Álgebra lineal – Semana 6

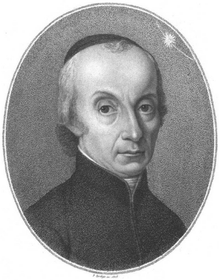
Bases ortonormales y proyecciones en $\mathbb{R}^n$

Grupo EMAC
grupoemac@udea.edu.co

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia

27 de julio de 2021

Introducción




DELLA SCOPERTA

DEL NUOVO PIANETA

CERERE FERDINANDEA

PALERMO

El 1 de enero de 1801, mientras inspeccionaba una región de la constelación de Tauro, el astrónomo italiano Giuseppe Piazzi observó una pequeña "estrella" que nunca antes había sido divisada. Después de muchas observaciones, Piazzi y otros astrónomos notaron que la "estrella" se movía y concluyeron que se trataba de un "planeta" (en realidad era un asteroide). El nuevo "planeta" despareció completamente en el otoño de 1801. Los astrónomos más reconocidos de la época se unieron a la búsqueda para reubicar el "planeta" perdido, pero todos sus esfuerzos fueron en vano.

Introducción


DELLA SCOPERTA

DEL NUOVO PIANETA

CERERE FERDINANDEA

PALERMO

En septiembre de 1801 Carl F. Gauss decidió asumir el desafío de encontrar el "planeta" perdido. Gauss consideró una órbita elíptica en lugar de una circular como habían asumido los demás y desarrolló el método de *mínimos cuadrados*. En diciembre Gauss ya había resuelto el problema y reportó sus resultados a la comunidad científica, no solo con la posición del "planeta" en ese momento, sino también con todas sus posiciones futuras. Los astrónomos dirigieron sus telescopios al cielo y encontraron al "planeta" exactamente donde Gauss lo había pronosticado. El "planeta" recibió el nombre de *Ceres*.

Espacio renglón y espacio columna de una matriz

Matriz A · **Vectores renglón de A** · **Vectores columna de A**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \\ \mathbf{r}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}) \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_1} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_2} \cdots \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_n}$$

Sea A una matriz $m \times n$.

a) El ***espacio renglón*** de A es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por los renglones de A:

$$R_A = \text{gen}\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m\}$$

b) El ***espacio columna*** de A es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por las columnas de A:

$$C_A = \text{gen}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$$

Espacio renglón y espacio columna de una matriz

Ejemplo 1

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Halle

a C_A *b* C_{A^T} *d* N_A *d* N_{A^T}

Solución.

1 8 0 3

Propiedades de los espacios fundamentales de una matriz

Propiedad 1

Si A es una matriz $m \times n$, entonces

a. C_A y N_{A^T} son subespacios ortogonales de $\mathbb{R}^m$.
b. C_{A^T} y N_A son subespacios ortogonales de $\mathbb{R}^n$.
c. $(C_A)^\perp = N_{A^T}$.
d. $(C_{A^T})^\perp = N_A$.

1803

Espacio renglón y espacio columna de una matriz

Ejemplo 2

¿Cómo hallar una recta $y = mx + b$ que "mejor se ajuste" a los puntos

$$(1,0),\ \ (2,1)\ \ \text{y}\ \ (3,3)?$$

Solución.

Aproximación por mínimos cuadrados

Problema de mínimos cuadrados

Sea A una matriz $m \times n$ y $\mathbf{b}$ un vector en $\mathbb{R}^m$. Hallar un vector $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ que minimice a

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| . \tag{1}$$

Observación 1

- a) $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| \geq 0$ para todo $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$.
- b) El valor mínimo posible de la expresión (1) es $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = 0$ y en tal caso
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$
- c) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente si y sólo si $\mathbf{b}$ está en C_A.
- d) Si $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| > 0$, entonces
$$A\mathbf{x} \neq \mathbf{b}.$$
- e) Estamos interesados en resolver el *problema de mínimos cuadrados* en el caso en que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es inconsistente (no tiene solución).
- f) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es inconsistente si y sólo si $\mathbf{b}$ no está en C_A.

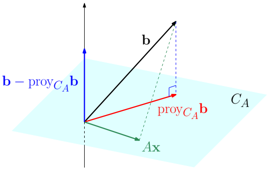
Problema de mínimos cuadrados

Sea A una matriz $m \times n$ y $\mathbf{b}$ un vector en $\mathbb{R}^m$. Hallar un vector $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ que minimice a

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|. \tag{1}$$

Solución.

