# Álgebra lineal – Semana 7 Mínimos cuadrados y espacios con producto interno

Grupo EMAC grupoemac@udea.edu.co

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Instituto de Matemáticas Universidad de Antioquia

29 de julio de 2021



#### Introducción





El 1 de enero de 1801, mientras inspeccionaba una región de la constelación de Tauro, el astrónomo italiano Giuseppe Piazzi observó una pequeña "estrella" que nunca antes había sido divisada. Después de muchas observaciones, Piazzi y otros astrónomos notaron que la "estrella" se movía y concluyeron que se trataba de un "planeta" (en realidad era un asteroide). El nuevo "planeta" despareció completamente en el otoño de 1801. Los astrónomos más reconocidos de la época se unieron a la búsqueda para reubicar el "planeta" perdido, pero todos sus esfuerzos fueron en vano.

#### Introducción





En septiembre de 1801 Carl F. Gauss decidió asumir el desafío de encontrar el "planeta" perdido. Gauss consideró una órbita elíptica en lugar de una circular como habían asumido los demás y desarrolló el método de mínimos cuadrados. En diciembre Gauss ya había resuelto el problema y reportó sus resultados a la comunidad científica, no solo con la posición del "planeta" en ese momento, sino también con todas sus posiciones futuras. Los astrónomos dirigieron sus telescopios al cielo y encontraron al "planeta" exactamente donde Gauss lo había pronosticado. El "planeta" recibió el nombre de Ceres.

# Espacio renglón y espacio columna de una matriz

#### Matriz A

#### Vectores renglón de A

#### Vectores columna de A

$$\mathbf{r}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$
  
 $\mathbf{r}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$   
 $\vdots$ 

$$\mathbf{r}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \mathbf{r}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ \mathbf{r}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) \end{array} \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz  $m \times n$ .

 $\bullet$  El **espacio renglón** de A es el subespacio de  $\mathbb{R}^n$  generado por los renglones de A:

$$R_A = \operatorname{gen} \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m\}$$

**1** El espacio columna de A es el subespacio de  $\mathbb{R}^m$  generado por las columnas de A:

$$C_A = \operatorname{gen} \left\{ \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n \right\}$$

# Espacio renglón y espacio columna de una matriz

### Ejemplo 1

Considere la matriz

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Halle

 $\circ$   $C_A$ 

lacksquare  $C_{A^T}$ 

 $oldsymbol{0}$   $N_A$ 

 $oldsymbol{0}$   $N_{AT}$ 



### Propiedad 1

Si A es una matriz  $m \times n$ , entonces

- $\circ$   $C_A$  y  $N_{A^T}$  son subespacios ortogonales de  $\mathbb{R}^m$ .
- $\bullet$   $C_{A^T}$  y  $N_A$  son subespacios ortogonales de  $\mathbb{R}^n$ .
- $(C_A)^{\perp} = N_{A^T}.$
- $(C_{A^T})^{\perp} = N_A.$



# Espacio renglón y espacio columna de una matriz

### Ejemplo 2

¿Cómo hallar una recta y=mx+b que "mejor se ajuste" a los puntos

$$(1,0), (2,1) y (3,3)$$
?



### Aproximación por mínimos cuadrados

#### Problema de mínimos cuadrados

Sea Auna matriz  $m\times n$ y <br/>b un vector en  $\mathbb{R}^m.$  Hallar un vector <br/>  $\mathbf{x}$  en  $\mathbb{R}^n$  que minimice a

$$||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||. \tag{1}$$

#### Observación 1

- $||A\mathbf{x} \mathbf{b}|| \ge 0 \text{ para todo } \mathbf{x} \text{ en } \mathbb{R}^n.$
- $\bullet$  El valor mínimo posible de la expresión (1) es  $\|A\mathbf{x} \mathbf{b}\| = 0$  y en tal caso

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

- $\bullet$  El sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  es consistente si y sólo si  $\mathbf{b}$  está en  $C_A$ .
- $||\mathbf{a}\mathbf{x} \mathbf{b}|| > 0$ , entonces

$$A\mathbf{x} \neq \mathbf{b}$$
.

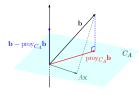
- ② Estamos interesados en resolver el problema de mínimos cuadrados en el caso en que el sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  es inconsistente (no tiene solución).
- $\mathbf{0}$  El sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  es inconsistente si y sólo si  $\mathbf{b}$  no está en  $C_A$ .

Sea A una matriz  $m \times n$  y **b** un vector en  $\mathbb{R}^m$ . Hallar un vector **x** en  $\mathbb{R}^n$  que minimice a

$$||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||. \tag{1}$$

Solución.

