1. Ejercicio 4: Derivador e Integrador

En la presente sección se estudiarán los circuitos derivador e integrador implementados con amplificador operacionales, analizando su comportamiento, rango de funcionamiento y cualidades o defectos. Además se presentará un circuito para cada uno de ellos con modificaciones con el fin de mejorar su funcionamiento y se compararán los resultados entre ellos.
Para cada uno de los circuitos, se realiza un análisis teórico del mismo y luego se presentan las mediciones y los resultados de las mismas, contrastando o comparando lo observado en la práctica, la simulación y la teoría. Además, todo análisis teórico se realiza teniendo en cuenta que los circuitos son armados empleando una resistencia $R = 5k\Omega$, un capacitor $C = 20nF$ y un amplificador operacional LM833 cuyos parámetros son:

- $A_{vol} = 100000$
- $f_p = 150Hz$
- $GBP = 15MHz$
- $SR = 7\frac{V}{\mu s}$
- $r_{id} = 175k\Omega$
- $Z_o = 37\Omega$

1.1. Circuito derivador

1.1.1. Análisis Teórico

Función transferencia en condiciones ideales se busca la función de transferencia del circuito bajo condiciones ideales, esto es, asumiendo que el amplificador operacional no tiene variación en su ganancia de lazo abierto con la frecuencia y que la misma tiende a infinito, $A_{vol} \to \infty$. En este marco de idealidad, las impedancias de entrada y salida del amplificador operacional $Z_{in} \to \infty$ y $r_o = 0$. Para este cálculo se conoce la ganancia ideal de un amplificador inversor y se asume al mismo un sistema LTI, causal y bibo-estable.

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{\frac{1}{s \cdot C}} = -s \cdot R \cdot C = -\frac{s}{10000} \tag{1}$$

Se puede observar que por la propiedad de la derivada para transformada de Laplace, multiplicar por la variable s en tal dominio, implica derivar la señal en el dominio temporal, de forma tal que se puede llegar:

$$V_o(s) = V_i(s) \cdot H(s) = V_i(s) \cdot -sRC \Rightarrow Vo(t) = -RC \cdot \frac{\delta V_i(t)}{\delta t}$$

Otra observación sobre la función de transferencia ideal, es que para frecuencias altas, según la magnitud de la señal de entrada, se puede producir la saturación del amplificador operacional cuando la ganancia es muy elevada y la salida supera el valor de la fuente de alimentación del circuito. Por otro lado, el sistema descripto por dicha función de transferencia ideal, no es bibo-estable como se asumió desde el principio. Esto se debe al hecho la antitransformada es la derivada del delta de dirac, o como bien se dijo antes, la operación de derivar a una señal, lo cual no siempre garantiza que de como resultado una respuesta acotada, como se verá en el caso del escalón más adelante.

Función transferencia con A_{vol} finito se considera que A_{vol} es finito con lo cual se lo debe tener en cuenta, y para llegar a la función transferencia se plantea por un lado la superposición de las tensiones sobre las entradas del amplificador operacional y luego la expresión de salida del mismo para obtener:

$$v^- = \frac{V_i \cdot R}{\frac{1}{sC} + R} + \frac{V_o \cdot \frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + R} = \frac{V_i \cdot s \cdot R \cdot C + V_o}{1 + s \cdot R \cdot C}$$

$$V_o = (v^+ - v^-) \cdot A_{vol} = -\frac{V_i \cdot s \cdot R \cdot C + V_o}{1 + s \cdot R \cdot C} \cdot A_{vol}$$

$$V_o \cdot \left[1 + \frac{A_{vol}}{1 + s \cdot R \cdot C}\right] = -\frac{V_i \cdot s \cdot R \cdot C \cdot A_{vol}}{1 + s \cdot R \cdot C}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{s \cdot A_{vol} \cdot RC}{A_{vol}+1}}{1 + \frac{s}{\frac{A_{vol}+1}{R \cdot C}}} = -\frac{\frac{s}{2\pi \cdot 1{,}591kHz}}{1 + \frac{s}{2\pi \cdot 159{,}15Hz \cdot 10^6}} \tag{2}$$

De esto último se puede observar que aparece, a diferencia de antes, un polo adicional que podría ser despreciado o incluso anulado bajo las condiciones de idealidad previamente analizadas. Es importante destacar de esta nueva función de transferencia que si se obtiene la frecuencia de corte donde se ubica este polo y limitamos el rango de funcionamiento una decada antes del mismo, podemos considerar condiciones de idealidad tal que el derivador podría seguir funcionando como tal. Esto también se puede ver considerando que, si se llama $\omega_o = \frac{(A_{vol}+1)}{R \cdot C}$ a la frecuencia angular de corte:

$$Si, s << \frac{\omega_o}{10} \Rightarrow 1 >> \frac{s}{\omega_o} \Rightarrow H(s) \approx -\frac{s \cdot A_{vol} \cdot RC}{A_{vol}+1} \approx -s \cdot R \cdot C$$

