Álgebra lineal – Semanas 12 y 13

Diagonalización y aplicaciones

Grupo EMAC
grupoemac@udea.edu.co

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia

27 de julio de 2021

Recordemos que...

Propiedad 1

Sea V un un espacio vectorial de dimensión finita con bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ y sea $T: V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Si A_T la matriz de T con respecto la base $\mathcal{B}$ y A'_T la matriz de T con respecto a la base $\mathcal{B}'$, entonces

$$A'_T = P^{-1} A_T P,$$

donde $P = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Observación 1

Por la propiedad 1, las matrices que representan a una transformación lineal

$$T: V \longrightarrow V$$

con respecto a bases distintas de V, son semejantes.

Matriz semejante a una matriz diagonal

Ejemplo 1

Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

y las bases de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1,-1),(2,3)\}$.

- (a) Encuentre la matriz de representación A_T respecto a la base $\mathcal{B}$.
- (b) Encuentre la matriz de representación A'_T respecto a la base $\mathcal{B}'$.
- (c) ¿Qué relación existe entre A_T y A'_T?

Solución.

1 8 0 3

Valores propios de matrices semejantes

Definición 1

Una matriz A de $n \times n$ se dice que ***diagonalizable*** si es semejante a una matriz diagonal D. Es decir, existe una matriz invertible P de $n \times n$ tal que

$$P^{-1}AP = D.$$

Propiedad 2

Si A y B son matrices semejantes, entonces tienen los mismos valores propios.

1 8 0 3

Valores propios de matrices semejantes

Propiedad 2

Si A y B son matrices semejantes, entonces tienen los mismos valores propios.

Ejemplo 2

Las matrices A y D son semejantes. Halle los valores propios de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solución.

Condiciones para que una matriz sea diagonalizable

Propiedad 3

Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si y sólo si tiene n vectores propios linealmente independientes.

Observación 2

Cuando A es diagonalizable, $P^{-1}AP = D$, con D una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son los valores propios de A y P una matriz cuyas columnas son respectivamente los n vectores propios LI de A.

1803

Ejemplo de una matriz diagonalizable

Ejemplo 3

Si es posible, encuentre una matriz P que diagonalice a

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución.

1 8 0 3

Procedimiento para diagonalizar una matriz cuadrada

Procedimiento

Sea A una matriz $n \times n$.

1. Halle n vectores propios linealmente independientes $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ de A, con valores propios correspondientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Si no existen n vectores propios linealmente independientes, entonces A *no* es diagonalizable.
2. Si A tiene n vectores propios linealmente $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$, entonces defina

$$P = \left(\; \mathbf{p}_1 \mid \mathbf{p}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{p}_n \; \right).$$

3. La matriz diagonal $D = P^{-1}AP$ tendrá los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ en su diagonal principal. El orden de los vectores propios usados para formar a P, determina el orden en que aparecen los valores propios en la diagonal de D.

1 8 0 3

Ejemplo de una matriz no diagonalizable

Ejemplo 4

Determine si la matriz A es diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución.

Ejemplo de una matriz diagonalizable

Ejemplo 5

Si es posible, encuentre una matriz P que diagonalice a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución.

Condiciones para que una matriz sea diagonalizable

Propiedad 4

Si A es una matriz $n \times n$ que tiene n valores propios distintos, entonces A es diagonalizable.

Ejemplo 6

Determine si la matriz A es diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución.

1 8 0 3

Potencia de una matriz

Ejemplo 7

Calcule A^{10} si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución.

Condiciones para que una matriz sea diagonalizable

Propiedad 5

Sea A una matriz $n \times n$, con n vectores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

a. A es diagonalizable.
b. La multiplicidad algebraica de λ_i es igual a su multiplicidad geométrica de λ_i, para $i = 1, \ldots, m$, donde m es el número de raíces distintas del polinomio característico $p(\lambda)$.

Diagonalización de un operador

Ejemplo 8

Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (x - y - z, x + 3y + z, -3x + y - z).$$

Si es posible, encuentre una base $\mathcal{B}$ para $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz de representación de T relativa a $\mathcal{B}$ sea diagonal.

Solución.

