciones de la existencia de un mínimo, concluyendo que es una solución válida.

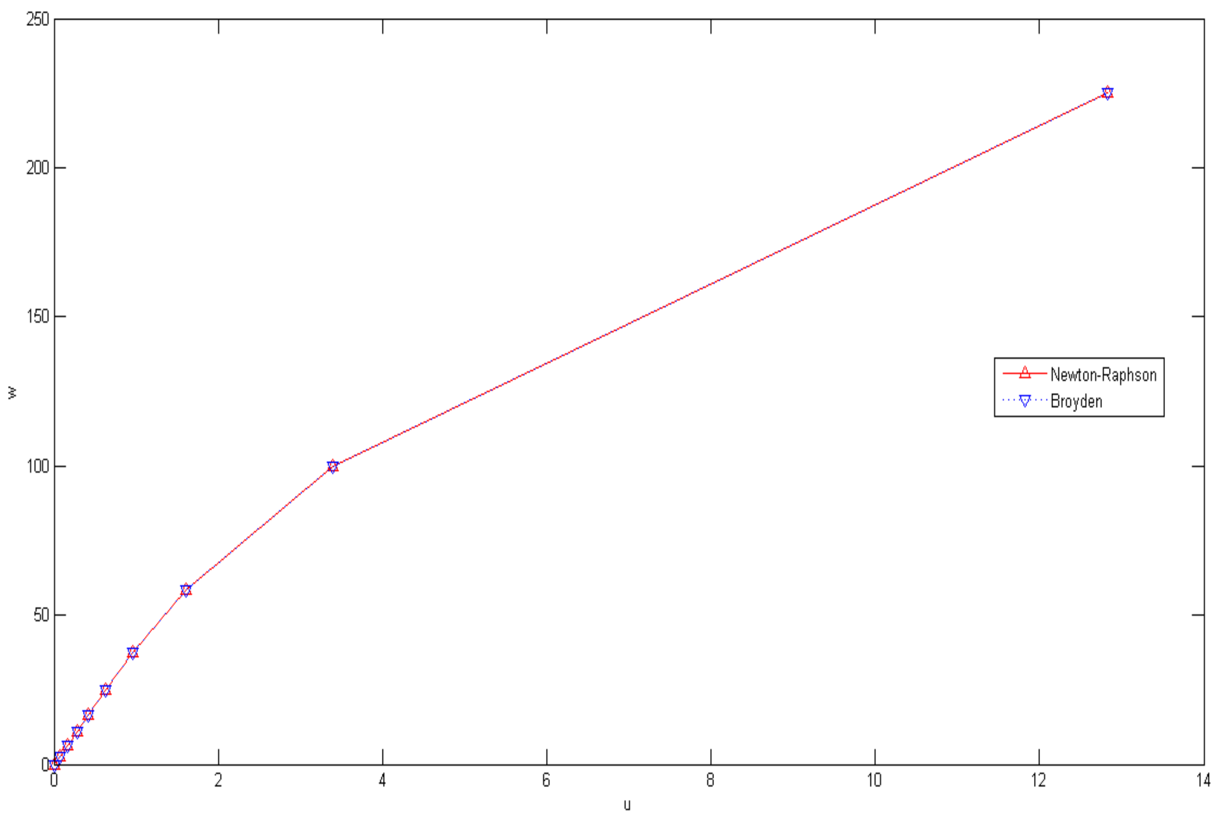
[3] Ver hesPhiaprox.m.

Parte 3

Primero hallamos las soluciones para U=0:1000:9000 y para tres distintos W (W1 = 0,W2 = -50,W3 = -150) usando los dos métodos mencionados anteriormente.[4]

