

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES

# Trabajo Práctico N°5: Filtros Activos y Celdas Teoría de Circuitos - 2019

Grupo 1:

Farall, Facundo David  
Gaytan, Joaquín Oscar  
Kammann, Lucas  
Maselli, Carlos Javier  
Müller, Malena

Profesores:

Jacoby, Daniel Andrés  
Belaustegui Goitia, Carlos  
Iñaki Iribarren, Rodrigo

7 de noviembre de 2019

# Índice

<b>1. Celda Sallen-Key</b>	<b>3</b>
1.1. Celda 2do Orden Sallen-Key: Análisis ideal	3
1.1.1. Función transferencia y parámetros	3
1.1.2. Sensibilidades	4
1.1.3. Métodos de ajuste	5
1.1.4. Impedancia de entrada	8
1.1.5. Impedancia de salida	11
1.2. Celda 2do Orden Sallen-Key: Análisis real	11
1.2.1. Función transferencia y parámetros	12
1.2.2. Sensibilidades	12
1.2.3. Impedancia de entrada	12
1.2.4. Impedancia de salida	13
1.2.5. Restricciones reales sobre impedancias	13
1.2.6. Rango dinámico	14
1.3. Celda 1er Orden pasabajos: Análisis ideal	15
1.3.1. Función transferencia	15
1.3.2. Impedancia de entrada	16
1.4. Diseño de un filtro con Legendre	16
1.4.1. Especificaciones y función aproximación	16
1.4.2. Diseño de etapas	17
1.4.3. Rango dinámico	18
1.4.4. Simulación y verificación	19
1.4.5. Resultados prácticos	20
1.5. Diseño de un filtro con Bessel	23
1.5.1. Especificaciones y función aproximación	23
1.5.2. Diseño de etapas	24
1.5.3. Rango dinámico	26
1.5.4. Simulación y verificación	26
1.5.5. Resultados prácticos	28
1.6. Diseño de PCB	32
1.7. Conclusiones	33
<b>2. Celda Rauch (Deliyannis - Friend modificada)</b>	<b>34</b>
<b>3. Sedra-Ghorab-Martin</b>	<b>35</b>
<b>4. Celda Universal</b>	<b>36</b>

# 1. Celda Sallen-Key

El objetivo de esta sección es la construcción de dos filtros que cumplan con un conjunto de especificaciones, empleando para el diseño en cascada la celda Sallen-Key. Para esto último, es necesario primero realizar un análisis ideal y real de dicha celda para obtener ciertas conclusiones que faciliten el proceso de diseño e impongan restricciones sobre las exigencias que se definan a cada etapa. Es importante aclarar que sólo se analizará la celda pasabajos de Sallen-Key dado que es la única necesaria para la realización de los filtros en cuestión.

## 1.1. Celda 2do Orden Sallen-Key: Análisis ideal

En el siguiente análisis se asume un comportamiento ideal del amplificador operacional, considerando una impedancia de entrada del mismo  $Z_{IN} \rightarrow \infty$ , corrientes de entrada e impedancia de salida nulas, y finalmente una ganancia también  $A_{VOL} \rightarrow \infty$ .

El análisis ideal consiste en determinar la función transferencia y los parámetros característicos para configurar la celda, así como también un análisis de las sensibilidades relativas respecto de los componentes a utilizar y un conjunto de estrategias propuestas para poder realizar el ajuste correcto de la celda. Por otro lado, es de interés analizar las impedancias de entrada y salida de la celda, ya que las mismas son las que permiten determinar hasta qué punto es válido asumir que en la conexión en cascada no se produce una carga de una etapa con otra y efectivamente se puede aproximar  $H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot \dots \cdot H_n(s)$ .

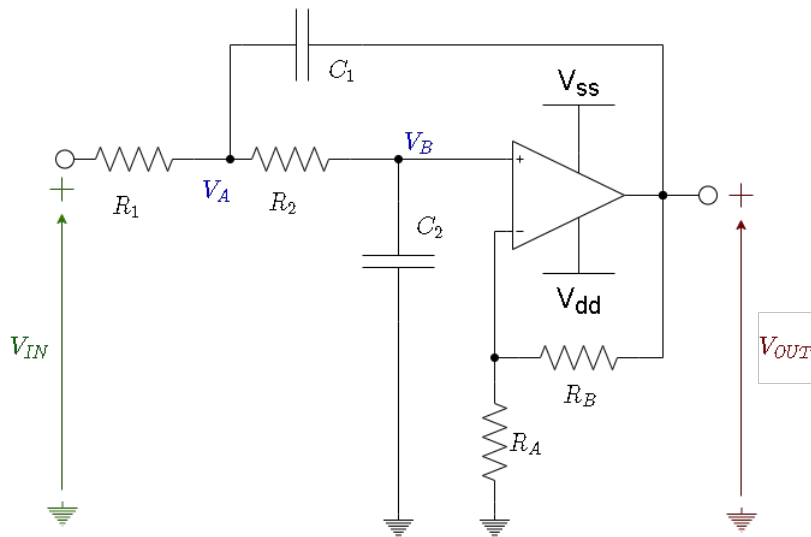


Figura 1: Celda Sallen-Key para pasabajos

### 1.1.1. Función transferencia y parámetros

Dentro del marco de los criterios expuestos anteriormente, para hallar la función transferencia se define el parámetro de ganancia de la celda  $K$ , y luego se plantean un conjunto de ecuaciones empleando las leyes de Kirchhoff. Finalmente, el sistema se resuelve y se obtiene la función  $H(s)$  de la cual se deducen parámetros característicos como  $\omega_o$  y  $Q$ .

$$K = 1 + \frac{R_B}{R_A} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
V_o &= V_b \cdot K \\
V_b &= V_a \cdot \frac{\frac{1}{s \cdot C_2}}{\frac{1}{s \cdot C_2} \cdot R_2} \\
\frac{V_i - V_a}{R_1} &= \frac{V_a - V_o}{\frac{1}{s \cdot C_1}} + \frac{V_a - V_b}{R_2} \\
H(s) &= \frac{K}{C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot s^2 + s \cdot [C_2 \cdot (R_1 + R_2) + C_1 \cdot R_1 \cdot (1 - K)] + 1} \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2}} \quad (3)$$

$$Q = \frac{\sqrt{C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2}}{C_2 \cdot (R_1 + R_2) + C_1 \cdot R_1 \cdot (1 - K)} \quad (4)$$

A partir de estos resultados se puede observar que el parámetro definido  $K$  corresponde a la ganancia de la banda de paso, o en continua. Por otro lado, es importante señalar la influencia de tal ganancia, entre otras variables, sobre el valor del factor de calidad  $Q$  del circuito. Esto último deberá ser tenido en cuenta en el análisis de sensibilidades.

**Estabilidad de la  $H(s)$ :** Si se toma la función transferencia ideal, y luego aplicando la teoría de la transformada de Laplace, todo polo tal que  $Re(polo) \geq 0$  hará que el sistema se vuelva inestable, por tanto la respuesta transitoria no logrará nunca estabilizarse y ante cualquier cambio brusco de excitación el sistema nunca puede converger a un estado estable. Para evitar que esto suceda, se impone una restricción sobre el término lineal, dado que controla la parte real del polo, y de ahí se obtiene que:

$$K < 1 + \frac{C_2}{C_1} \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \quad (5)$$

De aquí que la ganancia de una celda de este tipo nunca puede superar un determinado valor, impuesto por el propio diseño de la frecuencia de corte.

### 1.1.2. Sensibilidades

En el siguiente análisis se emplea la definición de sensibilidades relativas para cada una de las magnitudes o parámetros característicos de la función transferencia. Esto es, calcular  $S_x^y = \frac{x_o}{y(x_o)} \cdot \frac{\delta y}{\delta x}$ .

$R_A$	$R_B$	$R_1$	$R_2$	$C_1$	$C_2$
0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Tabla 1: Sensibilidades de  $\omega_o$

$R_A$	$R_B$	$R_1$	$R_2$	$C_1$	$C_2$
$\frac{1}{K} - 1$	$1 - \frac{1}{K}$	0	0	0	0

Tabla 2: Sensibilidades de  $K$

$K$	$K \cdot Q \cdot \sqrt{\frac{C_1 \cdot R_1}{C_2 \cdot R_2}}$
$R_A$	$-Q \cdot \frac{R_B}{R_A} \cdot \sqrt{\frac{R_1 \cdot C_1}{R_2 \cdot C_2}}$
$R_B$	$Q \cdot \frac{R_B}{R_A} \cdot \sqrt{\frac{R_1 \cdot C_1}{R_2 \cdot C_2}}$
$R_1$	$\frac{-1}{2} + Q \cdot \sqrt{\frac{C_2 \cdot R_2}{C_1 \cdot R_1}}$
$R_2$	$\frac{1}{2} - Q \cdot \sqrt{\frac{C_2 \cdot R_2}{C_1 \cdot R_1}}$
$C_1$	$\frac{-1}{2} + Q \cdot \left[ \sqrt{\frac{C_1 \cdot R_1}{C_2 \cdot R_2}} + \sqrt{\frac{C_1 \cdot R_2}{C_2 \cdot R_1}} \right]$
$C_2$	$\frac{1}{2} - Q \cdot \left[ \sqrt{\frac{C_1 \cdot R_1}{C_2 \cdot R_2}} + \sqrt{\frac{C_1 \cdot R_2}{C_2 \cdot R_1}} \right]$

Tabla 3: Sensibilidades de  $Q$

### 1.1.3. Métodos de ajuste

En el proceso de diseño en cascada, para la composición de cada una de las etapas se realiza una agrupación de ceros y polos acordes para la formación de una función transferencia que pueda ser implementada por alguna de las celdas existentes o disponibles, no obstante su implementación requiere de un proceso de ajuste para garantizar el diseño menos sensible a variaciones por imperfecciones de los componentes o efectos parásitos de los mismos. En este apartado se proponen y analizan diferentes métodos o enfoques de diseño, determinando sus beneficios al momento de ajustar los parámetros de la celda a la etapa deseada.

**Diseño por componentes iguales:** Como estrategia de diseño para facilitar la elección de componentes ante los grados de libertad de los cuales se disponen, se propone  $R = R_1 = R_2$  y luego  $C = C_1 = C_2$ . De esta imposición se simplifican las expresiones de los parámetros y de las sensibilidades, obteniendo:

$$\omega_o = \frac{1}{R \cdot C} \quad (6)$$

$$Q = \frac{1}{3 - K} \quad (7)$$

$K$	$\frac{K}{3-K}$
$R_A$	$-Q \cdot \frac{R_B}{R_A}$
$R_B$	$Q \cdot \frac{R_B}{R_A}$
$R_1$	$\frac{-1}{2} + Q$
$R_2$	$\frac{1}{2} - Q$
$C_1$	$\frac{-1}{2} + Q \cdot 2$
$C_2$	$\frac{1}{2} - Q \cdot 2$

Tabla 4: Sensibilidades de  $Q$

Estos resultados revelan que si bien es más simple la elección de componentes, el ajuste de la celda se vuelve más complejo cuando la etapa requiere una selectividad alta, provocando que ante variaciones de los componentes, para sistemas de selectividad muy alta, cambie el comportamiento del sistema drásticamente. No obstante, este enfoque puede simplificar el proceso de diseño en los casos donde se requiera un  $Q$  bajo.

**Diseño por componentes proporcionales:** Como estrategia se impone que no haya ganancia de banda de paso en esta etapa, es decir que  $K = 1$ , y luego que los componentes sean proporcionales entre sí, para lo cual se definen dos constantes de proporcionalidad tomando como referencia  $R_2 = R \Rightarrow R_1 = m \cdot R$  y  $C_2 = C \Rightarrow C_1 = n \cdot C$ .

$$\omega_o = \frac{1}{R \cdot C \cdot \sqrt{m \cdot n}} \quad (8)$$

$$Q = \frac{\sqrt{m \cdot n}}{1 + m} \quad (9)$$

$K$	$\frac{m \cdot n}{1+m}$
$R_A$	$\frac{m \cdot n}{1+m} \cdot \frac{R_B}{R_A}$
$R_B$	$-\frac{m \cdot n}{1+m} \cdot \frac{R_B}{R_A}$
$R_1$	$\frac{-1}{2} + \frac{1}{1+m}$
$R_2$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{1+m}$
$C_1$	$\frac{-1}{2} + Q \cdot (\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{m \cdot n})$
$C_1$	$\frac{-1}{2} + Q \cdot (\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{m \cdot n})$

Tabla 5: Sensibilidades de  $Q$

En primer lugar uno de los beneficios de esta estrategia es poder imponer restricciones adicionales sobre el diseño, como asignar valores a  $m$  o a  $n$  por separado. Esto último permitiría según el caso minimizar la sensibilidad, suponiendo por ejemplo que  $m = 1$ , o en otro caso que  $n = \frac{1}{2}$ . Es importante aclarar que según el enfoque aplicado, los valores de referencia  $R$  y  $C$  son utilizados para determinar el valor de la frecuencia de corte del filtro, no obstante las proporcionalidades permiten ajustar además la selectividad, con lo cual sólo uno de los dos criterios para minimizar la sensibilidad puede ser utilizado. En segundo lugar, se puede observar que a diferencia de antes la estabilidad frente a variaciones de los valores nominales de componentes es mayor, no obstante esto implica una cota superior a la selectividad que puede garantizar esta celda, para el caso donde  $m = 1$  y luego,  $Q = \frac{\sqrt{n}}{2}$ .

