Presentación Práctico Análisis de Algoritmos (Asintóticos)

Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República

Programación 3, 19 de Agosto de 2010

Plan de la exposición

1. Repaso teórico
   - Repaso teórico
2. Ejercicios
   - Ejercicios

Notación Asintótica

Definición Orden superior $O(f)$

$$O(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^* / (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to g(n) \leq cf(n))\}$$

Definición Orden inferior $\Omega(f)$

$$\Omega(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^* / (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to g(n) \geq cf(n))\}$$

Definición Orden exacto $\Theta(f)$

Es el conjunto de funciones que pertenecen al Orden superior y al Orden inferior de f, o sea

$$\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$$

Notación Asintótica

Definición Orden superior $O(f)$

$$O(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^* / (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to g(n) \leq cf(n))\}$$

Definición Orden inferior $\Omega(f)$

$$\Omega(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^* / (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to g(n) \geq cf(n))\}$$

Definición Orden exacto $\Theta(f)$

Es el conjunto de funciones que pertenecen al Orden superior y al Orden inferior de f, o sea

$$\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$$

Notación Asintótica

Definición Orden superior $O(f)$

$$O(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^* / (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to g(n) \leq cf(n))\}$$

Definición Orden inferior $\Omega(f)$

$$\Omega(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^* / (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to g(n) \geq cf(n))\}$$

Definición Orden exacto $\Theta(f)$

Es el conjunto de funciones que pertenecen al Orden superior y al Orden inferior de f, o sea

$$\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$$

Notación Asintótica

Definición Orden superior $O(f)$

$$O(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^*/(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to g(n) \leq cf(n))\}$$

Definición Orden inferior $\Omega(f)$

$$\Omega(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^*/(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to g(n) \geq cf(n))\}$$

Definición Orden exacto $\Theta(f)$

Es el conjunto de funciones que pertenecen al Orden superior y al Orden inferior de f, o sea

$$\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$$

Propiedades de Ordenes

1. Transitividad de O. Si $g \in O(f)$ y $f \in O(h)$ entonces $g \in O(h)$.
2. Dualidad $g \in O(f) \iff f \in \Omega(g)$.
3. Si $f \in \Theta(g)$ entonces $g \in \Theta(f)$.
4. Θ define una relación de equivalencia.
5. Regla del máximo. $O(f+g) = O(max\{f,g\})$.

Propiedades de Ordenes

1. Transitividad de O. Si $g \in O(f)$ y $f \in O(h)$ entonces $g \in O(h)$.
2. Dualidad $g \in O(f) \Longleftrightarrow f \in \Omega(g)$.
3. Si $f \in \Theta(g)$ entonces $g \in \Theta(f)$.
4. Θ define una relación de equivalencia.
5. Regla del máximo. $O(f+g) = O(max\{f,g\})$.

Propiedades de Ordenes

1. Transitividad de O. Si $g \in O(f)$ y $f \in O(h)$ entonces $g \in O(h)$.
2. Dualidad $g \in O(f) \Longleftrightarrow f \in \Omega(g)$.
3. Si $f \in \Theta(g)$ entonces $g \in \Theta(f)$.
4. Θ define una relación de equivalencia.
5. Regla del máximo. $O(f+g) = O(max\{f,g\})$.

Propiedades de Ordenes

1. Transitividad de O. Si $g \in O(f)$ y $f \in O(h)$ entonces $g \in O(h)$.
2. Dualidad $g \in O(f) \iff f \in \Omega(g)$.
3. Si $f \in \Theta(g)$ entonces $g \in \Theta(f)$.
4. Θ define una relación de equivalencia.
5. Regla del máximo. $O(f+g) = O(max\{f,g\})$.

Propiedades de Ordenes

1. Transitividad de O. Si $g \in O(f)$ y $f \in O(h)$ entonces $g \in O(h)$.
2. Dualidad $g \in O(f) \iff f \in \Omega(g)$.
3. Si $f \in \Theta(g)$ entonces $g \in \Theta(f)$.
4. Θ define una relación de equivalencia.
5. Regla del máximo. $O(f+\mathrm{g}) = O(max\{f, g\})$.

Probar que $n^3 \in O(n^3 + n^2)$

$n^3 \in O(n^3 + n^2)$
$\iff$(Definición de O)
$(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to n^3 \leq c(n^3 + n^2))$
$\iff$(Operaciones aritméticas)
$(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to 0 \leq (c-1)n^3 + n^2)$
$\Longleftarrow$ (En particular $c = 1$ y $n_0 = 0$ satisface lo anterior)
$(\forall n \in \mathbb{N})(0 \leq n^2)$

Probar que $n^3 \in O(n^3 + n^2)$

$n^3 \in O(n^3 + n^2)$
$\Longleftrightarrow$(Definición de O)
$(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \rightarrow n^3 \leq c(n^3 + n^2))$
$\Longleftrightarrow$(Operaciones aritméticas)
$(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \rightarrow 0 \leq (c-1)n^3 + n^2)$
$\Longleftarrow$ (En particular $c = 1$ y $n_0 = 0$ satisface lo anterior)
$(\forall n \in \mathbb{N})(0 \leq n^2)$

