Ejercicio 4

En la presente sección se estudiarán los circuitos derivador e integrador implementados con amplificador operacionales, analizando su comportamiento, rango de funcionamiento y cualidades o defectos. Además se presentará un circuito para cada uno de ellos con modificaciones con el fin de mejorar su funcionamiento y se compararán los resultados entre ellos.
Para cada uno de los circuitos, se realiza un análisis teórico del mismo y luego se presentan las mediciones y los resultados de las mismas, contrastando o comparando lo observado en la práctica, la simulación y la teoría. Además, todo análisis teórico se realiza teniendo en cuenta que los circuitos son armados empleando una resistencia $R = 5k\Omega$, un capacitor $C = 20nF$ y un amplificador operacional LM833 cuyos parámetros son:

- $A_{vol} = 100000$
- $f_p = 150Hz$
- $GBP = 15MHz$
- $SR = 7\frac{V}{\mu s}$
- $r_{id} = 175k\Omega$
- $Z_o = 37\Omega$

Circuito derivador

Análisis Teórico

Función transferencia en condiciones ideales se busca la función de transferencia del circuito bajo condiciones ideales, esto es, asumiendo que el amplificador operacional no tiene variación en su ganancia de lazo abierto con la frecuencia y que la misma tiende a infinito, $A_{vol} \to \infty$. En este marco de idealidad, las impedancias de entrada y salida del amplificador operacional $Z_{in} \to \infty$ y $r_o = 0$. Para este cálculo se conoce la ganancia ideal de un amplificador inversor y se asume al mismo un sistema LTI, causal y bibo-estable.

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{\frac{1}{s \cdot C}} = -s \cdot R \cdot C = -\frac{s}{10000} \tag{1}$$

Se puede observar que por la propiedad de la derivada para transformada de Laplace, multiplicar por la variable s en tal dominio, implica derivar la señal en el dominio temporal, de forma tal que se puede llegar:

$$V_o(s) = V_i(s) \cdot H(s) = V_i(s) \cdot -sRC \Rightarrow Vo(t) = -RC \cdot \frac{\delta V_i(t)}{\delta t} \tag{2}$$

Función transferencia con A_{vol} finito se considera que A_{vol} es finito con lo cual se lo debe tener en cuenta, y para llegar a la función transferencia se plantea por un lado la superposición de las tensiones sobre las entradas del amplificador operacional y luego la expresión de salida del mismo para obtener:

$$v^- = \frac{V_i \cdot R}{\frac{1}{sC} + R} + \frac{V_o \cdot \frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + R} = \frac{V_i \cdot s \cdot R \cdot C + V_o}{1 + s \cdot R \cdot C} \tag{3}$$

$$V_o = (v^+ - v^-) \cdot A_{vol} = -\frac{V_i \cdot s \cdot R \cdot C + V_o}{1 + s \cdot R \cdot C} \cdot A_{vol} \tag{4}$$

$$V_o \cdot \left[1 + \frac{A_{vol}}{1 + s \cdot R \cdot C}\right] = -\frac{V_i \cdot s \cdot R \cdot C \cdot A_{vol}}{1 + s \cdot R \cdot C} \tag{5}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{s \cdot A_{vol} \cdot RC}{A_{vol}+1}}{1 + \frac{s}{\frac{A_{vol}+1}{R \cdot C}}} = -\frac{\frac{s}{10000{,}1}}{1 + \frac{s}{10^9}} \tag{6}$$

De esto último se puede observar que aparece, a diferencia de antes, un polo adicional que podría ser despreciado o incluso anulado bajo las condiciones de idealidad previamente analizadas. Es importante destacar de esta nueva función de transferencia que si se obtiene la frecuencia de corte donde se ubica este polo y limitamos el rango de funcionamiento una decada antes del mismo, podemos considerar condiciones de idealidad tal que el derivador podría seguir funcionando como tal. Esto también se puede ver considerando que, si se llama $\omega_o = \frac{(A_{vol}+1)}{R \cdot C}$ a la frecuencia angular de corte:

$$Si, s << \frac{\omega_o}{10} \Rightarrow 1 >> \frac{s}{\omega_o} \Rightarrow H(s) \approx -\frac{s \cdot A_{vol} \cdot RC}{A_{vol}+1} \approx -s \cdot R \cdot C \tag{7}$$

Función transferencia con polo dominante tomando en cuenta que el fabricante del amplificador operacional coloca un polo a una baja frecuencia para que el ruido se vea atenuado en las altas frecuencias en donde sale en contrafase y así evitar que se produzca una realimentación positiva que haría inestable el circuito, se reemplaza tal expresión en la ecuación 6 y operando:

$$A_{vol}(\omega) = \frac{A_o}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \tag{8}$$

$$H(s) = -\frac{s \cdot A_o \cdot R \cdot C}{(1 + s \cdot C \cdot R) \cdot (1 + \frac{s}{\omega_p}) + A_o} = -\frac{R \cdot C \cdot A_o}{A_o + 1} \cdot \frac{s}{1 + s \cdot \frac{1+\omega_p \cdot RC}{\omega_p \cdot (A_o+1)} + s^2 \cdot \frac{RC}{\omega_p \cdot (A_o+1)}} \tag{9}$$

En esta última condición se puede observar que el circuito se comporta como un segundo orden por ser de segundo grado en el denominador, para lo cual es necesario determinar algunos parámetros que permitan determinar cuál es el comportamiento de tal sistema y para ello se despejan de las siguientes expresiones los valores de ξ y ω_o.