En conclusión, este enfoque de diseño permite según se tenga mayor probabilidad de variaciones en los capacitores o resistencias, ajustar las sensibilidades para minimizar el efecto de tales componentes, y además definir los valores de forma más simplificada. Además, al buscar que  $K = 1$ , se reduce el amplificador a un seguidor de tensión o buffer, lo cual tiene sus ventajas al reducir los componentes necesarios y aumentar el ancho de banda de tal etapa. Por otro lado, puede resultar que para valores grandes de  $Q$  este enfoque resulte en valores de capacitores muy grandes.

**Diseño con atenuación:** Es posible que durante el uso de etapas se necesite una determinada atenuación en la misma si se considera que la entrada puede ser de alta señal, volviéndose susceptible a saturar y distorsionar. Esto último, como se verá posteriormente, afectará directamente al rango dinámico de la celda diseñada. Por lo tanto, es deseable poder imponer una atenuación que mejore tales características, pero en la configuración propuesta no se puede conseguir un  $K < 1$ , salvo que se utilicen resistencias negativas con algún circuito adicional pero eso agregaría complejidad. Entonces, para solucionarlo se propone agregar una resistencia que produzca una división de tensión, de forma tal que al aplicar el teorema de Thevenin, todo el análisis previo es replicable asumiendo que la  $R_1 = R_{TH} = R_{1A} // R_{1B}$ .

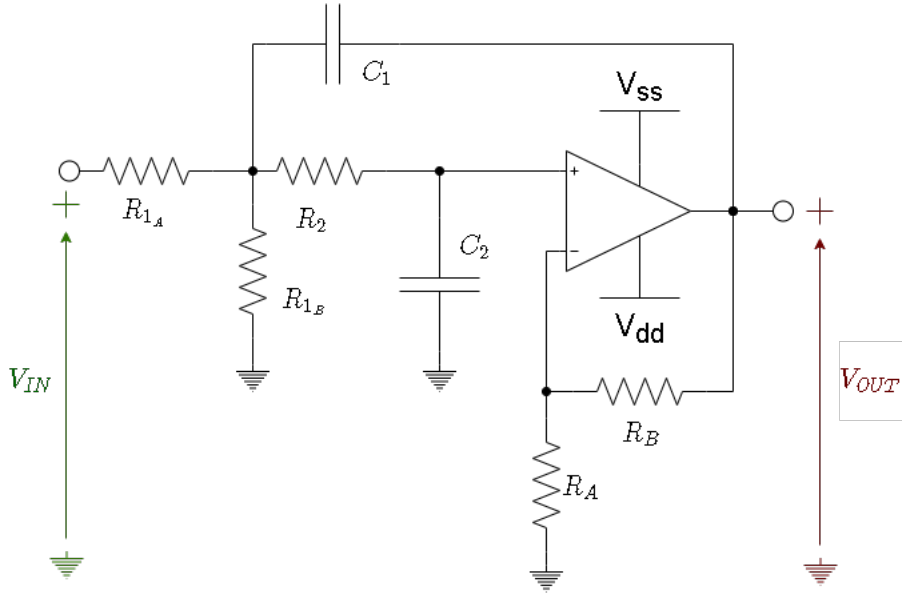


Figura 2: Circuito Sallen-Key pasabajos con atenuación

$$A = \frac{R_{1B}}{R_{1A} + R_{1B}} \quad (10)$$

$$H(s) = \frac{K \cdot A}{C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot s^2 + s \cdot [C_2 \cdot (R_1 + R_2) + C_1 \cdot R_1 \cdot (1 - K)] + 1} \quad (11)$$

#### 1.1.4. Impedancia de entrada

En la Fig. 3 se puede observar que para calcular la impedancia de entrada se debe plantear un sistema de ecuaciones empleando las leyes de Kirchhoff correspondientes.

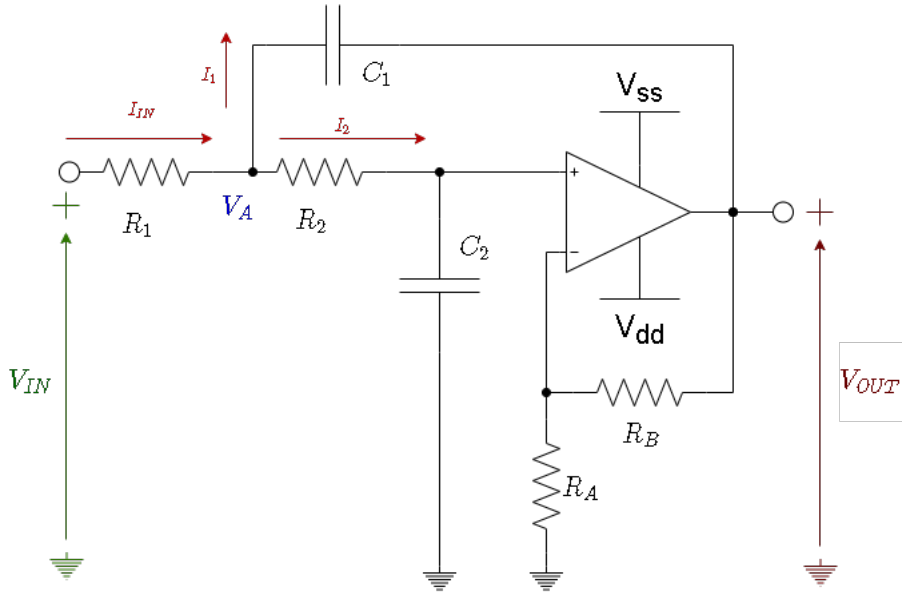


Figura 3: Circuito Sallen-Key pasabajos para cálculo de  $Z_{IN}(s)$



$$\begin{aligned}
\frac{V_i - V_A}{R_1} &= \frac{V_A}{R_2 + \frac{1}{s \cdot C_2}} + \frac{V_A - V_o}{\frac{1}{s \cdot C_2}} \\
V_o &= V_A \cdot K \cdot \frac{\frac{1}{s \cdot C_2}}{R_2 + \frac{1}{s \cdot C_2}} \\
I_2 &= \frac{V_A}{R_2 + \frac{1}{s \cdot C_2}} \\
I_1 &= \frac{V_A - V_o}{\frac{1}{s \cdot C_1}} \\
Z_{IN}(s) &= \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot s^2 + s \cdot [C_2 \cdot (R_1 + R_2) + C_1 \cdot R_1 \cdot (1 - K)] + 1}{s \cdot [C_2 + C_1 \cdot (1 - K)] \cdot \left[ 1 + \frac{s \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_2}{C_2 + C_1 \cdot (1 - K)} \right]} \quad (12)
\end{aligned}$$

A partir de la expresión de la Ec. 12, en primer lugar se puede observar que la etapa como amplificador de transimpedancia es inestable y que para corriente continua la impedancia de entrada  $Z_{IN} \rightarrow \infty$ . No obstante, es de interés realizar un análisis sobre esta expresión que permita estimar de cierta forma una condición de diseño para garantizar que la conexión en cascada de la etapa es viable sin producir mayores desviaciones en la función transferencia total.

Se propone observar que la función  $Z_{IN}(s)$  es de segundo orden, posee un polo en el origen y uno real, y luego dos ceros caracterizan un polinomio que es el mismo que el denominador de la función transferencia, lo cual tiene sentido dado que caracteriza el comportamiento natural del sistema. A partir de esta observación se concluye que los ceros no influyen significativamente, sino que, asumiendo que el sistema se encuentra en todo caso críticamente amortiguado o subamortiguado y luego empleando las aproximaciones asintóticas utilizadas en un diagrama de bode, se puede asumir que para las frecuencias de la banda de paso de este filtro, los ceros no tienen mayor influencia. Así, se reduce la complejidad del análisis ya que cuando se vuelva apreciable el efecto que estas tienen, se estará en la banda de transición o de rechazo. De esta forma, sea que el polo real se encuentra antes o después de dicha frecuencia de corte, para la banda de paso la impedancia de entrada es monótona decreciente, con lo cual podemos estimar de manera aproximada que dentro de esta región de interés el valor mínimo se encuentra sobre la frecuencia de corte, con lo cual  $Z_{IN_{min}} \approx Z_{IN}(s = j \cdot \omega_o)$ . En la Fig. 4 se observa un gráfico con valores arbitrarios para apreciar lo explicado.

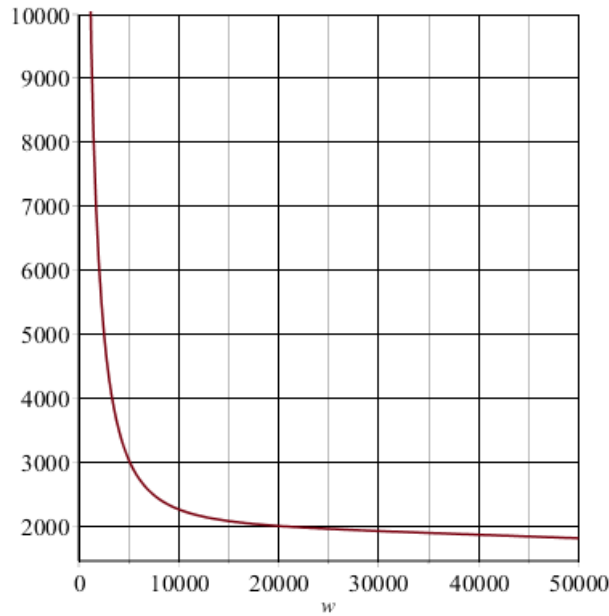


Figura 4: Gráfico de  $|Z_{IN}(j \cdot \omega)|$  con valores arbitrarios

Entonces, reutilizando las expresiones presentadas y usando la definición de la frecuencia de corte como se la encontró en apartados anteriores, se llega a la siguiente expresión de la impedancia de entrada mínima en toda la banda de paso.

$$Z_{IN_{min}} = \frac{C_2 \cdot (R_1 + R_2) + C_1 \cdot R_1 \cdot (1 - K)}{C_1 \cdot (1 - K) + C_2 + j \cdot \sqrt{\frac{C_1 \cdot C_2 \cdot R_2}{R_1}}} \quad (13)$$

Puesto que se han propuesto métodos de ajuste apropiados para la celda estudiada, se simplifica esta expresión en el marco de tales enfoques, para obtener una expresión reducida en función de sus respectivos coeficientes o parámetros.

Para el diseño con componentes iguales:

$$|Z_{IN_{min}}| = \frac{R \cdot |3 - K|}{\sqrt{K^2 - 4 \cdot K + 5}} \quad (14)$$