Probar que $n^3 \in O(n^3 + n^2)$

$n^3 \in O(n^3 + n^2)$
$\Longleftrightarrow$(Definición de O)
$(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \rightarrow n^3 \leq c(n^3 + n^2))$
$\Longleftrightarrow$(Operaciones aritméticas)
$(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \rightarrow 0 \leq (c-1)n^3 + n^2)$
$\Longleftarrow$ (En particular $c = 1$ y $n_0 = 0$ satisface lo anterior)
$(\forall n \in \mathbb{N})(0 \leq n^2)$

Probar que $n^3 \in O(n^3 + n^2)$

$n^3 \in O(n^3 + n^2)$
$\Longleftrightarrow$(Definición de O)
$(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \rightarrow n^3 \leq c(n^3 + n^2))$
$\Longleftrightarrow$(Operaciones aritméticas)
$(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \rightarrow 0 \leq (c-1)n^3 + n^2)$
$\Longleftarrow$ (En particular $c = 1$ y $n_0 = 0$ satisface lo anterior)
$(\forall n \in \mathbb{N})(0 \leq n^2)$

Regla del límite (Ejercicio 3)

Sean las funciones $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^*$ y $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^*$, entonces se cumplen las propiedades:

1. Si $lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = K > 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$.
2. Si $lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \notin O(f(n))$.
3. Si $lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$ entonces $f(n) \notin O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$.

Regla del límite (Ejercicio 3)

Sean las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^*$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^*$, entonces se cumplen las propiedades:

1. Si$lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = K > 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$.
2. Si $lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \notin O(f(n))$.
3. Si $lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$ entonces $f(n) \notin O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$.

Regla del límite (Ejercicio 3)

Sean las funciones $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^*$ y $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^*$, entonces se cumplen las propiedades:

1. Si$lim_{n\rightarrow+\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = K > 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$.
2. Si $lim_{n\rightarrow+\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \notin O(f(n))$.
3. Si $lim_{n\rightarrow+\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$ entonces $f(n) \notin O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$.

Regla del límite, Caso 1

$lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = K > 0$

$\Longleftrightarrow$(Definición de límite de sucesiones de números naturales)

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to \left|\frac{f(n)}{g(n)} - K\right| < \varepsilon)$

$\Longrightarrow$(Definición de valor absoluto)

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to \frac{f(n)}{g(n)} - K < \varepsilon)$

$\Longleftrightarrow$(Definición equivalencia de desigualdad. Observar que $g(n) \geq 0$)

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) < (\varepsilon + K)g(n))$

$\Longrightarrow$(Implicancia lógica)

$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) \leq (\varepsilon + K)g(n))$

$\Longleftrightarrow$(Cambio de variable $c = \varepsilon + K$)

$(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) \leq cg(n))$

$\Longleftrightarrow$(Definición O)

$f(n) \in O(g(n))$

Regla del límite, Caso 1

$lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = K > 0$

$\Longleftrightarrow$(Definición de límite de sucesiones de números naturales)

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \rightarrow \left|\frac{f(n)}{g(n)} - K\right| < \varepsilon)$

$\Longrightarrow$(Definición de valor absoluto)

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \rightarrow \frac{f(n)}{g(n)} - K < \varepsilon)$

$\Longleftrightarrow$(Definición equivalencia de desigualdad. Observar que $g(n) \geq 0$)

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \rightarrow f(n) < (\varepsilon + K)g(n))$

$\Longrightarrow$(Implicancia lógica)

$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \rightarrow f(n) \leq (\varepsilon + K)g(n))$

$\Longleftrightarrow$(Cambio de variable $c = \varepsilon + K$)

$(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \rightarrow f(n) \leq cg(n))$

$\Longleftrightarrow$(Definición O)

$f(n) \in O(g(n))$

Regla del límite, Caso 1

$lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = K > 0$

$\Longleftrightarrow$(Definición de límite de sucesiones de números naturales)

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to \left|\frac{f(n)}{g(n)} - K\right| < \varepsilon)$

$\Longrightarrow$(Definición de valor absoluto)

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to \frac{f(n)}{g(n)} - K < \varepsilon)$

$\Longleftrightarrow$(Definición equivalencia de desigualdad. Observar que $g(n) \geq 0$)

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) < (\varepsilon + K)g(n))$

$\Longrightarrow$(Implicancia lógica)

$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) \leq (\varepsilon + K)g(n))$

$\Longleftrightarrow$(Cambio de variable $c = \varepsilon + K$)

$(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) \leq cg(n))$

$\Longleftrightarrow$(Definición O)

$f(n) \in O(g(n))$

Regla del límite, Caso 1

$lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = K > 0$

$\Longleftrightarrow$(Definición de límite de sucesiones de números naturales)

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to \left| \frac{f(n)}{g(n)} - K \right| < \varepsilon)$

$\Longrightarrow$(Definición de valor absoluto)

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to \frac{f(n)}{g(n)} - K < \varepsilon)$

$\Longleftrightarrow$(Definición equivalencia de desigualdad. Observar que $g(n) \geq 0$)

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) < (\varepsilon + K)g(n))$

$\Longrightarrow$(Implicancia lógica)

$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) \leq (\varepsilon + K)g(n))$

$\Longleftrightarrow$(Cambio de variable $c = \varepsilon + K$)

$(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) \leq cg(n))$

$\Longleftrightarrow$(Definición O)

