TMA4245 Statistikk
Vår 2019

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Innlevering 1

Dette er den første av tre innleveringer i blokk 1. Denne øvingen skal oppsummere pensum forelest de to første forelesningsukene. For å få godkjent innleveringen kreves det at minimum 40% av svarene er riktige, og at besvarelsen reflekterer at man har gjort et ordentlig forsøk på minimum 75% av oppgavene. Alle oppgaver teller like mye.

Oppgave 1

Vis ved hjelp av venndiagram at

$$\left.\begin{array}{l}(A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B'\end{array}\right\} \text{de Morgans lov(er)}$$

og at

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Oppgave 2

I lotto spiller en deltager en enkeltrekke ved å velge 7 av 34 tall. Det er også tillatt å spille system. Når en deltager spiller system velger deltageren ut m av 34 tall, hvor m betegner antall tall i systemet. Når en deltager spiller et system av størrelse m, vil antall enkeltrekker som spilles være lik antall mulige kombinasjoner av 7 tall blant de m tallene i systemet.

Hvor mange enkeltrekker spilles i et system som inneholder 8 tall?

Hvor mange enkeltrekker spilles i et system som inneholder m tall?

Når en leverer inn en lottokupong, må en betale kr 3,- per enkeltrekke som spilles. Hvor mye koster det å levere inn et system med 12 tall? (Dette er det største systemet som er tillatt av Norsk Tipping.)

Oppgave 3

I kortspillet Blackjack får man den høyeste gevinsten hvis de to første kortene man får er et ess sammen med enten en tier, en knekt, en dame eller en konge. Dette kalles «å få en blackjack».

I kasinoer der man spiller Blackjack for penger, blander man gjerne 8 kortstokker som man trekker disse kortene fra. (Hensikten med dette er å gjøre det vanskeligere å «telle kort», det vil si å regne seg fram til hvor mange ess og billedkort som er igjen i stokken.) Det er da så mange kort i stokken at vi kan betrakte dette som en situasjon «med tilbakelegging», altså at man trekker ett og ett kort fra en vanlig kortstokk og legger forrige kort tilbake før man trekker et nytt. En vanlig kortstokk har 52 kort, med 4 farger som har hver sin tier, knekt, dame, konge og ess.

Hva er sannsynligheten for å få en blackjack?

Hva er sannsynligheten for å få en blackjack hvis det første kortet du har fått er et ess?

La oss si at en spiller som teller kort har funnet ut at sannsynligheten for å få blackjack nå er 0.06, at sannsynligheten for å få et ess som første kort er 0.1 og at sannsynligheten for at det første kortet ditt var et ess hvis du har fått en blackjack er 0.4. Bruk disse tallene til å regne ut hva sannsynligheten nå er for å få en blackjack hvis det første kortet du har fått er et ess.

Oppgave 4

På et bestemt sted i et prosessanlegg står to elektrisk drevne kjølevannspumper. For å ha tilstrekkelig kapasitet må begge pumpene fungere. La

$$E_i = \text{Pumpe nr } i \text{ er i feiltilstand}, \quad i = 1, 2.$$

Følgende sannsynligheter er gitt:

$$P(E_1) = P(E_2) = 0.01, \quad P(E_2|E_1) = 0.1.$$

Er hendelsene E_1 og E_2 uavhengige? Er de disjunkte? Begrunn svarene.

Finn sannsynligheten for at man ikke har nok kapasitet, dvs finn $P(E_1 \cup E_2)$.

Ledelsen er ikke fornøyd med dette, og vil installere en turbindrevet pumpe i tillegg. Det er da tilstrekkelig kapasitet hvis minst 2 av de 3 pumpene fungerer. La

$$T = \text{Den turbindrevne pumpa er i feiltilstand}$$

Det er oppgitt at den turbindrevne pumpa fungerer uavhengig av de elektrisk drevne pumpene, og at $P(T) = 0.04$.

Finn sannsynligheten for at det ikke er tilstrekkelig pumpekapasitet, dvs finn sannsynligheten for at minst 2 av de 3 pumpene ikke fungerer.

Oppgave 5

Et politisk spørsmål blir tatt opp i en TV-debatt. Et stykke ut i debatten blir det samme spørsmålet stilt til seerne. Vi ser heretter bare på de seerne som har en oppfatning av spørsmålet. De som mener *ja*, oppfordres til å ringe et bestemt telefonnummer og de som mener *nei*, blir bedt om å ringe et annet nummer. Vi antar i denne oppgaven at 80% av seerne mener *ja*, og 20% mener *nei*. Vi antar videre at sannsynligheten for at en tilfeldig "*ja*-seer" ringer inn er 0.02. Tilsvarende sannsynlighet for en "*nei*-seer" er 0.05. Vi lar J være hendelsen at en seer mener *ja*, og R være hendelsen at seeren ringer.