Función transferencia con polo dominante tomando en cuenta que el fabricante del amplificador operacional coloca un polo a una baja frecuencia para que el ruido se vea atenuado en las altas frecuencias en donde sale en contrafase y así evitar que se produzca una realimentación positiva que haría inestable el circuito, se reemplaza tal expresión en la ecuación 2 y operando:

$$A_{vol}(\omega) = \frac{A_o}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \tag{3}$$

$$H(s) = -\frac{s \cdot A_o \cdot R \cdot C}{(1 + s \cdot C \cdot R) \cdot (1 + \frac{s}{\omega_p}) + A_o} = -\frac{R \cdot C \cdot A_o}{A_o + 1} \cdot \frac{s}{1 + s \cdot \frac{1+\omega_p \cdot RC}{\omega_p \cdot (A_o+1)} + s^2 \cdot \frac{RC}{\omega_p \cdot (A_o+1)}} \tag{4}$$

En esta última condición se puede observar que el circuito se comporta como un segundo orden por ser de segundo grado en el denominador, para lo cual es necesario determinar algunos parámetros que permitan determinar cuál es el comportamiento de tal sistema y para ello se despejan de las siguientes expresiones los valores de ξ y ω_o.

$$\omega_o^2 = \frac{\omega_p \cdot (A_o+1)}{RC} \Rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{\omega_p \cdot (A_o+1)}{RC}}$$

$$\frac{2 \cdot \xi}{\omega_o} = \frac{(1 + \omega_p \cdot R \cdot C)}{\omega_p \cdot (A_o+1)} \Rightarrow \xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \omega_p \cdot R \cdot C}{\sqrt{\omega_p \cdot R \cdot C \cdot (A_o+1)}}$$

$$H(s) = -\frac{\frac{s}{2\pi \cdot 1591{,}56Hz}}{1 + s \cdot 11,53 \cdot 10^{-9} + \left(\frac{s}{2\pi \cdot 154{,}51kHz}\right)^2} \tag{5}$$

Finalmente, se obtiene que $\omega_o = 970817,81\frac{1}{s}$ y $\xi = 0,0056357$. Esto último indica que la respuesta natural del sistema durante una transición entre estados estables contiene un subamortiguamiento, pero más importante, que los polos son complejos y conjugados donde la frecuencia de corte está en $f_o = 154,51kHz$ y presenta un sobrepico.

Para ubicar a qué frecuencia y con qué magnitud ocurre este pico en la respuesta en frecuencia, se busca el mínimo de la función del denominador de la respuesta en frecuencia en módulo. Vale mencionar que al igual que para los futuros análisis que se hagan, se asume el sistema LTI, causal y bibo-estable con lo que luego se puede evaluar $s = j\omega$ para encontrar la respuesta en frecuencia a partir de la función transferencia.

$$D(s) = \left(\frac{s}{\omega_o}\right)^2 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_o} \cdot s + 1 \Rightarrow D(w) = \frac{j \cdot 2 \cdot \xi \cdot \omega}{\omega_o} + \left(\frac{\omega_o^2 - \omega^2}{\omega_o^2}\right)$$

$$|D(w)| = \sqrt{\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_o}\right)^2 + \left(\frac{\omega_o^2 - \omega^2}{\omega_o^2}\right)^2}$$

$$\frac{\delta|D(w)|}{\delta w} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \xi^2 \cdot \omega - \frac{\omega \cdot (\omega_o^2 - \omega^2)}{\omega_o^2} = 0 \Leftrightarrow \omega = \omega_o \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2} \tag{6}$$

Entonces, el pico dentro de la respuesta en frecuencia característico de este sistema se puede encontrar, teóricamente, en la frecuencia $\omega_{pico} = 970817,8 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot (0,0056)^2} = 970786,97\frac{1}{s} \Rightarrow f_{pico} = 154505,54Hz$. Y tendrá una magnitud de $|H(f_{pico})| = 8613,05 \Rightarrow |H(f_{pico})|dB = 78,70dB$.
Este nuevo comportamiento al incluir la consideración del polo dominante establece un primer límite de funcionamiento en término de frecuencias para el derivador. Esto será tenido en cuenta en la conclusión final del análisis teórico.

Impedancia de entrada con A_{vol} finito en este escenario se analiza la impedancia de entrada del amplificador operacional, considerando las características reales del modelo equivalente del mismo.
Aplicando una transformación de fuentes se simplifica el circuito y se deja en evidencia que la fuente de corriente correspondiente a la salida equivale a una impedancia como se muestra en los circuitos de la figura. De esta forma se agrupan las impedancias y se encuentra la Z_{in}, para ello se llama Y_r y luego Z_r al agrupamiento paralelo de impedancias.

$$Y_r = \frac{1}{r_{id}} + \frac{1 + A_{vol}}{R + Z_o} \Rightarrow Z_r = \frac{r_{id} \cdot (R + Z_o)}{R + Z_o + r_{id} \cdot (1 + A_{vol})}$$

$$Z_{in} = \frac{1}{sC} + Z_r = \frac{1 + s \cdot \frac{C \cdot r_{id} \cdot (R+Z_o)}{R+Z_o+r_{id} \cdot (1+A_{vol})}}{s \cdot C} \Rightarrow Z_{in} = \frac{1 + \frac{s}{2\pi \cdot 157,98MHz}}{\frac{s}{2\pi \cdot 7,957MHz}} \tag{7}$$

Resulta interesante observar que para frecuencias donde $f < 157,98MHz$, la impedancia de entrada se puede aproximar al valor de la impedancia del capacitor, lo cual contrasta con la consideración de que con un A_{vol} muy grande se produce una masa virtual en el terminal inversor.