$f(n) \in O(g(n))$

Regla del límite, Caso 1

$lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = K > 0$

$\Longleftrightarrow$(Definición de límite de sucesiones de números naturales)

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to \left| \frac{f(n)}{g(n)} - K \right| < \varepsilon)$

$\Longrightarrow$(Definición de valor absoluto)

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to \frac{f(n)}{g(n)} - K < \varepsilon)$

$\Longleftrightarrow$(Definición equivalencia de desigualdad. Observar que $g(n) \geq 0$)

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) < (\varepsilon + K)g(n))$

$\Longrightarrow$(Implicancia lógica)

$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{+})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) \leq (\varepsilon + K)g(n))$

$\Longleftrightarrow$(Cambio de variable $c = \varepsilon + K$)

$(\exists c \in \mathbb{R}^{+})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) \leq cg(n))$

$\Longleftrightarrow$(Definición O)

$f(n) \in O(g(n))$

Regla del límite, Caso 1

$lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = K > 0$

$\Longleftrightarrow$(Definición de límite de sucesiones de números naturales)

$(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})(n\geq n_0\to\left|\frac{f(n)}{g(n)}-K\right|<\varepsilon)$

$\Longrightarrow$(Definición de valor absoluto)

$(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})(n\geq n_0\to\frac{f(n)}{g(n)}-K<\varepsilon)$

$\Longleftrightarrow$(Definición equivalencia de desigualdad. Observar que $g(n)\geq 0$)

$(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})(n\geq n_0\to f(n)<(\varepsilon+K)g(n))$

$\Longrightarrow$(Implicancia lógica)

$(\exists\varepsilon\in\mathbb{R}^+)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})(n\geq n_0\to f(n)\leq(\varepsilon+K)g(n))$

$\Longleftrightarrow$(Cambio de variable $c=\varepsilon+K$)

$(\exists c\in\mathbb{R}^+)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})(n\geq n_0\to f(n)\leq cg(n))$

$\Longleftrightarrow$(Definición O)

$f(n)\in O(g(n))$

Regla del límite, Caso 1

$lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = K > 0$

$\Longleftrightarrow$(Definición de límite de sucesiones de números naturales)

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to \left| \frac{f(n)}{g(n)} - K \right| < \varepsilon)$

$\Longrightarrow$(Definición de valor absoluto)

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to \frac{f(n)}{g(n)} - K < \varepsilon)$

$\Longleftrightarrow$(Definición equivalencia de desigualdad. Observar que $g(n) \geq 0$)

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) < (\varepsilon + K)g(n))$

$\Longrightarrow$(Implicancia lógica)

$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{+})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) \leq (\varepsilon + K)g(n))$

$\Longleftrightarrow$(Cambio de variable $c = \varepsilon + K$)

$(\exists c \in \mathbb{R}^{+})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) \leq cg(n))$

$\Longleftrightarrow$(Definición O)

$f(n) \in O(g(n))$

Regla del límite, Caso 1

Resta probar que $g(n) \in O(f(n))$ que es equivalente a $f(n) \in \Omega(g(n))$.

- Se prueba razonando de forma analoga utilizando $\left|\frac{f(n)}{g(n)} - K\right| < \varepsilon \Longrightarrow -\varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} - K$ y $\varepsilon = K/2$.
- Otra forma es $K \times lim_{n \to +\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = lim_{n \to +\infty} K \frac{g(n)}{f(n)} = lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \frac{g(n)}{f(n)} = 1$. Por lo que $lim_{n \to +\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 1/K > 0$.
- Como $lim_{n \to +\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 1/K > 0$ se esta en las hipótesis de la parte anterior y se concluye que $g(n) \in O(f(n))$.

Regla del límite, Caso 1

Resta probar que $g(n) \in O(f(n))$ que es equivalente a $f(n) \in \Omega(g(n))$.

- Se probar razonando de forma analoga utilizando $\left|\frac{f(n)}{g(n)} - K\right| < \varepsilon \Longrightarrow -\varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} - K$ y $\varepsilon = K/2$.
- Otra forma es $K \times lim_{n \to +\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = lim_{n \to +\infty} K \frac{g(n)}{f(n)} = lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \frac{g(n)}{f(n)} = 1$. Por lo que $lim_{n \to +\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 1/K > 0$.
- Como $lim_{n \to +\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 1/K > 0$ se esta en las hipótesis de la parte anterior y se concluye que $g(n) \in O(f(n))$.

Regla del límite, Caso 1

Resta probar que $g(n) \in O(f(n))$ que es equivalente a $f(n) \in \Omega(g(n))$.

- Se prueba razonando de forma analoga utilizando $\left|\frac{f(n)}{g(n)} - K\right| < \varepsilon \Longrightarrow -\varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} - K$ y $\varepsilon = K/2$.
- Otra forma es $K \times lim_{n \to +\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = lim_{n \to +\infty} K \frac{g(n)}{f(n)} = lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \frac{g(n)}{f(n)} = 1$. Por lo que $lim_{n \to +\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 1/K > 0$.
- Como $lim_{n \to +\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 1/K > 0$ se esta en las hipótesis de la parte anterior y se concluye que $g(n) \in O(f(n))$.