Para el diseño con componentes proporcionales:

$$|Z_{IN_{min}}| = \frac{R \cdot (1 + m)}{\sqrt{1 + \frac{n}{m}}} \quad (15)$$

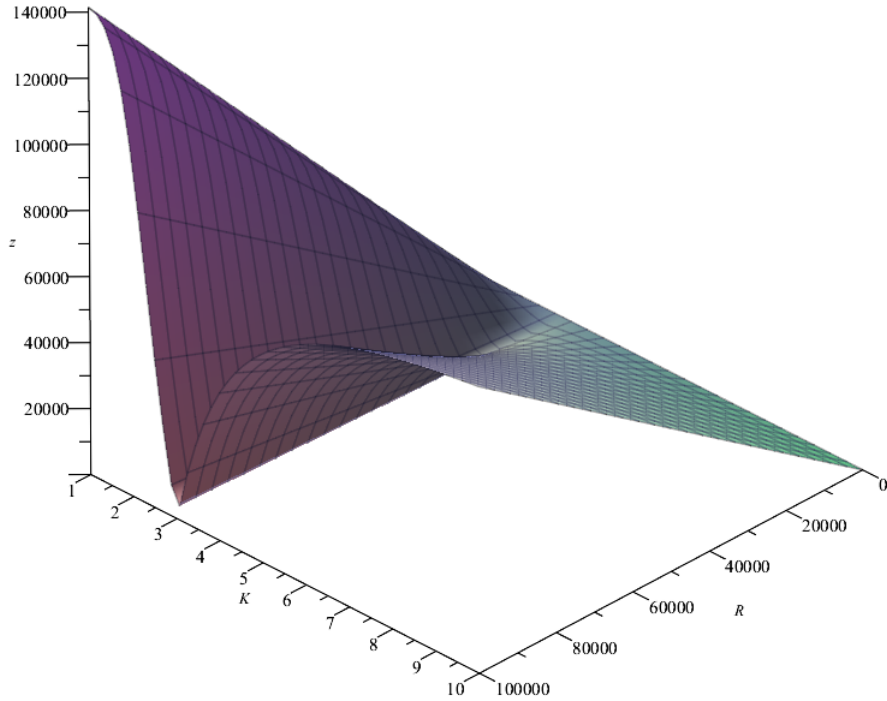


Figura 5: Impedancia de entrada mínima con componentes iguales

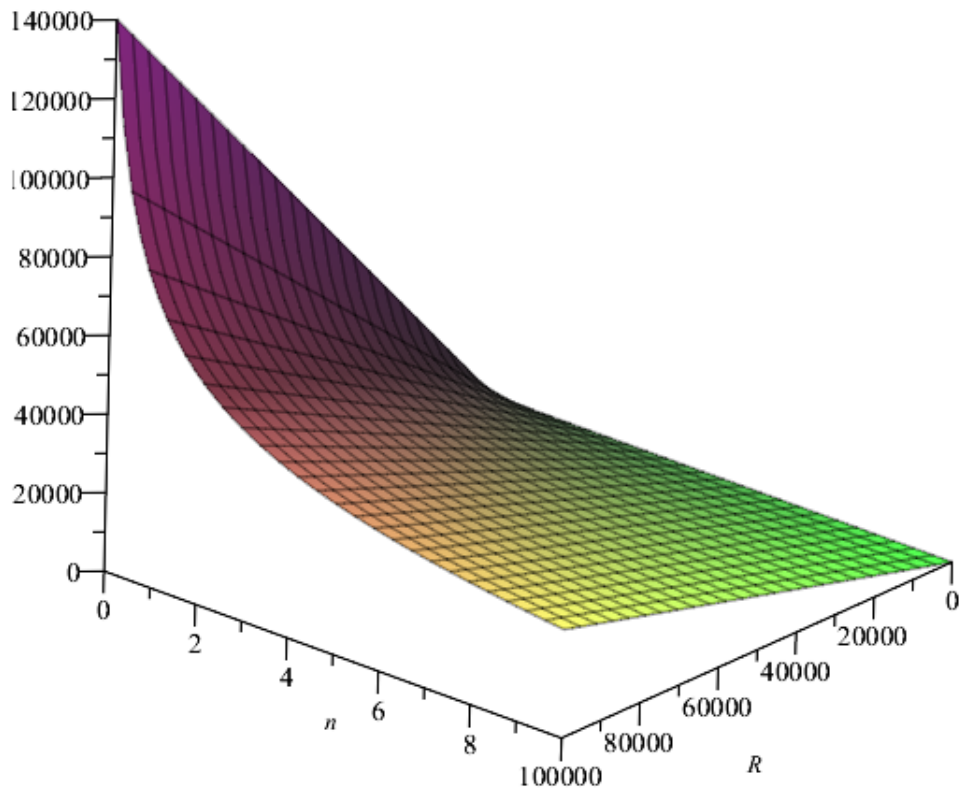


Figura 6: Impedancia de entrada mínima con componentes proporcionales

#### 1.1.5. Impedancia de salida

En el contexto de análisis ideal, dado que la salida del circuito está impuesta por un amplificador operacional con realimentación negativa, luego la impedancia de salida tiende a ser nula. Es decir,  $Z_O = 0$  siempre y cuando sea considerado un amplificador operacional ideal.

### 1.2. Celda 2do Orden Sallen-Key: Análisis real

A continuación se realiza un análisis del comportamiento de la celda tomando consideraciones del amplificador operacional que no sean ideales, no obstante el objetivo principal es estudiar de forma simplificada las desviaciones teóricas causadas por variaciones en su  $A_{VOL}$ , entre otros aspectos. Es por esto que se sigue asumiendo una impedancia de entrada lo suficientemente grande en el amplificador para que las corrientes de entrada sean despreciables, luego asumiendo que su ganancia de tensión es grande, pero finita, y que varía en función de la frecuencia, se hallan expresiones para la función transferencia, la impedancia de entrada, de salida y algunas sensibilidades relacionadas con los nuevos parámetros reales tenidos en cuenta.

### 1.2.1. Función transferencia y parámetros

Se reutiliza el análisis ideal agregando como expresión adicional para la resolución del sistema de ecuaciones, que la relación impuesta por el amplificador operacional es en verdad  $V_o = (V^+ - V^-) \cdot A_{vol}$ . Resolviendo se puede obtener la nueva función de transferencia y sus parámetros.

$$H(s) = \frac{A_{vol} \cdot K}{A_{vol} + K} \cdot \frac{1}{s^2 \cdot C_1 \cdot R_1 \cdot C_2 \cdot R_2 + s \cdot \left[ \frac{(C_1 \cdot R_1 + C_2 \cdot R_1 + C_2 \cdot R_2) \cdot K}{A_{vol} + K} + A_{vol} \cdot \frac{C_2 \cdot (R_1 + R_2) + (1 - K) \cdot C_1 \cdot R_1}{A_{vol} + K} \right] + 1}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{C_1 \cdot R_1 \cdot C_2 \cdot R_2}} \quad (16)$$

$$Q = \frac{(A_{vol} + K) \cdot \sqrt{C_1 \cdot R_1 \cdot C_2 \cdot R_2}}{K \cdot [C_1 \cdot R_1 + C_2 \cdot (R_1 + R_2)] + A_{vol} \cdot [C_2 \cdot (R_1 + R_2) + C_1 \cdot R_1 \cdot (1 - K)]} \quad (17)$$

En primer lugar, es importante destacar que la frecuencia de corte de la celda se mantiene invariante frente a las variaciones del  $A_{vol}$  según se de su valor en un circuito integrado o en otro. A los fines del análisis buscado, no es necesario, pero debe mencionarse que considerando además la disminución de la ganancia por la presencia del polo dominante como compensación para mejorar la estabilidad del amplificador, se incrementa en orden la función transferencia pero el término adicional tiene un efecto o una contribución que puede demostrarse no apreciable para las frecuencias que en relación al nuevo polo son bajas. En segundo lugar, el valor de Q se ve significativamente afectado por la presencia del  $A_{vol}$  por ello es necesario tener en cuenta cuán sensible es a variaciones por cambiar de un integrado a otro integrado, para tener en cuenta durante los proceso de ajuste.

Por otro lado, en los casos donde sea necesario contrastar los resultados, se hará uso de esta última expresión, analizandola con el polo dominante, reemplazando por la expresión de la Ec. 18, y luego reemplazando numéricamente para graficar.

$$A_{vol} = \frac{GBP}{s + \omega_p} \quad (18)$$

### 1.2.2. Sensibilidades

Se resuelve algebraicamente la expresión que define a la sensibilidad relativa, en este caso de Q, respecto del  $A_{vol}$ . Se hace de esta manera, ya que para todos los demás parámetros se realizó en el análisis ideal, y si bien podría cambiar ligeramente se busca asumir para el diseño que el comportamiento ideal es suficiente para imponer tales restricciones.

$$S_{A_{vol}}^Q = \frac{A_{vol}}{A_{vol} + K} - \frac{Q \cdot A_{vol}}{A_{vol} + K} \cdot \sqrt{C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2} \cdot [C_2 \cdot (R_1 + R_2) + C_1 \cdot R_1 \cdot (1 - K)] \quad (19)$$

A modo de verificación, puede observarse que si se hace tender a infinito la ganancia  $A_{vol} \rightarrow \infty \Rightarrow S_{A_{vol}}^Q = 0$ . Lo cual denota que cuanto mayor sea su valor, luego más invariante es el circuito ante sus variaciones.

### 1.2.3. Impedancia de entrada

Para estudiar la impedancia de entrada se reutilizan las expresiones y ecuaciones ya deducidas anteriormente, agregando el siguiente sistema para encontrar la corriente total de entrada, y a partir de ello determinar la impedancia de entrada teórica.

$$I_{R_2} = \frac{V_a}{R_2 + \frac{1}{s \cdot C_2}}$$

$$I_{C_1} = \frac{V_a - V_o}{\frac{1}{s \cdot C_1}}$$

$$Z_{in}(s) = \frac{V_i}{I_{R_2} + I_{C_1}} \quad (20)$$

$$Z_{in}(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega_o}\right)^2 + s \cdot \frac{K \cdot (C_2 \cdot R_2 + C_2 \cdot R_1 + C_1 \cdot R_1) + A_{vol} \cdot (R_2 \cdot C_2 + C_2 \cdot R_1 + C_1 \cdot R_1 \cdot (1-K))}{A_{vol} + K} + 1}{s \cdot \left[ s \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_2 + \frac{(C_1 + C_2) \cdot K + A_{vol} \cdot (C_2 + C_1 \cdot (1-K))}{A_{vol} + K} \right]} \quad (21)$$

#### 1.2.4. Impedancia de salida

En primer lugar, es importante remarcar que una de las principales funciones en realimentación negativa de un amplificador operacional ideal, es la de mejorar la impedancia de salida disminuyéndola en casos en donde dicha realimentación sea con salida de tensión. En la práctica este comportamiento no es tan alejado, ya que se logra una impedancia de salida muy baja, no obstante el objetivo del análisis es estudiar su respuesta en frecuencia para concluir si en la conexión en cascada, ante cambios bruscos en la excitación, existen inconvenientes.

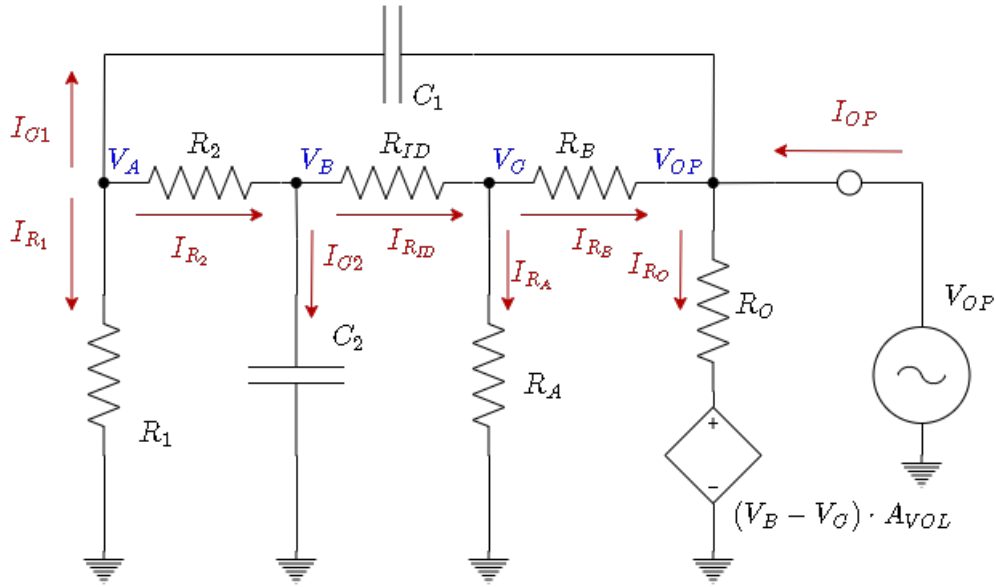


Figura 7: Circuito equivalente para impedancia de entrada

Empleando las correspondientes leyes de Kirchhoff se logra llegar a un sistema de ecuaciones del cual se puede despejar la impedancia de salida, no obstante, tal expresión es demasiado extensa, y de su análisis considerando los valores correspondientes al amplificador real usado, no pudo llegarse a una desviación notoria respecto del resultado ideal. Esto se debió a que el TL084 que se utilizó, tiene entrada diferencial con JFET, con lo cual la  $R_{ID}$  es tan grande que puede ser despreciada, luego  $R_o$  es de aproximadamente  $37\Omega$ , además luego la configuración empleada es de seguidor de tensión por lo cual  $R_B = 0\Omega$  y  $R_A \rightarrow \infty$ . Aplicando estas simplificaciones al desarrollo, se obtiene la Ec. 22.

$$Z_o(s) = \frac{R_o}{A_{vol} + 1} \cdot \frac{\left(\frac{s}{\omega_o}\right)^2 + s \cdot (R_1 \cdot C_1 + R_1 \cdot C_2 + C_2 \cdot R_2) + 1}{\left(\frac{s}{\omega_o}\right)^2 \cdot \left[1 + \frac{R_o}{A_{vol} + 1}\right] + s \cdot \left[C_2 \cdot (R_1 + R_2) + \frac{C_1 \cdot (R_1 + R_o)}{A_{vol} + 1}\right] + 1} \quad (22)$$

Es de interés observar que, en primer lugar si se cumple que la ganancia es muy elevada, luego la  $Z_o \approx 0$ . En segundo lugar, nuevamente el numerador tiene la misma forma que el denominador de la  $H(s)$  y con ello las mismas implicancias que lo que se mencionó para la impedancia de entrada.

