Álgebra lineal – Semana 9

Transformaciones lineales: representación matricial

Grupo EMAC
grupoemac@udea.edu.co

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia

25 de agosto de 2021

Matriz estándar de $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Propiedad 1

Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal tal que

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \; T(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \; \ldots, \; T(\mathbf{e}_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Entonces la matriz $m \times n$ cuyas columnas son los $T(\mathbf{e}_j)$,

$$A_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

es tal que $T(\mathbf{v}) = A_T\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. La matriz A_T es llamada **matriz estándar** para T o también la **representación matricial** de T.

Matriz estándar de $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Observación 1

- a. Se debe tener cuidado con la aplicación de la Propiedad 1. Solamente es válida para transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.
- b. La propiedad anterior nos dice que para hallar la matriz estándar de una transformación lineal que va de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ basta hallar las imágenes de los vectores de la base estándar de $\mathbb{R}^n$ y ponerlas como columnas de la matriz.
- c. Se puede demostrar que la matriz A de la Propiedad 1 es la *única* matriz que satisface que $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

1 8 0 3

Matriz estándar de $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Ejemplo 1

Determine la matriz estándar A de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 2x + y \end{pmatrix}$$

y verifique que $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Solución.

1 8 0 3

Propiedad 2 (Matriz de transformación para bases no estándar)

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita con bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, respectivamente, donde $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal tal que

$$[T(\mathbf{v_1})]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ [T(\mathbf{v_2})]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \ [T(\mathbf{v_n})]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

entonces la matriz $m \times n$ cuyas n columnas son los vectores $[T(\mathbf{v_j})]_{\mathcal{B}_2}$,

$$A_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

es tal que $[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}_2} = A_T \, [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_1}$ para todo $\mathbf{v} \in V$. Esta matriz es llamada **la matriz de T con respecto a las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$.**

Matriz de transformación para bases no estándar

Ejemplo 2

Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \end{pmatrix}$$

Encuentre la matriz de T con respecto a las bases

$$\mathcal{B}_1 = \Big\{ \underbrace{(1,2)}_{\mathbf{v}_1}, \underbrace{(-1,1)}_{\mathbf{v}_2} \Big\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2 = \Big\{ \underbrace{(1,0)}_{\mathbf{w}_1}, \underbrace{(0,1)}_{\mathbf{w}_2} \Big\}.$$

Solución.

1 8 0 3

Matriz de transformación para bases no estándar

Ejemplo 3

Para la transformación lineal del ejemplo anterior, $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \end{pmatrix},$$

encuentre $T(\mathbf{v})$, donde $\mathbf{v} = (2,1)$, de dos formas distintas:

a. De manera directa, usando la definición de T.
b. Usando la matriz de T con respecto a las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$.

Solución.

1 8 0 3

Matriz de transformación para otros espacios vectoriales

Ejemplo 4

Sea $D_x : P_2 \longrightarrow P_1$ el operador direrencial que transforma un polinomio cuadrático p en su derivada p'. Ya sabemos que D_x es una transformación lineal. Determine la matriz de D_x con respecto a las bases

$$\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2 = \{1, x\}.$$

Use la matriz hallada A_T para verificar que

$$[D_x(p)]_{\mathcal{B}_2} = A_T\,[p]_{\mathcal{B}_1}$$

con $p = a + bx + cx^2$.

Solución.

1 8 0 3

Rango y nulidad de una transformación lineal

Propiedad 3

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita con $\dim V = n$ y sea $T : V \longrightarrow W$ una trasnfomación lineal cuya matriz con respecto a *ciertas* bases de V y W, respectivamente, es A. Entonces:

- a) $\rho(T) = \rho(A)$.
- b) $\nu(T) = \nu(A)$.
- c) $\nu(T) + \rho(T) = n$.

Observación 2

Los ítems (a) y (b) de la propiedad anterior implican que $\rho(A)$ y $\nu(A)$ son independientes de las bases escogidas para V y W.

1 8 0 3

Rango y nulidad de una transformación lineal

Ejemplo 5

Considere la transformación lineal $T : P_3 \longrightarrow P_2$ definida por

$$T\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right) = a_1 + a_2 x^2.$$

Halle A_T y utilícela para determinar el núcleo y la imagen de T.

Solución.

Rango y nulidad de una transformación lineal

Ejemplo 6

Considere la transformación lineal $T : P_2 \longrightarrow P_3$ definida por

$$(Tp)(x) = xp(x).$$

Halle A_T y utilícela para determinar el núcleo y la imagen de T.

Solución.

1 8 0 3

Definición 1 (Composición de transformaciones lineales)

Sean $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $S : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ transformaciones lineales. La **composición** de S con T, denotada por $S \circ T$, es una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$ definida por

$$(S \circ T)(\mathbf{v}) = S(T(\mathbf{v}))$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 7

Considere las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definidas por

$$T(x, y) = (x, 2x - y, 3x + 4y) \quad \text{y} \quad S(x, y, z) = (2x + z, 3y - z, x - y, x + y + z).$$

Encuentre $S \circ T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$.