Regla del límite, Caso 2

$lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

$\Longleftrightarrow$(Definición de límite de sucesiones de números naturales)

$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to \left|\frac{f(n)}{g(n)} - 0\right| < \varepsilon)$

$\Longleftrightarrow$(Definición de valor absoluto y teniendo en cuenta que f y g son ≥ 0)

$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to \frac{f(n)}{g(n)} < \varepsilon)$

$\Longleftrightarrow$(Despejando la desigualdad)

$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) < g(n)\varepsilon)$

- Si se escoge un ε cualquiera es la definición de $f \in O(g)$.
- Resta probar que $g \notin O(f)$.

Regla del límite, Caso 2

$lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 0$
$\Longleftrightarrow$(Definición de límite de sucesiones de números naturales)
$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to \left|\frac{f(n)}{g(n)} - 0\right| < \varepsilon)$
$\Longleftrightarrow$(Definición de valor absoluto y teniendo en cuenta que f y g son ≥ 0)
$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to \frac{f(n)}{g(n)} < \varepsilon)$
$\Longleftrightarrow$(Despejando la desigualdad)
$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) < g(n)\varepsilon)$

- Si se escoge un ε cualquiera es la definición de $f \in O(g)$.
- Resta probar que $g \notin O(f)$.

Regla del límite, Caso 2

$lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 0$

$\Longleftrightarrow$(Definición de límite de sucesiones de números naturales)

$(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})(n\geq n_0\rightarrow\left|\frac{f(n)}{g(n)}-0\right|<\varepsilon)$

$\Longleftrightarrow$(Definición de valor absoluto y teniendo en cuenta que f y g son ≥ 0)

$(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})(n\geq n_0\rightarrow\frac{f(n)}{g(n)}<\varepsilon)$

$\Longleftrightarrow$(Despejando la desigualdad)

$(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})(n\geq n_0\rightarrow f(n)<g(n)\varepsilon)$

- Si se escoge un ε cualquiera es la definición de $f\in O(g)$.
- Resta probar que $g\notin O(f)$.

Regla del límite, Caso 2

$lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$
$\iff$(Definición de límite de sucesiones de números naturales)
$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to \left| \frac{f(n)}{g(n)} - 0 \right| < \varepsilon)$
$\iff$(Definición de valor absoluto y teniendo en cuenta que f y g son ≥ 0)
$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to \frac{f(n)}{g(n)} < \varepsilon)$
$\iff$(Despejando la desigualdad)
$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) < g(n)\varepsilon)$

- Si se escoge un ε cualquiera es la definición de $f \in O(g)$.
- Resta probar que $g \notin O(f)$.

Regla del límite, Caso 2

$lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 0$

$\Longleftrightarrow$(Definición de límite de sucesiones de números naturales)

$(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})(n\geq n_0\to\left|\frac{f(n)}{g(n)}-0\right|<\varepsilon)$

$\Longleftrightarrow$(Definición de valor absoluto y teniendo en cuenta que f y g son ≥ 0)

$(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})(n\geq n_0\to\frac{f(n)}{g(n)}<\varepsilon)$

$\Longleftrightarrow$(Despejando la desigualdad)

$(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})(n\geq n_0\to f(n)<g(n)\varepsilon)$

- Si se escoge un ε cualquiera es la definición de $f\in O(g)$.
- Resta probar que $g\notin O(f)$.

Regla del límite, Caso 2

$lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

$\Longleftrightarrow$(Definición de límite de sucesiones de números naturales)

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to \left| \frac{f(n)}{g(n)} - 0 \right| < \varepsilon)$

$\Longleftrightarrow$(Definición de valor absoluto y teniendo en cuenta que f y g son ≥ 0)

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to \frac{f(n)}{g(n)} < \varepsilon)$

$\Longleftrightarrow$(Despejando la desigualdad)

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) < g(n)\varepsilon)$

- Si se escoge un ε cualquiera es la definición de $f \in O(g)$.
- Resta probar que $g \notin O(f)$.

Regla del límite, Caso 2

Por reducción al absurdo supongo que $g \in O(f)$. Se va a llegar a una contradicción.

(Definición $O(f)$)

$g \in O(f) \iff (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_1 \rightarrow g(n) \leq cf(n))$

Ya se probó que $lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \rightarrow f(n) < g(n)\varepsilon)$

Esto implica que $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \rightarrow f(n) < g(n)\frac{1}{c})$

Si tomamos el máximo de n_0 y n_1 que llamamos $n_3 = max\{n_0, n_1\}$. Se cumple que $(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_3 \in \mathbb{N})$ tal que

$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_3 \rightarrow f(n)c < g(n))$ y además

$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_3 \rightarrow g(n) \leq cf(n))$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, fue erroneo suponer que $g \in O(f)$ y entonces $g \notin O(f)$.

Regla del límite, Caso 2

Por reducción al absurdo supongo que $g \in O(f)$. Se va a llegar a una contradicción.
(Definición $O(f)$)
$g \in O(f) \iff (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_1 \rightarrow g(n) \leq cf(n))$
Ya se probó que $lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \rightarrow f(n) < g(n)\varepsilon)$
Esto implica que $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \rightarrow f(n) < g(n)\frac{1}{c})$
Si tomamos el máximo de n_0 y n_1 que llamamos $n_3 = max\{n_0, n_1\}$. Se cumple que $(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_3 \in \mathbb{N})$ tal que
$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_3 \rightarrow f(n)c < g(n))$ y además
$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_3 \rightarrow g(n) \leq cf(n))$ lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, fue erroneo suponer que $g \in O(f)$ y entonces $g \notin O(f)$.

