Álgebra lineal – Semana 10

Isomorfismos e isometrías

Grupo EMAC
grupoemac@udea.edu.co

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia

27 de julio de 2021

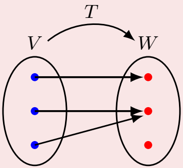
Transformaciones lineales uno a uno

Definición 1 (uno a uno)

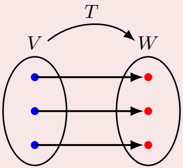
Una transformación lineal $T : V \to W$ se dice que es ***inyectiva*** o ***uno a uno*** (1–1) si para cada par de vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V,

$$\mathbf{u} \neq \mathbf{v} \quad \text{implica} \quad T(\mathbf{u}) \neq T(\mathbf{v}).$$

Observación 1



(a) T **no** es uno a uno



(b) T es uno a uno

Propiedad 1

$T : V \to W$ es ***uno a uno*** si

$$T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}) \quad \text{implica} \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}.$$

Transformaciones lineales uno a uno

Definición 1 (uno a uno)

Una transformación lineal $T : V \to W$ se dice que es ***inyectiva*** o ***uno a uno*** (1–1) si para cada par de vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V,

$$\mathbf{u} \neq \mathbf{v} \quad \text{implica} \quad T(\mathbf{u}) \neq T(\mathbf{v}).$$

Propiedad 1

$T : V \to W$ es ***uno a uno*** si

$$T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}) \quad \text{implica} \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}.$$

Propiedad 2

Sea $T : V \to W$ transformación lineal. Entonces T es uno a uno si y sólo si

$$\operatorname{nu} T = \{\mathbf{0}\}.$$

Transformaciones lineales uno a uno y no uno a uno

Propiedad 2

Sea $T : V \to W$ transformación lineal. Entonces T es uno a uno si y sólo si

$$\operatorname{nu} T = \{\mathbf{0}\}.$$

Ejemplo 1

Considere la transformación lineal $T : M_{mn} \to M_{nm}$ definida por

$$T(A) = A^T.$$

Demuestre que T es *uno a uno*.

Solución.

1 8 0 3

Transformaciones lineales uno a uno y no uno a uno

Propiedad 2

Sea $T : V \to W$ transformación lineal. Entonces T es uno a uno si y sólo si

$$\operatorname{nu} T = \{\mathbf{0}\}.$$

Ejemplo 2

Considere la transformación lineal cero $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \qquad \text{para todo } \mathbf{v} \text{ en } \mathbb{R}^2.$$

Demuestre que T no es *uno a uno*.

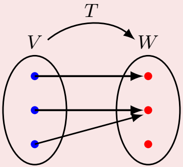
Solución.

Transformaciones lineales sobre

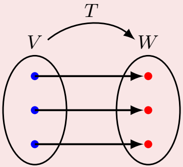
Definición 2 (sobre)

Una transformación lineal $T : V \to W$ se dice que es ***sobreyectiva*** o ***sobre*** si todo vector en W tiene una preimagen en V. Es decir, para todo $\mathbf{w}$ en W, existe al menos un $\mathbf{v}$ en V tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.

Observación 2



(a) T **no** es sobre



(b) T es sobre

Propiedad 3

$T : V \to W$ es ***sobre*** si y sólo si

$$\operatorname{im} T = W.$$

Transformaciones lineales sobre

Propiedad 3

$T : V \to W$ es ***sobre*** si y sólo si

$$\operatorname{im} T = W.$$

Propiedad 4

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal y W un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces T es *sobre* si y sólo si

$$\rho(T) = \dim W.$$

Propiedad 5

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal, con V y W ambos espacios vectoriales de dimensión n. Entonces T es *uno a uno* si y sólo si T es *sobre*.

Transformaciones lineales uno a uno y sobre

Ejemplo 3

Para cada una de las matrices A dadas a continuación, encuentre la nulidad y el rango de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Determine en cada caso si la transformación lineal es *uno a uno* y/o *sobre*.

