Forelesning 3

- Permutasjon (ordnet utvalg uten tilbakelegging) av r fra n. Kan gjøres på $n(n-1)\cdots(n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ måter.

- Kombinasjoner (uordnet utvalg uten tilbakelegging) av r fra n kan gjøres på $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot r}$

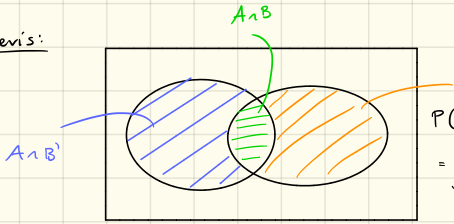
- Sannsynlighet for hendelse A: $0 \le P(A) \le 1$, $P(\emptyset) = 0$, $P(\underset{\text{utfallsrommet}}{S}) = 1$, hvis $A_1, A_2, A_3, \ldots$ er parvis disjunkte hendelser ($A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$): $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$

2.5 Addisjonsregler

Har allerede: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ hvis A og B er disjunkte.

Teorem 2.7 Addisjonsregelen: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Bevis:



$$P(A \cup B) = P\big((A \cup B') \cup (A \cap B) \cup (A' \cap B)\big)$$
$$= \underbrace{P(A \cup B') + P(A \cap B)}_{P(A)} + \underbrace{P(A' \cap B) + P(A \cap B)}_{P(B)} - P(A \cap B)$$

Eks: Kast to terninger, rød og blå terning. Hva er sannsynligheten for at minst én viser 1? Finn altså $P(A \cup B)$

A: rød viser 1 $\qquad P(A) = \frac{1}{6}$

B: blå viser 1 $\qquad P(B) = \frac{1}{6}$

For kast av begge terninger: utfallsrom 11, 12, 13, …, 66 => 36 like sannsynlige utfall

$P(A \cap B) = P(\text{begge viser } 1) = \frac{1}{36}$

Dermed: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$

Teorem 2.8 Addisjonssetningen, 3 hendelser: $P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C) - P(A\cap B) - P(B\cap C) - P(A\cap C) + P(A\cap B\cap C)$

Teorem 2.9: $P(A) + P(A') = 1$

($S = A\cup A'$, A og A' disjunkte, $1 = P(S) = P(A\cup A') = P(A) + P(A')$)

Eks: Hva er sannsynligheten for at minst to har bursdag på samme dag i en klasse på 30 stk?

A: to har samme bursdag

Utfallsrom: (bursdag for elev først i alfabetet, bursdag for elev nr. 2 i alfabetet, ..., bursdag for elev sist i alfabetet)

365^{30} enkeltutfall, alle like sannsynlige.

Vanskelig å spesifisere A. Lettere med A'

Antall enkeltutfall i A': $365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots 336$

$$P(A) = 1 - P(A')$$
$$= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots 336}{365^{30}} = 1 - 0{,}29 = \underline{0{,}71}$$

2.6 Betinget sannsynlighet, multiplikasjonsregelen, uavhengighet

Eks: Kast to terninger. Hva er sannsynligheten for å få 4 eller mindre hvis vi vet at minst en av dem viser 1 (men ikke hvilken).

B: 4 eller mindre $\qquad B = \{11, 21, 13, 21, 22, 31\}$, $n(B) = 6$

A: en terning viser 1 $\qquad A = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 31, 41, 51, 61\}$

La $n(A)$ = antall enkeltutfall i A

$n(A) = 11$. Ønsker å begrense utfallsrommet til A.

$A\cap B = \{11, 12, 13, 21, 31\}$, $n(A\cap B) = 5$

Den betingede sannsynligheten for B gitt A: $P(B|A) = \dfrac{n(A\cap B)}{n(A)} = \dfrac{5}{11}$

Merk:

$$P(B|A) = \frac{n(A\cap B)}{n(A)} = \frac{n(A\cap B)/n(S)}{n(A)/n(S)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Her: $P(B|A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{5/36}{11/36} = \dfrac{5}{11}$

Den ubetingede sannsynligheten for B gitt A: $P(B|A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ (hvis $P(A) \neq 0$), også for ikke-uniform sannsynlighetsmodell. Alle regler gjelder også for betinget sannsynlighet, f.eks

$P(A\cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A\cap B|C)$, $\quad 1 = P(A|B) + P(A'|B)$

A og B er <u>uavhengige</u> hvis $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Anta $P(A) > 0$. A og B uavhengig $\iff P(B|A) = P(B)$

Anta $P(B) > 0$. A og B uavhengig $\iff P(A|B) = P(A)$

<u>Eks. forts.:</u> $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(B|A) = \frac{5}{11} \neq P(B)$, A og B er <u>ikke</u> uavhengige!

<u>Eks:</u> A: rød terning viser 6

B: blå terning viser 6

$P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{36} = P(A) \cdot P(B)$, dvs. A og B er uavhengige.

<u>Multiplikasjonsregelen</u>

<u>Teorem 2.10:</u> $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

<u>Bevis:</u> fra definisjon av betinget sannsynlighet

<u>Eks:</u> Finn sannsynligheten for å trekke tre kort av samme sort fra fra en kortstokk.

A: 2. kort har samme sort som 1. kort $P(A) = \frac{12}{51}$

B: 3. kort har samme sort som 2. kort.

$P(B|A) = \frac{11}{50}$

$P(A \cap B) = \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} = \underline{0,052}$

<u>Teorem 2.12:</u> $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot P(A_k | A_1 \cap \dots \cap A_{k-1})$

Hvis $A_1, \dots, A_k$ er uavhengige