Solución.

1 8 0 3

Propiedad 4

Sean $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $S : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ transformaciones lineales. Entonces la composición $S \circ T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ es una transformación lineal. Más aún, si A_T es la matriz estándar para T y A_S es la matriz estándar para S, entonces la matriz estándar para $S \circ T$ es $A_S A_T$, es decir,

$$A_{S\circ T} = A_S A_T$$

Ejemplo 8

Considere las transformaciones lineales T_1 y T_2 de $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definidas por

$$T_1(x, y, z) = (2x + y, 0, x + z) \quad \text{y} \quad T_2(x, y, z) = (x - y, z, y).$$

Encuentre las matrices estándar para $T_1 \circ T_2$ y $T_2 \circ T_1$.

Solución.

1 8 0 3

Inversa de una transformación lineal

Definición 2

Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Decimos que T es **invertible** si existe una *función* $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$S \circ T = I \quad \text{y} \quad T \circ S = I$$

donde I es la transformación identidad. En este caso se dice que S es la **inversa** de T o también que T es la **inversa** de S.

Observación 3

a. La condición dada en la definición anterior equivale a

$$S(T(\mathbf{v})) = \mathbf{v} \quad \text{y} \quad T(S(\mathbf{v})) = \mathbf{v} \quad \text{para todo} \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

b. No toda transformación lineal T tiene inversa.
c. ¿Cuándo una transformación lineal T tiene inversa?
d. $S \circ T = I \;\Rightarrow\; A_{S \circ T} = A_S A_T = A_I = I_n \;\Rightarrow\; {A_S}^{-1} = A_T$ y ${A_T}^{-1} = A_S$

Propiedad 5

Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal invertible. Entonces su función inversa $T^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es también una transformación lineal. Más aún, si A_T es la matriz estándar para T, entonces A_T es invertible y ${A_T}^{-1}$ es la matriz estándar para T^{-1}, es decir, ${A_T}^{-1} = A_{T^{-1}}$.

Ejemplo 9

Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (2x + 3y + z, 3x + 3y + z, 2x + 4y + z).$$

Muestre que T es invertible y encuentre su inversa T^{-1}.

Solución.

Vimos que...

Definición 1

Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bases para un espacio vectorial V. A la matriz $n \times n$ cuyas columnas son los vectores coordenados

$$[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{C}}, [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{C}}, \ldots, [\mathbf{u}_n]_{\mathcal{C}}$$

se le llama ***matriz de cambio de base*** de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ y se denota por $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$. Es decir,

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \left(\ [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{C}} \ \middle| \ [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{C}} \ \middle| \ \cdots \ \middle| \ [\mathbf{u}_n]_{\mathcal{C}} \ \right)$$

Observación 1

Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son dos bases de V, las columnas de la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ son precisamente los vectores coordenados obtenidos al escribir los vectores de la base $\mathcal{B}$ en términos de los de la base $\mathcal{C}$.

Propiedad 1

Si $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bases para un espacio vectorial V y sea $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, entonces

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \text{ en } V.$$

Vimos que...

Definición 1

Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bases para un espacio vectorial V. A la matriz $n \times n$ cuyas columnas son los vectores coordenados

$$[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{C}}, [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{C}}, \ldots, [\mathbf{u}_n]_{\mathcal{C}}$$

se le llama ***matriz de cambio de base*** de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ y se denota por $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$. Es decir,

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{C}} & [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{C}} & \cdots & [\mathbf{u}_n]_{\mathcal{C}} \end{array} \right)$$

Propiedad 2

Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bases para un espacio vectorial V. Sean

$$B = \left(\begin{array}{c|c|c} [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{E}} & \cdots & [\mathbf{u}_n]_{\mathcal{E}} \end{array} \right) \qquad \text{y} \qquad C = \left(\begin{array}{c|c|c} [\mathbf{v}_1]_{\mathcal{E}} & \cdots & [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{E}} \end{array} \right),$$

donde $\mathcal{E}$ es cualquier base para V. Entonces al aplicar eliminación de Gauss-Jordan a la matriz aumentada $\left(\begin{array}{c|c} C & B \end{array} \right)$, se obtiene

$$\left(\begin{array}{c|c} C & B \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} I & P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \end{array} \right).$$

Ejemplo 1

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal $T(x, y) = (x + 3y, 2x + 2y)$ y considere en $\mathbb{R}^2$ las bases $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (3, -2)\}$. Halle:

a. La matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$.
b. A_T respecto a la base $\mathcal{B}$.
c. A'_T respecto a la base $\mathcal{B}'$.

Solución.

