

Trabajo Práctico N° 1

Teoría de Circuitos - 2019

Grupo 1:

Farall, Facundo

Gaytan, Joaquín

Kammann, Lucas

Maselli, Carlos

Müller, Malena

20 de agosto de 2019

1. EJERCICIO 1: FILTRO NOTCH PASIVO

1.1. CÁLCULO TEÓRICO

1.1.1. DISEÑO DE LOS COMPONENTES

Para el cálculo teórico se consideró al circuito como dos cuadripolos en paralelo, de los cuales se obtuvieron sus parámetros admitancia. El primero de los cuadripolos es el presentado en la figura 1.1.

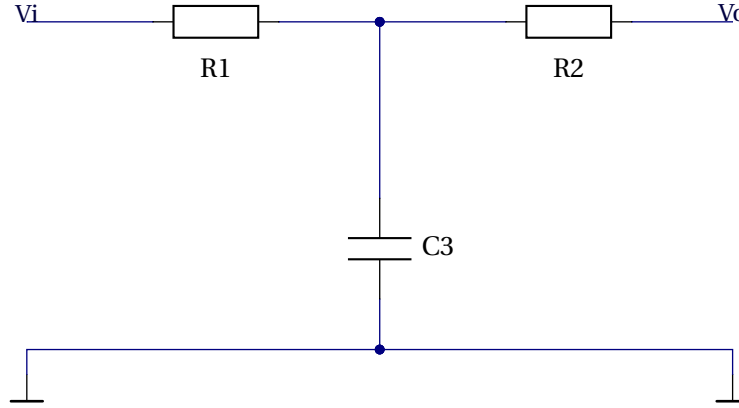


Figura 1.1: Cuadripolo A

El cálculo de los parámetros viene facilitado por la simpleza del circuito y el hecho de ser recíproco, de forma que sus parámetros admitancia son:

$$y_{A11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{1}{R_1 + \frac{R_2}{R_2 \cdot C_3 \cdot s + 1}} = \frac{R_2 \cdot C_3 \cdot s + 1}{R_1 \cdot R_2 \cdot C_3 \cdot s + (R_1 + R_2)} \quad (1.1)$$

$$y_{A12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} = \frac{-I_2 \cdot \frac{1}{R_1 \cdot C_3 \cdot s + 1}}{I_2 \cdot \left(R_2 + \frac{R_1}{R_1 \cdot C_3 \cdot s + 1} \right)} = -\frac{1}{R_1 \cdot R_2 \cdot C_3 \cdot s + (R_1 + R_2)} \quad (1.2)$$

$$y_{A21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} = -\frac{1}{R_1 \cdot R_2 \cdot C_3 \cdot s + (R_1 + R_2)} \quad (1.3)$$

$$y_{A22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} = \frac{R_1 \cdot C_3 \cdot s + 1}{R_1 \cdot R_2 \cdot C_3 \cdot s + (R_1 + R_2)} \quad (1.4)$$

De forma análoga se obtienen los parámetros para el segundo cuadripolo 1.2, basándose en los cálculos del primero, y tomando provecho de su similitud.

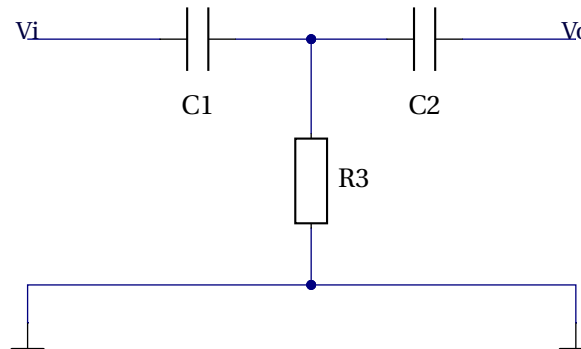


Figura 1.2: Cuadripolo B

$$y_{B11} = \frac{\frac{1}{R_3 \cdot C_2 \cdot s} + 1}{\frac{1}{R_3 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot s} + \frac{1}{C_1 \cdot s} + \frac{1}{C_2 \cdot s}} \quad (1.5)$$

$$y_{B12} = -\frac{1}{\frac{1}{R_3 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot s} + \frac{1}{C_1 \cdot s} + \frac{1}{C_2 \cdot s}} \quad (1.6)$$

$$y_{B21} = -\frac{1}{\frac{1}{R_3 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot s} + \frac{1}{C_1 \cdot s} + \frac{1}{C_2 \cdot s}} \quad (1.7)$$

$$y_{B22} = \frac{\frac{1}{R_3 \cdot C_1 \cdot s} + 1}{\frac{1}{R_3 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot s} + \frac{1}{C_1 \cdot s} + \frac{1}{C_2 \cdot s}} \quad (1.8)$$

Se observa que la condición de Brune para cuádrupolos en paralelo se cumple, y en consecuencia, se obtienen los parámetros admitancia del cuádrupolo total mediante la suma de sus dos componentes. Dado que el objetivo final es calcular $\frac{V_o}{V_i}$, como tal cociente solo depende de los parámetros y_{21} y y_{22} , sólo se mostrará el cálculo de estos. Luego de trabajo algebraico, se llega a la siguiente expresión:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{y_{A21} + y_{B21}}{y_{A22} + y_{B22}} = \quad (1.9)$$

$$= \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot s^3 + (R_1 + R_2) \cdot R_3 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot s^2 + R_3 \cdot (C_1 + C_2) \cdot s + 1}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot s^3 + ((R_1 + R_2) \cdot R_3 \cdot C_1 \cdot C_2 + R_1 \cdot R_3 \cdot C_1 \cdot C_3 + R_1 \cdot (R_2 + R_3) \cdot C_2 \cdot C_3) \cdot s^2 + R_3 \cdot (C_1 + C_2) \cdot s + 1} \quad (1.10)$$

Si se pide que $R_1 = R_2 = 2 \cdot R_3$ y $C_1 = C_2 = \frac{C_3}{2}$ se lleva la expresión de la ecuación 1.10 a:

$$H(s) = \frac{R_3^2 \cdot C_3^2 \cdot s^2 + 1}{R_3^2 \cdot C_3^2 \cdot s^2 + 4 \cdot R_3 \cdot C_3 \cdot s + 1} \quad (1.11)$$

Se pide que $f_0 = 2,7 KHz$

$$\Rightarrow \omega_0 \approx 16,965 \cdot 10^3 \frac{rad}{s} \quad (1.12)$$

De la ecuación 1.11 se obtiene que:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{R_3^2 \cdot C_3^2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{R_3 \cdot C_3} \quad (1.13)$$