Impedancia de entrada con polo dominante ahora se adaptan los cálculos previos para incluir la apreciación del polo dominante dentro del análisis de la impedancia de entrada. Operando con la expresión del polo dominante 3 se llega a que:

$$Z_{in} = \frac{R + Z_o + r_{id} \cdot (A_o + 1 + \frac{s}{\omega_p}) + s \cdot C \cdot r_{id} \cdot (R + Z_o) \cdot (1 + \frac{s}{\omega_p})}{s \cdot C \cdot \left[(R + Z_o) \cdot (1 + \frac{s}{\omega_p}) + r_{id} \cdot (1 + A_o + \frac{s}{\omega_p})\right]}$$

$$Z_{in} = \frac{1}{s \cdot C} \cdot \frac{1 + s \cdot \frac{R+Z_o+r_{id}+r_{id} \cdot C \cdot \omega_p \cdot (R+Z_o)}{\omega_p \cdot [R+Z_o+r_{id} \cdot (A_o+1)]} + s^2 \cdot \frac{r_{id} \cdot C \cdot (R+Z_o)}{\omega_p \cdot [R+Z_o+r_{id} \cdot (A_o+1)]}}{1 + s \cdot \frac{R+Z_o+r_{id}}{\omega_p \cdot [R+Z_o+r_{id} \cdot (1+A_o)]}}$$

$$Z_{in} = \frac{1}{\frac{s}{2\pi \cdot 7,957MHz}} \cdot \frac{1 + s \cdot 11,923 \cdot 10^{-9} + \left(\frac{s}{2\pi \cdot 153,94kHz}\right)^2}{1 + \frac{s}{2\pi \cdot 14,58MHz}} \tag{8}$$

Como se puede observar, la impedancia de entrada posee dos ceros complejos y conjugados, ubicados en la frecuencia de corte con $f_o = 153,94kHz$, lo cual establece otra consideración a tener en cuenta con respecto a las limitaciones del circuito, puesto que para esta frecuencia la impedancia de entrada se hace muy chica, produciendose un incremento en el consumo de corriente. Por otro lado, al bajar tanto la impedancia se produce una desadaptación, es decir, al ser la impedancia de entrada tan pequeña para esta frecuencia, hay una gran pérdida de tensión sobre la resistencia propia de la fuente de la señal.

Conclusión del análisis teniendo en cuenta las expresiones finales para caracterizar al circuito derivador con la menor idealidad posible, es decir, las ecuaciones 5 y 8 se ve como resultado de este análisis que por la forma de la función transferencia el comportamiento derivador se sostiene hasta una frecuencia de $f = 15,4kHz$, pues hasta esa frecuencia se mantiene aproximadamente en $-90°$ la fase de la respuesta, que se puede aproximar al comportamiento ideal (siendo un amplificador inversor) en el cual el sistema deriva la entrada. Por otro lado, durante este rango de frecuencia la impedancia de entrada está dominada por la del capacitor, con lo cual disminuye hasta que se produce una caída en el valor de la impedancia y se producen pérdidas en la señal que ve el amplificador.

1.1.2. Simulación

1.1.3. Resultados

1.2. Circuito derivador compensado

1.2.1. Análisis Teórico

En el circuito derivador que se analizará a continuación se coloca una compensación que consiste en una resistencia en serie en la entrada con el capacitor, esto se debe a que se busca compensar los efectos del mismo para altas frecuencias. En altas frecuencias, el capacitor tiene una impedancia muy pequeña con lo cual la ganancia del amplificador inversor aumentará y la salida superará la tensión de alimentación del amplificador operacion, produciéndose así la saturación del circuito. Por otro lado, en cierta parte como la impedancia de entrada depende del capacitor, al reducirse tanto a medida que aumenta la frecuencia, disminuye la impedancia de entrada y se producen mayores pérdidas en la tensión del generador que recibe el circuito.