#### 1.2.5. Restricciones reales sobre impedancias

El diseño de un filtro mediante la separación del sistema total en sistemas de segundo o primer orden, es en primer lugar algo que se busca para reducir la sensibilidad de los parámetros del filtro frente a los valores de componentes empleados. En este proceso de separación, se busca la interconexión de dichas etapas

o celdas para lo cual es necesario que se cumpla como condición que una etapa o celda no cargue a la anterior para poder buscar que el sistema total sea descrito por el producto de las funciones transferencia de las etapas.

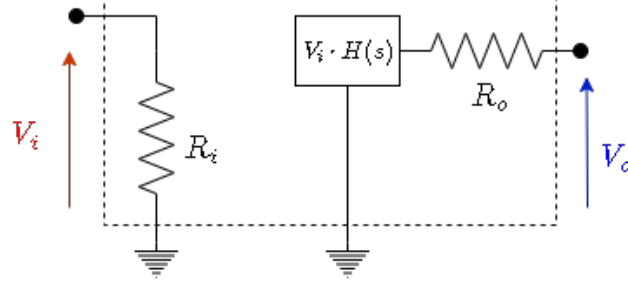


Figura 8: Representación de una celda simplificada

En la Fig. 8 se puede observar una simplificación del modelo de una celda, donde en particular es de interés contemplar que para esta modelización, la interconexión de dos etapas  $H_1(s)$  y  $H_2(s)$  implica un término adicional resultante del divisor entre sus resistencias de salida y entrada respectivamente.

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot \frac{R_{i_2}}{R_{i_2} + R_{o_1}} \quad (23)$$

Es de gran importancia para garantizar el comportamiento esperado del filtro, que  $R_{i_2}$  sea mucho más grande que  $R_{o_1}$ , y así lograr establecer que  $H(s) \approx H_1(s) \cdot H_2(s)$ .

### 1.2.6. Rango dinámico

El rango dinámico es una magnitud que se emplea para describir sistemas según su capacidad de operar con altas y pequeñas señales, es decir, se expresa según la relación entre la mayor y menor señal de entrada que se permite. Esta definición suele expresarse en decibeles como se muestra en la Ec. 24.

$$R_D = 20 \cdot \log\left(\frac{V_{max}}{V_{min}}\right) \quad (24)$$

En primer lugar, el máximo valor de amplitud de entrada de una celda está limitado por dos aspectos del amplificador operacional, por un lado la máxima pendiente de cambio determinada por una limitación de corriente interna en la etapa de salida de dicho dispositivo, a lo cual se conoce como Slew Rate, y por otro lado la máxima tensión de salida tal que que se produzca una distorsión por salir del rango de operación lineal. Para poder determinar  $V_{max}$  es necesario encontrar el mínimo entre estas dos limitaciones, es decir:

$$V_{max} = \min(V_{max_{sat}}, V_{max_{SR}}) \quad (25)$$

Para determinar la máxima amplitud por saturación debe tenerse en cuenta cuál es la máxima ganancia de la etapa construida, para ello no sólo hay que contemplar la banda de paso y su ganancia, sino además el factor de calidad del sistema, dado que para casos de subamortiguamiento se produce una frecuencia con sobrepico que limitará este aspecto. Entonces, derivando el módulo de la respuesta en frecuencia, encontrando el máximo y evaluando, se encuentra que:

$$\omega_{max} = \omega_o \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2 \cdot Q^2}} \quad (26)$$

$$|H(j \cdot \omega_{max})| = \frac{K \cdot Q^2}{\sqrt{Q^2 + \frac{1}{2}}} \quad (27)$$

Con lo cual a partir de esta expresión es necesario determinar  $V_{max_{sat}} = \frac{V_{cc}}{|H_{max}|}$ .

Por otro lado, para el caso de la limitación de Slew Rate, es necesario determinar el punto de máxima pendiente de la señal de entrada que se asume senoidal, luego a partir de esta limitación se puede

considerar que para la máxima frecuencia de paso está el peor caso, y se puede tener una restricción máxima sobre ello.

$$V_{max_{SR}} = \frac{V_{CC}}{K \cdot 2\pi \cdot f_p} \quad (28)$$

Finalmente, para determinar la mínima tensión de entrada de la celda, es necesario tener alguna estimación de la contribución en tal entrada del ruido, dado que lo mínimo de amplitud es aquello a partir de lo cual la señal inyectada se confunde con el ruido. Es válido estimar un valor de piso de ruido para obtener una estimación aproximada que determine el mejor caso de rango dinámico, pues luego en la práctica el ambiente y la interacción con el mismo podrá empeorar las condiciones y afectar al verdadero valor de rango dinámico.

Para aquellos casos donde se realiza una conexión en cascada de las etapas, es necesario realizar una propagación de estos valores para determinar el rango dinámico total. Esto implica que, el valor de tensión mínima de la siguiente etapa, estará dada por el piso de ruido de la primera etapa, que puede ser estimado por la contribución en la salida de los elementos resistivos y el amplificador.

### 1.3. Celda 1er Orden pasabajos: Análisis ideal

En el diseño de los filtros, en los casos donde es necesario un orden de transferencia impar, se requiere el uso de celdas de primer orden. Particularmente en este caso se hace uso de un circuito RC simple con un amplificador operacional de seguidor de tensión o buffer para adaptar las impedancias en la conexión en cascada, tal configuración se puede apreciar en la Fig. 9.

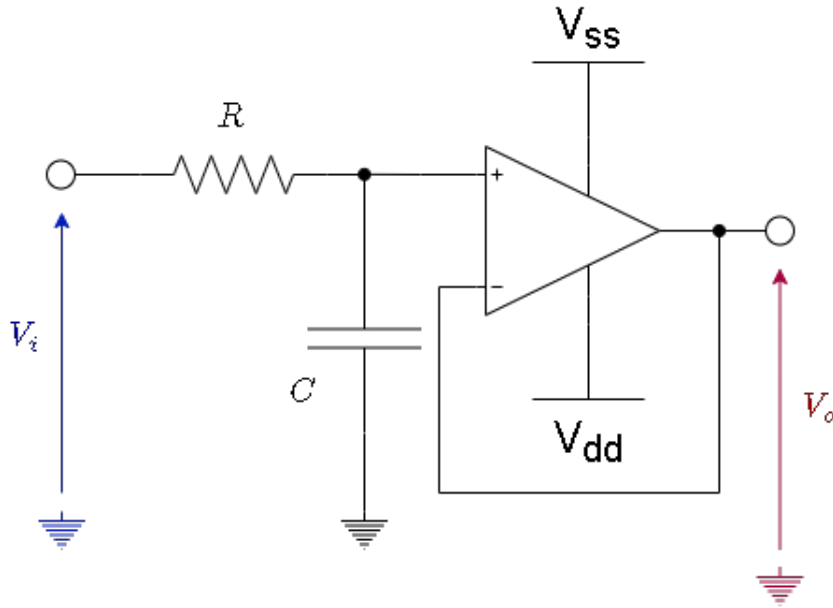


Figura 9: Circuito 1er Orden Pasabajos

#### 1.3.1. Función transferencia

Se puede calcular la función de transferencia considerando el amplificador operacional de forma ideal con su configuración de buffer, luego la transferencia se puede reducir a un simple divisor resistivo de tensión, como se muestra en la Ec. 29.

$$H(s) = \frac{\frac{1}{s \cdot C}}{R + \frac{1}{s \cdot C}} = \frac{1}{1 + s \cdot C \cdot R} \quad (29)$$

Entonces, se puede ajustar sencillamente el circuito para ubicar el polo de primer orden necesario en la frecuencia correspondiente a  $\omega_o = \frac{1}{R \cdot C}$ .

### 1.3.2. Impedancia de entrada

Asumiendo condiciones de idealidad, como el amplificador operacional tiene una impedancia de entrada tal que  $Z_{IN} \rightarrow \infty$ , luego la corriente de entrada del mismo es nula con lo cual la impedancia de entrada vista por el generador de información se simplifica a la forme mostrada en Ec. 30.

$$Z_{in}(s) = \frac{1}{s \cdot C} + R = \frac{s \cdot C \cdot R + 1}{s \cdot C} \quad (30)$$

La principal conclusión de esto, es que para todo el rango de frecuencias se puede aproximar que la impedancia de entrada mínima es cuando la frecuencia es tal que el capacitor tiene una reactancia nula, por ende la resistencia define el mínimo valor de impedancia del circuito. Ergo,  $Z_{in_{min}} = R$ . Lo cual deberá ser tenido en cuenta durante la conexión en cascada para poder asegurar que las etapas no se carguen entre sí.

## 1.4. Diseño de un filtro con Legendre

Entre las funciones de aproximación disponibles para el diseño de filtros, se pueden utilizar los polinomios de Legendre de los cuales mediante procesos de cálculo se obtienen polinomios asociados que permiten construir una aproximación cuyas beneficios más destacables son la máxima pendiente de cambio en la frecuencia de banda de paso normalizada y una buena estabilidad del mismo.

$$|H(j \cdot \omega_N)|^2 = \frac{1}{1 + \xi^2 \cdot L_n(\omega_N)^2} \quad (31)$$

### 1.4.1. Especificaciones y función aproximación

Se desea diseñar un filtro pasabajos implementado con una función de Legendre para altas señales que cumpla con las especificaciones ilustradas en la Tabla 6.

Orden	5
$f_p$	27kHz
$A_p$	3dB
$ Z_{IN}(f) $	$\geq 50k\Omega$

Tabla 6: Especificaciones de filtro con aproximación Legendre

A partir de las especificaciones dadas se obtiene el polinomio de Legendre de orden 5, y utilizando las ecuaciones correspondientes se llega a la función aproximación, es decir, la función transferencia normalizada para la frecuencia unitaria que cumple con lo impuesto anteriormente. Luego se realiza una transformación de frecuencia para correr el filtro normalizado a la frecuencia deseada, finalmente se obtiene la función a implementar con sus polos correspondientes, realizando un ajuste para la ganancia unitaria de la banda de paso si fuera necesario.

Los siguientes polos de la función aproximación fueron encontrados tomando un margen respecto de la plantilla consignada para conseguir mayor libertad en las desviaciones prácticas por efectos parásitos de componentes.



Polo	Ubicación
Complejo conjugado	$f_o = 28,371kHz$ y $Q = 2,88$
Complejo conjugado	$f_o = 21,313kHz$ y $Q = 0,84$
Simple	$f_o = 15,527kHz$

Tabla 7: Polos desnormalizados de la  $H(s)$

#### 1.4.2. Diseño de etapas

Para diseñar este filtro partiendo de los polos obtenidos de la aproximación de Legendre, se los separa en tres etapas. En primer lugar, es necesario tener en cuenta que como la señal de entrada es de amplitud grande según lo especificado, entonces es necesario ordenar la conexión en cascada de las etapas de un menor a un mayor  $Q$ , para prevenir que en los sobrepicos de las frecuencias de corte se produzca la saturación de las primeras etapas. Por otro lado, es necesario tener en cuenta que la etapa de entrada debe cumplir con lo consignado para la impedancia de entrada, y entre sí las etapas deben estar correctamente balanceadas para no cargarse entre sí, con lo cual como idealmente la impedancia de salida de los amplificadores es nula, luego basta con tener una impedancia de entrada relativamente grande para garantizar un correcto acoplamiento.

**1° etapa:** Se diseña una etapa de filtro pasabajo con los parámetros  $\omega_o = 2\pi \cdot 15,527kHz$ . En primer lugar, como se desea que el filtro en general tenga una impedancia de entrada  $\geq 50k\Omega$ , entonces esa misma restricción se impone sobre  $R$ . Luego iterando sobre valores comerciales se encuentra con menos desviación nominal, donde  $R = 100k\Omega$  y  $100pF$ . Si bien es un valor sensible para realizar mediciones, deberá ser tenido en cuenta a la hora de escoger la punta de medición, y contemplado al momento de observar los resultados siempre y cuando se mida sobre el capacitor.

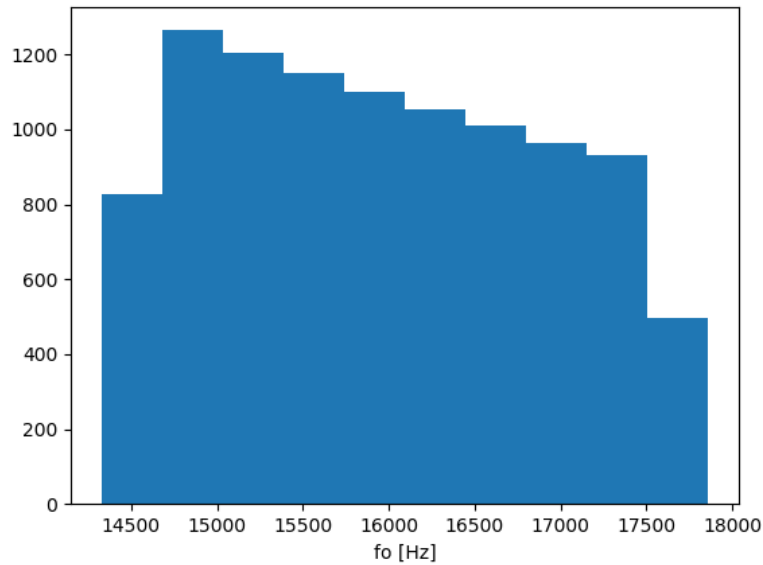


Figura 10: Histograma para la primera etapa de Legendre

**2° etapa:** Se diseña una etapa de filtro pasabajo con los parámetros  $\omega_o = 2\pi \cdot 21,313kHz$  y  $Q = 0,84$ , obteniendo así que se debía utilizar  $R_1 = R_2 = 7,5k\Omega + 430\Omega$  y  $C_2 = 560pF$  y  $C_1 = 1,5nF$ .