Debe buscarse alguna combinación de R_3 y C_3 que me dé $\approx 0,058946 ms$. La mejor combinación con valores comerciales es 15 y 39, ya que $15 \cdot 39 = 585$ (luego se corrige el orden). Para la elección de los componentes se tuvo en cuenta que el orden de magnitud de los capacitores sea tal que permita despreciar la capacidad parásita de las puntas del osciloscopio, y que además haya disponibilidad de los componentes en el pañol de la universidad. Quedan así determinados también los valores de R_1, R_2, C_1 y C_2 :

$$R_3 = 1,5 K\Omega \Rightarrow R_1 = R_2 = 2 \cdot R_3 = 3 K\Omega \longrightarrow \text{Elijo } R_1 = R_2 = 3,3 K\Omega \quad (1.14)$$

$$C_3 = 39 nF \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{C_3}{2} = 19,5 nF \longrightarrow \text{Elijo } C_1 = C_2 = 18 nF \quad (1.15)$$

Se consideró también utilizar dos resistencias en serie y dos capacitores en paralelo para lograr exactamente las relaciones indicadas. Sin embargo, la opción fue descartada por duplicar costo de componentes y, si bien mejora lo esperado en valores nominales, llega a duplicar las tolerancias de las resistencias y capacitores formados por dos componentes. Consecuentemente, la variación obtenida en la práctica puede ser aún más alejada de los valores esperados. Finalmente, y como criterio definitivo, se recalculó la variación de lo esperado al utilizar componentes que no respetan estrictamente la relación de doble o mitad. Utilizando la función transferencia de la ecuación 1.10, se observa que el coeficiente de grado 3 será:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{(R_1 + R_2) \cdot R_3 \cdot C_1 \cdot C_2}} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{(3,3 K\Omega + 3,3 K\Omega) \cdot 1,5 K\Omega \cdot 18 nF \cdot 18 nF}} \approx 2,81 KHz \quad (1.16)$$

Se observa que la variación es menor al 5% (4,07% de hecho), dentro de los rangos de tolerancia de los elementos utilizados (todos de 5%). Por lo tanto, se admite el error.

1.1.2. CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA

Tomando de la expresión de la ecuación 1.11, queda expresada la función transferencia como:

$$H(s) = \frac{3,475 \cdot 10^{-9} s^2 + 1}{3,475 \cdot 10^{-9} s^2 + 2,358 \cdot 10^{-4} \cdot s + 1} \quad (1.17)$$

Para obtener la respuesta al impulso, se expresa la ecuación 1.17 en fracciones simples:

$$H(s) = \frac{5248,5}{s + 4545,35} - \frac{73104,6}{s + 63310,8} + 1 \quad (1.18)$$

Y se antitransforma por Laplace:

$$h(t) = 5248,5 \cdot e^{-4545,35 \cdot t} \cdot u(t) - 73104,6 \cdot e^{-63310,8 \cdot t} \cdot u(t) + \delta(t) \quad (1.19)$$

Dado que el sistema es LTI, causal y BIBO-estable, se puede obtener la respuesta en frecuencia realizando el reemplazo $s = j \cdot 2\pi \cdot f$ en la ecuación 1.17:

$$H(f) = \frac{f^2 - 7,289 \cdot 10^6}{f^2 - 10799,6 \cdot j \cdot f - 7,289 \cdot 10^6} \quad (1.20)$$

1.1.3. RESPUESTA AL ESCALÓN

Para la obtención de la respuesta al escalón, se realizará primero el producto de la función transferencia con la transformada de Laplace del escalón:

$$H(s) \cdot U(s) = \frac{1,155}{s + 63310,8} - \frac{1,155}{s + 4545,35} + \frac{1}{s} \quad (1.21)$$

Antitransformando por Laplace se obtiene que la respuesta al escalón es:

$$y(t) = 1,155 \cdot e^{-63310,8 \cdot t} \cdot u(t) + 1,155 \cdot e^{-4545,35 \cdot t} \cdot u(t) + u(t) \quad (1.22)$$

En la cual se puede observar que tendrá un mínimo. El mismo se obtiene derivando la expresión 1.22 e igualando a 0:

$$y'(t) = 5248,5 \cdot e^{-4545,35 \cdot t} - 73104,6 \cdot e^{-63310,8 \cdot t} + \delta(t) \text{ para } t > 0 \quad (1.23)$$

$$y'(t) = 0 \iff t \approx 45 \mu s \quad (1.24)$$

1.2. SIMULACIÓN EN LTSPICE

Para la simulación del circuito se realizaron dos análisis, ambos del tipo Monte Carlo. El primero (figura 1.3), para obtener la respuesta en frecuencia, se logró mediante la herramienta AC Analysis. El segundo (figura 1.4), para obtener la respuesta al escalón, se realizó utilizando la herramienta Transient.

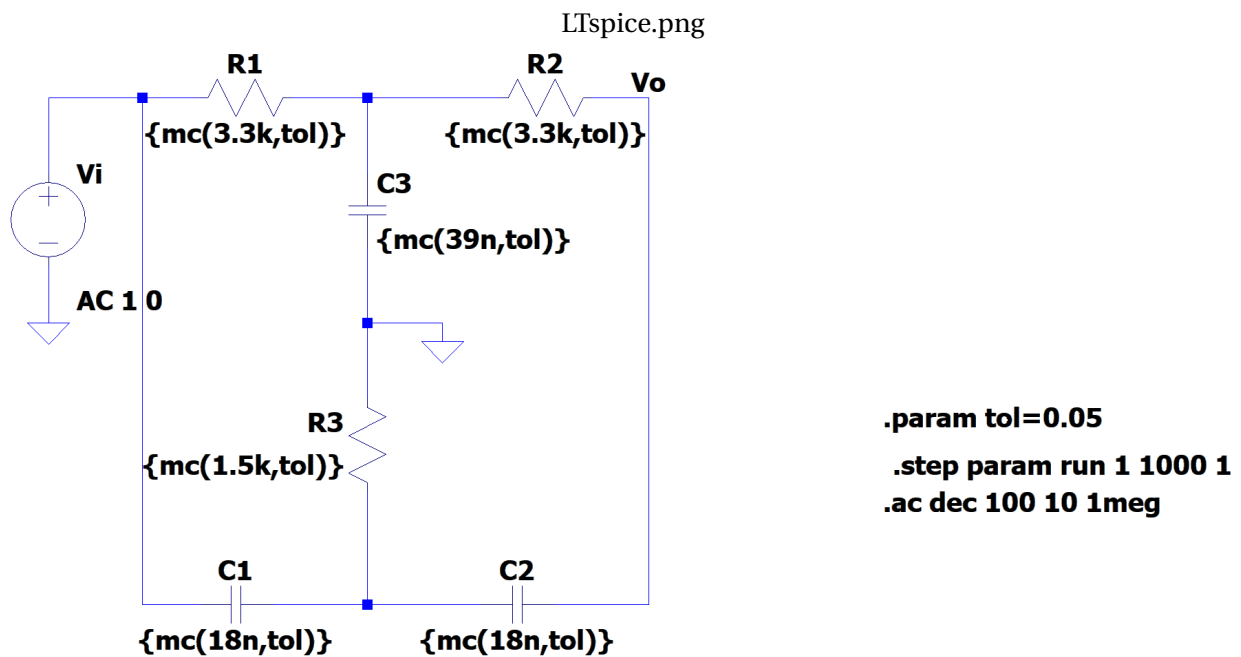


Figura 1.3: Circuito en LTspice para simulación del bode.