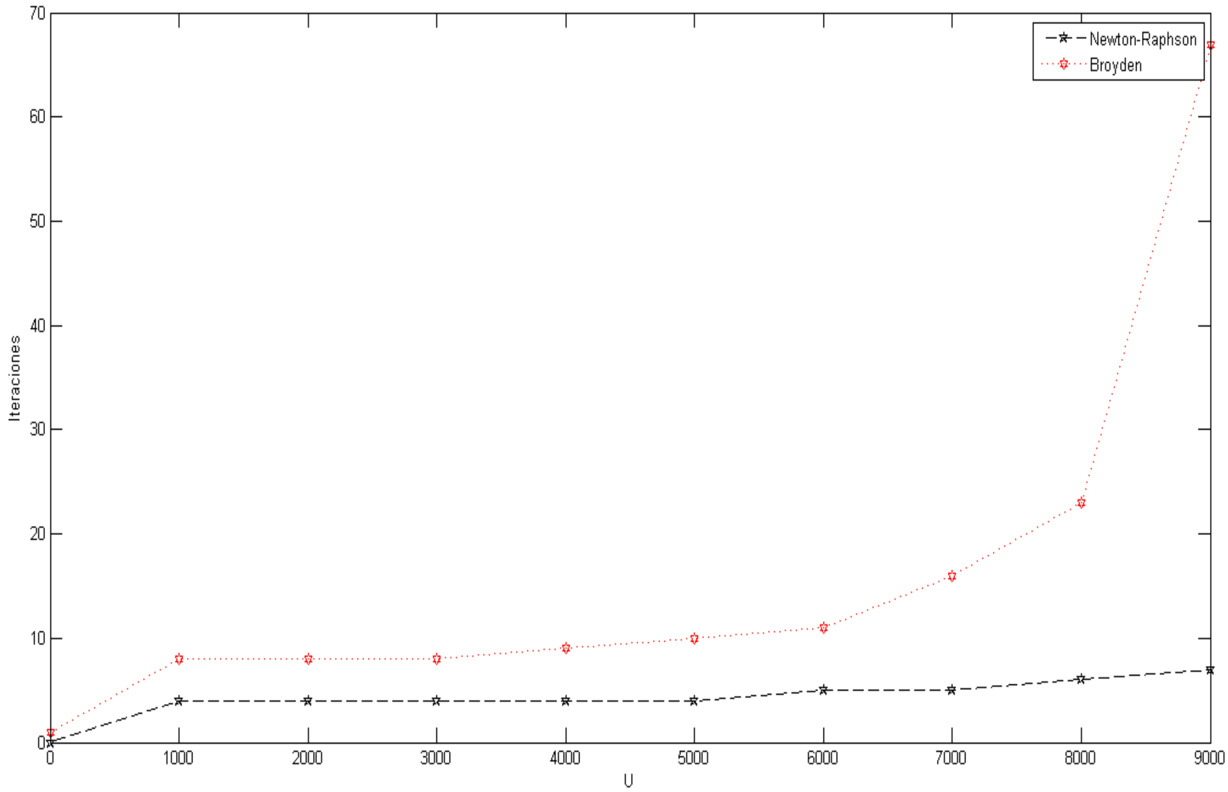
Luego comparamos las soluciones halladas de los dos métodos y la cantidad de iteraciones de cada uno. Observamos que ambos métodos llegan a la misma solución pero con distintas cantidad de iteraciones realizadas. Esto se puede apreciar en las siguientes graficas:

Grafica1_1: w = f(u) con W = W1 y U=0:1000:9000.