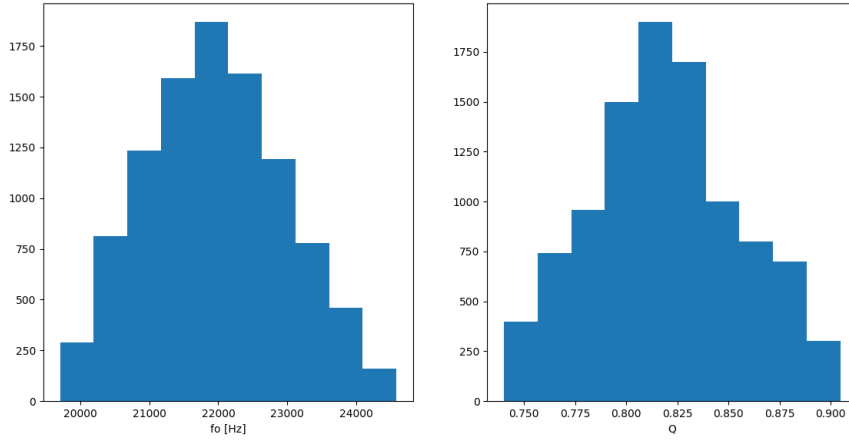


Figura 11: Histograma para la segunda etapa de Legendre

**3° etapa:** Se diseña una etapa de filtro pasabajo con los parámetros  $\omega_o = 2\pi \cdot 28,371kHz$  y  $Q = 2,88$ , obteniendo así que se debía utilizar  $R_1 = R_2 = 9,1k\Omega + 620\Omega$  y  $C_2 = 100pF$  y  $C_1 = 3,3nF$ .

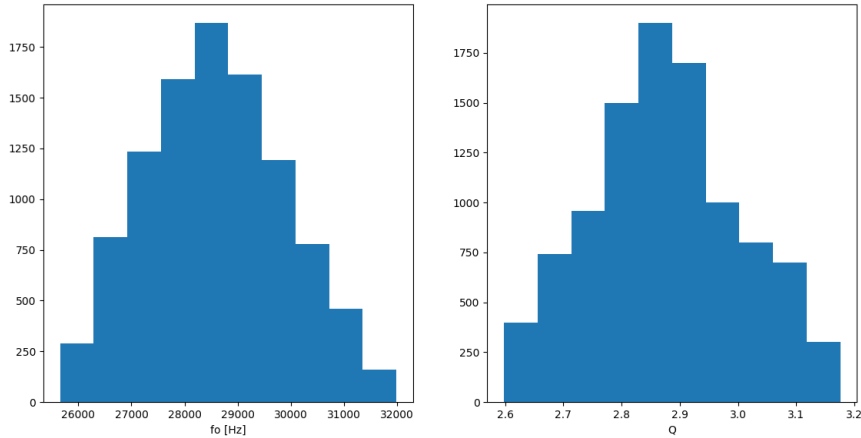


Figura 12: Histograma para la tercera etapa de Legendre

Para el diseño de las etapas se utiliza como amplificador operacional TL084 por su alto producto de ganancia y ancho de banda, así como su alto slew rate, para garantizar una mayor región dentro de la cual se puede operar bajo condiciones ideales o asumiendo que lo son.

#### 1.4.3. Rango dinámico

Empleando el análisis teórico previamente realizado para las celdas, luego en base a las especificaciones y los resultados de las aproximaciones, el valor más grande de factor de calidad del sistema a diseñar es  $Q_{max} = 2,88$  con lo cual dado que la ganancia de banda de paso es unitaria, entonces la ganancia máxima está dada sobre el sobrepico que cae en banda de paso para una de las etapas. Por lo tanto, calculando esa ganancia como  $G_{max} = 2,796$ , luego la amplitud máxima  $V_{max} = 4,47V$ . Finalmente, si se quisiera realizar de forma correcta la estimación del rango dinámico en el mejor de sus casos, debería calcularse la contribución de un posible ruido de entrada sobre las salidas de cada etapa, no obstante este resultado no es del todo representativo de la realidad, dado que el nivel del ruido varía según múltiples variables

del entorno, por tanto se estima un valor  $V_{min} = 10mV$  para obtener simplemente una referencia. Por lo tanto, el  $R_D = 53,01dB$ , y es una cota superior al rango dinámico que se puede encontrar en la realidad.

#### 1.4.4. Simulación y verificación

Se realizan las simulaciones del filtro conectado en cascada utilizando las 3 etapas correspondientes, utilizando un análisis de Monte Carlo se puede apreciar que ante las variaciones por tolerancias de los componentes luego se cumple con la plantilla consignada en todo caso. Se puede observar que el orden del filtro es  $n = 5$  en función del cambio de  $450^\circ$  en la fase,  $90^\circ$  por cada polo.

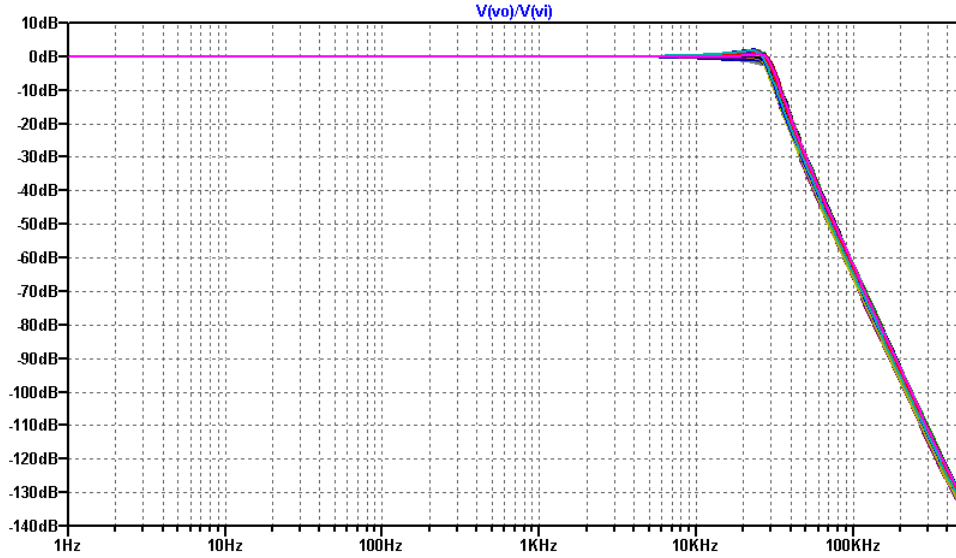


Figura 13: Diagrama de bode en módulo simulado

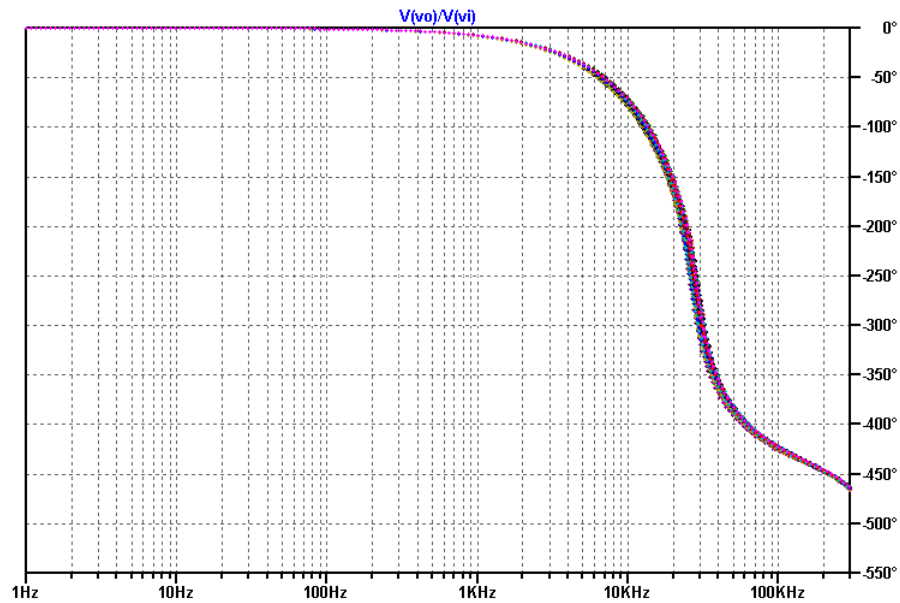


Figura 14: Diagrama de bode en fase simulado

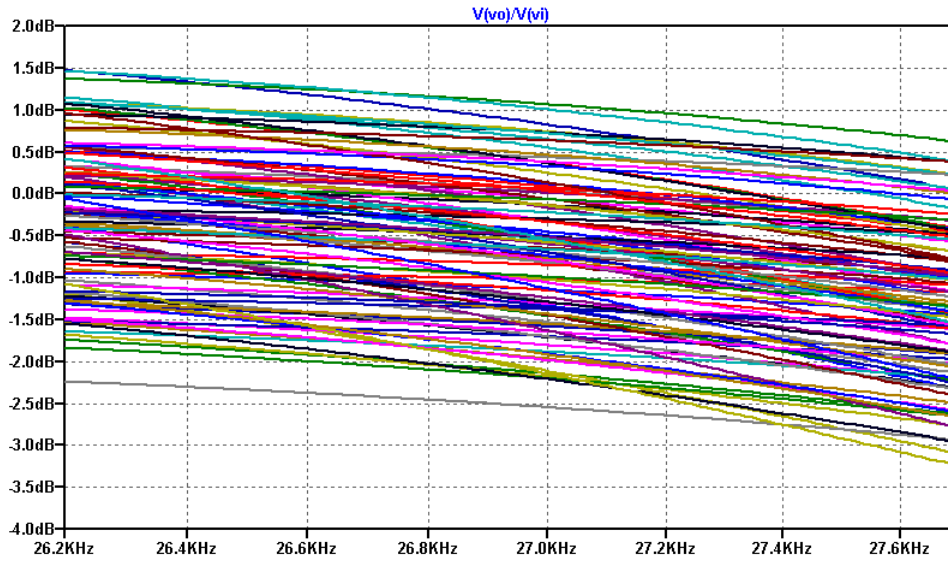


Figura 15: Verificación de la frecuencia de polo

#### 1.4.5. Resultados prácticos

**Respuesta en frecuencia:** En las Figs. 16 y 17 se pueden observar los resultados de la implementación práctica del filtro de Legendre con las celdas Sallen Key. Se realiza la contrastación de los resultados teóricos, prácticos y simulados, acotando el rango de frecuencias en donde se vuelvan apreciables las magnitudes medidas, ya que para mayores frecuencias la señal de salida se encuentra atenuada por debajo del piso de ruido. Se puede observar que para la frecuencia  $f_p = 27kHz$  la caída medida es de  $-1,73dB$ .