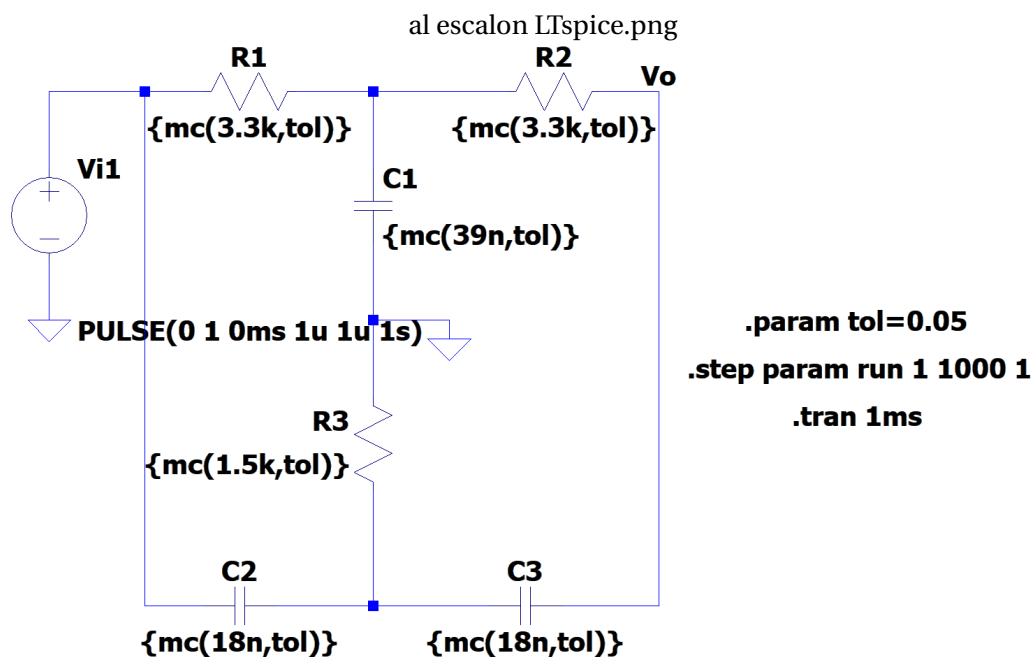


Figura 1.4: Circuito en LTspice para simulación de la respuesta al escalon.

1.3. RESULTADOS EXPERIMENTALES Y COMPARACIÓN CON TEÓRICOS Y SIMULADOS

El llevado a la práctica y medición del circuito se realizó a través de la impresión en PCB del mismo, para el cual se tomaron ciertos criterios explicados a continuación. El circuito se alojó en una placa de 5x5cm, simple faz, dado que la simpleza del mismo no ameritaba el uso de dos capas. Podría argumentarse que el tamaño es excesivo y sobrado para la aplicación, y se estaría en lo correcto. Sin embargo, se utilizaron las medidas mencionadas ya que son las mínimas disponibles en el pañol de la universidad. Por otro lado, el cortar la placa habría supuesto un sobretrabajo innecesario.

Se colocaron alojamientos para 4 pines a izquierda y derecha de la placa, para la señal de entrada y salida,

respectivamente, tratando de mantener también, la simetría visual del circuito. De los cuatro pines, solo los dos en los extremos fueron utilizados, quitándose los del medio para lograr mayor separación y prevenirse contra cortocircuitos debidos a la cercanía de los pines. La conexión con pines se eligió por sobre borneras para facilitar la conexión al generador de señales y a las puntas del osciloscopio.

En cuanto a las pistas, se procuró que no formasen ángulos de 90° o más agudos, afin de evitar señales parásitas por emisión de ondas electromagnéticas. Debido también a la disponibilidad de espacio, se le dio a las mismas un ancho de 0,9 mm, facilitando la circulación de corriente.

Finalmente, del lado de la placa sin cobre, se imprimieron las indicaciones de los componentes y los puertos, para facilitar su uso. Teniendo en cuenta todo esto, el resultado fue el siguiente circuito:

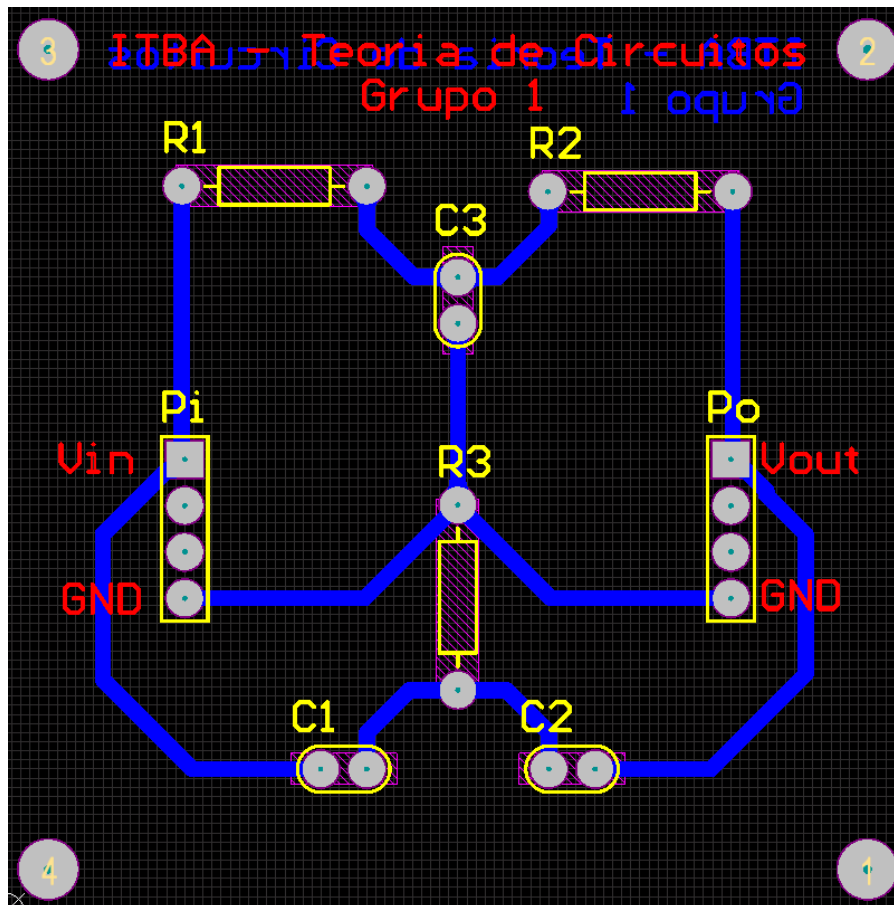


Figura 1.5: PCB diseñado en el programa Altium Designer.