Uttrykk de fire opplysningene i oppgaven som sannsynligheter (betingede eller ubetingede) for J og R (eller de komplementære hendelsene).

Hvor stor andel av innringerene mener *ja*? Gir resultatet av innringingen et riktig bilde av seernes oppfatning?

Oppgave 6

En bedrift produserer elektriske komponenter. Komponentene kan ha to typer feil. Vi velger tilfeldig ut en komponent fra produksjonen og definerer to hendelser: A = komponenten har en feil av type A, og B = komponenten har en feil av type B. La A^c og B^c være de tilhørende komplementære hendelsene.

Det er kjent at $P(B) = 0.09$, $P(A|B) = 0.5$ og $P(A|B^c) = 0.01$.

Vi ser på en tilfeldig valgt komponent fra produksjonen.

Hva er sannsynligheten for at komponenten både har en type A og en type B feil?

Hva er sannsynligheten for at komponenten har en feil av type A?

Gitt at komponenten har en feil av type A, hva er sannsynligheten for at komponenten har en feil av type B?

Fasit

2. 8, 2376 kr.

3. 0.04734, 0.3077, 0.24

4. $0.019, 0.00172$

5. 0.62

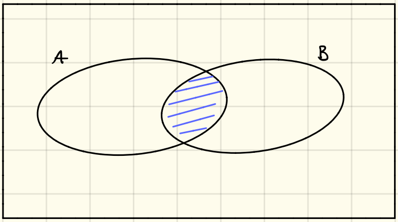
6. $0.045, 0.054, 0.83$

Skriftlig innlevering 1

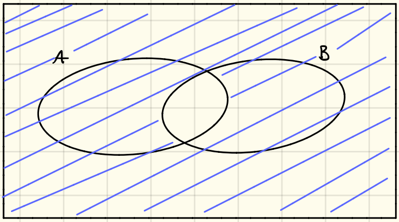
$\boxed{1}$

$(A \cap B)' = A' \cap B'$

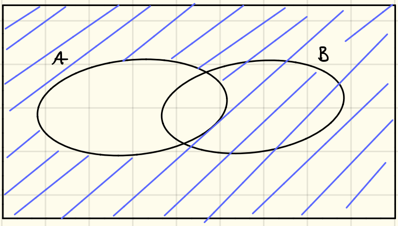
$\Rightarrow$



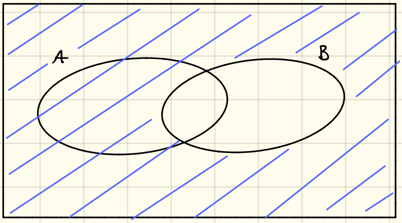
$A \cap B$



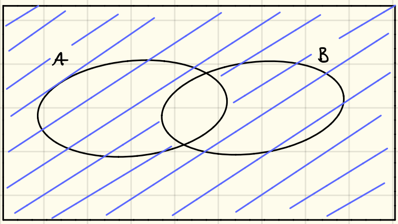
$(A \cap B)'$



A'



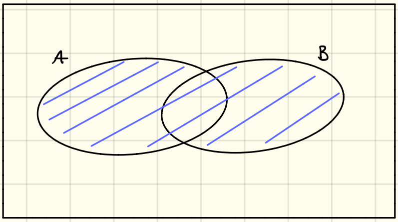
B'



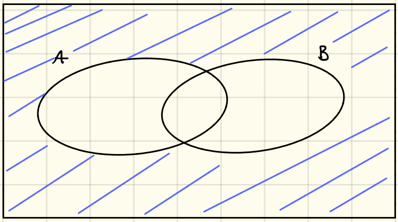
$A' \cup B'$

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

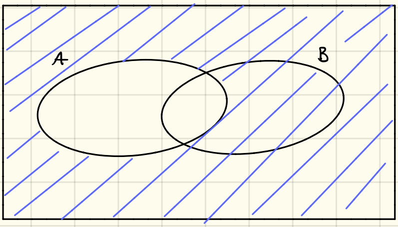
$\Rightarrow$



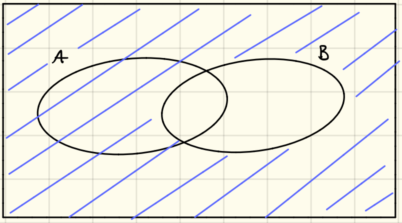
$A \cup B$



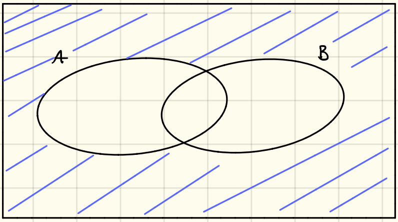
$(A \cup B)'$



A'



