Forelesning 4

Uavhengighet: Hendelsen A og B er uavhengige hvis $P(B|A) = P(B)$

Merk: Anta A og B uavhengige.

$$P(A|B) \underset{\text{def}}{=} \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)} \underset{\text{uavhengig}}{=} \frac{\cancel{P(B)}\cdot P(A)}{\cancel{P(B)}} = P(A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B\cap A)}{P(B)}$$

↳ Hvis B er uavhengig av A, så er A uavhengig av B.

Eks: Kast to terninger, registrer antall øyne på hver terning

$S = \{(1,1), (2,1), (3,1), \ldots, (6,6)\}$

$A = \{6.$ på første terning$\}$

$B = \{6.$ på andre terning$\}$

Uniform sannsynlighets modell.

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \qquad P(B) = \frac{6}{36} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

$$P(A\cap B) = \frac{1}{36} \qquad P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

Dermed: $P(B|A) = P(B) \iff A$ og B er uavhengige

Husk: Betinget sannsynlighet

Teorem (multiplikativregel)

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \iff P(A\cap B) = P(B|A)\cdot P(A)$$

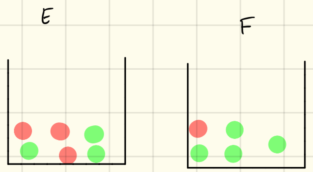
Merk: vi har også

$$P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(B)$$

Spesielt: Hvis A og B er uavhengige:

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$

Eks: To urner med røde og gule kuler



Velg først urne med sannsynlighet $\frac{1}{3}$ for E og $\frac{2}{3}$ of F. Trekk deretter en kule fra denne urna.

$E = \{\text{velger urne } E\}$ $\quad F = \{\text{velger urne } F\}$

$R = \{\text{Trekker rød kule}\}$ $\quad G = \{\text{trekker grønn kule}\}$

Vet:

$P(E) = \frac{1}{3}$, $\quad P(F) = \frac{2}{3}$

$P(R \mid E) = \frac{1}{2}$, $\quad P(G \mid E) = \frac{1}{2}$

$P(R \mid F) = \frac{1}{5}$, $\quad P(G \mid F) = \frac{4}{5}$

Spørsmål: $P(E \cap R) = ?$

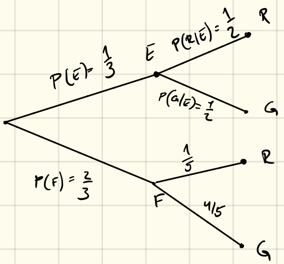
$P(F \cap R) = ?$

hjelper ikke

$$P(E \cap R) = \cancel{P(E \mid R)\, P(R)} = P(R \mid E)\, P(E)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(F \cap R) = P(R \mid F) \cdot P(F) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

Trediagram



$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$

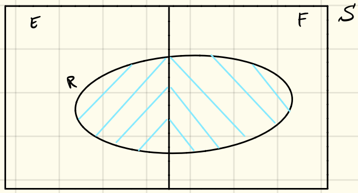
$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$

Generalisering av teoremet over:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

2.7 Bayes regel og setningen om total sannsynlighet

Se eksempelet med urner og kuler. Ønsker $P(R) = ?$



$$R = (E \cap R) \cup (F \cap R)$$

$$P(R) = P((E \cap R) \cup (F \cap R)) = \underline{P(E \cap R)} + \underline{P(F \cap R)}$$

disjunkte

$$= P(R|E) \cdot P(E) + P(R|F) \cdot P(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{3}{10}}}$$

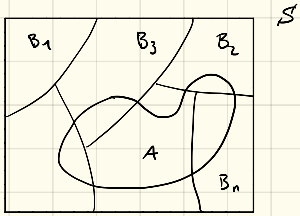
Teorem (setning om total sannsynlighet)

La $B_1, B_2, \ldots, B_n$ være en partisjon av S (dvs. $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = S$ og $B_i \cap B_j = \emptyset$ for $i \neq j$)

med $P(B_i) > 0$ for $i = 1, 2, \ldots, n$

For en hendelse A har vi da:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$



↳ $P(A)$ Blir arealet av hver bit.

Bevis $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$

disjunkte

$$P(A) = P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n))$$

addisjon regel $= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$

Neste spørsmål: $P(E|R) = ?$

Svaret gis av Bayes regel.

Teorem La A og B være to hendelser hvor $P(A) > 0$. $P(B) > 0$. Da gjelder $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \underline{\frac{P(A|B) P(B)}{P(A)}}$

Eks

$$P(E|R) = \frac{P(R|E) P(E)}{P(R)}$$