Función transferencia en condiciones ideales haciendo uso de las condiciones de idealidad que ya se mencionaron para el circuito derivador, a partir de la expresión de la ganancia o transferencia de un amplificador inversor ideal, se llega a que:

$$\begin{aligned} H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} &= \frac{-R_2}{R_1 + \frac{1}{s \cdot C}} \\ &= -\frac{s \cdot C \cdot R_2}{1 + s \cdot C \cdot R_1} \end{aligned}$$

Función transferencia con A_{vol} finito asumiendo que la corriente de entrada del amplificador operacional no es apreciable con respecto a las corrientes de la red L de realimentación, se plantean las tensiones en las entradas y utilizando la expresión de tensión de salida, se obtiene que:

$$v^- = V_o \cdot \frac{R_1 + \frac{1}{s \cdot C}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{s \cdot C}} + V_i \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \frac{1}{s \cdot C}}$$

$$V_o = (v^+ - v^-) \cdot A_{vol} \Rightarrow V_o \cdot \left[1 + \frac{A_{vol} \cdot (1 + s \cdot C \cdot R_1)}{1 + s \cdot C \cdot (R_1 + R_2)}\right] = -V_i \cdot \frac{A_{vol} \cdot (s \cdot C \cdot R_2)}{1 + s \cdot C \cdot (R_1 + R_2)}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{\frac{s \cdot A_{vol} \cdot C \cdot R_2}{1 + A_{vol}}}{1 + s \cdot \frac{C \cdot (R_2 + R_1 \cdot (1 + A_{vol}))}{1 + A_{vol}}} \tag{9}$$

Función transferencia con polo dominante finalmente si se considera la ecuación anterior obtenida en 9 y se reemplaza el A_{vol} por la función que contiene el polo dominante, entonces se llega a que:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{-s \cdot C \cdot R_2 \cdot A_o}{\left(1 + \frac{s}{\omega_p}\right) \cdot (1 + s \cdot C \cdot (R_1 + R_2)) + A_o \cdot (1 + s \cdot C \cdot R_1)} \\ &= -\frac{\frac{s \cdot c \cdot R_2 \cdot A_o}{A_o + 1}}{1 + s \cdot \frac{1 + \omega_p \cdot (A_o \cdot C \cdot R_1 + C \cdot (R_1 + R_2))}{\omega_p \cdot (1 + A_o)} + s^2 \cdot \frac{C \cdot (R_1 + R_2)}{\omega_p \cdot (1 + A_O)}} \end{aligned}$$

De esta última expresión se puede ver del denominador que hay un segundo orden, entonces se procede a obtener sus parámetros característicos y así determinar su comportamiento.

$$\omega_o = \sqrt{\frac{\omega_p \cdot (A_o + 1)}{C \cdot (R_1 + R_2)}} \tag{10}$$

$$\xi = \frac{[1 + \omega_p \cdot C \cdot (R_1 \cdot (1 + A_o) + R_2)]}{2 \cdot \sqrt{\omega_p \cdot C \cdot (A_o + 1) \cdot (R_1 + R_2)}} \tag{11}$$

Ahora bien, para poder completar el análisis del circuito es necesario determinar el valor de la resistencia R_1 la cual no ha sido determinada pues fue agregada a forma de compensación. Para poder determinar su valor se requieren los siguientes criterios: que no hayan sobrepicos en la función de transferencia y pueda funcionar hasta la mayor frecuencia posible, además debe tener un error en la fase menor a 3 grados.
Para poder implementar estas condiciones en el circuito, hay que observar que en la función transferencia según sea el caso, primero el denominador debe tener un valor de $\xi \geqslant 1$ dado que se evita así un sistema subamortiguado cuya respuesta en frecuencia presente un sobrepico. Esta condición se cumple partiendo de la ecuación 11:

$$\xi \geqslant 1 \Leftrightarrow$$
$$1 + \omega_p \cdot C \cdot (R_1 \cdot (A_o + 1) + R_2) \geqslant 2 \cdot \sqrt{\omega_p \cdot C \cdot (A_o + 1) \cdot (R_1 + R_2)} \Leftrightarrow$$
$$R_1^2 \cdot (\omega_p^2 \cdot C^2 \cdot (A_o + 1)^2) + R_1 \cdot 2 \cdot \omega_p \cdot C \cdot (A_o + 1) \cdot (R_2 \cdot \omega_p \cdot C - 1) + (1 + \omega_p^2 \cdot R_2^2 \cdot C^2 + \omega_p \cdot C \cdot R_2 \cdot (-2 - 4 \cdot A_o) \geqslant 0$$

Resolviendo la cuadrática y encontrando sus raíces, se puede ver que el rango de resistencia con sentido físico para los cuales se logra que el sistema se comporte sobreamortiguado o críticamente amortiguado, son aquellos donde $R_1 \geqslant 103,48\Omega$. Por otro lado, para conseguir que el circuito derivador opere hasta la mayor frecuencia posible, habiendo descartado el casos subamortiguado para evitar los sobrepicos en la respuesta en frecuencia, se desea que en el caso óptimo se encuentre en un amortiguamiento crítico. Esto se debe a que de esta forma en la mayor frecuencia de corte posible se produce la caída a 40dB/dec, mientras que en un escenario sobreamortiguado el polo se separaría en dos frecuencias de corte reduciendo el ancho de banda disponible.
Con el fin de cumplir con estas condiciones y obtener como resultado el circuito con mejor rendimiento en términos del ancho de banda donde opera, se coloca un preset en vez de una resistencia fija para poder calibrar el sistema en un valor de aproximadamente $R = 103,487\Omega$.
Este proceso de calibración consiste en utilizar el generador de funciones para excitar al circuito con un escalón. Por ser una entrada $V_i(s) = \frac{K}{s}$ con K un valor de amplitud dado, y tener un sistema derivador, la salida debiera de ser una delta de dirac que se verá acotada por la saturación del amplificador operacional. No obstante, en la transición de la respuesta del circuito se verá la respuesta natural del mismo donde se podrá analizar si está en cualquiera de los casos subamortiguado, sobreamortiguado o críticamente amortiguado, con lo cual se debe mover el preset hasta entrar en la zona sobreamortiguada y luego reducir su valor ligeramente hasta observar que en la salida se tiene el decrecimiento exponencial de menor constante de tiempo sin producir subamortiguamiento.