Problema de diagonalización

Observación 2

Sea V es un espacio vectorial de dimensión finita con base $\mathcal{B}$ y sea

$$T : V \to V$$

es una transformación lineal, con matriz A_T respecto a la base $\mathcal{B}$. ¿Cómo hallar una base $\mathcal{B}'$ de V para la cual A'_T sea una matriz diagonal?

1 8 0 3

Propiedad 3

Sea V un un espacio vectorial de dimensión finita con bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ y sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Si A_T la matriz de T con respecto la base $\mathcal{B}$ y A'_T la matriz de T con respecto a la base $\mathcal{B}'$, entonces

$$A'_T = P^{-1} A_T P,$$

donde $P = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Observación 3

$$\begin{tikzcd}
V & V \\
\mathbf{x} \arrow[r, "T"] \arrow[d] & T(\mathbf{x}) \arrow[d] \\
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}'}} \arrow[r, "A'_T"] \arrow[d, "P"'] & {[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}'} = A'_T[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}A_T P[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}'}} \\
P[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}'} \arrow[r, "A_T"] & A_T P[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}'} \arrow[u, "P^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 2

Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ -x + 3y \end{pmatrix}$$

y las bases de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1,0),(1,1)\}$.

- (a) Encuentre la matriz de representación A_T respecto a la base $\mathcal{B}$.
- (b) Halle la matriz de cambio de base $P = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$.
- (c) Use la propiedad 3 para hallar A'_T respecto a la base $\mathcal{B}'$.

Solución.

Ejemplo $3(a)$

Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un transformación lineal y considere en $\mathbb{R}^2$ las bases

$$\mathcal{B} = \{(-3, 2), (4, -2)\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{B}' = \{(-1, 2), (2, -2)\}.$$

Suponga que la matriz de representación A_T respecto a la base $\mathcal{B}$ es

$$A_T = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Encuentre la matriz de representación A'_T respecto a la base $\mathcal{B}'$.

Solución.

1 8 0 3

Ejemplo $3(b)$

Sea $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un transformación lineal y considere en $\mathbb{R}^2$ las bases

$$\mathcal{B}=\{(-3,2),(4,-2)\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{B}'=\{(-1,2),(2,-2)\}.$$

Suponga que la matriz de representación A_T respecto a la base $\mathcal{B}$ es

$$A_T=\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

- (b) Calcule $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$, $[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}}$ y $[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}'}$, para el vector $\mathbf{v}$ cuyo vector de coordenadas es

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución.

Ejemplo $3(c)$

Sea $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un transformación lineal y considere en $\mathbb{R}^2$ las bases

$$\mathcal{B}=\{(-3,2),(4,-2)\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{B}'=\{(-1,2),(2,-2)\}.$$

Suponga que la matriz de representación A_T respecto a la base $\mathcal{B}$ es

$$A_T=\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

- (c) Encuentre una fórmula para $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Solución.

1 8 0 3

Matrices similares

Definición 1 (matrices semejantes)

Sean A y B matrices cuadradas $n \times n$. Se dice que B es **semejante** a A (o que B es **similar** a A) si existe una matriz invertible P tal que $B = P^{-1}AP$.

Observación 4

a. Si A es semejante a B, entonces B es semejante a A.
b. Si A es semejante a B, entonces se dice que A y B son semejantes.
c. A y B son semejantes si existe una matriz invertible P tal que $AP = PB$.
d. De acuerdo a la definición anterior y la propiedad 3, las matrices de una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ con respecto a bases distintas de V, son semejantes.

1 8 0 3

Matrices similares

Definición 1 (matrices semejantes)

Sean A y B matrices cuadradas $n \times n$. Se dice que B es **semejante** a A (o que B es **similar** a A) si existe una matriz invertible P tal que $B = P^{-1}AP$.

Ejemplo 4

Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Muestre que la matriz B es semejante a la matriz A.

Solución.

1 8 0 3

Matrices semejantes

Propiedad 5 (propiedades de las matrices similares)

Sean A y B matrices $n \times n$. Si A y B son semejantes, entonces:

a. $\det A = \det B$.
b. A es invertible si y sólo si B es invertible.
c. A y B tienen el mismo rango ($\rho(A) = \rho(B)$).

Ejemplo 5

Muestre que las matrices A y B dadas a continuación no son semejantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución.

1 8 0 3

Bibliografía

- Clara Mejía
  Álgebra lineal elemental y aplicaciones
  Ude@, 2006.

- Stanley Grossman
  Álgebra lineal
  McGraw-Hill Interamericana, Edición 8, 2019.

- David Poole
  Álgebra lineal: una introducción moderna
  Cengage Learning Editores, 2011.

- Bernard Kolman
  Álgebra lineal
  Pearson Educación, 2006.

- Ron Larson
  Fundamentos de Álgebra lineal
  Cengage Learning Editores, 2010.

1 8 0 3