- Suponemos que  $\mathbf{b}$  no está en  $C_A$ .
- A**x** está en  $C_A$  para todo **x** en  $\mathbb{R}^n$ .
- Buscamos un vector  $A\widehat{\mathbf{x}}$  en  $C_A$  que esté lo "más próximo posible" a **b**.



$$\|\mathbf{b} - \mathrm{proy}_{C_A} \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$$

• El vector  $A\hat{\mathbf{x}}$  en  $C_A$  "más próximo" a  $\mathbf{b}$  es

$$A\widehat{\mathbf{x}} = \operatorname{proy}_{C_A} \mathbf{b}.$$

• El vector  $A\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$  está en  $(C_A)^{\perp} = N_{A^T}$  y por tanto

$$A^{T} (A\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

$$A^{T} A \widehat{\mathbf{x}} - A^{T} \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

$$A^{T} A \widehat{\mathbf{x}} = A^{T} \mathbf{b}$$



### Aproximación por mínimos cuadrados

#### Propiedad 1

Si A es una matriz  $m \times n$  de rango n, entonces  $A^TA$  es una matriz  $n \times n$  invertible y el problema de mínimos cuadrados tiene una única solución que se obtiene al resolver el sistema

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}. \tag{2}$$

#### Observación 1

- $\odot$  El sistema de ecuaciones lineales (2) recibe el nombre de ecuaciones normales del problema de mínimos cuadrados  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .
- O El problema de mínimos cuadrados siempre tiene al menos una solución.
- Bajo las hipótesis de la propiedad 1, el problema de mínimos cuadrados tiene exactamente una solución y está dada por

$$\mathbf{x} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T \mathbf{b}.$$

# Aproximación por mínimos cuadrados

### Ejemplo 3

Encuentre la solución del problema de mínimos cuadrados para los puntos de datos

 $\ \, \text{del ejemplo 2}.$ 



# Procedimiento de aproximación lineal por mínimos cuadrados

#### Procedimiento 1

El procedimiento para determinar la recta de mínimos cuadrados

$$y = c_0 + c_1 x$$

para los datos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n),$$

donde por lo menos dos de las  $x_i$  son diferentes, es el siguiente.

Defina

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

2 Resuelva el sistema de ecuaciones normales

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$$

para x, mediante eliminación de mediante Gauss-Jordan.

# Aproximación polinomial por mínimos cuadrados

### Ejemplo 4

Encuentre la parábola que ofrezca la mejor aproximación por mínimos cuadrados a los puntos

$$(-1,1), (0,-1), (1,0) y (2,2).$$



# Procedimiento de aproximación polinomial por mínimos cuadrados

#### Procedimiento 2

El procedimiento para determinar el polinomio por mínimos cuadrados

$$y = c_0 + c_1 x + \dots + c_{m-1} x^{m-1} + c_m x^m$$

que mejor se ajusta a los datos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n),$$

donde  $m \leq n-1$  y por lo menos m+1 de los  $x_i$  son distintos, es el siguiente.

Openina

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{m-1} & x_1^m \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{m-1} & x_2^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{m-1} & x_n^m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

2 Resuelva para x el sistema de ecuaciones normales

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$$

### Ejemplo 5

La tabla<sup>a</sup> presenta el número de infectados por SARS-CoV-2 en Colombia, durante los primeros días de la pandemia, en marzo de 2020. Si supone un modelo de crecimiento exponencial, encuentre la tasa de crecimiento relativa y estime el número de infectados para el 25 de marzo.

Día	13	14	15	16	17	18
Infectados	16	24	45	57	75	102

 $<sup>{\</sup>it ^a} {\it https://en.wikipedia.org/wiki/COVID-19\_pandemic\_in\_Colombia}$ 



#### Definición 1

Un producto interno en un espacio vectorial real V es una función que a cada par de vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  en V, le asigna un número real denotado por  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ . Esta función satisface las siguientes propiedades: si u, v y w son vectores y c es un escalar, entonces

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \text{ si y sólo si } \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

$$c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

#### Observación 1

Un espacio vectorial V en el que hay definido un producto interno se denomina espacio con producto interno.



#### Definición 1 (axiomas del producto interno)

- $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$  si y sólo si  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

#### Ejemplo 1

Demuestre que en  $\mathbb{R}^n$  el producto punto de dos vectores  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ ,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

es un producto interno en  $\mathbb{R}^n$ .



#### Definición 1 (axiomas del producto interno)

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \ge 0.$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$$
 si y sólo si  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

#### Ejemplo 2

Demuestre que en  $\mathbb{R}^2$  la función que a los vectores  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  le asigna el número real

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2$$

es un producto interno en  $\mathbb{R}^2$ .