Impedancia de entrada con A_{vol} finito agregar una nueva resistencia en la entrada del circuito modifica la impedancia de entrada, de forma tal que el análisis se puede aplicar de igual forma que para cuando no estaba, sumandole al resultado obtenido para el derivador sin compensar la resistencia adicional. Realizando algunos pasos algebraicos, se obtiene que:

$$Z_{in}(s) = \frac{1 + s \cdot C \cdot R_1}{s \cdot C} \cdot \frac{1 + s \cdot \frac{R_1 \cdot C \cdot [2 \cdot (R_2 + Z_o) + r_{id} \cdot (1 + A_{vol})]}{R_2 + Z_o + r_{id} \cdot (1 + A_{vol})}}{1 + s \cdot \frac{R_1 \cdot C \cdot [(R_2 + Z_o) \cdot 2 + r_{id} \cdot (1 + A_{vol})] - C \cdot r_{id} \cdot (R_2 + Z_o)}{R_2 + Z_o + r_{id} \cdot (1 + A_{vol})}} \tag{12}$$

Impedancia de entrada con polo dominante de igual forma que para el caso anterior, se utilizan los cálculos realizados previamente para el circuito derivador sin compensar y luego agrega sumando la resistencia adicional en la entrada del circuito, obteniendo luego de algunos pasos algebraicos la impedancia de entrada para el caso donde se considera el polo dominante:

$$Z_{in}(s) = \frac{1 + s \cdot C \cdot R_1}{s \cdot C} \cdot \frac{1 + s \cdot \frac{(R_2 + Z_o) \cdot (1 + 2 \cdot R_1 \cdot C \cdot \omega_p) + r_{id} \cdot (1 + R_1 \cdot C \cdot \omega_p \cdot (A_o + 1)}{\omega_p \cdot [R_2 + Z_o + r_{id} \cdot (A_o + 1)]} + s^2 \cdot \frac{R_1 \cdot C \cdot [2 \cdot (R_2 + Z_o) + r_{id}]}{\omega_p \cdot [R_2 + Z_o + r_{id} \cdot (1 + A_o)]}}{1 + s \cdot \frac{(R_2 + Z_o) \cdot [1 - C \cdot \omega_p \cdot (r_{id} - 2 \cdot R_1)] + r_{id} \cdot [1 + R_1 \cdot C \cdot (1 + A_o) \cdot \omega_p]}{\omega_p \cdot [R_2 + Z_o + r_{id} \cdot (1 + A_o))]} + s^2 \cdot \frac{C \cdot [(R_2 + Z_o) \cdot (2 \cdot R_1 - r_{id}) + R_1 \cdot r_{id}]}{\omega_p \cdot [R_2 + Z_o + \cdot r_{id} \cdot (1 + A_o)]}} \tag{13}$$

Expresiones finales de las expresiones teóricas obtenidas para el derivador compensado y luego de realizar el diseño para cumplir con los criterios impuestos, considerando que el preset calibrado estará en el entorno de $R_1 = 103,487$, se obtienen las expresiones con valores numéricos para realizar las comparaciones teóricas. Vale aclarar que en la práctica el preset no tendrá dicho valor, sino que la suma entre las resistencia de entrada del generador, las parásitas y la del preset darán tal resultado.

$$H(s) = -\frac{\frac{s}{10000,1}}{1 + s \cdot 2,08 \cdot 10^{-6} + \left(\frac{s}{2\pi \cdot 152,935 \cdot 10^3}\right)^2} \tag{14}$$

$$Z_{in}(s) = \frac{1 + \frac{s}{2\pi \cdot 76,89kHz}}{\frac{s}{2\pi 7,95MHz}} \cdot \frac{1 + s \cdot 2,0806 \cdot 10^{-6} + \left(\frac{s}{2\pi \cdot 1,04MHz}\right)^2}{1 + s \cdot 2,076 \cdot 10^{-6} - \left(\frac{s}{2\pi \cdot 155,64kHz}\right)^2} \tag{15}$$

1.2.2. Simulación

1.2.3. Resultados

1.3. Circuito integrador

1.3.1. Análisis Teórico

Función transferencia en condiciones ideales considerando el sistema LTI, causal y bibo-estable, bajo condiciones de idealidad donde $A_{vol} \to \infty$, luego como se conoce la expresión para dicho caso del amplificador inversor, se obtiene que:

$$H(s) = -\frac{\frac{1}{s \cdot C}}{R} = -\frac{1}{s \cdot C \cdot R} \Rightarrow H(s) = -\frac{1}{\frac{s}{2\pi \cdot 1,591kHz}} \tag{16}$$