1 8 0 3

Modelo de crecimiento poblacional

El crecimiento poblacional de una especie de venados se estudia en base a las hembras que son clasificadas en dos etapas de vida:

- Juvenil: < 1 año
- Adulta: ≥ 1 año

Las hembras adultas procrean en promedio 1.6 hembras cada año, y cada año sobreviven 30 % de las juveniles y 80 % de las adultas. Al inicio hay 20 juveniles y 100 adultas.

(a) Determine la población de hembras en cualquier año k.

Solución.

j_k: número de hembras juveniles en el año k (desde el inicio del estudio).
a_k: número de hembras adultas en el año k (desde el inicio del estudio).

- Al inicio:

$$j_0 = 20 \qquad \text{y} \qquad a_0 = 100$$

- Población 1 año después:

$$\begin{aligned} j_1 &= 0j_0 + 1.6a_0 \\ a_1 &= 0.3j_0 + 0.8a_0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} j_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1.6 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Modelo de crecimiento poblacional

- Población 1 año después:

$$\begin{aligned} j_1 &= 0j_0 + 1.6a_0 \\ a_1 &= 0.3j_0 + 0.8a_0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} j_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1.6 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \end{pmatrix}$$

- Población 2 años después:

$$\begin{aligned} j_2 &= 0j_1 + 1.6a_1 \\ a_2 &= 0.3j_1 + 0.8a_1 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} j_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1.6 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} j_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1.6 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \end{pmatrix}$$

- Población k años después:

$$\mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1.6 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \end{pmatrix} = A^k \mathbf{u}_0$$

1 8 0 3

Modelo de crecimiento poblacional

Problema de la diagonalización

Si A tiene vectores propios $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, con correspondientes valores propios λ_1 y λ_2, entonces

$$\mathbf{u}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 \qquad \Longrightarrow \qquad A^k\mathbf{u}_0 = c_1{\lambda_1}^k\mathbf{v}_1 + c_2{\lambda_2}^k\mathbf{v}_2.$$

- El polinomio característico de la *matriz de transición* A:

$$p(\lambda) = |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1.6 \\ 0.3 & 0.8-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(0.8-\lambda)-0.48 = \lambda^2-0.8\lambda-0.48$$

- Los valores propios de la *matriz de transición* A:

$$\lambda^2-0.8\lambda-0.48 = (\lambda-1.2)(\lambda+0.4) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = 1.2 \quad \text{y} \quad \lambda = -0.4$$

Modelo de crecimiento poblacional

- Espacio propio $E_{\lambda_1} = E_{1.2} = N_{A-1.2I}$:

$$(A-1.2I \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} -1.2 & 1.6 & 0 \\ 0.3 & -0.4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0.3 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Espacio propio $E_{\lambda_2} = E_{-0.4} = N_{A+0.4I}$:

$$(A+0.4I \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.4 & 1.6 & 0 \\ 0.3 & 1.2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Condiciones iniciales del problema:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_0 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -4 & 20 \\ 3 & 1 & 100 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{105}{4} \\ 0 & 1 & \frac{85}{4} \end{array}\right)$$

1 8 0 3

Modelo de crecimiento poblacional

- Valores propios:

$$\lambda_1 = 1.2 \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = -0.4$$

- Vectores propios:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $A^k \mathbf{u}_0 = c_1 \lambda_1{}^k \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2{}^k \mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} j_k \\ a_k \end{pmatrix} = A^k \mathbf{u}_0 = \frac{105}{4}(1.2)^k \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{85}{4}(-0.4)^k \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1 8 0 3

Modelo de crecimiento poblacional

El crecimiento poblacional de una especie de venados se estudia en base a las hembras que son clasificadas en dos etapas de vida:

- Juvenil: < 1 año
- Adulta: ≥ 1 año

Las hembras adultas procrean en promedio 1.6 hembras cada año, y cada año sobreviven 30 % de las juveniles y 80 % de las adultas. Al inicio hay 20 juvenilese y 100 adultas.

b. ¿Cuál es la población 10 años después?