Regla del límite, Caso 2

Por reducción al absurdo supongo que $g \in O(f)$. Se va a llegar a una contradicción.
(Definición $O(f)$)
$g \in O(f) \iff (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_1 \to g(n) \leq cf(n))$
Ya se probó que $lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) < g(n)\varepsilon)$
Esto implica que $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) < g(n)\frac{1}{c})$
Si tomamos el máximo de n_0 y n_1 que llamamos $n_3 = max\{n_0, n_1\}$. Se cumple que $(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_3 \in \mathbb{N})$ tal que
$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_3 \to f(n)c < g(n))$ y además
$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_3 \to g(n) \leq cf(n))$ lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, fue erroneo suponer que $g \in O(f)$ y entonces $g \notin O(f)$.

Regla del límite, Caso 2

Por reducción al absurdo supongo que $g \in O(f)$. Se va a llegar a una contradicción.
(Definición $O(f)$)
$g \in O(f) \iff (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_1 \to g(n) \leq cf(n))$
Ya se probó que $lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) < g(n)\varepsilon)$
Esto implica que $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) < g(n)\frac{1}{c})$
Si tomamos el máximo de n_0 y n_1 que llamamos $n_3 = max\{n_0, n_1\}$. Se cumple que $(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_3 \in \mathbb{N})$ tal que
$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_3 \to f(n)c < g(n))$ y además
$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_3 \to g(n) \leq cf(n))$ lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, fue erroneo suponer que $g \in O(f)$ y entonces $g \notin O(f)$.

Regla del límite, Caso 2

Por reducción al absurdo supongo que $g \in O(f)$. Se va a llegar a una contradicción.
(Definición $O(f)$)
$g \in O(f) \iff (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_1 \to g(n) \leq cf(n))$
Ya se probó que $lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) < g(n)\varepsilon)$
Esto implica que $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to f(n) < g(n)\frac{1}{c})$
Si tomamos el máximo de n_0 y n_1 que llamamos $n_3 = max\{n_0, n_1\}$. Se cumple que $(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_3 \in \mathbb{N})$ tal que
$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_3 \to f(n)c < g(n))$ y además
$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_3 \to g(n) \leq cf(n))$ lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, fue erroneo suponer que $g \in O(f)$ y entonces $g \notin O(f)$.

Ejercicio 8

- ¿$n^2 \in O(n^2)$?
- Es verdadero ya que cumple la definición de O para $n_0 = 0$ y $c = 1$.

Ejercicio 8

- ¿$n^3 \in O(n)$?
- Es falso. Se verfica fácilmente con la regla del límite.
- Partiendo de la definición se prueba suponiendo que $n^3 \in O(n)$ y llegando a una contradicción.

$n^3 \in O(n) \Longleftrightarrow (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \rightarrow n^3 \leq cn)$
$\Longleftrightarrow (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \rightarrow n(n^2 - c) \leq 0)$
Lo anterior es falso ya que a partir de cierto n_0 se cumple que $n(n^2 - c) > 0$.

Ejercicio 8

- ¿$n^3 \in O(n)$?
- Es falso. Se verfica fácilmente con la regla del límite.
- Partiendo de la definición se prueba suponiendo que $n^3 \in O(n)$ y llegando a una contradicción.

$n^3 \in O(n) \iff (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \rightarrow n^3 \leq cn)$
$\iff (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \rightarrow n(n^2 - c) \leq 0)$
Lo anterior es falso ya que a partir de cierto n_0 se cumple que $n(n^2 - c) > 0$.

Ejercicio 8

- ¿$n^3 \in O(n)$?
- Es falso. Se verfica fácilmente con la regla del límite.
- Partiendo de la definición se prueba suponiendo que $n^3 \in O(n)$ y llegando a una contradicción.

$$n^3 \in O(n) \iff (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \rightarrow n^3 \leq cn)$$
$$\iff (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \rightarrow n(n^2 - c) \leq 0)$$

Lo anterior es falso ya que a partir de cierto n_0 se cumple que $n(n^2 - c) > 0$.

Ejercicio 8

- ¿$n^3 \in O(n)$?
- Es falso. Se verfica fácilmente con la regla del límite.
- Partiendo de la definición se prueba suponiendo que $n^3 \in O(n)$ y llegando a una contradicción.

$n^3 \in O(n) \iff (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to n^3 \leq cn)$
$\iff (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to n(n^2 - c) \leq 0)$
Lo anterior es falso ya que a partir de cierto n_0 se cumple que $n(n^2 - c) > 0$.

Ejemplo, Orden exacto de funciones Booleanas balancedas

- Usualmente intentamos calcular ordenes de funciones de costo de algoritmos.
- En realidad esta metodología es lo suficientemente general para cualquier función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^*$.
  - Cantidades de operaciones básicas.
  - Altura de un árbol.
  - Cantidades.
  - Etc.
- Todas estas pueden ser en Promedio, Peor caso o Caso medio (promedio).

Problema

Se quiere comprobar que el orden exacto de las funciones Booleanas balanceadas de n variables es $\Theta(2^{2^n - \frac{n}{2}})$.