### Ejemplo de una función que no es producto interno

### Definición 1 (axiomas del producto interno)

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \ge 0.$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$$
 si y sólo si  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

#### Ejemplo 3

Demuestre que en  $\mathbb{R}^3$  la función que a los vectores  $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$  y  $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$  le asigna el número real

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 - 2u_2 v_2 + u_3 v_3$$

**no** es un producto interno en  $\mathbb{R}^2$ .



# Ejemplo de producto interno en $M_{22}$

#### Definición 1 (axiomas del producto interno)

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$$
 si y sólo si  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 

$$c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

#### Ejemplo 4

Considere en el espacio vectorial  $M_{22}$  las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

La siguiente función es un producto interno en  $M_{22}$ .

$$\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22}.$$

# Ejemplo de producto interno definido por una integral

#### Definición 1 (axiomas del producto interno)

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \ge 0.$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$$
 si y sólo si  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

$$c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

### Ejemplo 5

Considere los polinomios

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$
 y  $q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$ 

$$q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x'$$

en el espacio vectorial  $P_n$ . Demuestre que

$$\langle p, q \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

define un producto interno  $P_n$ .

# Ejemplo de producto interno definido por una integral

### Definición 1 (axiomas del producto interno)

$$(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \ge 0.$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$$
 si y sólo si  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

### Ejemplo 6

Sean f y g son funciones continuas en el espacio vectorial C[a,b]. Demuestre que

$$\langle f, g \rangle = \int_{a}^{b} f(x)g(x) dx$$

define un producto interno en C[a,b].



### Propiedad 1

Sean  $\mathbf{u},\mathbf{v}$ y w<br/> vectores en un espacio con producto interno Vy <br/> cun escalar. Entonces:



### Norma y ángulos en espacios con producto interno

#### Definición 2

Sean  ${\bf u}$  y  ${\bf v}$  vectores en un espacio con producto interno V.

② La norma o longitud de u se define como

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}.$$

 $oldsymbol{0}$  La distancia entre  $oldsymbol{u}$  y  $oldsymbol{v}$  se define como

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|.$$

ullet El ángulo entre dos vectores  ${f u}$  y  ${f v}$  se define como

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

**3** Se dice que dos vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son ortogonales si  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ .

#### Observación 1

Si  $\|\mathbf{v}\| = 1$ , se dice que  $\mathbf{v}$  es un vector *unitario*. Si  $\mathbf{v}$  no es el vector cero, entonces  $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$  es un vector unitario denominado el vector unitario en la dirección de  $\mathbf{v}$ .

### Cálculo de productos internos

#### Ejemplo 7

Considere en  $P_2$  los polinomios

$$p(x) = 1 - 2x^2$$
,  $q(x) = 4 - 2x + x^2$  y  $r(x) = x + 2x^2$ 

$$r(x) = x + 2x^2$$

Calcule

$$\bigcirc$$
  $\langle p, q \rangle$ .

$$\bigcirc$$
  $\langle q,r \rangle$ .

$$||q||$$
.

$$oldsymbol{d} d(p,q).$$



# Cálculo de productos internos

#### Ejemplo 8

Considere las funciones continuas

$$f(x) = x$$
  $y$   $g(x) = x^2$ 

en el espacio vectorial C[0,1]. Calcule

$$||f||$$
.

**0** 
$$d(f,g)$$
.



### Propiedades del producto interno

#### Propiedad 2 (desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Para todo par de vectores  ${\bf u}$  y  ${\bf v}$ en un espacio con producto interno V,

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \le \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|.$$

#### Propiedad 3 (desigualdad triangular)

Para todo par de vectores  ${\bf u}$  y  ${\bf v}$ en un espacio con producto interno V,

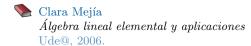
$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

#### Propiedad 4 (teorema de Pitágoras)

Si  ${\bf u}$ y  ${\bf v}$ en un espacio con producto interno V,entonces  ${\bf u}$ y  ${\bf v}$ son ortogonales si y sólo si

$$\left\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\right\|^2 = \left\|\mathbf{u}\right\|^2 + \left\|\mathbf{v}\right\|^2.$$

# Bibliografía



Stanley Grossman Álgebra lineal McGraw-Hill Interamericana, Edición 8, 2019.

David Poole

Álgebra lineal: una introducción moderna

Cengage Learning Editores, 2011.

Bernard Kolman
Álgebra lineal
Pearson Educación, 2006.

Ron Larson
Fundamentos de Álgebra lineal
Cengage Learning Editores, 2010.



