Ejercicio 4

En la presente sección se estudiarán los circuitos derivador e integrador implementados con amplificador operacionales, analizando su comportamiento, rango de funcionamiento y cualidades o defectos. Además se presentará un circuito para cada uno de ellos con modificaciones con el fin de mejorar su funcionamiento y se compararán los resultados entre ellos.
Para cada uno de los circuitos, se realiza un análisis teórico del mismo y luego se presentan las mediciones y los resultados de las mismas, contrastando o comparando lo observado en la práctica, la simulación y la teoría. Además, todo análisis teórico se realiza teniendo en cuenta que los circuitos son armados empleando una resistencia $R = 5k\Omega$, un capacitor $C = 20nF$ y un amplificador operacional LM833 cuyos parámetros son:

- $A_{vol} = 100000$
- $f_p = 150Hz$
- $GBP = 15MHz$
- $SR = 7\frac{V}{\mu s}$
- $r_{id} = 175k\Omega$
- $Z_o = 37\Omega$

Circuito derivador

Análisis Teórico

Función transferencia en condiciones ideales se busca la función de transferencia del circuito bajo condiciones ideales, esto es, asumiendo que el amplificador operacional no tiene variación en su ganancia de lazo abierto con la frecuencia y que la misma tiende a infinito, $A_{vol} \to \infty$. En este marco de idealidad, las impedancias de entrada y salida del amplificador operacional $Z_{in} \to \infty$ y $r_o = 0$. Para este cálculo se conoce la ganancia ideal de un amplificador inversor y se asume al mismo un sistema LTI, causal y bibo-estable.

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{\frac{1}{s \cdot C}} = -s \cdot R \cdot C = -\frac{s}{10000} \tag{1}$$

Se puede observar que por la propiedad de la derivada para transformada de Laplace, multiplicar por la variable s en tal dominio, implica derivar la señal en el dominio temporal, de forma tal que se puede llegar:

$$V_o(s) = V_i(s) \cdot H(s) = V_i(s) \cdot -sRC \Rightarrow Vo(t) = -RC \cdot \frac{\delta V_i(t)}{\delta t}$$

Otra observación sobre la función de transferencia ideal, es que para frecuencias altas, según la magnitud de la señal de entrada, se puede producir la saturación del amplificador operacional cuando la ganancia es muy elevada y la salida supera el valor de la fuente de alimentación del circuito.

Función transferencia con A_{vol} finito se considera que A_{vol} es finito con lo cual se lo debe tener en cuenta, y para llegar a la función transferencia se plantea por un lado la superposición de las tensiones sobre las entradas del amplificador operacional y luego la expresión de salida del mismo para obtener:

$$v^- = \frac{V_i \cdot R}{\frac{1}{sC} + R} + \frac{V_o \cdot \frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + R} = \frac{V_i \cdot s \cdot R \cdot C + V_o}{1 + s \cdot R \cdot C}$$

$$V_o = (v^+ - v^-) \cdot A_{vol} = -\frac{V_i \cdot s \cdot R \cdot C + V_o}{1 + s \cdot R \cdot C} \cdot A_{vol}$$

$$V_o \cdot \left[1 + \frac{A_{vol}}{1 + s \cdot R \cdot C}\right] = -\frac{V_i \cdot s \cdot R \cdot C \cdot A_{vol}}{1 + s \cdot R \cdot C}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{s \cdot A_{vol} \cdot RC}{A_{vol}+1}}{1 + \frac{s}{\frac{A_{vol}+1}{R \cdot C}}} = -\frac{\frac{s}{2\pi \cdot 1591{,}56}}{1 + \frac{s}{2\pi \cdot 159{,}15 \cdot 10^6}} \tag{2}$$

De esto último se puede observar que aparece, a diferencia de antes, un polo adicional que podría ser despreciado o incluso anulado bajo las condiciones de idealidad previamente analizadas. Es importante destacar de esta nueva función de transferencia que si se obtiene la frecuencia de corte donde se ubica este polo y limitamos el rango de funcionamiento una decada antes del mismo, podemos considerar condiciones de idealidad tal que el derivador podría seguir funcionando como tal. Esto también se puede ver considerando que, si se llama $\omega_o = \frac{(A_{vol}+1)}{R\cdot C}$ a la frecuencia angular de corte:

$$Si, s << \frac{\omega_o}{10} \Rightarrow 1 >> \frac{s}{\omega_o} \Rightarrow H(s) \approx -\frac{s \cdot A_{vol} \cdot RC}{A_{vol}+1} \approx -s \cdot R \cdot C$$