Ejemplo, Orden exacto de funciones Booleanas balancedas

- Usualmente intentamos calcular ordenes de funciones de costo de algoritmos.
- En realidad esta metodología es lo suficientemente general para cualquier función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^*$.
  - Cantidades de operaciones básicas.
  - Altura de un árbol.
  - Cantidades.
  - Etc.
- Todas estas pueden ser en Promedio, Peor caso o Caso medio (promedio).

Problema

Se quiere comprobar que el orden exacto de las funciones Booleanas balanceadas de n variables es $\Theta(2^{2^n - \frac{n}{2}})$.

Ejemplo, Orden exacto de funciones Booleanas balancedas

- Usualmente intentamos calcular ordenes de funciones de costo de algoritmos.
- En realidad esta metodología es lo suficientemente general para cualquier función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^*$.
  - Cantidades de operaciones básicas.
  - Altura de un árbol.
  - Cantidades.
  - Etc.
- Todas estas pueden ser en Promedio, Peor caso o Caso medio (promedio).

Problema

Se quiere comprobar que el orden exacto de las funciones Booleanas balanceadas de n variables es $\Theta(2^{2^n - \frac{n}{2}})$.

Ejemplo, Orden exacto de funciones Booleanas balancedas

- Usualmente intentamos calcular ordenes de funciones de costo de algoritmos.
- En realidad esta metodología es lo suficientemente general para cualquier función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^*$.
  - Cantidades de operaciones básicas.
  - Altura de un árbol.
  - Cantidades.
  - Etc.
- Todas estas pueden ser en Promedio, Peor caso o Caso medio (promedio).

Problema

Se quiere comprobar que el orden exacto de las funciones Booleanas balanceadas de n variables es $\Theta(2^{2^n - \frac{n}{2}})$.

Ejemplo, Orden exacto de funciones Booleanas balancedas

- Una función Booleana $f : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$ ($\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$) de n variables puede ser representada mediante una tabla de verdad

f	b_0	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_{2^n-4}	b_{2^n-3}	b_{2^n-2}	b_{2^n-1}
x_n	0	0	0	0	$\dots$	1	1	1	1
x_{n-1}	0	0	0	0	$\dots$	1	1	1	1
x_{n-2}	0	0	0	0	$\dots$	1	1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_3	0	0	0	0	$\dots$	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	$\dots$	0	0	1	1
x_1	0	1	0	1	$\dots$	0	1	0	1

- Dada una función f de n variables, esta tiene 2^n entradas posibles.
- La cantidad de funciones Booleanas de n variables es 2^{2^n}.

Ejemplo, Orden exacto de funciones Booleanas balancedas

- Una función Booleana $f : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$ ($\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$) de n variables puede ser representada mediante una tabla de verdad

f	b_0	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_{2^n-4}	b_{2^n-3}	b_{2^n-2}	b_{2^n-1}
x_n	0	0	0	0	$\dots$	1	1	1	1
x_{n-1}	0	0	0	0	$\dots$	1	1	1	1
x_{n-2}	0	0	0	0	$\dots$	1	1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_3	0	0	0	0	$\dots$	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	$\dots$	0	0	1	1
x_1	0	1	0	1	$\dots$	0	1	0	1

- Dada una función f de n variables, esta tiene 2^n entradas posibles.
- La cantidad de funciones Booleanas de n variables es 2^{2^n}.

Ejemplo, Orden exacto de funciones Booleanas balancedas

- Una función Booleana $f : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$ ($\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$) de n variables puede ser representada mediante una tabla de verdad

f	b_0	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_{2^n-4}	b_{2^n-3}	b_{2^n-2}	b_{2^n-1}
x_n	0	0	0	0	$\dots$	1	1	1	1
x_{n-1}	0	0	0	0	$\dots$	1	1	1	1
x_{n-2}	0	0	0	0	$\dots$	1	1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_3	0	0	0	0	$\dots$	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	$\dots$	0	0	1	1
x_1	0	1	0	1	$\dots$	0	1	0	1

- Dada una función f de n variables, esta tiene 2^n entradas posibles.
- La cantidad de funciones Booleanas de n variables es 2^{2^n}.

Ejemplo, Orden exacto de funciones Booleanas balancedas

- Se quiere comprobar que el orden exacto de las funciones Booleanas balanceadas de n variables es $\Theta(2^{2^n - \frac{n}{2}})$.
- La cantidad exacta de funciones Booleanas balanceadas es $\binom{2^n}{2^{n-1}}$.
- El problema se reduce a probar que $\binom{2^n}{2^{n-1}} \in \Theta(2^{2^n - \frac{n}{2}})$.

$\binom{2^n}{2^{n-1}} =$
Definición combinaciones

$$= \frac{2^n!}{(2^n - 2^{n-1})!2^{n-1}!}$$

Operando

$$= \frac{2^n!}{2^{n-1}!2^{n-1}!}$$

Ejemplo, Orden exacto de funciones Booleanas balancedas

- Se quiere comprobar que el orden exacto de las funciones Booleanas balanceadas de n variables es $\Theta(2^{2^n-\frac{n}{2}})$.
- La cantidad exacta de funciones Booleanas balanceadas es $\binom{2^n}{2^{n-1}}$.
- El problema se reduce a probar que $\binom{2^n}{2^{n-1}} \in \Theta(2^{2^n-\frac{n}{2}})$.