1.3.1. COMPARACIÓN DE LAS CURVAS

En los siguientes gráficos se mostrarán superpuestas las curvas teóricas (obtenidas a través de la función transferencia), prácticas (de las mediciones obtenidas con la placa), y las simuladas con el Monte Carlo (mediante el uso de LTspice). Por limitaciones de la capacidad del programa graficador, y afin de facilitar su comprensión visual, solo se graficaron 18 curvas representativas de las obtenidas del análisis Monte Carlo.

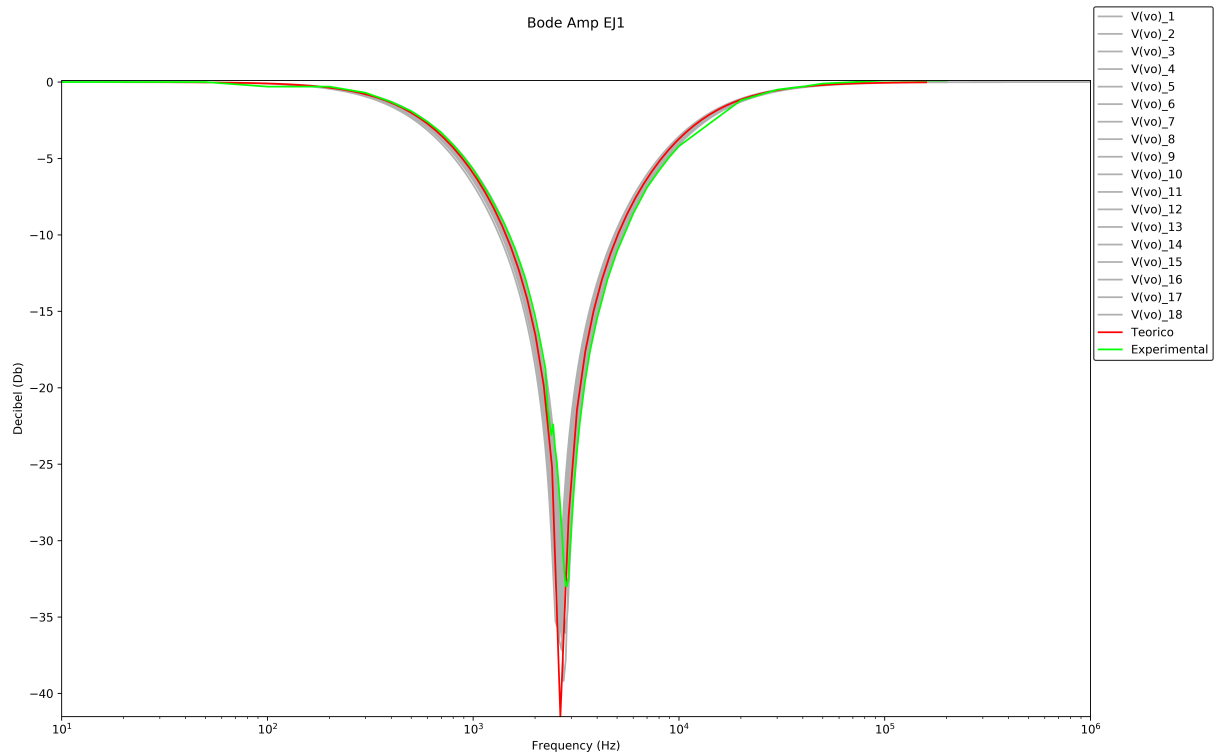


Figura 1.6: Comparación entre curvas teórica, simulada y práctica del bode de amplitud.

Se puede apreciar una similitud aceptable entre los valores esperados en la teoría con aquellos observados en la práctica. La principal diferencia yace en que en los valores teóricos sí puede hablarse de mínimos ideales y asíntoticos, mientras que la práctica fija valores reales que limitan tales efectos. Sin embargo, ambas curvas se encuentran dentro de los rangos pautados por el Monte Carlo, dando la pauta de que las mediciones obtenidas se adecúan a los márgenes de tolerancias establecidos. Las mediciones ubicaron a la frecuencia de mayor atenuación en los $2,83\text{KHz}$ (con -33dB de atenuación). Si se contrasta este valor con la frecuencia de corte teórica corregida ($2,81\text{KHz}$, que tiene en cuenta los valores comerciales de los componentes, ver 1.1.1), se obtiene un muy bajo porcentaje de error, de apenas $0,7\%$. Además, al compararse con la frecuencia de corte solicitada de $2,7\text{KHz}$, el error es aceptable y de valor $4,82\%$.