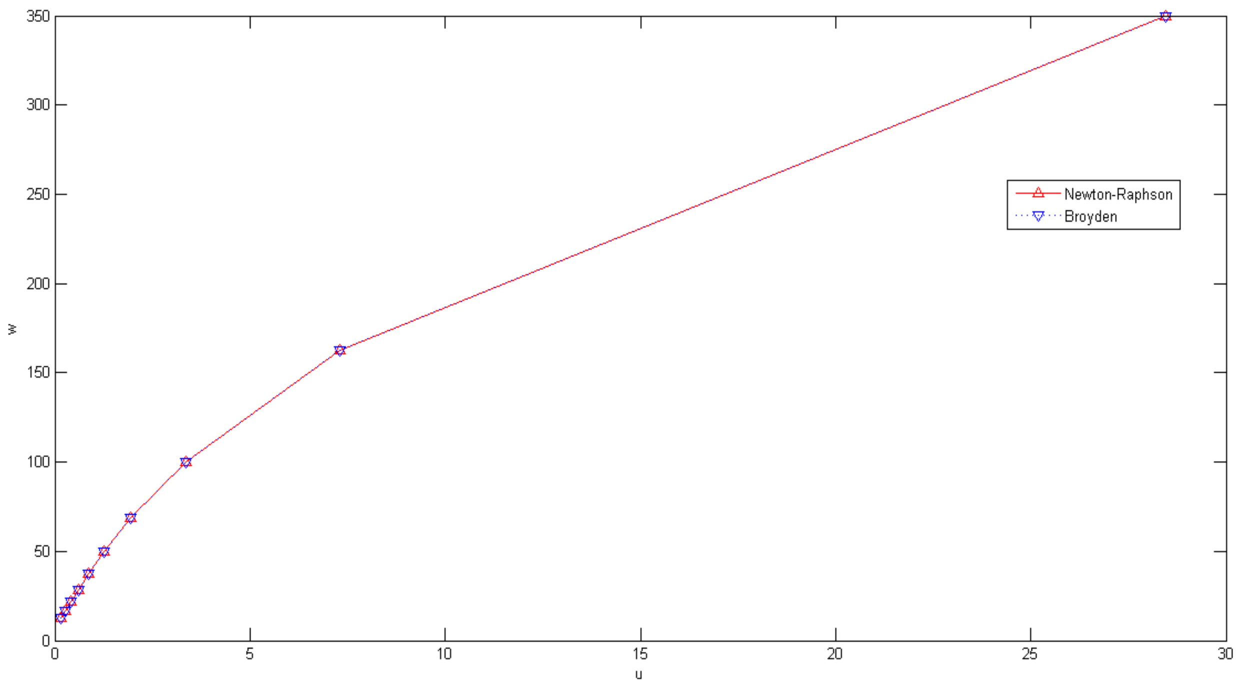


[4] Ver script Parte3.m para los calculos

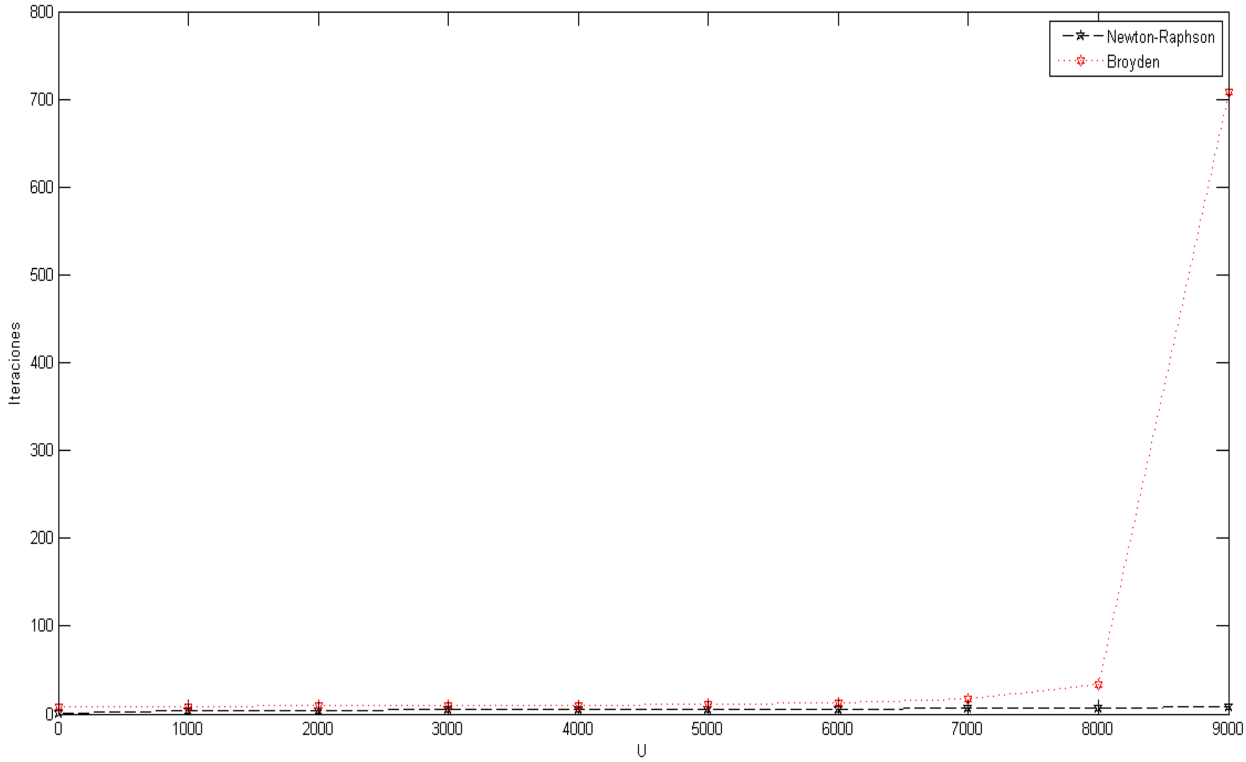
Grafica1_2: Comparación de la cantidad de iteraciones (W = W1)



