# Análisis de un algoritmo de Fibonacci

Nicolás Carrasco
Programación 3
Instituto de Computación
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

E-mail: `carrasco@fing.edu.uy`

28 de septiembre de 2008

## 1. Introducción

La sucesión de Fibonacci

$$F_n \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \ ; \\ 1 & \text{si } n = 1 \ ; \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{si } n \geq 2 \ . \end{cases}$$

Fue presentada en oriente por Leonardo de Pisa cerca del año 1202. Sin embargo, fue descubierta antes por matemáticos hindùes. Existen muchas propiedades y aplicaciones en teoría de números juegos como también en computación. A modo de ejemplo, estos números con ciertas restricciones son el peor caso del algoritmo de Euclides -cuyo análisis es muy complicado-.

Comúnmente en computación cuando se presentan mecanismos para calcular un número de Fibonacci se mencionan tres algoritmos. En primer lugar uno recursivo que sale de la definición, luego uno iterativo de orden $n$ y por último otro recursivo que utiliza técnicas de divide and conquer que es de orden $\log n$.

**Algorithm 1** fibonacci

```
Require: n ≥ 0
  if n = 0 then
    return 0
  else if n = 1 then
    return 1
  else
    return fibonacci (n − 1) + fibonacci (n − 2)
  end if
```

El objetivo aquí es analizar el primero y ver que su orden es exponencial. Para el análisis se utilizaran técnicas de funciones generatrices ya que la metodología es lo suficientemente general para analizar varias clases de algoritmos por lo que este ejemplo puede servir como una breve introducción.

## 2. Análisis

La operación básica que se hace es la suma, definimos $C(n)$ como la cantidad de sumas que son necesarias para calcular fibonacci(n). Si a $C(0), C(1), C(2), \ldots, C(n), \ldots$ la consideramos como unas sucesión de números naturales, es claro que $c_0 = 0$ y $c_1 = 0$ y para los $n \geq 2$ es $c_n = c_{n-1} + c_{n-2} + 1$ . Su generatriz es $C(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$.

Resultando la siguiente ecuación de funciones generatrices

$$\sum_{n\geq 0} c_n z^n = \sum_{n\geq 2} (c_{n-1} + c_{n-2} + 1) z^n$$

Ahora lo que sigue es transformar las funciones generatrices a otras ya conocidas. Primero se separa en tres sumatorias

$$\sum_{n\geq 0} c_n z^n = \sum_{n\geq 2} c_{n-1} z^n + \sum_{n\geq 2} c_{n-2} z^n + \sum_{n\geq 2} z^n$$

Luego se ajustan los índices

$$\sum_{n\geq 0} c_n z^n = \sum_{n\geq 1} c_n z^{n+1} + \sum_{n\geq 0} c_n z^{n+2} + \sum_{n\geq 2} z^n$$

Se sacan factores

$$\sum_{n\geq 0} c_n z^n = z \sum_{n\geq 1} c_n z^n + z^2 \sum_{n\geq 0} c_n z^n + \sum_{n\geq 2} z^n$$

Como $c_0 = 0$ entonces $\sum_{n\geq 1} c_n z^n = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ , sumando y restando $1 + z$

$$\sum_{n\geq 0} c_n z^n = z \sum_{n\geq 0} c_n z^n + z^2 \sum_{n\geq 0} c_n z^n + \sum_{n\geq 0} z^n - 1 - z$$

Ahora como $C(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ y $\sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$ resulta que

$$C(z) = zC(z) + z^2 C(z) + \frac{1}{1-z} - 1 - z$$

Simplificando

$$C(z) = \frac{z^2}{(1-z)(1-z-z^2)}$$

Las raíces del polinomio $1 - z - z^2$ son $-\phi$ y $-\widehat{\phi}$ . Siendo $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (comúnmente conocida como la razón áurea) y su conjugado $\widehat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ por lo que se puede factorizar $-(z+\phi)(z+\widehat{\phi})$.

Aplicando la propiedad $\phi\widehat{\phi} = -1$ se llega

$$\begin{aligned} -(z+\phi)(z+\widehat{\phi}) &= -\phi\widehat{\phi}(\frac{z}{\phi}+1)(\frac{z}{\widehat{\phi}}+1) \\ &= (\frac{z}{\phi}+1)(\frac{z}{\widehat{\phi}}+1) \\ &= (\frac{\widehat{\phi}z}{\widehat{\phi}\phi}+1)(\frac{\phi z}{\phi\widehat{\phi}}+1) \\ &= (1-\widehat{\phi}z)(1-\phi z) \end{aligned} \tag{1}$$

Por lo que llegamos a que

$$C(z) = \frac{z^2}{(1-z)(1-\widehat{\phi}z)(1-\phi z)}$$

Ahora lo que sigue es separar en fracciones simples o sea hallar $A, B, C$ tales que

$$\frac{z^2}{(1-z)(1-\widehat{\phi}z)(1-\phi z)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1-\widehat{\phi}z} + \frac{C}{1-\phi z}$$

Igualando coeficientes resulta que

$$A(1-\widehat{\phi}z)(1-\phi z) + B(1-z)(1-\phi z) + C(1-z)(1-\widehat{\phi}z) = z^2$$

Operando

$$A(1-z-z^2) + B(1-\phi z - z + \phi z^2) + C(1-\widehat{\phi}z - z + \widehat{\phi}z^2) = z^2$$

Resulta el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ -A-B(\phi+1)-C(\widehat{\phi}+1) &= 0 \\ -A+\phi B+\widehat{\phi}C &= 1 \end{aligned}$$

Que su solución es $A = -1$ , $B = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}$ y $C = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}$.

Por lo que la función generatriz es

$$C(z) = -\frac{1}{1-z} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\frac{1}{1-\widehat{\phi}z} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\frac{1}{1-\phi z}$$

Extrayendo coeficientes se llega a que

$$c_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\widehat{\phi}^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\phi^n - 1$$

Como el modulo de $\widehat{\phi}$ es inferior a uno asintóticamente se comporta

$$c_n \sim \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

De esto se concluye que fibonacci(n) pertenece a $\Theta\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.