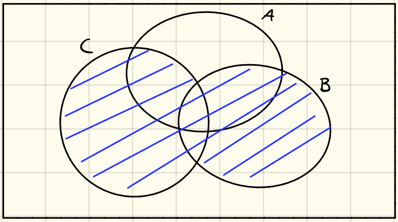
B'



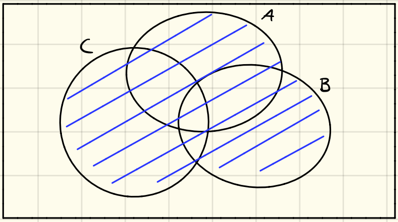
$A' \cap B'$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

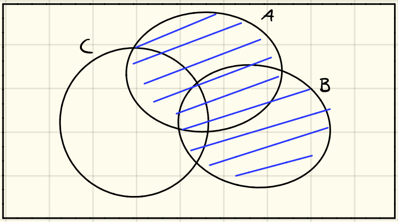
$\Rightarrow$



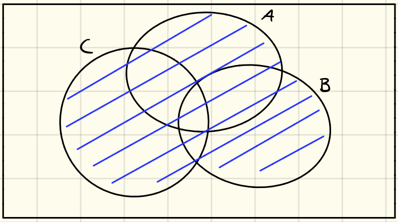
$B \cup C$



$A \cup (B \cup C)$



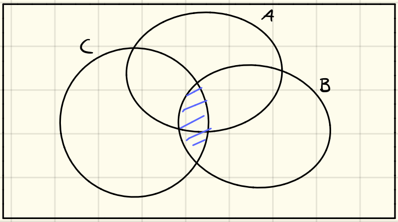
$(A \cup B)$



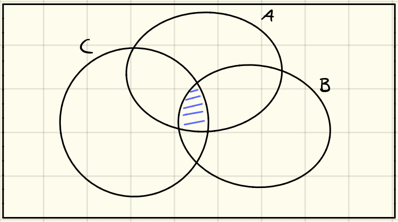
$(A \cup B) \cup C$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

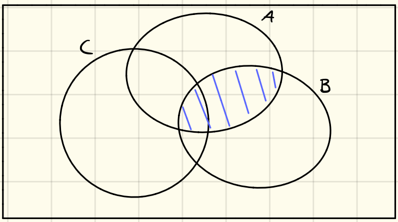
$\Rightarrow$



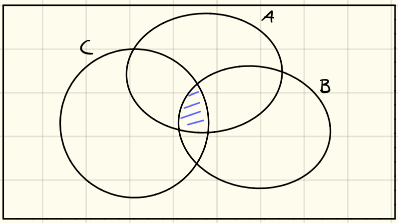
$B \cap C$



$A \cap (B \cap C)$

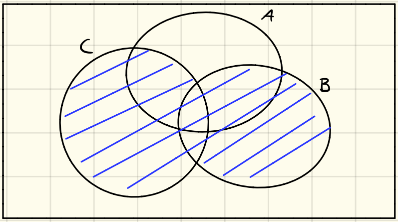


$(A \cap B)$

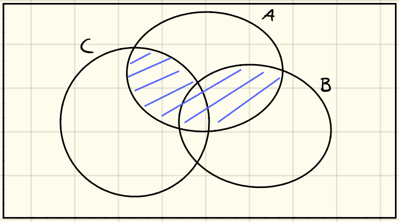


$(A \cap B) \cap C$

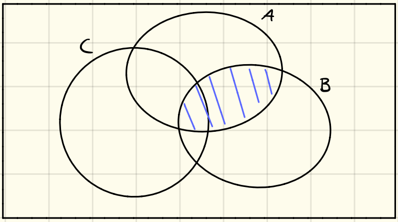
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$