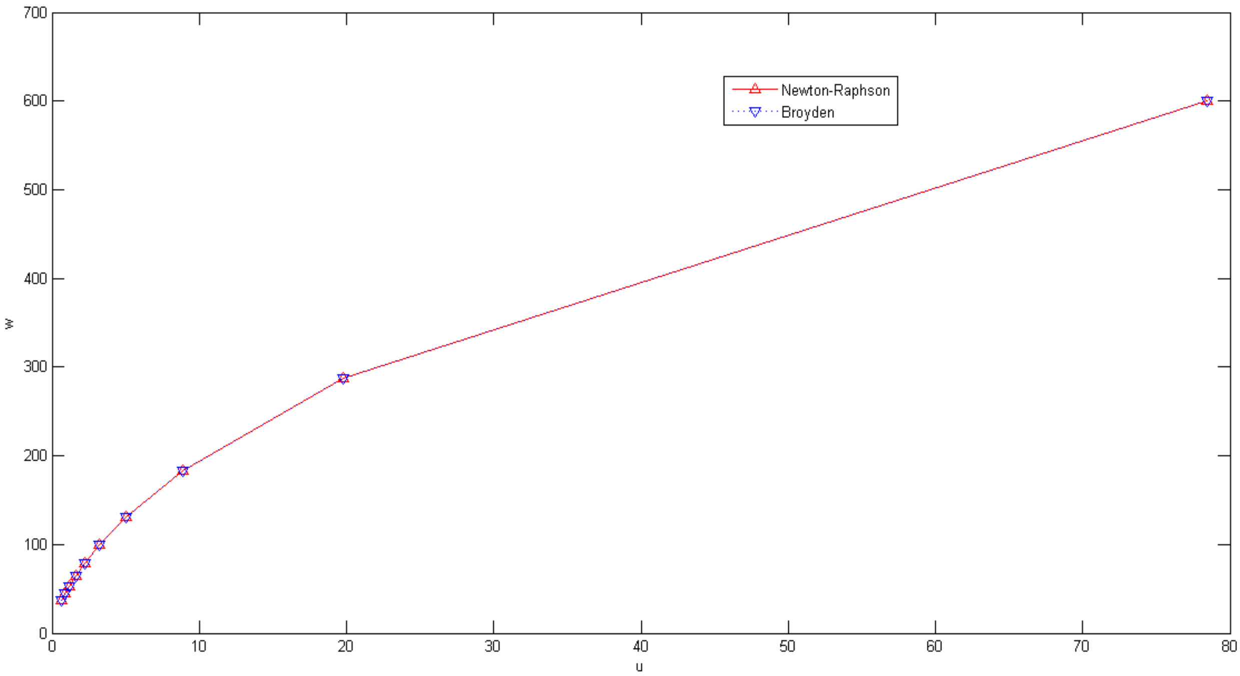
Grafica2_1: w = f(u) con W = W2 y U=0:1000:9000.