En este primer acercamiento al comportamiento del circuito, se puede observar en la función transferencia que se describe un sistema que no es bibo-estable como se asumió en un principio, sino que posee un polo en el origen. Esto último tiene sentido porque implica que para entradas acotadas, la respuesta será la integral de dicha entrada acotada, pudiendo dar un resultado no acotado en el tiempo. Desde otro punto de vista, para frecuencias muy bajas o señales continuas, la impedancia del capacitor en la realimentación es demasiado grande y provoca una desconexión o un lazo débil, por lo tanto el amplificador operacional satura puesto que amplifica en términos de su A_{vol} correspondiente según sea el caso.

Función transferencia con A_{vol} finito considérese un A_{vol} finito, luego se plantean los valores de potencial eléctrico sobre los terminales de las entradas del amplificador operacional y se calcula la salida con la ecuación correspondiente al modelo del mismo. Entonces, se obtiene:

$$v^- = V_i \cdot \frac{\frac{1}{s \cdot C}}{\frac{1}{s \cdot C} + R} + V_o \cdot \frac{R}{\frac{1}{s \cdot C} + R} \Rightarrow v^- = \frac{V_i + V_o \cdot s \cdot C \cdot R}{1 + s \cdot C \cdot R}$$

$$V_o = (v^+ - v^-) \cdot A_{vol} \Rightarrow V_o \cdot \left[1 + \frac{A_{vol} \cdot s \cdot R \cdot C}{1 + s \cdot C \cdot R}\right] = -V_i \cdot \frac{A_{vol}}{1 + s \cdot C \cdot R}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{-A_{vol}}{1 + s \cdot C \cdot R \cdot (A_{vol} + 1)} \Rightarrow H(s) = \frac{-100000}{1 + \frac{s}{2\pi \cdot 0,0159Hz}} \tag{17}$$

Se puede observar que con estas nuevas consideraciones, el sistema dejó de ser inestable en términos de su respuesta, no obstante sigue sucediendo que para frecuencias muy bajas la realimentación pasa a tener un lazo débil y satura el amplificador operacional.

Función transferencia con polo dominante ahora se considera que la ganancia del amplificador operacional tiene el polo dominante, con lo cual no se mantiene invariante en frecuencia. Reutilizando la expresión anterior para A_{vol} finito y reemplazando tal término por la expresión con el polo dominante se obtiene:

$$H(s) = -\frac{A_o \cdot \omega_p}{s + \omega_p + s \cdot C \cdot R \cdot (A_o \cdot \omega_p + s + \omega_p)} \Rightarrow H(s) = -\frac{A_o}{1 + s \cdot \frac{1 + C \cdot R \cdot \omega_p \cdot (A_o + 1)}{\omega_p} + s^2 \cdot \frac{C \cdot R}{\omega_p}}$$

$$H(s) = -\frac{100000}{1 + s \cdot 10,001 + \left(\frac{s}{2\pi \cdot 488,60Hz}\right)^2}$$

En esta nueva expresión de la función transferencia, el sistema refleja un segundo orden en el denominador del cual se pueden determinar los parámetros característicos del mismo, obteniendo que $\omega_o = 3069,96\frac{1}{s}$ y $\xi = 15351,58 \geq 1$. Entonces el sistema se encuentra en un sobreamortiguamiento con frecuencias de corte ubicadas en $f_1 = 15,0017MHz$ y $f_2 = 0,01499Hz$.

$$H(s) = -\frac{106092,66}{(1 + \frac{s}{2\pi \cdot 0,014998Hz}) \cdot (1 + \frac{s}{2\pi \cdot 15,0017MHz})} \quad (18)$$

En este nuevo resultado la única diferencia con respecto al anterior, es que ahora hay un polo adicional que aparece en una frecuencia muy alejada, no obstante sigue saturando para frecuencias muy bajas por el lazo débil, es por esto que este circuito no funcionará correctamente con el propósito para el que fue pensado desde un punto de vista ideal, por ende será necesario realizar alguna compensación para poder corregirlo.

Impedancia de entrada con A_{vol} finito para encontrar la impedancia de entrada considerando el A_{vol} finito, se redibuja el circuito reemplazando al amplificador operacional con su circuito equivalente y se plantea la ley de nodos.