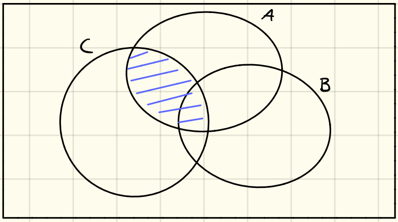
$B \cup C$



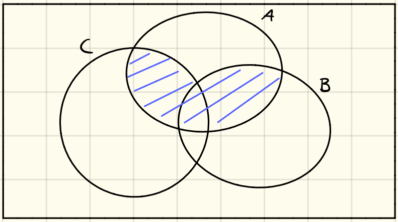
$A \cap (B \cup C)$



$A \cap B$



$A \cup C$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

2

$$\binom{8}{7} = \frac{8!}{7!\,(8-7)!} = \frac{8!}{7!} = \underline{\underline{8}}$$

$$\binom{m}{7} = \underline{\underline{\frac{m!}{7!\,(m-7)!}}}$$

$$\binom{12}{7} = \frac{12!}{7.\ \ 5!} = \frac{95040}{120} = 792$$

Total kostnad = 792 rekker × 3 kr = $\underline{\underline{2376\ \text{kr}}}$

3

$P(ess) = \frac{32}{416}$

$\underline{P(B)}$: få en tier, knekt, dame eller en konge.

$P(B) = \frac{128}{416}$

$$P(\text{en blackjack}) = P(ess) \times P(B) + P(B) \times P(ess)$$

$$= \frac{32}{416} \cdot \frac{128}{416} + \frac{128}{416} \cdot \frac{32}{416}$$

$$= 0{,}02367 + 0{,}02367$$

$$= \underline{\underline{0{,}04734}}$$

$$P(B \mid ess) = \frac{128}{416} = \underline{\underline{0{,}3077}}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B)$$

$P(black) = 0{,}06$

$P(Fess) = 0{,}1$

$P(Fess \mid black) = 0{,}4$

$$P(black \mid Fess) = \frac{P(Fess \cap black)}{P(Fess)} = \frac{P(Fess \mid black)\,P(black)}{P(Fess)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}06}{0{,}1} = \underline{\underline{0{,}24}}$$

$\boxed{4}$ Pumpene er avhengige fordi $P(E_2 | E_1) = 0,1$. Siden sannsynligheten er 0,1 og ikke 0,01 for E_2 til å skje etter at E_1 har skjedd, så er de avhengige.

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(A \cap B) = 0,01 + 0,01 - (0,01 \times 0,01)$$

$$= \underline{\underline{0,0199}}$$

$$P(T) = 0,04$$

$$P(F\,2/3) = P(T \cap E_1) + P(E_1 \cap E_2) + P(E_2 \cap T) = P(T | E_1) P(E_1) + \underline{P(E_2 | E_1)}\, \underline{P(E_1)} + P(T | E_2) P(E_2)$$

$$= P(T | E_1) \cdot 0,01 + 0,1 \cdot 0,01 + P(T / E_2) \cdot 0,04$$

$$= 0,04 \cdot 0,01 + \underline{0,1} \cdot \underline{0,01} + \underline{0,04} \cdot 0,01$$

$$= 0,0018 - 2P(T \cap E_1 \cap E_2)$$

$$= 0,0018 - 2(0,04 \cdot 0,1 \cdot 0,01)$$

$$= \underline{\underline{0,00172}}$$

$$-2\,P(T \cap E_1 \cap E_2) = -2\,P(T | E_1 \cap E_2) \cdot P(E_1 \cap E_2)$$

$$-2\,P(T) \cdot P(E_1 \cap E_2) = -2\,P(T) \cdot P(E_2 | E_1) \cdot P(E_1)$$

$\boxed{5}$ 80% : Ja → Ringer inn: 0,02

20% : Nei → Ringer inn: 0,05

$P(J) = 0,8$	$P(R \mid J) = 0,02$
$P(J') = 0,2$	$P(R \mid J') = 0,05$

Ja ringer: $\frac{2 \cdot 80}{100} = 1,6\%$ av seere

Nei ringer: $\frac{5 \cdot 20}{100} = 1\%$ av seere

Total nr ringer: $\underline{2,6\,\%}$

Andel av Ja Innringere: $\frac{1,6 \cdot 100}{2,6} = 61,5\,\%$

Antall innringere gir ikke en god representasjon av seernes oppfatning. Denne informasjonen kan dermed vise antydninger om de fleste mener Ja eller Nei.

$\boxed{6}$ $\rightarrow P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B) = 0{,}5 \times 0{,}09 = \underline{\underline{0{,}045}}$

$\rightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = P(A|B)\,P(B) + P(A|B^c)\,P(B^c)$

$= 0{,}5 \cdot 0{,}09 + 0{,}01 \cdot 0{,}91 = \underline{\underline{0{,}0541}}$

$\rightarrow P(A|B) = 0{,}5 = \dfrac{P(B|A)\,P(A)}{0{,}09}$

$0{,}045 = P(B|A) \cdot 0{,}0541$

$\underline{\underline{P(B|A) = 0{,}832}}$