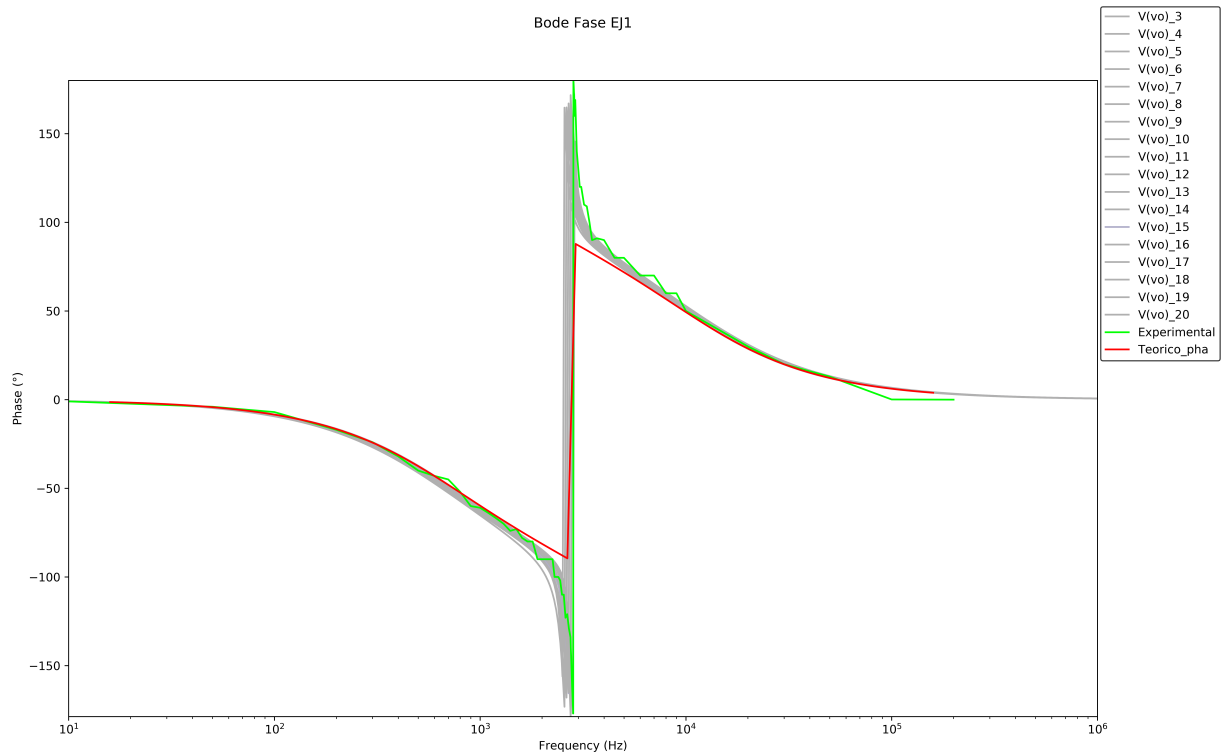


Figura 1.7: Comparación entre curvas teórica, simulada y práctica del bode de fase.

El bode de fase es tal vez donde se observe la mayor diferencia entre los valores teóricos contra los experimentales o simulados. La continuidad de la gráfica teórica contrasta con la variabilidad de la curva medida, e incluso con el Monte Carlo. De todas maneras, es comprensible tal comportamiento, ya que la zona indicada es justamente la de mayor pendiente en la variación de la fase y, por lo tanto, la de mayor variabilidad.

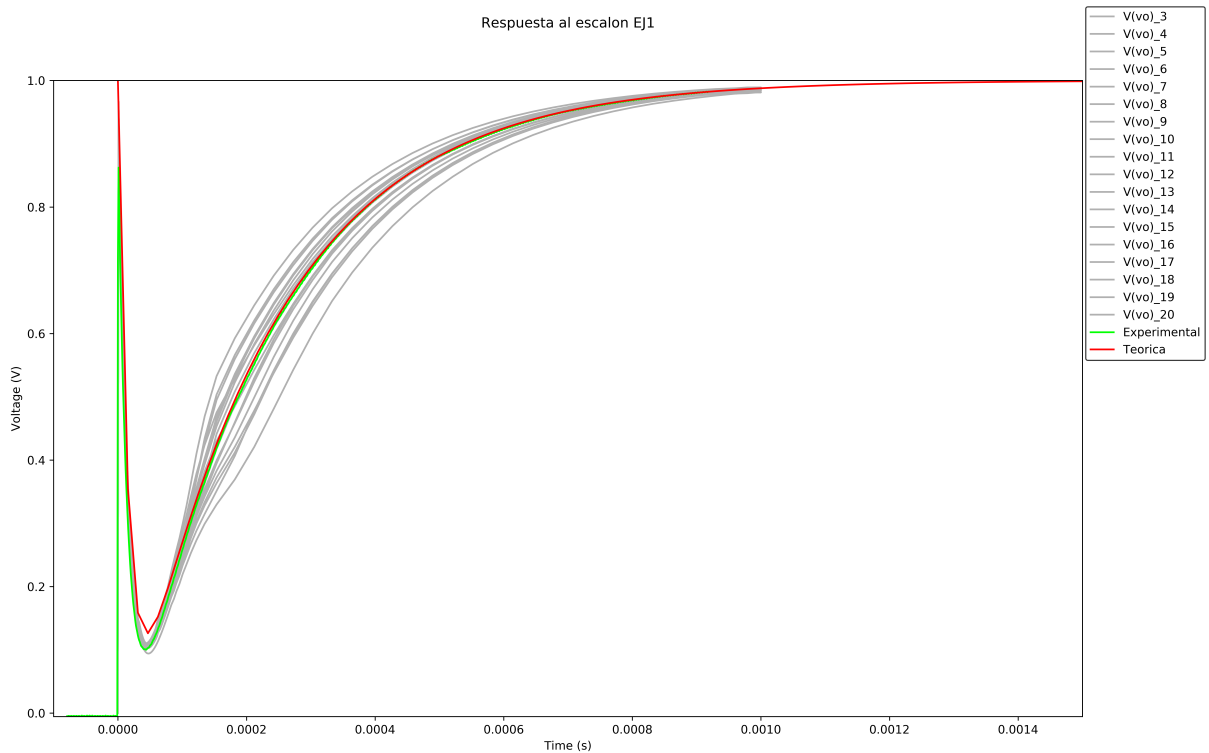


Figura 1.8: Comparación entre curvas teórica, simulada y práctica de la respuesta al escalón.

Finalmente, en el análisis de la respuesta al escalón, la curva teórica y práctica se encuentran en concordancia para la mayor parte de la curva, y ambas dentro de lo esperado por la simulación. El estudio de las curvas nos hace analizar el punto característico donde las mismas llegan a un mínimo. Como se mencionó en la sección 1.1.3, se espera que tal mínimo se encuentre pasados los $45\mu s$, que, al ser comparado con el valor práctico ($41\mu s$), fija un error aceptable de 9,76%.

2. FILTRO PASA-BAJOS PASIVO

En esta sección diseñaremos y analizaremos el comportamiento de un filtro RC de primer orden pasa-bajos.

2.1. DISEÑO

Según el número de grupo asignado fijamos la frecuencia de corte del filtro en $16kHz$. Luego calculamos la función transferencia del mismo obteniendo

$$H(s) = \frac{1}{sCR + 1} \quad (2.1)$$

Donde la frecuencia de corte f_0 vale

$$f_0 = 2\pi CR \quad (2.2)$$

Dado que los valores de ambos componentes son comerciales y estandarizados, seleccionamos un par para los cuales creemos que el error es lo suficientemente pequeño. Así, fijamos $C = 10nF$ y $R = 1k\Omega$ con lo cual la frecuencia de corte teórica es $f_0 = 15915,49Hz$.

2.2. SEÑAL CUADRADA

Una vez seleccionados los componentes se armó el circuito y se lo sometió a una señal cuadrada (cuyo valor medio es nulo) de $10V_{pp}$ a una frecuencia dada de $8kHz$ con la siguiente respuesta medida en osciloscopio.