$$I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow \frac{V_i + V_d}{R_1} = \frac{-V_i}{R_1} + \frac{-V_i - V_i \cdot A_{vol}}{\frac{1}{s \cdot C} + R}$$

$$V_d = \frac{-V_i \cdot r_i \cdot (1 + s \cdot C \cdot Z_o)}{r_i \cdot (s \cdot C \cdot Z_o + 1) + R_1 \cdot (1 + s \cdot C \cdot Z_o) + s \cdot C \cdot R_1 \cdot r_i \cdot (1 + A_{vol})}$$

$$Z_i(s) = \frac{V_i(s)}{I_1(s)} = \frac{V_i(s)}{\frac{V_i(s) + V_d(s)}{R_1}} \Rightarrow Z_i(s) = (R_1 + r_i) \cdot \frac{1 + s \cdot \frac{C \cdot [Z_o \cdot (R_1 + r_i) + R_1 \cdot r_i \cdot (A_{vol} + 1)]}{R_1 + r_i}}{1 + s \cdot C \left[Z_o + r_i \cdot (1 + A_{vol})\right]}$$

$$Z_i(s) = (180k\Omega) \cdot \frac{1 + \frac{s}{2\pi \cdot 0,0163Hz}}{1 + \frac{s}{2\pi \cdot 0,00045Hz}} \quad (19)$$

Impedancia de entrada con polo dominante reutilizando la expresión anterior para la impedancia de entrada y considerando la variación del A_{vol} respecto de la frecuencia, se obtiene:

$$Z_i(s) = (R_1 + r_i) \cdot \frac{1 + s \cdot \frac{r_i + R_1 + \omega_p \cdot C \cdot [Z_o \cdot (R_1 + r_i) + R_1 \cdot r_i \cdot (A_o + 1)]}{\omega_p \cdot (R_1 + r_i)} + s^2 \cdot \frac{C \cdot [Z_o \cdot (R_1 + r_i) + R_1 \cdot r_i]}{\omega_p \cdot (R_1 + r_i)}}{1 + s \cdot \frac{1 + \omega_p \cdot C \cdot (Z_o + r_i \cdot (A_o + 1))}{\omega_p} + s^2 \cdot \frac{C \cdot (Z_o + r_i)}{\omega_p}}$$

$$Z_i(s) = (180k\Omega) \cdot \frac{1 + s \cdot 9,723 + \left(\frac{s}{2\pi \cdot 493,65Hz}\right)^2}{1 + s \cdot 350,0045 + \left(\frac{s}{2\pi \cdot 82,58Hz}\right)^2}$$

$$Z_i(s) = 180k\Omega \cdot \frac{(1 + \frac{s}{2\pi \cdot 25,45Hz}) \cdot (1 + \frac{s}{2\pi \cdot 9574,06Hz})}{(1 + \frac{s}{2\pi \cdot 0,1178Hz}) \cdot (1 + \frac{s}{2\pi \cdot 57,806kHz})} \quad (20)$$

Conclusión del análisis si se tienen en cuenta las expresiones resultantes para la función transferencia y la impedancia de entrada con la menor idealidad posible, es decir, los resultados de las Ec. 18 y Ec. 20. Asumiendo que el circuito se comportará como integrador en las regiones de frecuencia para las cuales la fase sea $90°$ puesto que podría aproximarse tal respuesta con la forma de $\frac{-1}{s}$ que en el dominio temporal equivale a la integral de la función, luego para frecuencias que cumplan estar en el rango $0,14998Hz \leq f \leq 1,5Mhz$ se puede aproximar el comportamiento de la $H(s)$ obtenida a dicha forma. No obstante, si se consideran bajas frecuencias, la impedancia del capacitor será tan elevado que el lazo de la realimentación dejará de funcionar como tal, provocando que el amplificador operacional amplifique en términos de su A_{vol} con lo cual saturará y dejará de funcionar para tales frecuencias.

1.3.2. Simulación

1.3.3. Resultados

1.4. Circuito integrador compensado

1.4.1. Análisis Teórico

Función transferencia en condiciones ideales utilizando la expresión del amplificador inversor bajo condiciones ideales, se llama Z_2 a la impedancia que resulta del paralelo de la resistencia y el capacitor. Luego se obtiene:

$$Z_2 = R_2 // \frac{1}{s \cdot C} = \frac{R_2}{1 + s \cdot C \cdot R_2}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2}{R_1} = -\frac{\frac{R_2}{R_1}}{1 + s \cdot C \cdot R_2} \tag{21}$$

Función transferencia con A_{vol} finito considerando la misma impedancia del paralelo en la realimentación que en la resolución ideal, se calcula el valor del potencial en la pata inversora del amplificador operacional y luego se halla la expresión de la función de la siguiente manera:

$$v^- = V_o \cdot \frac{R_1}{R_1 + Z_2} + V_i \cdot \frac{Z_2}{Z_2 + R_1} \Rightarrow v^- = \frac{V_o \cdot R_1 \cdot (1 + s \cdot C \cdot R_2) + V_i \cdot R_2}{R_2 + R_1 \cdot (1 + s \cdot C \cdot R_2)}$$

$$V_o = (v^+ - v^-) \cdot A_{vol} = -A_{vol} \cdot \frac{V_o \cdot R_1 \cdot (1 + s \cdot C \cdot R_2) + R_2 \cdot V_i}{R_1 + R_2 + s \cdot C \cdot R_1 \cdot R_2} \Rightarrow$$

$$V_o \cdot \left[1 + \frac{A_{vol} \cdot R_1 \cdot (1 + s \cdot C \cdot R_2)}{R_1 + R_2 + s \cdot C \cdot R_1 \cdot R_2}\right] = V_i \cdot \frac{-A_{vol} \cdot R_2}{R_1 + R_2 + s \cdot C \cdot R_1 \cdot R_2}$$

$$H(s) = \frac{-A_{vol} \cdot R_2}{R_1 \cdot (1 + A_{vol}) + R_2} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \frac{C \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot (1 + A_{vol})}{R_1 \cdot (1 + A_{vol}) + R_2}} \tag{22}$$