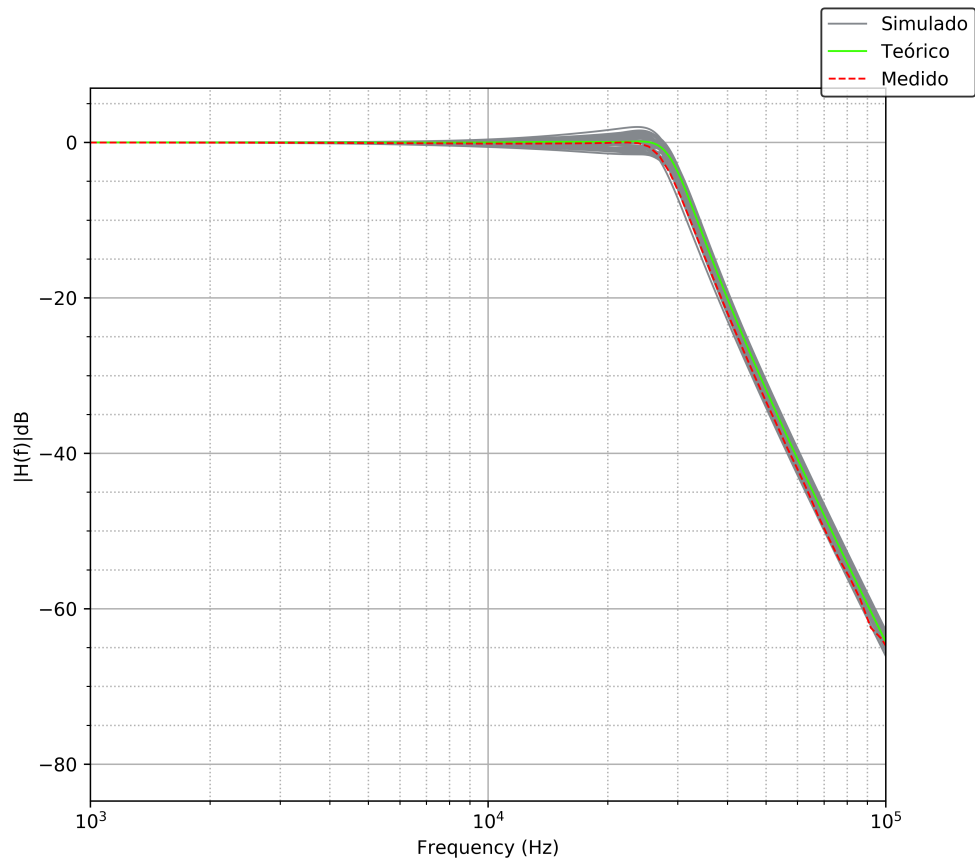


Figura 16: Diagrama de bode en módulo

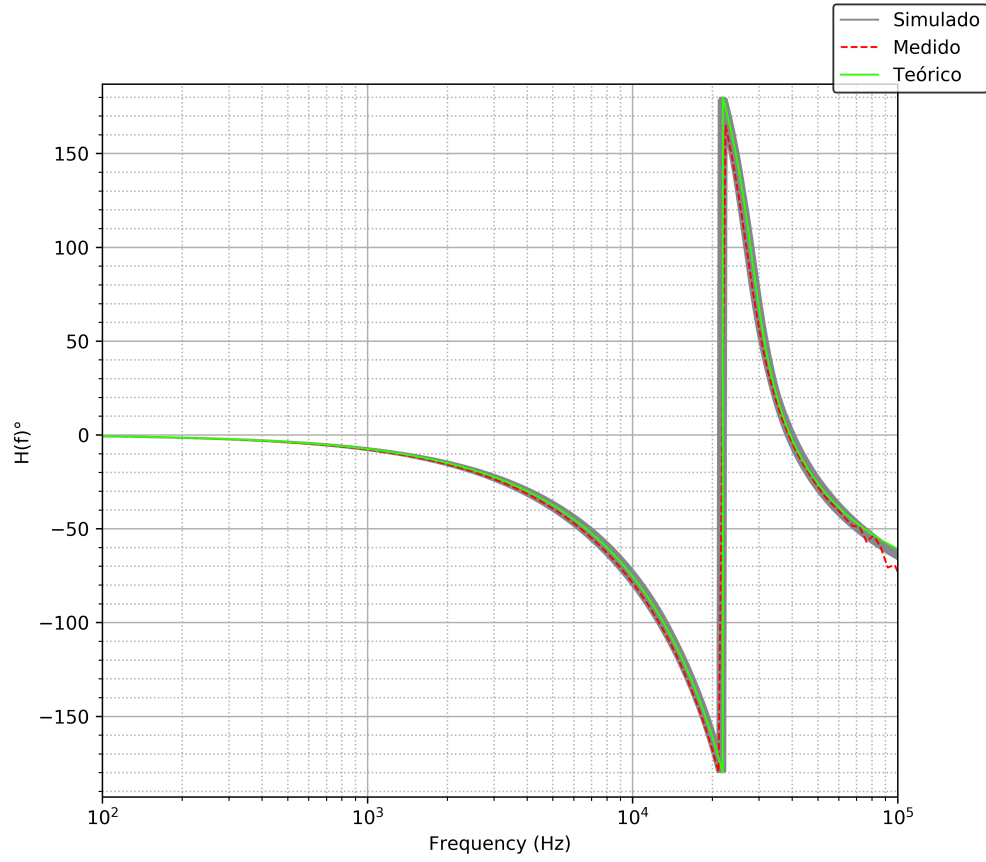


Figura 17: Diagrama de bode en fase

**Impedancia de entrada:** En la Fig. 18 se puede observar la impedancia de entrada medida para el circuito que implementa el filtro de la aproximación de Legendre. Para menores frecuencias la impedancia era mayor, y para mayores frecuencias la impedancia se mantenía constante en un valor, como se puede observar,  $Z_{in} \approx 100k\Omega$ .

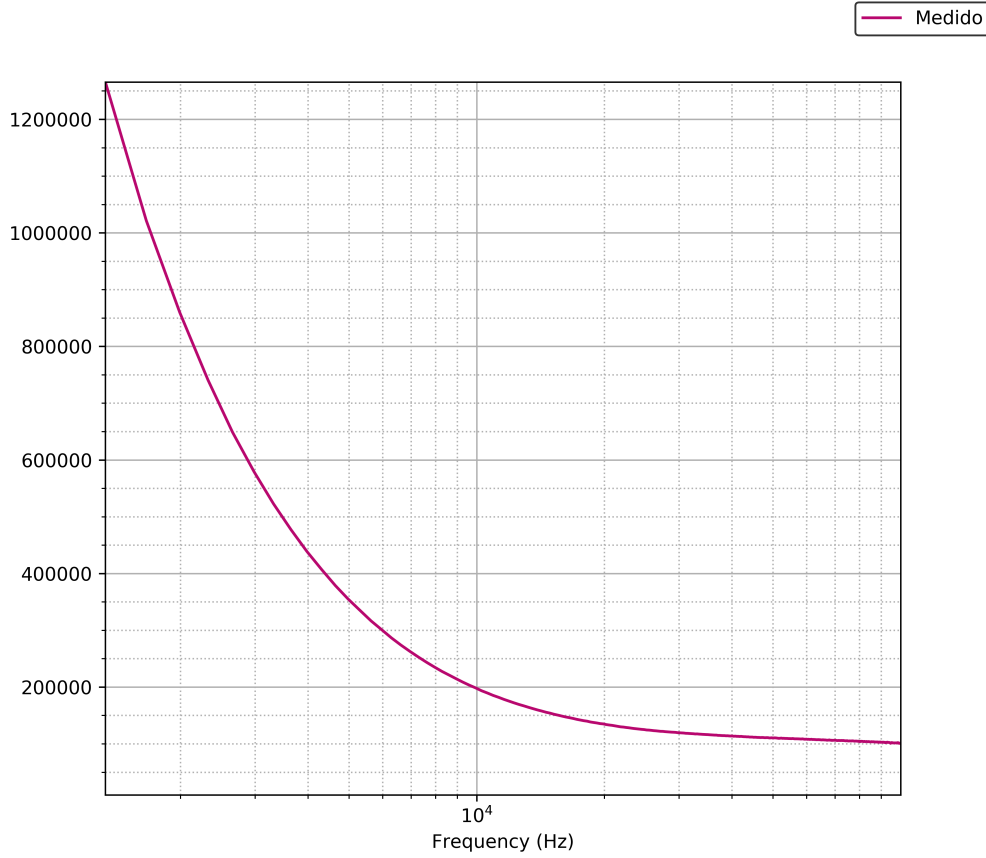


Figura 18: Impedancia de entrada medida

## 1.5. Diseño de un filtro con Bessel

La función de aproximación de Bessel se obtiene a partir de considerar una función racional como transferencia del sistema, a partir de la cual se realizan aproximaciones sobre la fase de su respuesta en frecuencia buscando conseguir la modulación más lineal posible, de esta forma por propiedades de la transformada de Fourier se puede garantizar que el retardo temporal que sufren las señales que entran al sistema es constante para un rango dado de frecuencias. Esta última es la ventaja principal de la aproximación de Bessel, no obstante, como consecuencia de tal análisis además permite implementar un filtro pasabajos con tales características.

Es importante mencionar que Bessel consigue la máxima planicie en el retardo de grupo, pero no existen expresiones cerradas para su cálculo, sino que dado un determinado orden de filtro se puede obtener la función transferencia a partir de un cálculo recursivo, y de ahí es necesario verificar si cumple con las exigencias de las especificaciones del filtro a diseñar.

$$H(s_N) = \frac{B_n(0)}{B_n(s_N)} \quad (32)$$

En esta expresión se emplean los polinomios de Bessel obtenidos de la ecuación recursiva de Bessel.

### 1.5.1. Especificaciones y función aproximación

Se desea diseñar un filtro pasabajos implementado con una función de Bessel para bajas señales que cumpla con las especificaciones ilustradas en la Tabla 8.

$f_p$	$550Hz$
$f_a$	$2600Hz$
$A_p$	$3dB$
$A_a$	$40dB$
$ Z_{IN}(f) $	$\geq 50k\Omega$
$ \gamma(f_p) $	$\leq 5\%$

Tabla 8: Especificaciones de filtro con aproximación Bessel

A partir de estas especificaciones se debe iterar el orden de la función de Bessel hasta encontrar la  $H(s_N)$  cuya pendiente en banda de transición sea suficiente para cumplir con la plantilla normalizada. Luego, es importante verificar que para dicho orden se cumple la máxima desviación admitida del retardo de grupo, que dicho sea de paso, no tiene restricción alguna en su valor pero sí en su variación porcentual respecto del valor constante esperado.

Finalmente, analizando la función de Bessel para cumplir con la plantilla de pasabajos y la máxima desviación del retardo de grupo, tomando cierto margen para evitar error por tolerancia de componentes, se elige una función de orden  $n = 6$ .

Polo	Ubicación
Complejo conjugado	$f_o = 1275,48Hz$ y $Q = 1,02$
Complejo conjugado	$f_o = 1131,14Hz$ y $Q = 0,61$
Complejo conjugado	$f_o = 1074,05Hz$ y $Q = 0,51$

Tabla 9: Polos desnormalizados de la  $H(s)$

### 1.5.2. Diseño de etapas

Para el diseño de este filtro se divide la función transferencia en tres diferentes etapas de segundo orden, donde se asume que se cumple la condición necesaria para la conexión en cascada, esto es, que no se carguen las etapas entre sí en función de que sus impedancias de entrada son lo suficientemente grandes para lograr este objetivo. Por otro lado, se impone como restricción que la impedancia de entrada del circuito total sea  $Z_{IN}(f) \geq 50k\Omega$ , para esto último se puede considerar la aproximación obtenida en el análisis ideal, o suponiendo como peor caso considerar que para frecuencias muy grandes la impedancia más chica depende directamente de las resistencia en la entrada, con lo cual eso determinará el límite inferior en la selección de sus valores. Finalmente, este filtro es para señales bajas con lo cual se ordenan los filtros de forma tal que se encuentren ordenados de menor a mayor atenuación para evitar bajar la señal a los niveles del ruido.

1ª etapa : Se diseña un filtro de segundo orden pasabajos con requisitos  $f_0 = 1074,05Hz$  y  $Q = 0,51$ , empleando la celda Sallen-Key se llega a los valores  $R_1 = R_2 = 120k\Omega + 1k\Omega$ ,  $C_1 = 1,2nF$  y  $C_2 = 1,2nF$



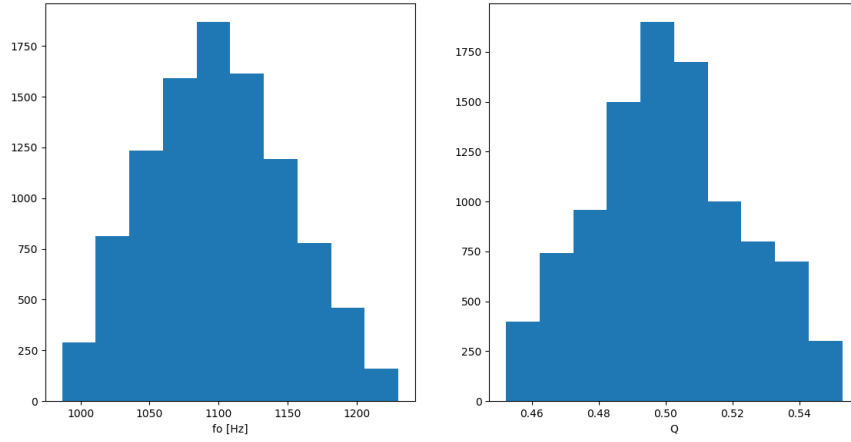


Figura 19: Histograma para la primer etapa de Bessel

2ª etapa : Se diseña un filtro de segundo orden pasabajos con requisitos  $f_0 = 1131,14Hz$  y  $Q = 0,61$ , empleando la celda Sallen-Key se llega a los valores  $R_1 = R_2 = 75k\Omega + 1k8\Omega$ ,  $C_1 = 2,2nF$  y  $C_2 = 1,5nF$

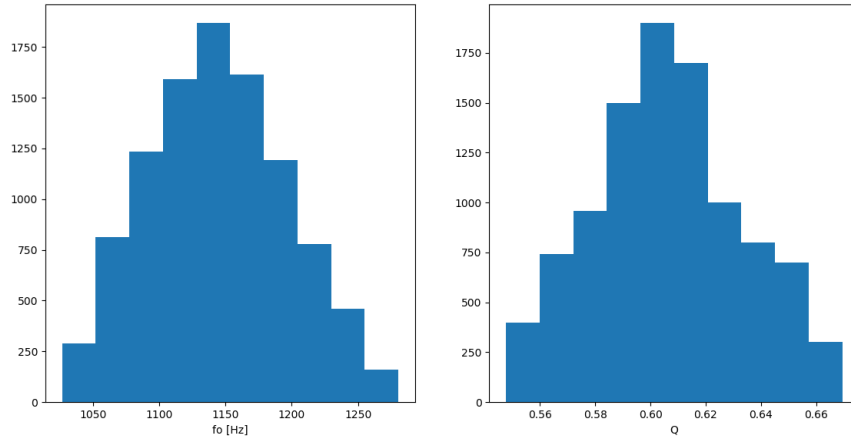


Figura 20: Histograma para la segunda etapa de Bessel

3ª etapa : Se diseña un filtro de segundo orden pasabajos con requisitos  $f_0 = 1275,48Hz$  y  $Q = 1,02$ , empleando la celda Sallen-Key se llega a los valores  $R_1 = R_2 = 22k\Omega + 680\Omega$ ,  $C_1 = 12nF$  y  $C_2 = 2,7nF$ .