Función transferencia con polo dominante tomando en cuenta que el fabricante del amplificador operacional coloca un polo a una baja frecuencia para que el ruido se vea atenuado en las altas frecuencias en donde sale en contrafase y así evitar que se produzca una realimentación positiva que haría inestable el circuito, se reemplaza tal expresión en la ecuación **??** y operando:

$$A_{vol}(\omega) = \frac{A_o}{1+\frac{s}{\omega_p}} \tag{3}$$

$$H(s) = -\frac{s \cdot A_o \cdot R \cdot C}{(1+s\cdot C\cdot R)\cdot(1+\frac{s}{\omega_p})+A_o} = -\frac{R\cdot C\cdot A_o}{A_o+1} \cdot \frac{s}{1+s\cdot\frac{1+\omega_p\cdot RC}{\omega_p\cdot(A_o+1)}+s^2\cdot\frac{RC}{\omega_p\cdot(A_o+1)}} \tag{4}$$

En esta última condición se puede observar que el circuito se comporta como un segundo orden por ser de segundo grado en el denominador, para lo cual es necesario determinar algunos parámetros que permitan determinar cuál es el comportamiento de tal sistema y para ello se despejan de las siguientes expresiones los valores de ξ y ω_o.

$$\omega_o^2 = \frac{\omega_p\cdot(A_o+1)}{RC} \Rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{\omega_p\cdot(A_o+1)}{RC}}$$

$$\frac{2\cdot\xi}{\omega_o} = \frac{(1+\omega_p\cdot R\cdot C)}{\omega_p\cdot(A_o+1)} \Rightarrow \xi = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\omega_p\cdot R\cdot C}{\sqrt{\omega_p\cdot R\cdot C\cdot(A_o+1)}}$$

$$H(s) = -\frac{\frac{s}{2\pi 1591{,}56}}{1+s\cdot 11{,}53\cdot 10^{-9}+\left(\frac{s}{2\pi\cdot 154510{,}45}\right)^2} \tag{5}$$

Finalmente, se obtiene que $\omega_o = 970817{,}81\frac{1}{s}$ y $\xi = 0{,}0056357$. Esto último indica que la respuesta natural del sistema durante una transición entre estados estables contiene un subamortiguamiento, pero más importante, que los polos son complejos y conjugados donde la frecuencia de corte está en $f_o = 154{,}51kHz$ y presenta un sobrepico.

Para ubicar a qué frecuencia y con qué magnitud ocurre este pico en la respuesta en frecuencia, se busca el mínimo de la función del denominador de la respuesta en frecuencia en módulo. Vale mencionar que al igual que para los futuros análisis que se hagan, se asume el sistema LTI, causal y bibo-estable con lo que luego se puede evaluar $s = j\omega$ para encontrar la respuesta en frecuencia a partir de la función transferencia.

$$D(s) = \left(\frac{s}{\omega_o}\right)^2 + \frac{2\cdot\xi}{\omega_o}\cdot s + 1 \Rightarrow D(w) = \frac{j\cdot 2\cdot\xi\cdot\omega}{\omega_o} + \left(\frac{\omega_o^2-\omega^2}{\omega_o^2}\right)$$

$$|D(w)| = \sqrt{\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_o}\right)^2 + \left(\frac{\omega_o^2-\omega^2}{\omega_o^2}\right)^2}$$

$$\frac{\delta|D(w)|}{\delta w} = 0 \Leftrightarrow 2\cdot\xi^2\cdot\omega - \frac{\omega\cdot(\omega_o^2-\omega^2)}{\omega_o^2} = 0 \Leftrightarrow \omega = \omega_o\cdot\sqrt{1-2\cdot\xi^2} \tag{6}$$

Entonces, el pico dentro de la respuesta en frecuencia característico de este sistema se puede encontrar, teóricamente, en la frecuencia $\omega_{pico} = 970817{,}8\cdot\sqrt{1-2\cdot(0{,}0056)^2} = 970786{,}97\frac{1}{s} \Rightarrow f_{pico} = 154505{,}54Hz$. Y tendrá una magnitud de $|H(f_{pico})| = 8613{,}05 \Rightarrow |H(f_{pico})|dB = 78{,}70dB$.

Este nuevo comportamiento al incluir la consideración del polo dominante establece un primer límite de funcionamiento en término de frecuencias para el derivador, pues al alcanzar la frecuencia de los $f = 154kHz$ aproximadamente, deja de funcionar como tal.