Solución.

$$\begin{pmatrix} j_k \\ a_k \end{pmatrix} = \frac{105}{4}(1.2)^k \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{85}{4}(-0.4)^k \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p_k = j_k + a_k = 7 \cdot \frac{105}{4} \cdot 1.2^k - 3 \cdot \frac{85}{4} \cdot (-0.4)^k$$

$$p_{10} = j_{10} + a_{10} = 7 \cdot \frac{105}{4} \cdot 1.2^{10} - 3 \cdot \frac{85}{4} \cdot 0.4^{10} \approx 1138$$

1 8 0 3

Modelo de crecimiento poblacional

El crecimiento poblacional de una especie de venados se estudia en base a las hembras que son clasificadas en dos etapas de vida:

- Juvenil: <1 año
- Adulta: ≥ 1 año

Las hembras adultas procrean en promedio 1.6 hembras cada año, y cada año sobreviven 30 % de las juveniles y 80 % de las adultas. Al inicio hay 20 juvenilese y 100 adultas.

- ¿Qué ocurre con la población a medida que pasan los años?

Solución.

$$p_k = j_k + a_k = 7 \cdot \frac{105}{4} \cdot 1.2^k - 3 \cdot \frac{85}{4} \cdot (-0.4)^k$$

$$p_k = 7 \cdot \frac{105}{4} \cdot 1.2^k - 3 \cdot \frac{85}{4}(-0.4)^k \to \infty \quad \text{cuando} \quad k \to \infty$$

1 8 0 3

Modelo de crecimiento poblacional

El crecimiento poblacional de una especie de venados se estudia en base a las hembras que son clasificadas en dos etapas de vida:

- Juvenil: < 1 año
- Adulta: ≥ 1 año

Las hembras adultas procrean en promedio 1.6 hembras cada año, y cada año sobreviven 30 % de las juveniles y 80 % de las adultas. Al inicio hay 20 juvenilese y 100 adultas.

d. Se debe controlar el crecimiento de la especie cazando un porcentaje de adultos. ¿Cuánto debe ser el porcentaje de caza para que la población se mantenga estable?

Solución.

h: proporción de caza de venados hembra de edad adulta.

- Población de hembras adultas k años después:

$$a_k = 0.3\, j_{k-1} + (0.8 - h)\, a_{k-1}$$

- La *matriz de transición* resultante es:

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 1.6 \\ 0.3 & 0.8 - h \end{pmatrix}$$

- Población de hembras adultas k años después:

$$a_k = 0.3\, j_{k-1} + (0.8 - h)\, a_{k-1}$$

- La *matriz de transición* resultante es:

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 1.6 \\ 0.3 & 0.8 - h \end{pmatrix}$$

Condición de estabilidad para la población

Suponga que A_h tiene valores propios λ_1 y λ_2.

a. Si $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$, entonces

$$\mathbf{u}_k = c_1 {\lambda_1}^k \mathbf{v}_1 + c_2 {\lambda_2}^k \mathbf{v}_2 \to \mathbf{0} \quad \text{cuando} \quad k \to \infty$$

   y así la población tiende a extinguirse.

b. Si $|\lambda_i| > 1$ para algún i, entonces $\lambda_i \to \infty$ cuando $k \to \infty$ y en tal caso la población aumenta sin control.

c. Para que la población se mantenga estable se necesita que $|\lambda_i| = 1$.

- El polinomio característico de la *matriz de transición* A_h:

$$p(\lambda) = |A_h - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1.6 \\ 0.3 & 0.8 - h - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (0.8 - h)\lambda - 0.48$$

- Los valores propios de la *matriz de transición* A_h:

$$\lambda = \frac{0.8 - h \pm \sqrt{(0.8 - h)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-0.48)}}{2}$$

- Valor de h para la estabilidad de la población:

$$\begin{aligned} \frac{0.8 - h + \sqrt{(0.8 - h)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-0.48)}}{2} &= 1 \\ \sqrt{(0.8 - h)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-0.48)} &= 1.2 + h \\ (0.8 - h)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-0.48) &= (1.2 + h)^2 \\ &\vdots \\ h &= 0.28 = 28\,\% \end{aligned}$$