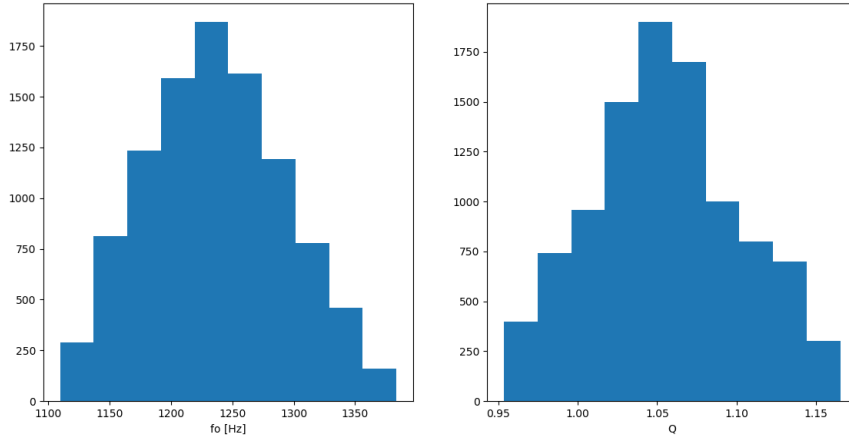


Figura 21: Histograma para la tercera etapa de Bessel

Al igual que para el filtro de Legendre, para maximizar el ancho de banda del circuito se emplea el operacional disponible con mayor producto de ganancia y ancho de banda, que además disponga de 4 operacionales y una gran impedancia de entrada, este es el TL084.

### 1.5.3. Rango dinámico

Siguiendo el proceso de cálculo presentado anteriormente de forma teórica y en el filtro de Legendre, y dado que ninguno de los factores de calidad denota en las etapas algún sobrepico sobre la banda de paso, luego considerando la ganancia de banda de paso unitaria, se establece el rango dinámico como  $R_D = 61,93dB$ .

### 1.5.4. Simulación y verificación

Se realizan las simulaciones utilizando un análisis de Monte Carlo para contemplar las variaciones respecto de los valores nominales de los componentes por sus tolerancias, se puede observar en la fase que el sistema es de sexto orden dado el cambio de fase correspondiente.

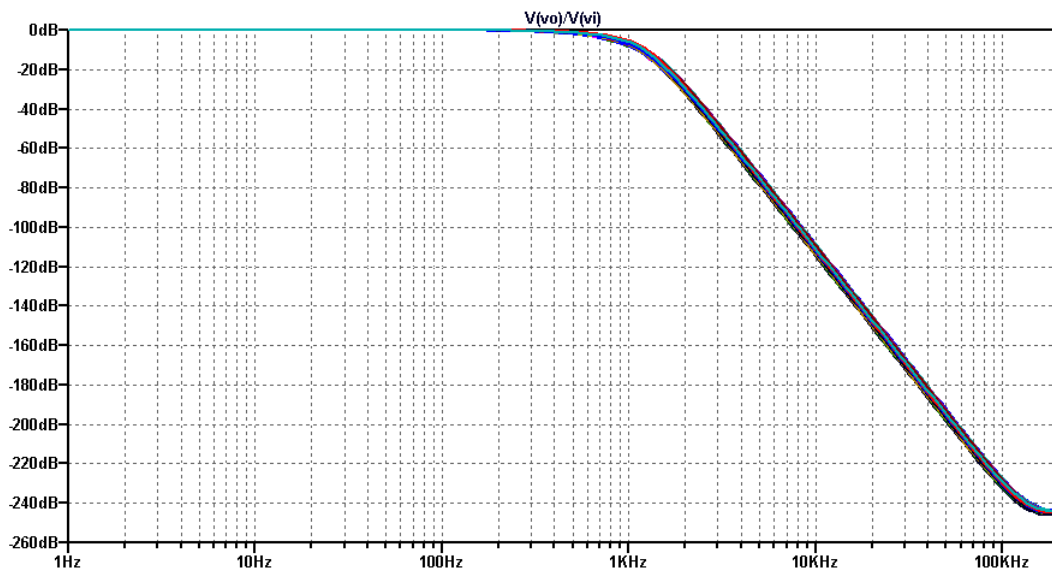


Figura 22: Verificación de la frecuencia de rechazo

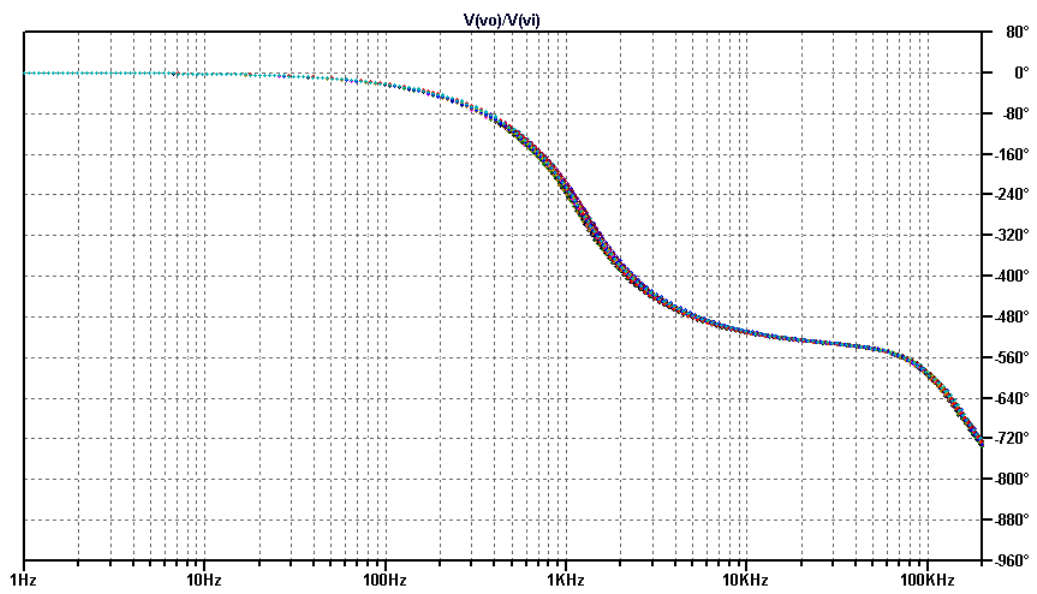


Figura 23: Verificación de la frecuencia de rechazo

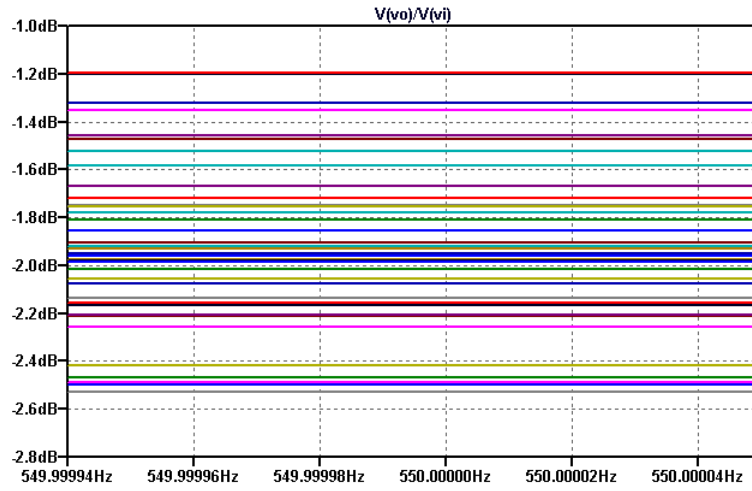


Figura 24: Verificación de la frecuencia de paso

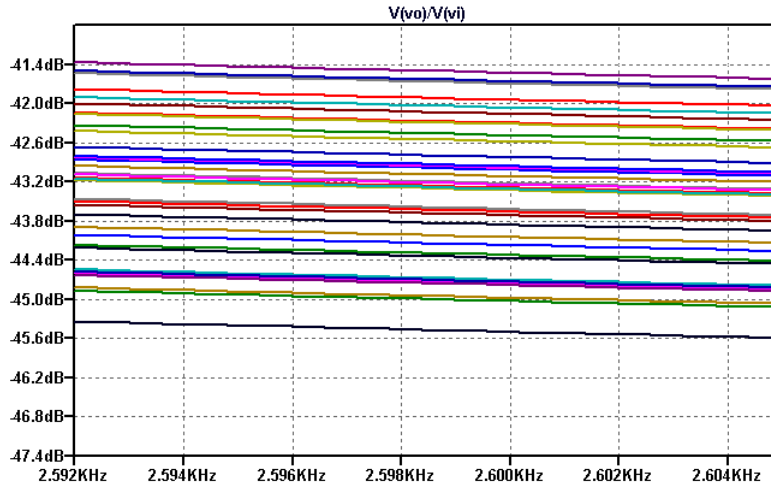


Figura 25: Verificación de la frecuencia de rechazo

### 1.5.5. Resultados prácticos

**Respuesta en frecuencia:** En las Figs. 26 y 27 se pueden observar los resultados contrastados entre la teoría, la práctica y lo simulado, donde el rango de frecuencia se restringe dado que para mayores frecuencias la atenuación provocaba que la salida se encontrase por debajo del piso del ruido. Se puede observar que para  $f_p = 550Hz$  la caída medida es de  $-2,1dB$  y para  $f_a = 2600Hz$  la caída medida es de  $-44,4dB$ .