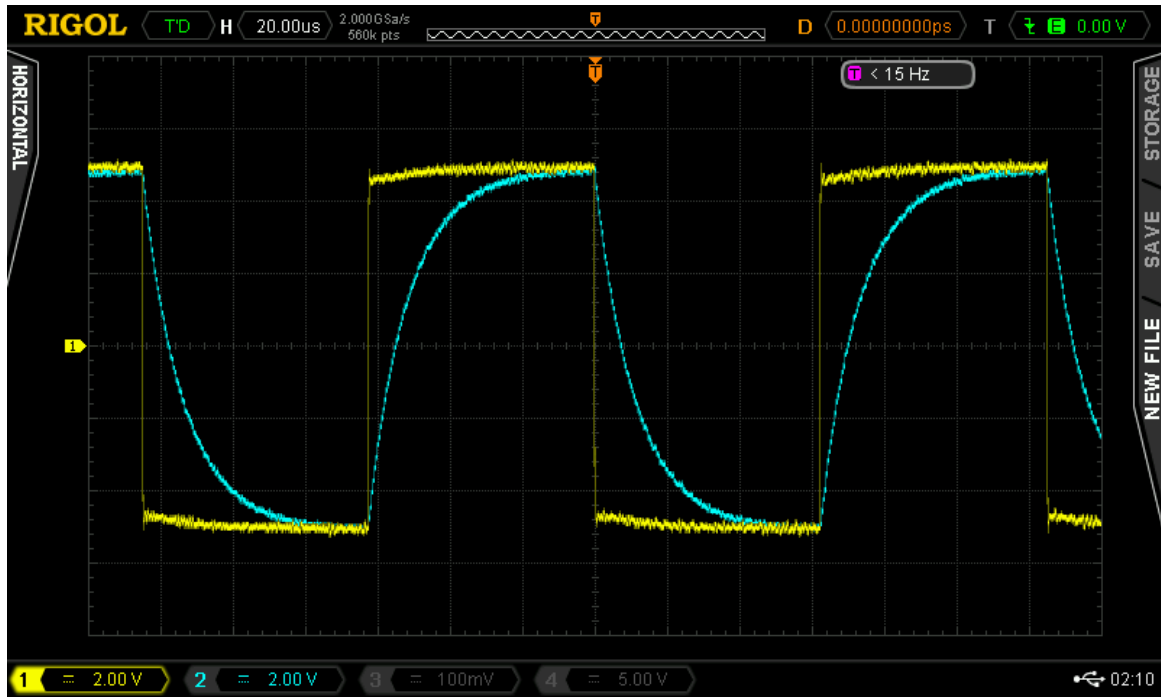


Figura 2.1: Respuesta a una señal cuadrada

En la figura 2.1 se puede observar una forma curva en los flancos ascendentes y descendientes de la respuesta del sistema a la señal cuadrada (curva resaltada en celeste). Esto se debe principalmente a los intervalos de carga y descarga del capacitor, ante la inversión de polaridad en sus bornes, obteniendo ese efecto de "*suavización*". Además, desde el punto de vista espectral podemos apreciar una atenuación en los armónicos altos que componen la señal cuadrada, debido a que esta entrada está pasando por un filtro pasa-bajos. Esto también contribuye a la distorsión en la forma de la señal.

2.3. RESPUESTA EN FRECUENCIA

Para confeccionar la respuesta en frecuencia del filtro se realizó un barrido en frecuencia de la entrada, midiendo a la salida la relación entre la amplitud respecto a la de la entrada, y la fase. Luego se volcaron esos datos a una hoja de cálculo y se obtuvieron dos gráficos que representan cada una de esas características.

La frecuencia de corte "*real*" del circuito fue obtenida usando el osciloscopio, variando la frecuencia hasta encontrar un desfase de -45° en la salida respecto a la entrada. Según la figura 2.2, en este caso $f_0 = 15,57kHz$

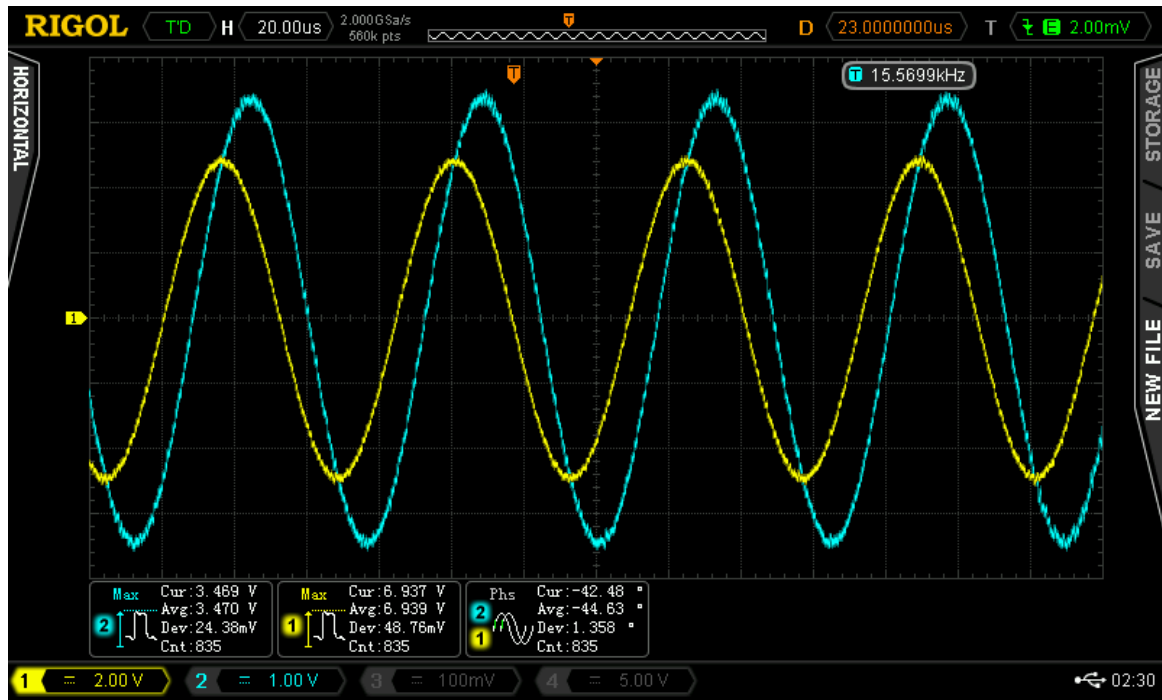


Figura 2.2: Medición de frecuencia de corte

Además, se puede ver que el diagrama de BODE resultante de las mediciones es compatible con el análisis teórico sobre el filtro.

Por otro lado, se desarrolló en serie de Fourier la señal de entrada con el fin de encontrar las componentes de frecuencia que componen a dicha señal:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot t}{T}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot t}{T}\right) \quad (2.3)$$

Realizando los cálculos necesarios se llega a que $a_n = a_0 = 0$ y a

$$b_n = \frac{20V}{\pi \cdot (2k - 1)} \quad (2.4)$$

De lo anterior se puede ver que sobreviven solo aquellos términos de la serie cuyo múltiplo de la frecuencia fundamental es impar. Usando los coeficientes de Fourier podemos observar la presencia de cada uno de los armónicos (son todos impares), y se superpuso esta información con el gráfico de amplitud del diagrama de BODE teórico. De esta forma, y calculando la función transferencia para sucesivos armónicos, se observa que a frecuencias altas la baja amplitud de los armónicos combinado con el bajo valor de la función transferencia nos permiten despreciar la presencia de dichos armónicos.