$\binom{2^n}{2^{n-1}} =$
Definición combinaciones

$$= \frac{2^n!}{(2^n - 2^{n-1})!2^{n-1}!}$$

Operando

$$= \frac{2^n!}{2^{n-1}!2^{n-1}!}$$

Ejemplo, Orden exacto de funciones Booleanas balancedas

- Se quiere comprobar que el orden exacto de las funciones Booleanas balanceadas de n variables es $\Theta(2^{2^n - \frac{n}{2}})$.
- La cantidad exacta de funciones Booleanas balanceadas es $\binom{2^n}{2^{n-1}}$.
- El problema se reduce a probar que $\binom{2^n}{2^{n-1}} \in \Theta(2^{2^n - \frac{n}{2}})$.

$\binom{2^n}{2^{n-1}} =$
Definición combinaciones

$$= \frac{2^n!}{(2^n - 2^{n-1})!2^{n-1}!}$$

Operando

$$= \frac{2^n!}{2^{n-1}!2^{n-1}!}$$

Ejemplo, Orden exacto de funciones Booleanas balancedas

- Se quiere comprobar que el orden exacto de las funciones Booleanas balanceadas de n variables es $\Theta(2^{2^n - \frac{n}{2}})$.
- La cantidad exacta de funciones Booleanas balanceadas es $\binom{2^n}{2^{n-1}}$.
- El problema se reduce a probar que $\binom{2^n}{2^{n-1}} \in \Theta(2^{2^n - \frac{n}{2}})$.

$\binom{2^n}{2^{n-1}} =$

Definición combinaciones

$$= \frac{2^n!}{(2^n - 2^{n-1})!2^{n-1}!}$$

Operando

$$= \frac{2^n!}{2^{n-1}!2^{n-1}!}$$

Ejemplo, Orden exacto de funciones Booleanas balancedas

- Se quiere comprobar que el orden exacto de las funciones Booleanas balanceadas de n variables es $\Theta(2^{2^n - \frac{n}{2}})$.
- La cantidad exacta de funciones Booleanas balanceadas es $\binom{2^n}{2^{n-1}}$.
- El problema se reduce a probar que $\binom{2^n}{2^{n-1}} \in \Theta(2^{2^n - \frac{n}{2}})$.

$\binom{2^n}{2^{n-1}} =$
Definición combinaciones

$$= \frac{2^n!}{(2^n - 2^{n-1})!2^{n-1}!}$$

Operando

$$= \frac{2^n!}{2^{n-1}!2^{n-1}!}$$

Ejemplo, Orden exacto de funciones Booleanas balancedas

- Se quiere comprobar que el orden exacto de las funciones Booleanas balanceadas de n variables es $\Theta(2^{2^n-\frac{n}{2}})$.
- La cantidad exacta de funciones Booleanas balanceadas es $\binom{2^n}{2^{n-1}}$.
- El problema se reduce a probar que $\binom{2^n}{2^{n-1}} \in \Theta(2^{2^n-\frac{n}{2}})$.

$\binom{2^n}{2^{n-1}} =$
Definición combinaciones

$$= \frac{2^n!}{(2^n - 2^{n-1})!2^{n-1}!}$$

Operando

$$= \frac{2^n!}{2^{n-1}!2^{n-1}!}$$

Ejemplo, Orden exacto de funciones Booleanas balancedas

Aplico equivalente de Stirling $m! \approx \sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m$

$$\approx \frac{\sqrt{2\pi 2^n}\left(\frac{2^n}{e}\right)^{2^n}}{\left(\sqrt{2\pi 2^{n-1}}\left(\frac{2^{n-1}}{e}\right)^{2^{n-1}}\right)^2}$$

Operando

$$= \frac{\sqrt{2\pi}2^{n/2}\left(\frac{2^n}{e}\right)^{2^n}}{2\pi 2^{n-1}\left(\frac{2^{n-1}}{e}\right)^{2^n}}$$

Operando

$$= (2\pi)^{-1/2}2^{-\frac{n}{2}+1}2^{2^n}$$

Operando

$$= (2\pi)^{-1/2}2^{2^n-\frac{n}{2}+1}$$

Ejemplo, Orden exacto de funciones Booleanas balancedas

Aplico equivalente de Stirling $m! \approx \sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m$

$$\approx \frac{\sqrt{2\pi 2^n}\left(\frac{2^n}{e}\right)^{2^n}}{\left(\sqrt{2\pi 2^{n-1}}\left(\frac{2^{n-1}}{e}\right)^{2^{n-1}}\right)^2}$$

Operando

$$= \frac{\sqrt{2\pi}2^{n/2}\left(\frac{2^n}{e}\right)^{2^n}}{2\pi 2^{n-1}\left(\frac{2^{n-1}}{e}\right)^{2^n}}$$

Operando

$$= (2\pi)^{-1/2}2^{-\frac{n}{2}+1}2^{2^n}$$

Operando

$$= (2\pi)^{-1/2}2^{2^n-\frac{n}{2}+1}$$

Ejemplo, Orden exacto de funciones Booleanas balancedas

Aplico equivalente de Stirling $m! \approx \sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m$

$$\approx \frac{\sqrt{2\pi 2^n}\left(\frac{2^n}{e}\right)^{2^n}}{\left(\sqrt{2\pi 2^{n-1}}\left(\frac{2^{n-1}}{e}\right)^{2^{n-1}}\right)^2}$$

