Forelesning 2

- stokastisk forsøk
- utfallsrom
- enkeltutfall
- hendelse $(A, B, \dots)$
- $A \cup B$ (eller)
- $A \cap B$ (og)
- A' (ikke)

2.3 Kombinatorikk forts.

Regel 2.2: En operasjon kan utføres på n_1 måter. For hver av disse, kan en annen operasjon utføres på n_2 måter, osv. En følge av k operasjoner kan utføres på $n_1 n_2 \cdots n_k$ måter

- Permutasjon: (ordnet utvalg uten tilbakelegging) ordnet følge av alle eller en del av elementene i en mengde

Eks: $A = \{1, 2, 3\}$. Mulige permutasjoner av 2 elementer fra A; 12, 13, 21, 23, 31, 32

Teorem 2.2: Antall permutasjoner av r elementer trukket fra n distinkte objekter er

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

Bevis: Første element kan velges på n måter, neste på $n-1$, osv., det r-te på $n-r+1$ måter

Teorem 2.1: Antall permutasjoner av n distinkte objekter er $n!$

Eks: Antall permutasjoner av kort i en kortstokk er $52!$

Eks: Antall permutasjoner av 2 elementer trukket fra $\{1, 2, 3\}$: $_3P_2 = \underbrace{3 \cdot 2}_{2\text{ stk}} = 6$

Eks: 10 deltar i skirenn. Hvor mange muligheter for fordeling av gull, sølv og bronse?

$$_{10}P_3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

- En kombinasjon (uordnet utvalg uten tilbakelegging) er en uordnet delmengde av en gitt mengde

Eks: $A = \{1, 2, 3\}$. Mulige kombinasjoner av to elementer fra A: 12, 13, 23.

Teorem 2.6 Antall kombinasjoner av r elementer trukket fra n distinkte objekter er

$${}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}$$

↳ tar utgangspunkt i antall ordnede utvalg uten tilbakelegging, $\frac{n!}{(n-r)!}$. Teller da hvert utvalg $r!$ ganger.

Merk: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-r}$

Eks: Antall lottorekker: $\binom{34}{7} = \frac{34\cdot 33\cdot 32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = 5\ 379\ 616$

2.4 Sannsynlighet for en hendelse

- **Sannsynligheten for en hendelse A:** $P(A)$ – sannsynligheten for at hendelsen inntreffer, dvs. utfallet av det stokastiske forsøket tilhører A.

  Egenskaper for P:

  ↳ $0 \leq P(A) \leq 1$

  ↳ $P(\emptyset) = 0$

  ↳ $P(\underset{\text{utfallsrom}}{\underline{S}}) = 1$

  ↳ Hvis $A_1, A_2, A_3, \ldots$ er parvis disjunkte hendelser ($A_i \cap A_j = \emptyset$ for $i \neq j$) så er

  $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$

Eks: Terningkast: $P(1) = P(2) = \cdots = P(6) = \frac{1}{6}$

Den siste egenskapen gir: $P(\{2,4,6\}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Dette er eksempel på en **uniform sannsynlighetsmodell**: alle enkeltutfall er like sannsynlige.

Regel 2.3: Hvis utfallsrommet har N enkeltutfall, $N = |S|$, som alle er like sannsynlige, og hendelsen A består av n enkeltutfall, så er $P(A) = \frac{n}{N} = \frac{\text{"antall gunstige"}}{\text{"antall mulige"}}$

Eks: Får utdelt n kort i kortspill. Finn sannsynligheten for ikke å få noe bildekort (J, Q, K, A)?

Utfallsrommet består av alle mulige hender, $\binom{52}{n}$ stk, alle like sannsynlige.

Hendelse A: ingen bildekort. A består av $\binom{36}{n}$ enkelt utfall (det er 16 bildekort).

$$P(A) = \frac{\binom{36}{n}}{\binom{52}{n}} = \frac{\frac{36!}{n!(36-n)!}}{\frac{52!}{n!(52-n)!}} = \frac{36!}{52!}\cdot\frac{(52-n)!}{(36-n)!}$$

Eks forts:

$n = 5$: $P(5) = \frac{36!}{52!} \frac{47!}{31!} = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \underline{0,145}$

$n = 10$: $P(10) = \frac{36!}{52!} \frac{42!}{26!} = \underline{0,0161}$

$n = 13$: $P(A) = \frac{36!}{52!} \frac{39!}{23!} = \underline{0,00364}$

- Sannsynlighet som relativ frekvens: $P(A)$ er andelen ganger A inntreffer i det lange løp når det stokastiske forsøket gjentas.