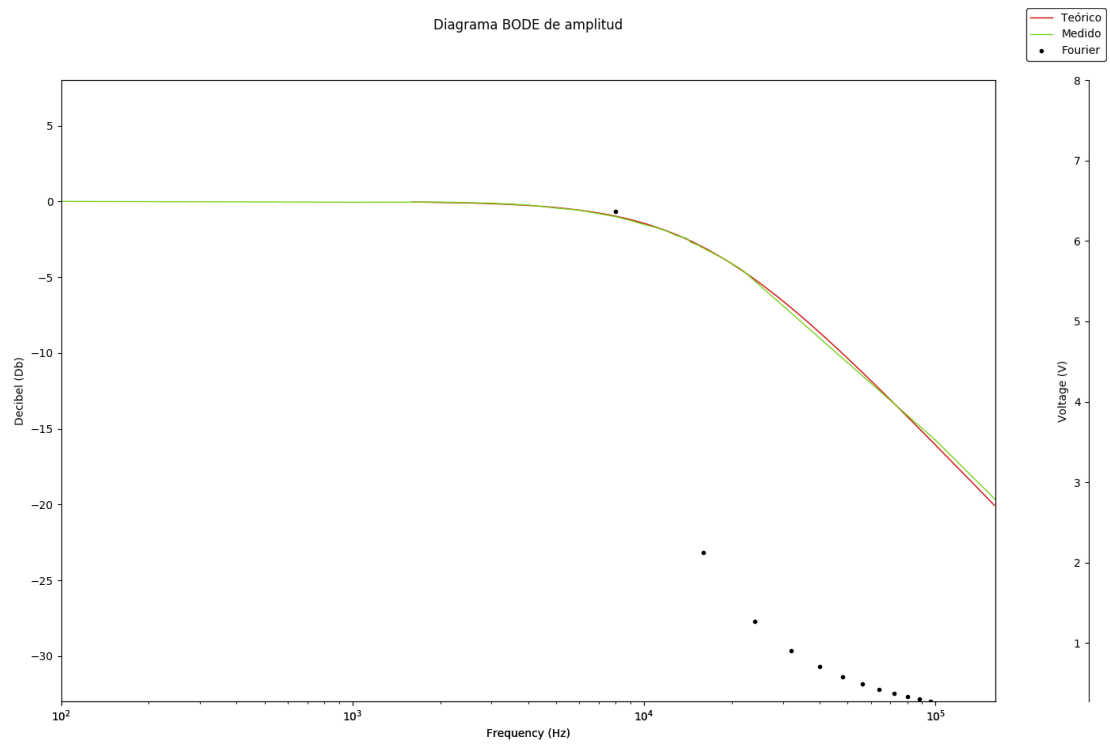


Figura 2.3: Diagrama BODE de amplitud teórico y medido y amplitud de armónicos de entrada

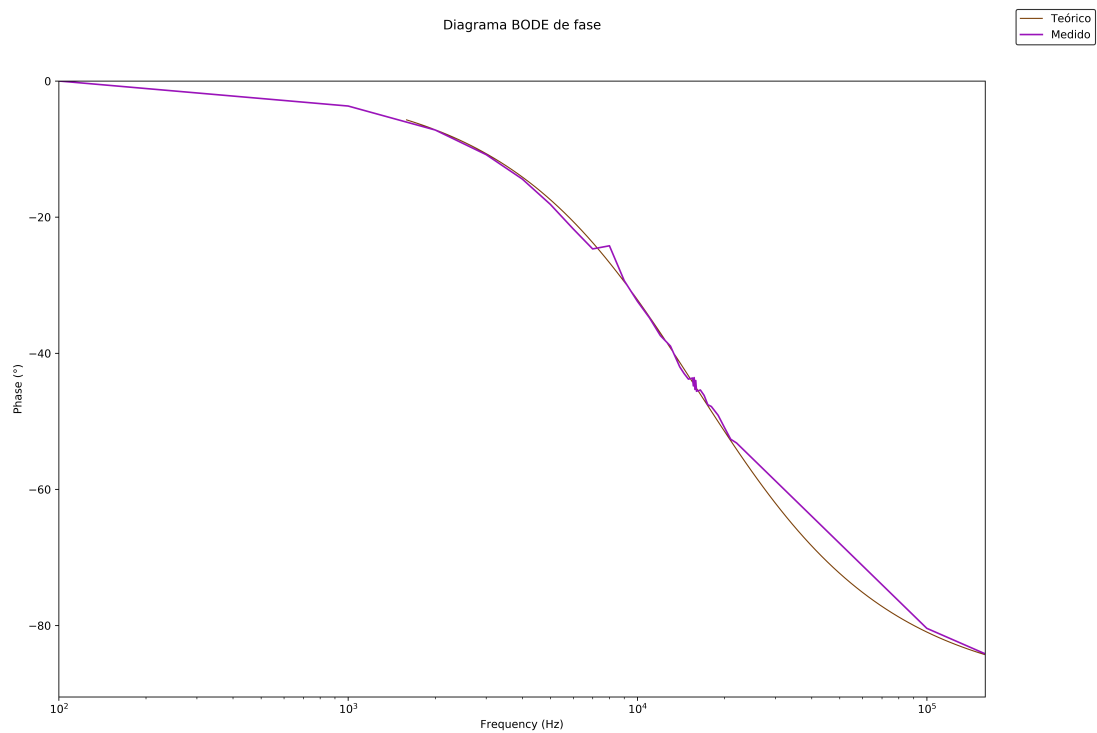


Figura 2.4: Diagrama BODE de fase teórico y medido

2.4. COMPORTAMIENTO EN ALTA FRECUENCIA

Si sometemos el circuito a una frecuencia moderadamente alta comparada con la frecuencia de corte del mismo, podemos ver que la función transferencia tiende a

$$H(s) = \frac{1}{s} \quad (2.5)$$

Lo que en transformada de Laplace implicaría la integración de la señal de entrada. Para comprobar esto forzamos al circuito en la práctica a una frecuencia $f = 250\text{kHz}$ según la figura 2.5. De este gráfico podemos resaltar que la señal cuadrada de entrada resulta en una señal de tipo triangular en la salida, confirmando la suposición teórica planteada anteriormente.



Figura 2.5: Respuesta a 250kHz

Si ahora probamos una frecuencia mucho mayor (en este caso 10MHz) observamos una atenuación de la señal de salida considerable, lo que produce que la salida sea susceptible de ser afectada por el ruido, como se puede ver en la figura 2.6.