Operando

$$= \frac{\sqrt{2\pi}2^{n/2}\left(\frac{2^n}{e}\right)^{2^n}}{2\pi 2^{n-1}\left(\frac{2^{n-1}}{e}\right)^{2^n}}$$

Operando

$$= (2\pi)^{-1/2}2^{-\frac{n}{2}+1}2^{2^n}$$

Operando

$$= (2\pi)^{-1/2}2^{2^n-\frac{n}{2}+1}$$

Ejemplo, Orden exacto de funciones Booleanas balancedas

Aplico equivalente de Stirling $m! \approx \sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m$

$$\approx \frac{\sqrt{2\pi 2^n}\left(\frac{2^n}{e}\right)^{2^n}}{\left(\sqrt{2\pi 2^{n-1}}\left(\frac{2^{n-1}}{e}\right)^{2^{n-1}}\right)^2}$$

Operando

$$= \frac{\sqrt{2\pi}2^{n/2}\left(\frac{2^n}{e}\right)^{2^n}}{2\pi 2^{n-1}\left(\frac{2^{n-1}}{e}\right)^{2^n}}$$

Operando

$$= (2\pi)^{-1/2}2^{-\frac{n}{2}+1}2^{2^n}$$

Operando

$$= (2\pi)^{-1/2}2^{2^n-\frac{n}{2}+1}$$

Ejemplo, Orden exacto de funciones Booleanas balancedas

- Aplicando equivalentes llegamos a que $lim_{n\to+\infty}\frac{\binom{2^n}{2^{n-1}}}{(2\pi)^{-1/2}2^{2^n-\frac{n}{2}+1}} = 1$.
- Por regla del límite, $\binom{2^n}{2^{n-1}} \in \Theta\left((2\pi)^{-1/2}2^{2^n-\frac{n}{2}+1}\right)$.
- $(2\pi)^{-1/2}2^{2^n-\frac{n}{2}+1} = 2(2\pi)^{-1/2}2^{2^n-\frac{n}{2}}$ entonces $(2\pi)^{-1/2}2^{2^n-\frac{n}{2}} \in \Theta(2^{2^n-\frac{n}{2}})$.
- Como Θ define una relación de equivalencia concluimos que $\binom{2^n}{2^{n-1}} \in \Theta(2^{2^n-\frac{n}{2}})$.

Ejemplo, Orden exacto de funciones Booleanas balancedas

- Aplicando equivalentes llegamos a que $lim_{n\to+\infty} \frac{\binom{2^n}{2^{n-1}}}{(2\pi)^{-1/2}2^{2^n-\frac{n}{2}+1}} = 1$.
- Por regla del límite, $\binom{2^n}{2^{n-1}} \in \Theta\left((2\pi)^{-1/2}2^{2^n-\frac{n}{2}+1}\right)$.
- $(2\pi)^{-1/2}2^{2^n-\frac{n}{2}+1} = 2(2\pi)^{-1/2}2^{2^n-\frac{n}{2}}$ entonces $(2\pi)^{-1/2}2^{2^n-\frac{n}{2}} \in \Theta(2^{2^n-\frac{n}{2}})$.
- Como Θ define una relación de equivalencia concluimos que $\binom{2^n}{2^{n-1}} \in \Theta(2^{2^n-\frac{n}{2}})$.

Ejemplo, Orden exacto de funciones Booleanas balancedas

- Aplicando equivalentes llegamos a que $lim_{n \to +\infty} \frac{\binom{2^n}{2^{n-1}}}{(2\pi)^{-1/2} 2^{2^n - \frac{n}{2} + 1}} = 1$.
- Por regla del límite, $\binom{2^n}{2^{n-1}} \in \Theta\left((2\pi)^{-1/2} 2^{2^n - \frac{n}{2} + 1}\right)$.
- $(2\pi)^{-1/2} 2^{2^n - \frac{n}{2} + 1} = 2(2\pi)^{-1/2} 2^{2^n - \frac{n}{2}}$ entonces $(2\pi)^{-1/2} 2^{2^n - \frac{n}{2}} \in \Theta(2^{2^n - \frac{n}{2}})$.
- Como Θ define una relación de equivalencia concluimos que $\binom{2^n}{2^{n-1}} \in \Theta(2^{2^n - \frac{n}{2}})$.

Ejemplo, Orden exacto de funciones Booleanas balancedas

- Aplicando equivalentes llegamos a que $lim_{n\to+\infty}\frac{\binom{2^n}{2^{n-1}}}{(2\pi)^{-1/2}2^{2^n-\frac{n}{2}+1}}=1$.
- Por regla del límite, $\binom{2^n}{2^{n-1}} \in \Theta\left((2\pi)^{-1/2}2^{2^n-\frac{n}{2}+1}\right)$.
- $(2\pi)^{-1/2}2^{2^n-\frac{n}{2}+1} = 2(2\pi)^{-1/2}2^{2^n-\frac{n}{2}}$ entonces $(2\pi)^{-1/2}2^{2^n-\frac{n}{2}} \in \Theta(2^{2^n-\frac{n}{2}})$.
- Como Θ define una relación de equivalencia concluimos que $\binom{2^n}{2^{n-1}} \in \Theta(2^{2^n-\frac{n}{2}})$.