- Suponemos que $\mathbf{b}$ no está en C_A.
- $A\mathbf{x}$ está en C_A para todo $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$.
- Buscamos un vector $A\widehat{\mathbf{x}}$ en C_A que esté lo "más próximo posible" a $\mathbf{b}$.



$$\|\mathbf{b} - \mathrm{proy}_{C_A}\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$$

- El vector $A\widehat{\mathbf{x}}$ en C_A "más próximo" a $\mathbf{b}$ es

$$A\widehat{\mathbf{x}} = \mathrm{proy}_{C_A}\mathbf{b}.$$

- El vector $A\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$ está en $(C_A)^{\perp} = N_{A^T}$ y por tanto

$$\begin{aligned} A^T(A\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) &= \mathbf{0} \\ A^TA\widehat{\mathbf{x}} - A^T\mathbf{b} &= \mathbf{0} \\ \color{red}{A^TA\widehat{\mathbf{x}}} &\color{red}{=} \color{red}{A^T\mathbf{b}} \end{aligned}$$

Aproximación por mínimos cuadrados

Propiedad 1

Si A es una matriz $m \times n$ de rango n, entonces $A^T A$ es una matriz $n \times n$ invertible y el *problema de mínimos cuadrados* tiene una única solución que se obtiene al resolver el sistema

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}. \tag{2}$$

Observación 1

- (a) El sistema de ecuaciones lineales (2) recibe el nombre de *ecuaciones normales* del problema de mínimos cuadrados $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- (b) El problema de mínimos cuadrados siempre tiene al menos una solución.
- (c) Bajo las hipótesis de la propiedad 1, el problema de mínimos cuadrados tiene exactamente una solución y está dada por

$$\mathbf{x} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T\mathbf{b}.$$

Aproximación por mínimos cuadrados

Ejemplo 3

Encuentre la solución del problema de mínimos cuadrados para los puntos de datos

$$(1,0),\ (2,1)\ \text{ y }\ (3,3)$$

del ejemplo 2.

Solución.

Procedimiento de aproximación lineal por mínimos cuadrados

Procedimiento 1

El procedimiento para determinar la recta de mínimos cuadrados

$$y = c_0 + c_1 x$$

para los datos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n),$$

donde por lo menos dos de las x_i son diferentes, es el siguiente.

1. Defina

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

2. Resuelva el sistema de ecuaciones normales

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$$

para $\mathbf{x}$, mediante eliminación de mediante Gauss-Jordan.

Aproximación polinomial por mínimos cuadrados

Ejemplo 4

Encuentre la parábola que ofrezca la mejor aproximación por mínimos cuadrados a los puntos

$$(-1,1),\ (0,-1),\ (1,0)\ \text{ y }\ (2,2).$$

Solución.

1 8 0 3

Procedimiento de aproximación polinomial por mínimos cuadrados

Procedimiento 2

El procedimiento para determinar el polinomio por mínimos cuadrados

$$y = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{m-1}x^{m-1} + c_m x^m$$

que mejor se ajusta a los datos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n),$$

donde $m \leq n-1$ y por lo menos $m+1$ de los x_i son distintos, es el siguiente.

1. Defina

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{m-1} & x_1^m \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{m-1} & x_2^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{m-1} & x_n^m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

2. Resuelva para $\mathbf{x}$ el sistema de ecuaciones normales

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

Ejemplo 5

La tabla[a] presenta el número de infectados por SARS-CoV-2 en Colombia, durante los primeros días de la pandemia, en marzo de 2020. Si supone un modelo de crecimiento exponencial, encuentre la tasa de crecimiento relativa y estime el número de infectados para el 25 de marzo.

Día	13	14	15	16	17	18
Infectados	16	24	45	57	75	102

[a] https://en.wikipedia.org/wiki/COVID-19_pandemic_in_Colombia

Solución.

Producto interno (real)

Definición 1

Un *producto interno* en un espacio vectorial real V es una función que a cada par de vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V, le asigna un número real denotado por $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. Esta función satisface las siguientes propiedades: si $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores y c es un escalar, entonces

a. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
b. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$.
c. $c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
d. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$.
e. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Observación 1

Un espacio vectorial V en el que hay definido un producto interno se denomina **espacio con producto interno**.