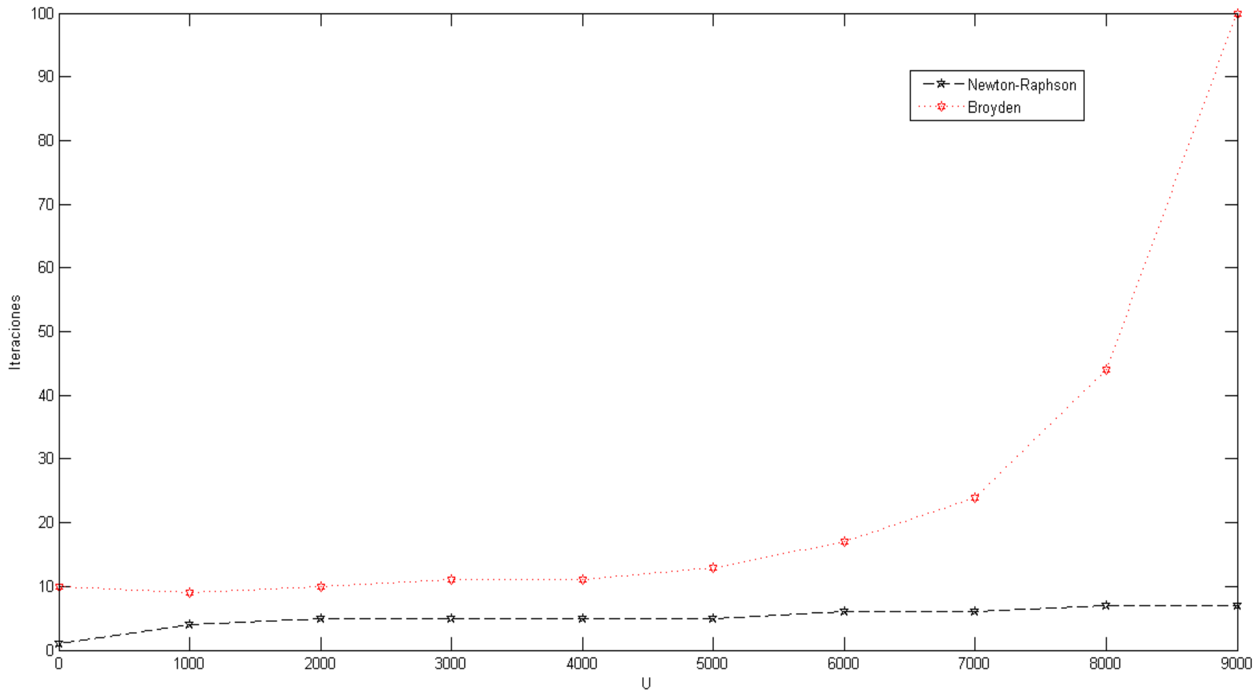
Grafica2_2: Comparación de la cantidad de iteraciones (W = W2)



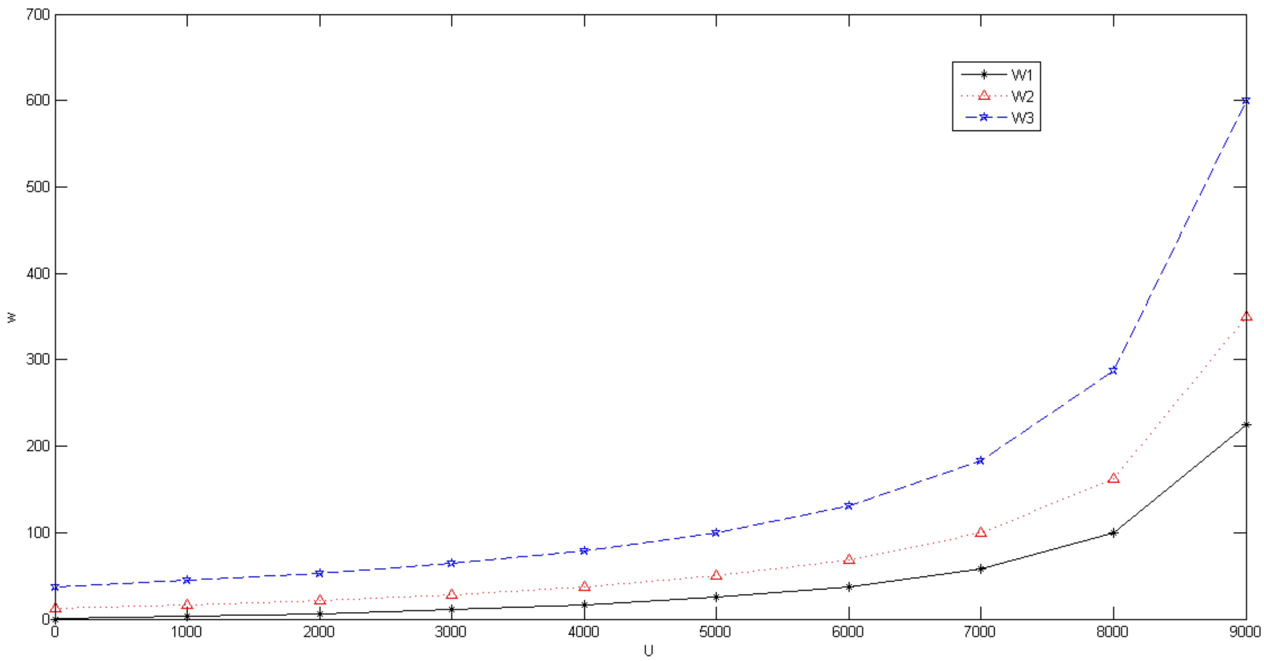
Grafica3_1: w = f(u) con W = W3 y U=0:1000:9000.



