Álgebra lineal – Semanas 16

Forma canónica de Jordan

Grupo EMAC

grupoemac@udea.edu.co

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia

27 de julio de 2021

1803

Definición 1 (Matriz de bloques de Jordan)

Por N_k denotamos a la matriz $k \times k$ que tiene unos arriba de la diagonal principal y ceros en las demás posiciones:

$$N_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con la matriz N_k definimos la *matriz de bloques de Jordan*

$$B(\lambda) = \lambda I + N_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Definición 2 (Matriz de Jordan)

Definimos la *matriz de Jordan*

$$J = \begin{pmatrix} B_1(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_r(\lambda_r) \end{pmatrix},$$

donde cada $B_j(\lambda_j)$ es una matriz de bloques de Jordan.

1 8 0 3

Ejemplo de matrices de Jordan

$$J = \left(\begin{array}{cc:c} 3 & \color{red}{1} & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

1 8 0 3

Ejemplo de matrices de Jordan

$$J = \left(\begin{array}{ccccccc}
-2 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \\
0 & \vdots & -2 & \color{red}{1} & 0 & \vdots & 0 \\
0 & \vdots & 0 & -2 & \color{red}{1} & \vdots & 0 \\
0 & \vdots & 0 & 0 & -2 & \vdots & 0 \\
 & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-2 & & 0 & 0 & 0 & \vdots & 7
\end{array}\right)$$

Ejemplo de matrices de Jordan

$$
J = \left(\begin{array}{ccccccccc}
3 & {\color{red}1} & \vdots & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\
0 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & & \\
0 & 0 & \vdots & 4 & {\color{blue}1} & 0 & \vdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \vdots & 0 & 4 & {\color{blue}1} & \vdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 4 & \vdots & 0 & 0 \\
 & & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \vdots & 2 & {\color{green}1} \\
0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 2
\end{array}\right)
$$

Propiedad 1 (Matrices de Jordan 2×2)

Las únicas matrices de Jordan de 2×2 son de la forma

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Propiedad 2 (Matrices de Jordan 3×3)

Las únicas matrices de Jordan de 3×3 son de la forma

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & \lambda_2 & 1 \\ 0 & \vdots & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

ó

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Propiedad 3 (Forma canónica de Jordan)

Sea A una matriz $n \times n$ con entradas reales o complejas. Entonces existe una matriz invertible C de $n \times n$ con entradas complejas tal que

$$C^{-1}AC = J,$$

donde J es una matriz de Jordan cuyos elementos en la diagonal son los valores propios de A. Más aún, la matriz de Jordan J es única, excepto por el orden en el que aparecen los bloques de Jordan.

Observación 1

- a) Las entradas de C en la propiedad 3 pueden ser reales.
- b) La matriz C en la propiedad 3 no necesariamente es única.
- c) En la propiedad 3, si por ejemplo A es semejante a

$$J = \left(\begin{array}{cc:c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 4 \end{array}\right), \quad \text{también lo es} \quad J = \left(\begin{array}{c:cc} 4 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Forma canónica de Jordan

Propiedad 3

Sea A una matriz $n \times n$ con entradas reales o complejas. Entonces existe una matriz invertible C de $n \times n$ con entradas complejas tal que

$$C^{-1}AC = J,$$

donde J es una matriz de Jordan cuyos elementos en la diagonal son los valores propios de A. Más aún, la matriz de Jordan J es única, excepto por el orden en el que aparecen los bloques de Jordan.

Definición 2 (Forma canónica de Jordan)

La matriz J en la propiedad 3 se denomina la ***forma canónica de Jordan*** de A.

Vector propio generalizado

Propiedad 4

Suponga que A es una matriz de 2×2 que tiene un valor propio λ de multiplicidad algebraica 2 y de multiplicidad geométrica 1. Si $\mathbf{v}_1$ un vector propio correspondiente a λ, entonces existe un vector $\mathbf{v}_2$ que satisface la ecuación

$$(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$$

Definición 3 (Vector propio generalizado)

Sea A es una matriz de 2×2 con un solo valor propio λ de multiplicidad geométrica 1. Un vector $\mathbf{v}_2$ que satisfaga la ecuación

$$(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$$

se denomina ***vector propio generalizado*** de A.

Ejemplo de vector propio generalizado

Ejemplo 1

Halle un vector propio generalizado de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$$

Solución.

- Polinomio característico de A:

$$p(\lambda) = |P - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 8 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

- Valores propios de A:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Ejemplo de vector propio generalizado

- Espacio propio $E_{\lambda_1} = E_{-1} = N_{A+I}$:

$$(A + I \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Para el vector propio generalizado $\mathbf{v}_2$, resolvemos $(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$:

$$(A + I \mid \mathbf{v}_1) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 1 \\ 8 & -4 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}y \\ y = y \end{array}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

1803

Forma canónica de Jordan para matrices 2×2

Propiedad 5

Suponga que A es una matriz de 2×2 que tiene un valor propio λ de multiplicidad algebraica 2 y de multiplicidad geométrica 1. Si $\mathbf{v}_1$ un vector propio correspondiente a λ y $\mathbf{v}_2$ es un *vector propio generalizado* de A, entonces

$$C^{-1}AC = J, \qquad \text{donde} \qquad J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

es la forma canónica de Jordan de A y C es la matriz cuyas columnas son los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

1 8 0 3

Forma canónica de Jordan para matrices 2×2

Ejemplo 2

Halle la forma canónica de Jordan de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$$

Solución.

- Valores y vectores propios de A obtenidos:

$$\lambda = -1, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Forma canónica de Jordan de A:

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = J$$

1 8 0 3

Forma canónica de Jordan para matrices 3×3

Propiedad 6

Suponga que A es una matriz 3×3 que tiene un valor propio λ de multiplicidad algebraica 3 y de multiplicidad geométrica 1. Si $\mathbf{v}_1$ un vector propio correspondiente a λ, entonces:

a. Existe un vector $\mathbf{v}_2$ tal que
$$(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1,$$
con $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ LI.

b. Existe un vector $\mathbf{v}_3$ tal que
$$(A - \lambda I)\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2,$$
con $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ LI.

c. La matriz C cuyas columnas son los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ satisface
$$C^{-1}AC = J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Forma canónica de Jordan para matrices 3×3

Ejemplo 3

Halle la forma canónica de Jordan de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución.

1 8 0 3

Bibliografía

- Clara Mejía
  Álgebra lineal elemental y aplicaciones
  Ude@, 2006.

- Stanley Grossman
  Álgebra lineal
  McGraw-Hill Interamericana, Edición 8, 2019.

- David Poole
  Álgebra lineal: una introducción moderna
  Cengage Learning Editores, 2011.

- Bernard Kolman
  Álgebra lineal
  Pearson Educación, 2006.

- Ron Larson
  Fundamentos de Álgebra lineal
  Cengage Learning Editores, 2010.

1 8 0 3