Ejemplo de producto interno

Definición 1 (axiomas del producto interno)

- a. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
- b. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$.
- c. $c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
- d. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$.
- e. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Ejemplo 1

Demuestre que en $\mathbb{R}^n$ el producto punto de dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$$

es un producto interno en $\mathbb{R}^n$.

Demostración.

1 8 0 3

Ejemplo de producto interno

Definición 1 (axiomas del producto interno)

- a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
- b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$.
- c) $c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
- d) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$.
- e) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Ejemplo 2

Demuestre que en $\mathbb{R}^2$ la función que a los vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ le asigna el número real

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2$$

es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

Demostración.

1 8 0 3

Ejemplo de una función que no es producto interno

Definición 1 (axiomas del producto interno)

- (a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
- (b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$.
- (c) $c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
- (d) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$.
- (e) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Ejemplo 3

Demuestre que en $\mathbb{R}^3$ la función que a los vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ le asigna el número real

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 - 2u_2 v_2 + u_3 v_3$$

no es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

Demostración.

Ejemplo de producto interno en M_{22}

Definición 1 (axiomas del producto interno)

- a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
- b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$.
- c) $c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
- d) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$.
- e) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Ejemplo 4

Considere en el espacio vectorial M_{22} las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

La siguiente función es un producto interno en M_{22}.

$$\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22}.$$

Demostración.

Ejemplo de producto interno definido por una integral

Definición 1 (axiomas del producto interno)

- a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
- b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$.
- c) $c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
- d) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$.
- e) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Ejemplo 5

Considere los polinomios

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \qquad \text{y} \qquad q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

en el espacio vectorial P_n. Demuestre que

$$\langle p, q \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

define un producto interno P_n.

Demostración.

Ejemplo de producto interno definido por una integral

Definición 1 (axiomas del producto interno)

- a. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
- b. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$.
- c. $c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
- d. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$.
- e. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Ejemplo 6

Sean f y g son funciones continuas en el espacio vectorial $C[a, b]$. Demuestre que

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx$$

define un producto interno en $C[a, b]$.

Demostración.

1 8 0 3

Propiedades del producto interno

Propiedad 1

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores en un espacio con producto interno V y c un escalar. Entonces:

- a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0.$
- b) $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle.$
- c) $\langle \mathbf{u}, c\mathbf{v} \rangle = c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$

1 8 0 3

Norma y ángulos en espacios con producto interno

Definición 2

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores en un espacio con producto interno V.

- (a) La *norma* o *longitud* de $\mathbf{u}$ se define como
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}.$$
- (b) La *distancia* entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se define como
$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|.$$
- (c) El *ángulo* entre dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se define como
$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}.$$
- (d) Se dice que dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son *ortogonales* si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Observación 1

Si $\|\mathbf{v}\| = 1$, se dice que $\mathbf{v}$ es un vector *unitario*. Si $\mathbf{v}$ no es el vector cero, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ es un vector unitario denominado el *vector unitario en la dirección de* $\mathbf{v}$.

Cálculo de productos internos

Ejemplo 7

Considere en P_2 los polinomios

$$p(x) = 1 - 2x^2, \qquad q(x) = 4 - 2x + x^2 \qquad \text{y} \qquad r(x) = x + 2x^2$$

Calcule

a. $\langle p, q \rangle$.
b. $\langle q, r \rangle$.
c. $\|q\|$.
d. $d(p, q)$.

Solución.

Cálculo de productos internos

Ejemplo 8

Considere las funciones continuas

$$f(x) = x \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^2$$

en el espacio vectorial $C[0, 1]$. Calcule

a) $\|f\|$.

b) $d(f, g)$.

Solución.

Propiedades del producto interno

Propiedad 2 (desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Para todo par de vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en un espacio con producto interno V,

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|.$$

Propiedad 3 (desigualdad triangular)

Para todo par de vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en un espacio con producto interno V,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

Propiedad 4 (teorema de Pitágoras)

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en un espacio con producto interno V, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales si y sólo si

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Bibliografía

Clara Mejía
Álgebra lineal elemental y aplicaciones
Ude@, 2006.

Stanley Grossman
Álgebra lineal
McGraw-Hill Interamericana, Edición 8, 2019.

David Poole
Álgebra lineal: una introducción moderna
Cengage Learning Editores, 2011.

Bernard Kolman
Álgebra lineal
Pearson Educación, 2006.

Ron Larson
Fundamentos de Álgebra lineal
Cengage Learning Editores, 2010.

1 8 0 3