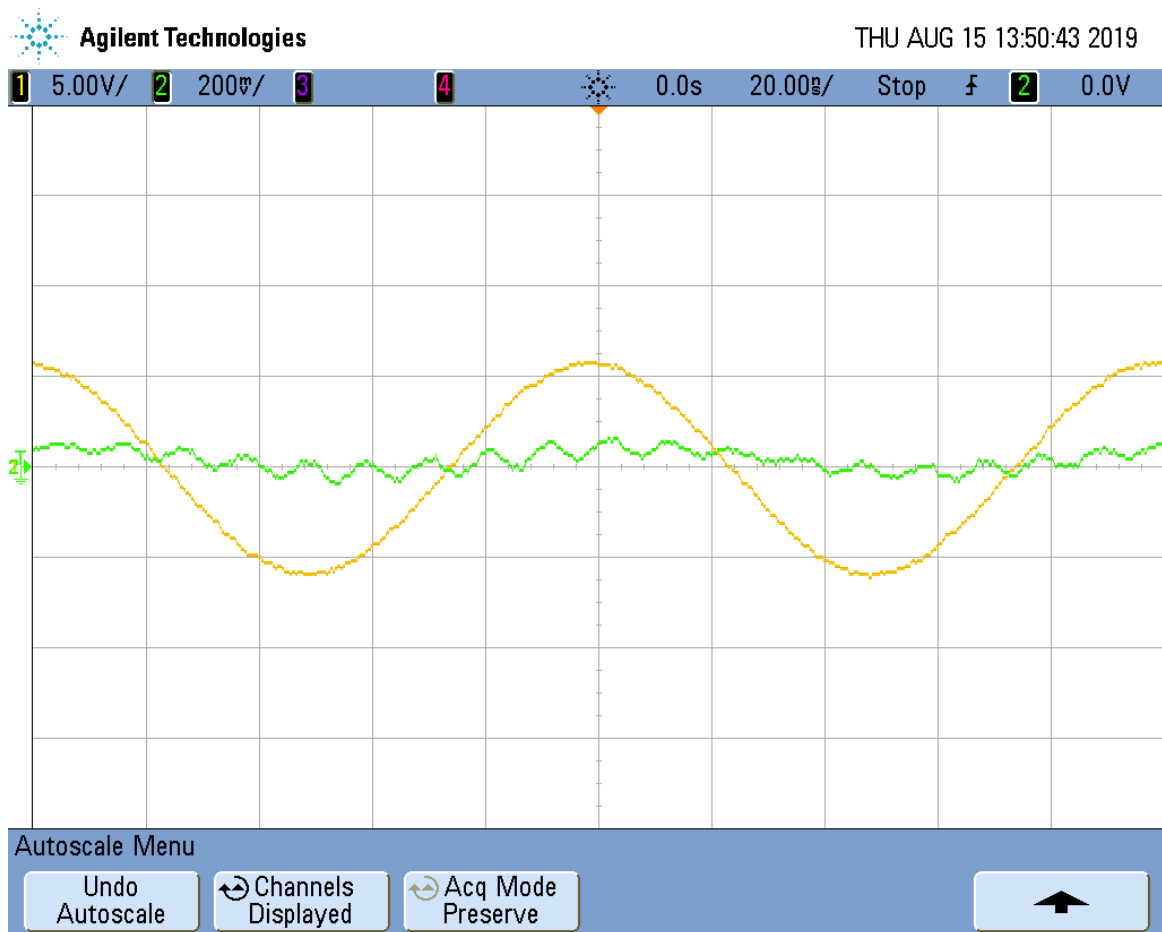


Figura 2.6: Respuesta a 10MHz

2.5. RESPUESTA A 160Hz

Se conectó la entrada del circuito a una señal cuadrada de similares características que la primera, pero esta vez a una frecuencia de 160Hz. Se midió con osciloscopio la respuesta del circuito y se obtuvo la figura 2.7. En ella podemos observar una atenuación casi nula de la salida (representada en color celeste) respecto de la entrada, así como una fase prácticamente nula. Esto se condice con el análisis teórico que se puede realizar, dado que el término que involucra a la frecuencia en la ecuación 2.1 se vuelve despreciable, con lo cual la función transferencia tiende al valor unitario.

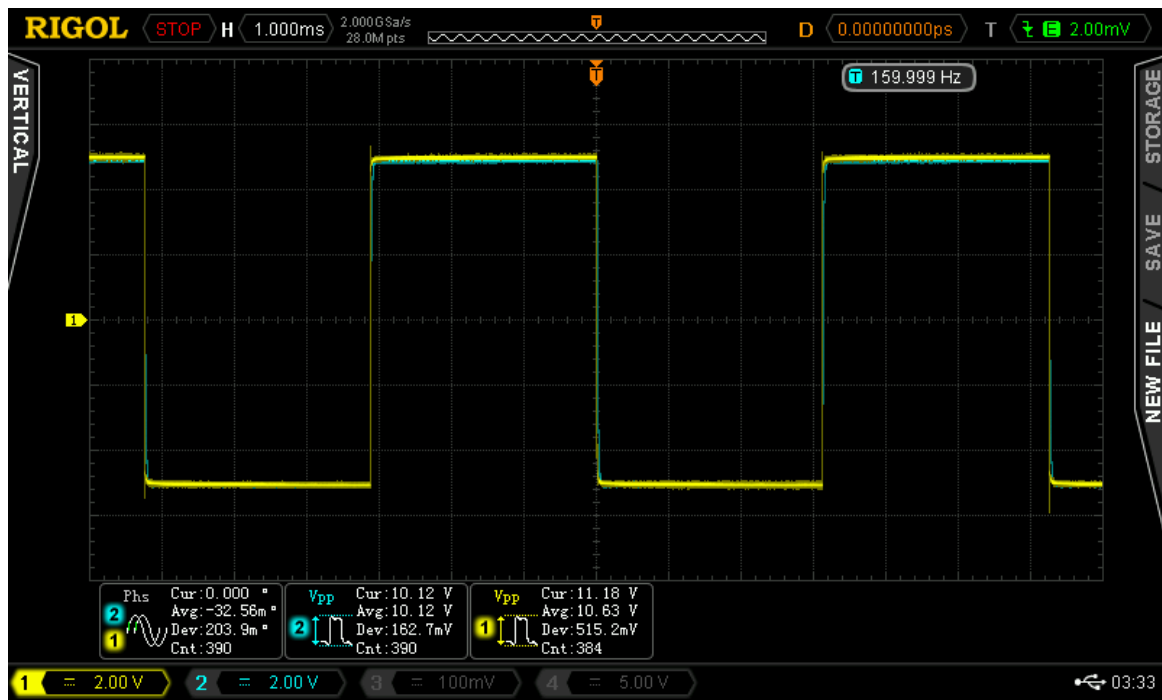


Figura 2.7: Respuesta a 160Hz

3. EJERCICIO 3: PLOT-TOOL

En este ejercicio se nos pidió hacer una herramienta para graficar. Los códigos de la misma se encuentran en la carpeta plot-tool entregada en este trabajo práctico y su manual de uso también se encuentra dentro de la misma, con el nombre *manual.pdf*.