Solución.

1 8 0 3

Transformaciones lineales uno a uno y sobre

Propiedad 6

Sea V y W espacios vectoriales de dimensión finita y $T : V \to W$ una transformación lineal.

- (a) Si $\dim V > \dim W$, entonces T no es *uno a uno*.
- (b) Si $\dim V < \dim W$, entonces T no es *sobre*.

1 8 0 3

Transformaciones lineales uno a uno y sobre

Propiedad 6

Sea V y W espacios vectoriales de dimensión finita y $T : V \to W$ una transformación lineal.

- (a) Si $\dim V > \dim W$, entonces T no es *uno a uno*.
- (b) Si $\dim V < \dim W$, entonces T no es *sobre*.

Ejemplo 4

Determine si la transformación lineal dada a continuación es *uno a uno*.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Solución.

Transformaciones lineales uno a uno y sobre

Propiedad 6

Sea V y W espacios vectoriales de dimensión finita y $T : V \to W$ una transformación lineal.

- (a) Si $\dim V > \dim W$, entonces T no es *uno a uno*.
- (b) Si $\dim V < \dim W$, entonces T no es *sobre*.

Ejemplo 5

Determine si la transformación lineal dada a continuación es *sobre*.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Solución.

1 8 0 3

Isomorfismos

Definición 3 (Isomorfismo)

Sea $T : V \to W$ un transformación lineal. Se dice que T es un ***isomorfismo*** si T es *uno a uno* y *sobre*.

Definición 4 (Espacios isomorfos)

Sean V y W espacios vectoriales. Se dice que V y W son ***isomorfos*** si existe una transformación lineal $T : V \to W$ que es *isomorfismo*.

Observación 3

Sean V y W espacios vectoriales.

- a) Cuando V y W son isomorfos escribimos $V \cong W$.
- b) Los espacios vectoriales isomorfos son "esencialmente iguales" en el sentido que tienen la misma dimensión (teorema).

Definición 3 (Isomorfismo)

Sea $T : V \to W$ un transformación lineal. Se dice que T es un ***isomorfismo*** si T es *uno a uno* y *sobre*.

Definición 4 (Espacios isomorfos)

Sean V y W espacios vectoriales. Se dice que V y W son ***isomorfos*** si existe una transformación lineal $T : V \to W$ que es *isomorfismo*.

Ejemplo 6

Demuestre que $T : \mathbb{R}^3 \to P_2$ definida por $T(a, b, c) = a + bx + cx^2$ es un isomorfismo.

Demostración.

Propiedades de los isomorfismos

Propiedad 6

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes (si una es verdadera, todas las otras también son verdaderas).

a. T es invertible.
b. T es un isomorfismo.
c. A_T es invertible y $A_{T^{-1}} = (A_T)^{-1}$

Propiedades de los isomorfismos

Propiedad 7

Sea A una matriz $n \times n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes (si una es verdadera, todas las otras también son verdaderas).

a. A es invertible (no singular).
b. La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
c. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única para cada vector columna $\mathbf{b}$.
d. A es *equivalente por renglones* a la matriz identidad I_n.
e. A se puede expresar como el producto de matrices elementales.
f. Las columnas (y renglones) de A son linealmente independientes.
g. $\det A \neq 0$.
h. $\nu(A) = 0$.
i. $\rho(A) = n$.
j. La transformación lineal $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ es un isomorfismo.

Propiedades de los isomorfismos

Propiedad 8

Sea $T : V \to W$ un isomorfismo.

- (a) Si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ generan a V, entonces $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)$ generan a W.
- (b) Si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ son LI en V, entonces $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)$ son LI en W.
- (c) Si $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para V, entonces $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ es una base para W.
- (d) Si V tiene dimensión finita, entonces W también y $\dim V = \dim W$.

Propiedad 9

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita. Entonces V y W son *isomorfos* ($V \cong W$) si y solo si $\dim V = \dim W$.