Grafica3_2: Comparación de la cantidad de iteraciones (W = W3)



Gráfica4: w=f(U), U = 0:1000:9000 utilizando Newton-Raphson.



Luego probamos los métodos con U=10000 para los 3 casos llegando a resultados erróneos. [5]

Para U=12000 con Broyden llegamos a una solución en el caso de W1 pero en los otros no.

Con Newton-Raphson al principio no llegamos a una solución del sistema debido a que utilizamos el punto en U=10000 el cual no era solución.

Para evitar esto usamos los puntos iniciales de cuando U=0, llegando a una solución para los tres casos. La diferencia es que esta vez el w nos dio negativo siendo el menos negativo cuando usamos W1 y el más negativo cuando usamos W3. Desde U=0:1000:9000 el u y w eran los dos positivos y aumentaban simultáneamente.

[5] Ver script PruebaResultados.m

PARTE 4

Primero definimos el error k-ésimo como la norma de la resta entre el valor X en la iteración k y el punto solución hallado mediante el método utilizado. Entonces $e_k=||X_k - L||_2$ siendo L el punto solución. Si k >> 0 y asumiendo la aproximación dada en la letra del problema, tomamos como datos de entrada $\{(1,\log(e_1)),(2,\log(e_2)),\ldots\ldots,(N,\log(e_N))\}$, llegando a un sistema de la forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \log(e_0) & 1 \\ \log(e_1) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \log(e_{N-1}) & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} p \\ \log(\beta) \end{pmatrix}}_{\alpha} = \underbrace{\begin{pmatrix} \log(e_1) \\ \log(e_2) \\ \vdots \\ \log(e_N) \end{pmatrix}}_{b}$$

Siendo p el orden de convergencia y β la velocidad de convergencia.

Luego se aplica el método de mínimos cuadrados minimizando la norma $||A\alpha - b||_2^2$.

Utilizando la ecuación $A^t \,.\, A\alpha = A^t \,.\, b$, nos queda un sistema cuadrado a resolver del cual encontramos como soluciones a p y β.[6]

Para Newton-Raphson p = 1.9944 y β = 0.0203 mientras que para Broyden p = 1.1369 y β = 0.3790.

[6] Ver script Parte4.m para ver los cálculos.

CONCLUSIONES

Luego de ver los resultados obtenidos en las gráficas podemos ver que los dos métodos llegan a resultados similares, siendo el método de Newton-Raphson más eficiente debido a que realiza menor cantidad de iteraciones que Broyden. Esto sucede desde U=0:1000:9000.

Al utilizar como dato U = 10000 al aplicar los métodos observamos que la cantidad de iteraciones promedio aumento considerablemente para NR y para Broyden en los tres casos no llega a una solución con el maxIter estipulado. Las soluciones que dan los dos métodos son erróneas ya que el Gradϕ de la solución no es nulo. En las iteraciones del NR llega un momento que el determinante de la hessiana se aproxima a 0 provocando la no existencia de la inversa y en consecuencia calcula mal el siguiente termino X de la sucesión. Esto nos lleva a concluir que los dos métodos realizados no son confiables ya que pueden existir situaciones en las cuales no funcionen correctamente.

Cuando U = 12000 el equilibrio de la barra en el problema planteado no es estable por lo especificado en la parte 3.

En lo relacionado con los órdenes de convergencia y su velocidad, los resultados obtenidos corroboran la teoría de que NR es de orden cuadrático y Broyden es superlineal.