Álgebra lineal – Semana 3

Bases y dimensión

Grupo EMAC
grupoemac@udea.edu.co

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia

27 de julio de 2021

Base de un espacio vectorial

Definición 1 (Base)

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ en un espacio vectorial V es una ***base*** para V si se cumplen las dos siguientes condiciones:

- a) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente (LI).
- b) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V.

Observación 1

Una base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ para un espacio vectorial V debe cumplir dos condiciones:

- a) B no puede tener *tantos* vectores de modo que uno de ellos pueda escribirse como una combinación lineal de los demás vectores en B.
- b) B debe tener *suficientes vectores* para generar a V.

Ejemplos de bases

Definición 1 (Base)

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ en un espacio vectorial V es una ***base*** para V si se cumplen las dos siguientes condiciones:

a. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente (LI).
b. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V.

Ejemplo 1 (Base canónica de $\mathbb{R}^3$)

Muestre que el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$,

$$B = \Big\{ \underbrace{(1,0,0)}_{\mathbf{e}_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{\mathbf{e}_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{\mathbf{e}_3} \Big\},$$

es una base para $\mathbb{R}^3$.

Ejemplos de bases

Definición 1 (Base)

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ en un espacio vectorial V es una ***base*** para V si se cumplen las dos siguientes condiciones:

- (a) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente (LI).
- (b) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V.

Ejemplo 2 (Base canónica de $\mathbb{R}^n$)

El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

es una base para $\mathbb{R}^n$.

Ejemplos de bases

Definición 1 (Base)

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ en un espacio vectorial V es una ***base*** para V si se cumplen las dos siguientes condiciones:

a. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente (LI).
b. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V.

Ejemplo 3 (Base no estándar de $\mathbb{R}^2$)

Muestre que el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$,

$$B = \Big\{ \underbrace{(1,1)}_{\mathbf{v}_1}, \underbrace{(1,-1)}_{\mathbf{v}_2} \Big\},$$

es una base para $\mathbb{R}^2$.

Ejemplos de bases

Definición 1 (Base)

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ en un espacio vectorial V es una ***base*** para V si se cumplen las dos siguientes condiciones:

- a) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente (LI).
- b) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V.

Ejemplo 4 (Base canónica para P_3)

Muestre que el conjunto de vectores de P_3,

$$B = \left\{ \underbrace{1}_{\mathbf{v}_1}, \underbrace{x}_{\mathbf{v}_2}, \underbrace{x^2}_{\mathbf{v}_3}, \underbrace{x^3}_{\mathbf{v}_4} \right\},$$

es una base para P_3.

Ejemplos de bases

Definición 1 (Base)

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ en un espacio vectorial V es una ***base*** para V si se cumplen las dos siguientes condiciones:

- (a) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente (LI).
- (a) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V.

Ejemplo 5 (Base canónica para P_n)

El conjunto de vectores de P_n,

$$B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\},$$

es una base para P_n.

1 8 0 3

Ejemplos de bases

Definición 1 (Base)

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ en un espacio vectorial V es una ***base*** para V si se cumplen las dos siguientes condiciones:

a. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente (LI).
b. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V.

Ejemplo 6 (Base canónica para M_{22})

Muestre que el conjunto de vectores de M_{22},

$$B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_4} \right\},$$

es una base para M_{22}.

Propiedades de las bases

Definición 1 (Base)

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ en un espacio vectorial V es una ***base*** para V si se cumplen las dos siguientes condiciones:

a. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente (LI).
b. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V.

Propiedad 1

Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para un espacio vectorial V. Entonces para cada vector $\mathbf{v} \in V$, existen escalares *únicos*

$$c_1, c_2, \ldots, c_n$$

tales que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

Propiedades de las bases

Definición 1 (Base)

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ en un espacio vectorial V es una ***base*** para V si se cumplen las dos siguientes condiciones:

- (a) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente (LI).
- (b) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V.

Propiedad 2

Si $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para un espacio vectorial V, entonces cualquier conjunto que tenga más de n vectores en V es linealmente dependiente (LD).

1 8 0 3

Propiedades de las bases

Propiedad 2

Si $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para un espacio vectorial V, entonces cualquier conjunto que tenga más de n vectores en V es linealmente dependiente (LD).

Ejemplo 7

Determine si el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$,

$$S = \{\, (1, 2, -1),\ (1, 1, 0),\ (2, 3, 0),\ (5, 9, -1)\,\},$$

es LI o LD.

Propiedades de las bases

Propiedad 2

Si $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para un espacio vectorial V, entonces cualquier conjunto que tenga más de n vectores en V es linealmente dependiente (LD).

Ejemplo 8

Determine si el conjunto de vectores de P_3,

$$S = \left\{ 1,\ 1+x,\ 1-x,\ 1+x+x^2,\ 1-x+x^2 \right\},$$

es LI o LD.