1803

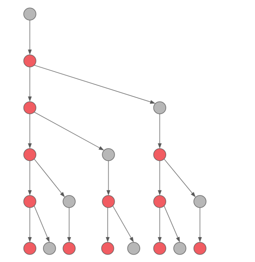
La sucesión de Fibonacci

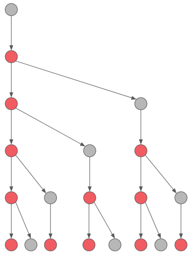
En 1202, Leonardo Fibonacci, también llamado Leonardo de Pisa planteó el siguiente problema: un par de conejos comienzan a procrear a la edad de un mes, y a partir de ese momento tienen como descendencia una nueva pareja de conejos cada mes. Si comenzamos con un par de conejos y ninguno de los conejos nacidos a partir de este par muere, ¿cuántos pares de conejos tendremos al principio de cada mes?

Solución.

x_n: número de parejas de conejos **al inicio** del mes n.

- : pareja que no puede procrear.
- : pareja que puede procrear.

n	Parejas de conejos	x_n
		

n	Parejas de conejos	x_n
		

: pareja que no puede procrear.

: pareja que puede procrear.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + x_{n-1} \\ x_n &= x_n, \qquad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \implies \mathbf{x}_n = A\,\mathbf{x}_{n-1}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= A\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_2 &= A\mathbf{x}_1 = A(A\mathbf{x}_0) = A^2\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_3 &= A\mathbf{x}_2 = A(A^2\mathbf{x}_0) = A^3\mathbf{x}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_n &= A^n\mathbf{x}_0 \end{aligned} \implies \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

La sucesión de Fibonacci

Ejemplo 1

Considere la sucesión de Fibonacci

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots x_n, \ldots$$

a. Encuentre una fórmula explícita para hallar el término x_n de la sucesión de Fibonacci
b. ¿A qué valor se aproxima x_{n+1}/x_n cuando $n \to \infty$?

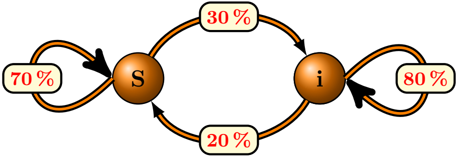
1 8 0 3

Cadena de Markov

Un equipo de investigación de mercado realiza un estudio controlado para determinar cuáles marcas de celular prefieren las personas. La muestra consiste de 200 personas, y a cada una se le pide probar dos marcas (Samsung y iPhone) durante un periodo de varios meses. Con base en las respuestas de la encuesta, el equipo de investigación compila las siguientes estadísticas acerca de las preferencias de celulares.

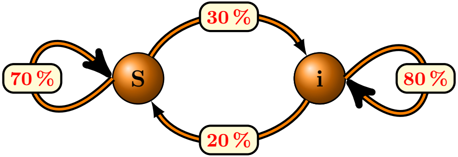
- De quienes usan Samsung en cualquier mes, 70 % siguen usándolo el mes siguiente, mientras que el 30 % cambia a iPhone.
- De quienes usan iPhone en cualquier mes, 80 % siguen usándolo el mes siguiente, mientras que el 20 % cambian a Samsung.

Suponga que cuando inicia el estudio 120 personas usan Samsung y 80 personas usan iPhone. ¿Cuántas personas usarán cada marca 1 mes después? ¿Y 2 meses después? ¿Y un año después?



$$\begin{array}{cc} & \text{Presente} \\ & \begin{array}{cc} \mathbf{S} & \mathbf{i} \end{array} \\ \text{Siguiente} \; \begin{array}{c} \mathbf{S} \\ \mathbf{i} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Al incio 120 usan Samsung y 80 usan iPhone



$$\begin{array}{cc} & \text{Presente} \\ & \begin{array}{cc} \mathbf{s} & \mathbf{i} \end{array} \\ \text{Siguiente} \begin{array}{c} \mathbf{s} \\ \mathbf{i} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Número de usuarios de Samsung y de iphone resp., despues de 1 mes:

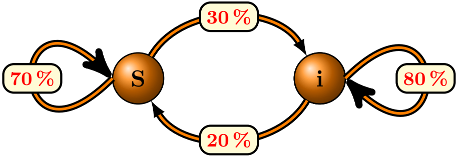
$$\begin{aligned} 0.70(120) + 0.20(80) &= 100 \\ 0.30(120) + 0.80(80) &= 100 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

- Número de usuarios de Samsung y de iphone resp., despues de 2 meses:

$$\begin{aligned} 0.70(100) + 0.20(100) &= 90 \\ 0.30(100) + 0.80(100) &= 110 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Al incio 120 usan Samsung y 80 usan iPhone



Presente

$$\text{Siguiente}\quad \begin{array}{c|cc} & \mathbf{s} & \mathbf{i} \\ \hline \mathbf{s} & 0.7 & 0.2 \\ \mathbf{i} & 0.3 & 0.8 \end{array}$$

- Número de usuarios de Samsung y de iphone resp., despues de 2 meses:

$$\begin{array}{rcl} 0.70(100) + 0.20(100) &=& 90 \\ 0.30(100) + 0.80(100) &=& 110 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 100 \end{pmatrix}$$

- Número de usuarios de Samsung y de iphone resp., despues de k meses:

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix} = P^k \, \mathbf{x}_0$$

Observaciones sobre cadenas de Markov

- Los vectores $\mathbf{x}_k$ se denominan ***vectores de estado***:

$$\mathbf{x}_k = P^k \, \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix}$$

- La matriz P se llama ***matriz de transición***:

$$P = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{pmatrix}$$

- El anterior es un ejemplo simple de una ***cadena de Markov*** (finita): representa un proceso evolutivo que consiste de un número finito de estados. En cada paso o punto en el tiempo, el proceso puede estar en cualquiera de los estados; en el paso siguiente, el proceso puede permanecer en su estado presente o cambiar a uno de los otros estados.

- El estado hacia donde avanza el proceso en el siguiente paso y la probabilidad de hacerlo, depende solamente del estado presente y no de la historia pasada del proceso.

Observaciones sobre cadenas de Markov

- En lugar de considerar los usuarios de Samsung y iPhone al inicio,

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix}$$

podemos considerar los porcentajes de usuarios al inicio:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{120}{200} \\ \frac{80}{200} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.60 \\ 0.40 \end{pmatrix}$$

- En tal caso:

$$\mathbf{x}_1 = P\,\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.60 \\ 0.40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.50 \\ 0.50 \end{pmatrix}$$

- Los vectores $\mathbf{x}_k$ así generados tienen dos propiedades:
  - Sus entradas son no negativas
  - La suma de todas sus entradas es igual a 1.

A estos vectores se les llama ***vectores de probabilidad***.

1 8 0 3

Observaciones sobre cadenas de Markov

- Las probabilidades de transición dentro de la matriz de transición P se ordenan así: puede considerar a las columnas como el estado presente y las filas como estado siguiente:

$$P = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{pmatrix}$$

Presente

$$\text{Siguiente} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{s} & \mathbf{i} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{s} \\ \mathbf{i} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Las columnas de P son vectores de probabilidad (cualquier matriz cuadrada con esta propiedad se llama ***matriz estocástica***).

- Si P es matriz estocástica, entonces P^2 es estocástica (ejercicio).

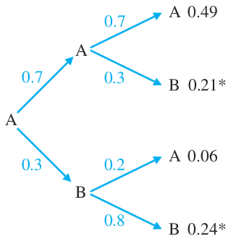
- ¿Es P^2 una matriz de transición del mismo tipo? ¿Qué representan sus entradas?

Observaciones sobre cadenas de Markov

- Sea $\left(P^k\right)_{ij}$ la entrada ij de P^k. ¿Qué representa $\left(P^k\right)_{ij}$?

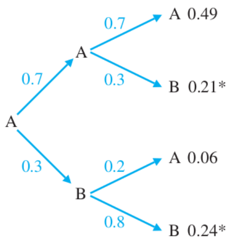
- ¿Qué representa $\left(P^2\right)_{21}$?