Impedancia de entrada con A_{vol} finito en este escenario se analiza la impedancia de entrada del amplificador operacional, considerando las características reales del modelo equivalente del mismo.
Aplicando una transformación de fuentes se simplifica el circuito y se deja en evidencia que la fuente de corriente correspondiente a la salida equivale a una impedancia como se muestra en los circuitos de la figura. De esta forma se agrupan las impedancias y se encuentra la Z_{in}, para ello se llama Y_r y luego Z_r al agrupamiento paralelo de impedancias.

$$Y_r = \frac{1}{r_{id}} + \frac{1 - A_{vol}}{R + Z_o} \Rightarrow Z_r = \frac{r_{id} \cdot (R + Z_o)}{R + Z_o + r_{id} \cdot (1 - A_{vol})}$$

$$Z_{in} = \frac{1}{sC} + Z_r = \frac{1 + s \cdot \frac{C \cdot r_{id} \cdot (R+Z_o)}{R+Z_o+r_{id} \cdot (1-A_{vol})}}{s \cdot C} \Rightarrow Z_{in} = \frac{1 - \frac{s}{2\pi \cdot 157{,}98 \cdot 10^6}}{\frac{s}{2\pi \cdot 7{,}957 \cdot 10^6}} \tag{7}$$

Resulta interesante observar que para frecuencias donde $f < 157,98MHz$, la impedancia de entrada se puede aproximar al valor de la impedancia del capacitor, lo cual contrasta con la consideración de que con un A_{vol} muy grande se produce una masa virtual en el terminal inversor. Esta impedancia posee un cero ubicado en el semiplano positivo, lo cual implica que en términos de la magnitud del mismo produce el mismo efecto, pero en cuanto a fase se comporta como un polo.

Impedancia de entrada con polo dominante ahora se adaptan los cálculos previos para incluir la apreciación del polo dominante dentro del análisis de la impedancia de entrada. Operando con la expresión del polo dominante **??** se llega a que:

$$Z_{in} = \frac{R + Z_o + r_{id} \cdot (-A_o + 1 + \frac{s}{\omega_p}) + s \cdot C \cdot r_{id} \cdot (R + Z_o) \cdot (1 + \frac{s}{\omega_p})}{s \cdot C \cdot \left[(R + Z_o) \cdot (1 + \frac{s}{\omega_p}) + r_{id} \cdot (1 - A_o + \frac{s}{\omega_p}) \right]}$$

$$Z_{in} = \frac{1}{s \cdot C} \cdot \frac{1 + s \cdot \frac{R+Z_o+r_{id}+r_{id} \cdot C \cdot \omega_p \cdot (R+Z_o)}{\omega_p \cdot [R+Z_o+r_{id} \cdot (-A_o+1)]} + s^2 \cdot \frac{r_{id} \cdot C \cdot (R+Z_o)}{\omega_p \cdot [R+Z_o+r_{id} \cdot (-A_o+1)]}}{1 + s \cdot \frac{R+Z_o+r_{id}}{\omega_p \cdot [R+Z_o+r_{id} \cdot (1-A_o)]}}$$

$$Z_{in} = \frac{1}{\frac{s}{2\pi \cdot 7{,}957 \cdot 10^6}} \cdot \frac{1 - s \cdot 11{,}923 \cdot 10^{-9} - \left(\frac{s}{2\pi \cdot 153{,}94 \cdot 10^3} \right)^2}{1 - \frac{s}{2\pi \cdot 14{,}5801 \cdot 10^6}}$$

$$= \frac{1}{\frac{s}{2\pi \cdot 7{,}957 \cdot 10^6}} \cdot \frac{(1 + \frac{s}{972826}) \cdot (1 - \frac{s}{961677})}{1 - \frac{s}{2\pi \cdot 14{,}5801 \cdot 10^6}}$$

Como se puede observar en el resultado, la impedancia de entrada posee, entre otros, un polo y un cero en el semiplano positivo, con lo cual si expresamos la admitancia de entrada y despejamos la corriente de entrada, se obtiene:

$$I_i(s) = \frac{V_i(s)}{Z_i(s)} \tag{8}$$

Esto establece que la corriente de entrada es la respuesta del sistema caracterizado por la función transferencia $Y_i(s) = \frac{1}{Z_i(s)}$ a la excitación impuesta por la entrada $V_i(s)$. Sin necesidad de realizar las sustituciones se puede ver claramente que en la transferencia mencionada hay un polo en el semiplano positivo, lo cual convierte al sistema descripto por tal función en inestable, esto quiere decir que para cualquier excitación en la entrada la corriente no se logrará establecer o estabilizar. De esta última conclusión se infiere que el circuito no funcionará como fue analizado desde un marco ideal, y que lo más probable al momento, es que no se pueda estabilizar la salida en un valor coherente con dicho marco.

Resultados

Circuito derivador compensado

Análisis Teórico

Resultados

Circuito integrador

Análisis Teórico

Resultados

Circuito integrador compensado

Análisis Teórico

Resultados