Función transferencia con polo dominante luego reemplazando en la expresión anterior la forma del $A_{vol}(\omega)$ se obtiene:

$$H(s) = \frac{-A_o \cdot \omega_p \cdot R_2}{R_1 \cdot (A_o \cdot \omega_p + s + \omega_p) + R_2 \cdot (s + \omega_p)} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \frac{C \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot (A_o \cdot \omega_p + s + \omega_p)}{R_2 \cdot (s + \omega_p) + R_1 \cdot (A_o \cdot \omega_p + s + \omega_p)}}$$

$$H(s) = \frac{-A_o \cdot R_2}{R_2 + R_1 \cdot (1 + A_o)} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \frac{C \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \omega_p \cdot (A_o + 1) + R_1 + R_2}{\omega_p \cdot (R_2 + R_1 \cdot (A_o + 1))} + s^2 \cdot \frac{C \cdot R_1 \cdot R_2}{\omega_p \cdot (R_2 + R_1 \cdot (A_o + 1))}} \tag{23}$$

Impedancia de entrada con A_{vol} finito llamando como Z_2 al paralelo entre la resistencia y el capacitor en el lazo de la realimentación y luego aplicando ley de nodos, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow \frac{V_i + V_d}{R_1} &= \frac{-V_d}{R_{id}} + \frac{-V_d - V_d \cdot A_{vol}}{Z_o + Z_2} \\
\Rightarrow V_d &= \frac{-V_i \cdot r_{id} \cdot [R_2 + Z_o \cdot (1 + s \cdot C \cdot R_2)]}{(R_1 + r_{id}) \cdot [R_2 + Z_o \cdot (1 + s \cdot C \cdot R_2)] + (1 + A_{vol}) \cdot (1 + s \cdot C \cdot R_2) \cdot R_1 \cdot r_{id}}
\end{aligned}
$$

$$
Z_{in}(s) = \frac{V_i}{I_1} = \frac{(R_1 + r_{id}) \cdot (R_2 + Z_o) + (1 + A_{vol}) \cdot (R_1 + r_{id})}{R_2 + Z_o + r_{id} \cdot (1 + A_{vol})} \cdot \frac{1 + s \cdot \frac{C \cdot R_2 \cdot [Z_o \cdot (R_1 + r_{id}) + R_1 \cdot r_{id} \cdot (1 + A_{vol})]}{(R_1 + r_{id}) \cdot (R_2 + Z_o) + (1 + A_{vol}) \cdot R_1 \cdot r_{id}}}{1 + s \cdot \frac{C \cdot R_2 [Z_o + r_{id} \cdot (1 + A_{vol})]}{R_2 + Z_o + r_{id} \cdot (1 + A_{vol})}} \tag{24}
$$

Impedancia de entrada con polo dominante reemplazando A_{vol} por su expresión incluyendo el polo dominante, se llega luego de unos pasos algebraicos a que:

$$
Z_{in}(s) = \frac{(R_1 + r_{id}) \cdot (R_2 + Z_o) + R_1 \cdot r_{id} \cdot (1 + A_o)}{R_2 + Z_o + r_{id} \cdot (1 + A_o)} \tag{25}
$$

$$
\cdot \frac{1 + s \cdot \frac{(R_1 + r_{id}) \cdot [C \cdot R_2 \cdot Z_o \cdot \omega_p + R_2 + Z_o] + R_1 \cdot r_{id} \cdot [1 + C \cdot R_2 \cdot \omega_p \cdot (A_o + 1)]}{\omega_p [(R_1 + r_{id}) \cdot (R_2 + Z_o) + R_1 \cdot r_{id} \cdot (1 + A_o)]} + s^2 \cdot \frac{C \cdot R_2 \cdot [(R_1 + r_{id}) \cdot Z_o + R_1 \cdot r_{id}]}{\omega_p [(R_1 + r_{id}) \cdot (R_2 + Z_o) + R_1 \cdot r_{id} \cdot (1 + A_o)]}}{1 + s \cdot \frac{R_2 + Z_o + r_{id} + \omega_p \cdot C \cdot R_2 \cdot [Z_o + (1 + A_o) \cdot r_{id}]}{\omega_p \cdot [R_2 + Z_o + r_{id} \cdot (1 + A_o)]} + s^2 \cdot \frac{C \cdot R_2 \cdot (Z_o + r_{id})}{\omega_p \cdot [R_2 + Z_o + r_{id} \cdot (1 + A_o)]}} \tag{26}
$$

1.4.2. Simulación

1.4.3. Resultados