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.55 & 0.30 \\ 0.45 & 0.70 \end{pmatrix}$$



- Del estado A se puede llegar al estado B dos meses después de dos maneras distintas (marcadas con *)
- La persona puede seguir usando A después de 1 mes y luego cambiar a B con probabilidad $0.7(0.3) = 0.21$
- La persona puede cambiar a B después de 1 mes y luego seguir con B con probabilidad $0.3(0.8) = 0.24$.
- La suma de estas probabilidades produce una probabilidad total de 0.45.

Observaciones sobre cadenas de Markov



- Del estado A se puede llegar al estado B dos meses después de dos maneras distintas (marcadas con *)
- La persona puede seguir usando A después de 1 mes y luego cambiar a B con probabilidad $0.7(0.3) = 0.21$
- La persona puede cambiar a B después de 1 mes y luego seguir con B con probabilidad $0.3(0.8) = 0.24$.
- La suma de estas probabilidades produce una probabilidad global de 0.45.

Propiedad 1

$\left(P^k\right)_{ij}$ es la probabilidad de cambiar del estado j al estado i en k transiciones.

Ejemplo 1

Hallar el número de usuarios de Samsung y iPhone en el mes k:

$$\mathbf{x}_k = P^k\,\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix} = ?$$

Solución.

- El polinomio característico de la *matriz de transcición* A:

$$p(\lambda) = |P - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0.7-\lambda & 0.2 \\ 0.3 & 0.8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.5\lambda + 0.5$$

- Los valores propios de la *matriz de transcición* A:

$$\lambda^2 - 1.5\lambda + 0.5 = (\lambda - 0.5)(\lambda - 1) \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0.5 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 1$$

Espacios propios

- Espacio propio $E_{\lambda_1} = E_{0.5} = N_{P-0.5I}$:

$$(A - 0.5I \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Espacio propio $E_{\lambda_2} = E_1 = N_{P-I}$:

$$(A - I \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} -0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & -0.2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Condiciones iniciales del problema:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 120 \\ 1 & 3 & 80 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -40 \\ 0 & 1 & 40 \end{array}\right)$$

1 8 0 3

Información obtenida

- Valores propios:

$$\lambda_1 = 0.5 \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = 1$$

- Vectores propios:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- $A^k \mathbf{x}_0 = c_1 \lambda_1{}^k \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2{}^k \mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0 = -40(0.5)^k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 40 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{40}{2^k} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 80 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Vector estacionario

Observación 1

- (a) Los vectores de estado $\mathbf{x}_k$ se "aproximan" al vector $\mathbf{x} = (80, 120)$:

$$\mathbf{x}_k = -\frac{40}{2^k}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 80 \\ 120 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 80 \\ 120 \end{pmatrix} \quad \text{cuando} \quad k \to \infty$$

- (b) $P\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 80 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 120 \end{pmatrix} = \mathbf{x}$

Definición (vector de estado estacionario)

Un vector de estado $\mathbf{x}$ tal que $P\mathbf{x} = \mathbf{x}$ se llama ***vector de estado estacionario***.

Observación 2

- (a) Toda cadena de Markov con matriz estocástica *positiva* (todas sus entradas son positivas), tiene un único vector de probabilidad estacionario.
- (b) ¿Cómo hallar el vector de probabilidad de estado estacionario?

Vector estacionario

Ejemplo 2

Halle el vector de probabilidad que es vector estacionario para esta cadena de Markov.

Solución.

- $\mathbf{x}$ vector estacionario $\iff$ $P\mathbf{x} = \mathbf{x}$ $\iff$ $(P - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

- $(P - I \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} -0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & -0.2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t \\ t \end{pmatrix}$

- $\mathbf{x}$ es vector de probabilidad $\Leftrightarrow$ $\frac{2}{3}t + t = 1$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}$

Bibliografía

- Clara Mejía
  Álgebra lineal elemental y aplicaciones
  Ude@, 2006.

- Stanley Grossman
  Álgebra lineal
  McGraw-Hill Interamericana, Edición 8, 2019.

- David Poole
  Álgebra lineal: una introducción moderna
  Cengage Learning Editores, 2011.

- Bernard Kolman
  Álgebra lineal
  Pearson Educación, 2006.

- Ron Larson
  Fundamentos de Álgebra lineal
  Cengage Learning Editores, 2010.

1803