$$\omega_o^2 = \frac{W_p \cdot (A_o+1)}{RC} \Rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{W_p \cdot (A_o+1)}{RC}} \tag{10}$$

$$\frac{2 \cdot \xi}{\omega_o} = \frac{(1 + \omega_p \cdot R \cdot C)}{\omega_p \cdot (A_o+1)} \Rightarrow \xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \omega_p \cdot R \cdot C}{\sqrt{\omega_p \cdot R \cdot C \cdot (A_o+1)}} \tag{11}$$

Finalmente, se obtiene que $\omega_o = 970817,8\frac{1}{s}$ y $\xi = 0,0056$. Esto último indica que la respuesta natural del sistema durante una transición entre estados estables contiene un subamortiguamiento, pero más importante, que los polos son complejos y conjugados donde la frecuencia de corte está en $f_o = 154,51kHz$ y presenta un sobrepico.

Impedancia de entrada con A_{vol} finito en este escenario se analiza la impedancia de entrada del amplificador operacional, considerando las características reales del modelo equivalente del mismo.
Aplicando una transformación de fuentes se simplifica el circuito y se deja en evidencia que la fuente de corriente correspondiente a la salida equivale a una impedancia equivalente como se muestra en los circuitos de la figura. De esta forma se agrupan las impedancias y se encuentra la Z_{in}, para ello se llama Y_r y luego Z_r al agrupamiento paralelo de impedancias.

$$Y_r = \frac{1}{r_{id}} + \frac{1 + A_{vol}}{R + Z_o} \Rightarrow Z_r = \frac{r_{id} \cdot (R + Z_o)}{R + Z_o + r_{id} \cdot (1 + A_{vol})} \tag{12}$$

$$Z_{in} = \frac{1}{sC} + Z_r = \frac{1 + s \cdot \frac{C \cdot r_{id} \cdot (R+Z_o)}{R+Z_o+r_{id} \cdot (1+A_{vol})}}{s \cdot C} \Rightarrow Z_{in} = \frac{1 + \frac{s}{992,66 \cdot 10^6}}{\frac{s}{50 \cdot 10^6}} \tag{13}$$

Resulta interesante observar que para frecuencias donde $f < 15,79MHz$, la impedancia de entrada se puede aproximar al valor de la impedancia del capacitor, lo cual contrasta con la consideración de que con un A_{vol} muy grande se produce una masa virtual en el terminal inversor. Esto impone como límite de funcionamiento que para frecuencias demasiado altas dentro de ese rango, la impedancia del capacitor se verá reducida a un orden en el cual la ganancia a lazo cerrado del circuito provoque una saturación que impida el correcto funcionamiento.

Impedancia de entrada con polo dominante ahora se adaptan los cálculos previos para incluir la apreciación del polo dominante dentro del análisis de la impedancia de entrada. Operando con la expresión del polo dominante 8 se llega a que:

$$Z_{in} = \frac{R + Z_o + r_{id} \cdot (A_o + 1 + \frac{s}{\omega_p}) + s \cdot C \cdot r_{id} \cdot (R + Z_o) \cdot (1 + \frac{s}{\omega_p})}{s \cdot C \cdot \left[(R + Z_o) \cdot (1 + \frac{s}{\omega_p}) + r_{id} \cdot (1 + A_o + \frac{s}{\omega_p})\right]} \tag{14}$$

$$Z_{in} = \frac{1}{s \cdot C} \cdot \frac{1 + s \cdot \frac{R + Z_o + r_{id} + r_{id} \cdot C \cdot \omega_p \cdot (R + Z_o)}{\omega_p \cdot [R + Z_o + r_{id} \cdot (A_o + 1)]} + s^2 \cdot \frac{1}{\omega_p \cdot [R + Z_o + r_{id} \cdot (A_o + 1)]}}{1 + s \cdot \frac{R + Z_o + r_{id}}{\omega_p \cdot [R + Z_o + r_{id} \cdot (1 + A_o)]}} \tag{15}$$

$$Z_{in} = \frac{1}{\frac{s}{50 \cdot 10^6}} \cdot \frac{1 + s \cdot 1,192 \cdot 10^{-8} + \left(\frac{s}{4,06 \cdot 10^6}\right)^2}{1 + \frac{s}{91,61 \cdot 10^6}} \tag{16}$$

A diferencia del cálculo sin el polo dominante, este nuevo análisis provee otro resultado interesante que es la presencia de un par de ceros complejos y conjugados pues se puede apreciar en el numerador un polinomio de segundo orden cuyos parámetros característicos con $\xi = 0,0242$ y $\omega_o = 4,06 \cdot 10^6$. Luego se observará de forma más clara en los gráficos pertinentes, pero si se limita el funcionamiento a frecuencias que cumplan $f < 1,458MHz$ para despreciar el efecto del polo se ve que la impedancia de entrada la rige el capacitor hasta que en la frecuencia de corte de los ceros se produce un pico muy grande que disminuye tal impedancia de entrada. Esta observación será tenida en cuenta cuando se haga un análisis más profundo sobre los rangos de funcionamiento del circuito.

Resultados

Circuito derivador compensado

Análisis Teórico

Resultados

Circuito integrador

Análisis Teórico

Resultados

Circuito integrador compensado

Análisis Teórico

Resultados