Matrices ortogonales

Definición 1

Una matriz cuadrada Q se dice que es ***ortogonal*** si es invertible y si

$$Q^{-1} = Q^T.$$

Observación 1

Si Q es una matriz cuadrada $n \times n$ invertible y

$$Q^T Q = I_n,$$

entonces Q es ortogonal.

1 8 0 3

Definición 1

Una matriz cuadrada Q se dice que es ***ortogonal*** si es invertible y si

$$Q^{-1} = Q^T.$$

Ejemplo 1

Determine cuáles de las siguientes matrices son ortogonales.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución.

Propiedades de las matrices ortogonales

Propiedad 1

Una matriz cuadrada Q es ortogonal si y sólo si sus vectores columnas forman un conjunto **ortonormal**.

Ejemplo 2

Determine si el conjunto de vectores dado a continuación es ortonormal.

$$S = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1} \right\}$$

Solución.

1 8 0 3

Propiedades del producto punto

Observación 2

Si los vectores $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ los representamos como vectores columna, entonces el ***producto punto*** o ***producto escalar*** de ellos se puede expresar como el producto de matrices

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

Propiedad 2

Sea A una matriz $m \times n$ con entradas reales. Entonces para todo vector $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ y todo vector $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^m$,

$$(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \left(A^T \mathbf{y}\right)$$

Propiedad 2

Sea A una matriz $m \times n$ con entradas reales. Entonces para todo vector $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ y todo vector $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^m$,

$$(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \left(A^T\mathbf{y}\right)$$

Propiedad 3

Sea Q una matriz $n \times n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes (si una es verdadera, todas las otras también son verdaderas).

a. Q es ortogonal.
b. $\|Q\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ para todo $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$.
c. $Q\mathbf{x} \cdot Q\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ para todo $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^n$.

Isometrías

Definición 2 (Isometría)

Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice que es una ***isometría*** si para todo vector $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$,

$$\|T(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|.$$

Observación 3

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una isometría, entonces para todo vector $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^n$,

$$\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

1 8 0 3

Isometrías

Definición 2 (Isometría)

Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice que es una ***isometría*** si para todo vector $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$,

$$\|T(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|.$$

Propiedad 4

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una isometría, entonces para todo vector $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^n$,

$$T(\mathbf{x}) \cdot T(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

1 8 0 3

Definición 2 (Isometría)

Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice que es una ***isometría*** si para todo vector $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$,

$$\|T(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|.$$

Ejemplo 3

Determine si función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida a continuación es isometría.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Solución.

1 8 0 3

Caracterización de las isometrías

Propiedad 5

Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una isometría si y sólo si su matriz de representación estándar A_T es ortogonal.

Observación 4

Toda isometría es un isomorfismo.

Construcción de isometrías

Propiedad 6

Sean $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ bases ortogonormales de $\mathbb{R}^n$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la transformación lineal definida por

$$T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{w}_i,$$

para $i = 1, \ldots, n$. Entonces T es una isometría.

Propiedades de las isometrías

Propiedad 7

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una isometría. Si $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, entonces $\{T(\mathbf{u}_1), \ldots, T(\mathbf{u}_n)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Isometrías en $\mathbb{R}^2$

Propiedad 8

Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una isometría, entonces T es:

a. una transformación de rotación,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

b. o bien una reflexión respecto al eje x,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix},$$

seguida de una transformación de rotación.

1 8 0 3

Bibliografía

- Clara Mejía
  Álgebra lineal elemental y aplicaciones
  Ude@, 2006.

- Stanley Grossman
  Álgebra lineal
  McGraw-Hill Interamericana, Edición 8, 2019.

- David Poole
  Álgebra lineal: una introducción moderna
  Cengage Learning Editores, 2011.

- Bernard Kolman
  Álgebra lineal
  Pearson Educación, 2006.

- Ron Larson
  Fundamentos de Álgebra lineal
  Cengage Learning Editores, 2010.

1803