1 8 0 3

Propiedades de las bases

Propiedad 3

Si un espacio vectorial V tiene una base con n vectores, entonces cualquier otra base tiene también n vectores.

Ejemplo 9

Determine si el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$,

$$S = \{\, (3, 2, 1),\ (7, -1, 4)\,\},$$

es base para $\mathbb{R}^3$.

1 8 0 3

Propiedades de las bases

Propiedad 3

Si un espacio vectorial V tiene una base con n vectores, entonces cualquier otra base tiene también n vectores.

Ejemplo 10

Determine si el conjunto de vectores de P_3,

$$S = \{ x+2,\, x^2,\, x^3-1,\, 3x+1,\, x^2-2x+3 \},$$

es base para P_3.

Dimensión de un espacio vectorial

Definición 1 (Dimensión)

1. Si un espacio vectorial V tiene una base con n vectores, entonces al número n se le llama la ***dimensión*** de V y escribimos
$$\dim V = n.$$
2. Si V es el espacio vectorial que consiste solamente del vector cero ($V = \{\mathbf{0}\}$), definimos la ***dimensión*** de V como cero.

Ejemplo 1

En cada uno de los siguientes ejemplos, la dimensión se determina simplemente contando el número de vectores en la base canónica.

1. $\dim \mathbb{R}^n = n$.
2. $\dim P_n = n + 1$.
3. $\dim M_{mn} = m \times n$.

Dimensión de un subespacio

Definición 1 (Dimensión)

- (a) Si un espacio vectorial V tiene una base con n vectores, entonces al número n se le llama la ***dimensión*** de V y escribimos

$$\dim V = n.$$

- (b) Si V es el espacio vectorial que consiste solamente del vector cero ($V = \{\mathbf{0}\}$), definimos la ***dimensión*** de V como cero.

Ejemplo 2

Determine la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

- (a) $W = \{(2c, c, 0) \mid c \text{ es un número real}\}$.
- (b) $W = \{(b, a - b, a) \mid a \text{ y } b \text{ son números reales}\}$.

Dimensión de un subespacio

Definición 1 (Dimensión)

- (a) Si un espacio vectorial V tiene una base con n vectores, entonces al número n se le llama la ***dimensión*** de V y escribimos

$$\dim V = n.$$

- (b) Si V es el espacio vectorial que consiste solamente del vector cero ($V = \{\mathbf{0}\}$), definimos la ***dimensión*** de V como cero.

Ejemplo 3

Sea W el subespacio de todas las matrices simétricas en M_{22}. Halle la dimensión de W.

1 8 0 3

Conjuntos LI

Propiedad 1

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ es un conjunto de vectores en V linealmente independiente, entonces $m \leq n$.

1 8 0 3

Dimensión de un subesapcio

Propiedad 2

Si V un espacio vectorial de dimensión finita y H es un subespacio vectorial de V, entonces $\dim H \leq \dim V$.

1 8 0 3

Comprobación de una base en un espacio n-dimensional

Propiedad 3

Sea V un espacio vectorial de dimensión n.

- (a) Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto de vectores en V linealmente independiente (LI), entonces S es una base para V.
- (b) Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V, entonces S es una base para V.

Observación 1

Como consecuencia del teorema anterior, para verificar si un conjunto S de n vectores en un espacio vectorial V de dimensión n es una base para V, es suficiente con verificar que S es linealmente independiente (LI) o que S genera a V.

1 8 0 3

Propiedad 3

Sea V un espacio vectorial de dimensión n.

- (a) Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto de vectores en V linealmente independiente (LI), entonces S es una base para V.
- (b) Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V, entonces S es una base para V.

Ejemplo 4

Muestre que el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^5$,

$$S = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_4}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_5} \right\}$$

es una base para $\mathbb{R}^5$.

Dimensión del espacio solución de un sistema homogéneo

Ejemplo 5

Halle la dimensión del espacio solución del sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x - y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Dimensión del espacio solución de un sistema homogéneo

Ejemplo 6

Halle la dimensión del espacio solución del sistema homogéneo

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ 4x & - & 2y & + & 6z & = & 0 \\ -6x & + & 3y & - & 9z & = & 0 \end{array}$$

1803

Bibliografía

Clara Mejía
Álgebra lineal elemental y aplicaciones
Ude@, 2006.

Stanley Grossman
Álgebra lineal
McGraw-Hill Interamericana, Edición 8, 2019.

David Poole
Álgebra lineal: una introducción moderna
Cengage Learning Editores, 2011.

Bernard Kolman
Álgebra lineal
Pearson Educación, 2006.

Ron Larson
Fundamentos de Álgebra lineal
Cengage Learning Editores, 2010.