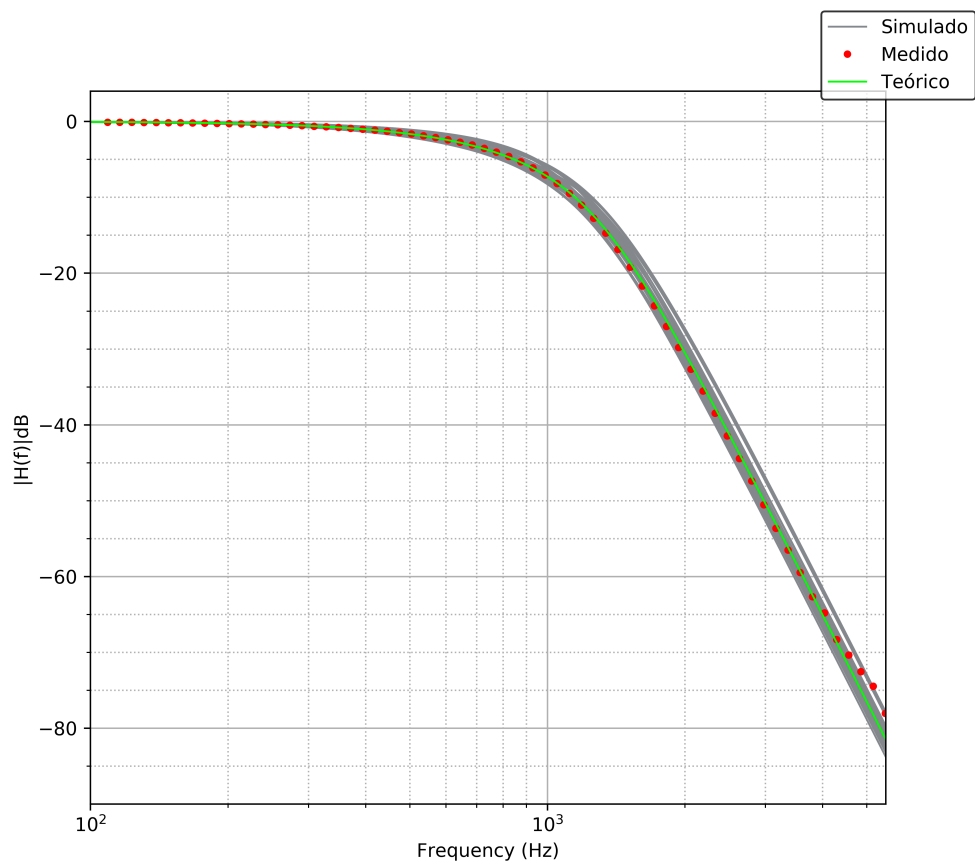


Figura 26: Diagrama de bode en módulo

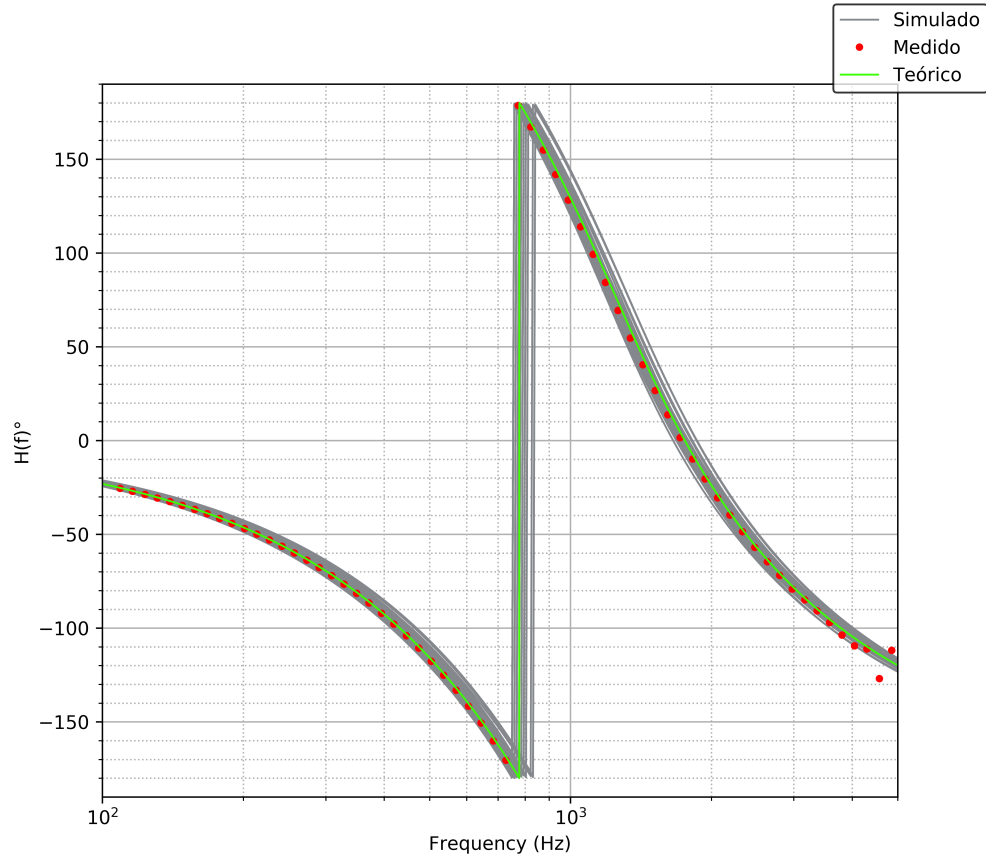


Figura 27: Diagrama de bode en fase

**Impedancia de entrada:** En la Fig. 28 se puede observar la impedancia de entrada del circuito, donde para menores frecuencias el valor era mayor, mientras que para mayores frecuencias se mantenía casi constante, siempre por encima del valor mínimo que puede observarse como  $Z_{in} = 127k\Omega$ .

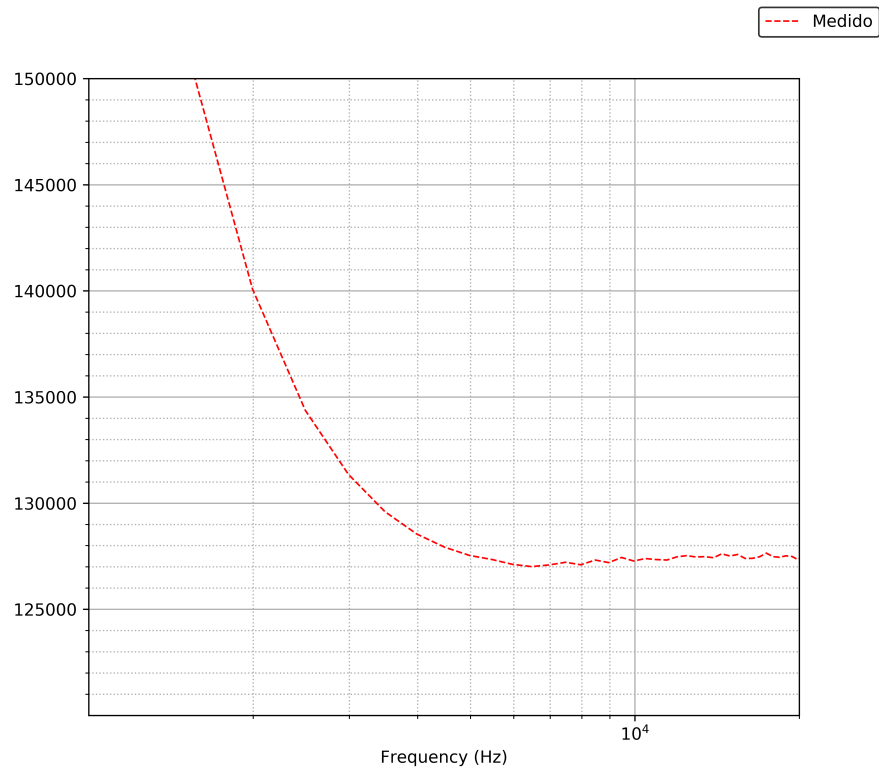


Figura 28: Impedancia de entrada medida

**Retardo de grupo:** En la Fig. 29 se puede observar el retardo de grupo del filtro, contrastando tanto los resultados medidos como teóricos de la aproximación. Es importante observar para la frecuencia  $f_p = 550Hz$ , efectivamente la desviación es menor al 5 % tal cual fue consignado..

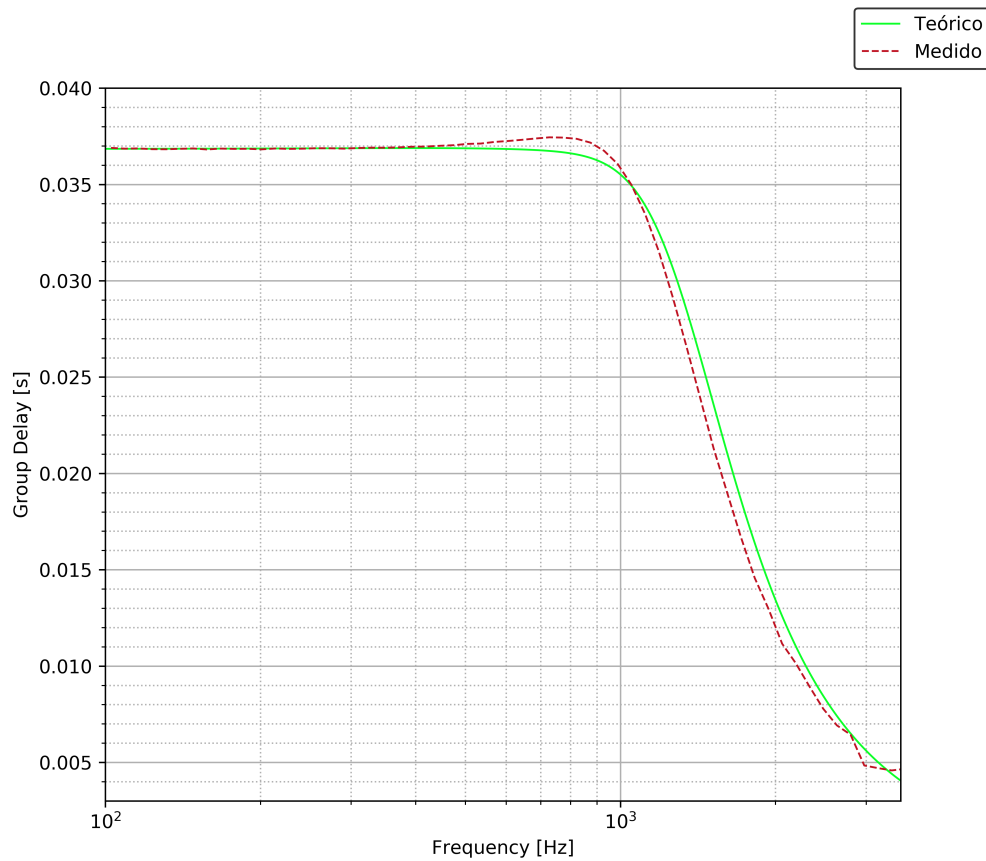


Figura 29: Retardo de grupo de Bessel

## 1.6. Diseño de PCB

En la práctico se reutilizó el mismo diseño de PCB para ambos filtros, empleando una configuración de entrada Sallen Key, que sin conectar el capacitor de la realimentación se convierte en un filtro de primer orden RC con buffer, lo necesario para el caso de Legendre. Se pueden visualizar los resultados de PCB en la Fig. 30.



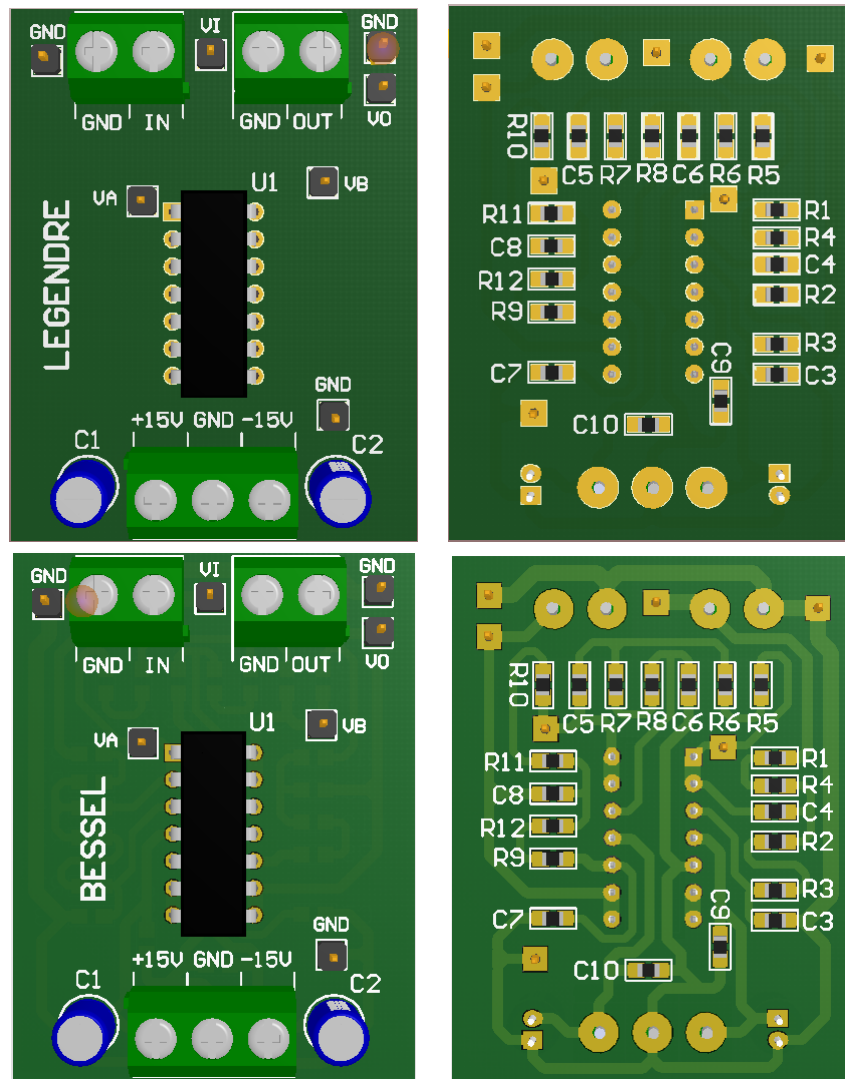


Figura 30: Diseños de PCB en Altium Designer

## 1.7. Conclusiones

Las celdas de Sallen Key son útiles para implementar funciones de aproximación de segundo orden con muy baja sensibilidad, garantizando que ante plantillas un poco más restrictivas, las variaciones prácticas sean casi imperceptibles, sin necesidad de mayor ajuste que la definición de los componentes a tolerancias del 1% o al 10% según el caso. Por otro lado, está limitada a trabajar con valores bajos de factor de calidad, evitando utilizar mucha ganancia para no inestabilizar al sistema. En conclusión, se recomienda el uso de esta celdas para aquellas etapas de bajo factor de calidad y ganancia moderada siempre que sea posible.

## **2. Celda Rauch (Deliyannis - Friend modificada)**

### **3. Sedra-Ghorab-Martin**

#### 4. Celda Universal