Faku Asesoría Universitaria

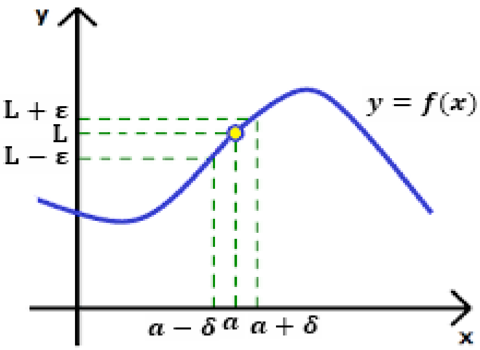
# LÍMITES

## DEFINICIÓN DE LÍMITE

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \equiv \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, tal que si

$$0<|x-a|<\delta \quad\to\quad |f(x)-L|<\varepsilon$$

**Representación gráfica**




## I. POR DEFINICIÓN

1. **EX1**

Usando la definición de límite, demuestre que:

a) **(15-2)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)=3$

b) **(14-1)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$ si $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$, $1\le x\le 3$

c) **(14-1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-5}{x-3}=2.$

d) **(13-2)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=4$, si $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\sqrt[3]{(x+7)^2}$

e) **(13-1)** $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{x+7}=2$

f) **(13-0)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-1}=3.$

g) **(12-2)**, $\lim\limits_{x\to 2} h(x)=4$, si $h(x)=5-\sqrt{3-x}$

h) **(11-2)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4-x}{2x-1}=3$

i) **(10-2)** $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$. si: $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$

j) **(10-1)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-1}{2x+2}\right)=\dfrac{3}{2}$

k) **(09-2)** $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$

l) **(09-1)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x+2}{2x-1}\right)=5$.

m) **(08-1)** $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{5x-7}{3x-5}\right)=2$

n) **(05-2)** $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{1-2x+x^2}=0$

o) **(01-1)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-1\right)=3$

p) **(01-1)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{3-4x}=-\dfrac{1}{2}$

2. **EX1 (19-1)**

Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones

a) **Si** $a+b\neq 0$ entonces $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+a\cos(\pi x)}{ax^2+bx}$ existe

b) **Si** $a+b=0$ entonces $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+a\cos(\pi x)}{ax^2+bx}$ no existe

3. **EX1 (18-0)**

Demuestre usando la definición $\epsilon-\delta$ que

$$\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-4}}=1\ .$$

4. **EX1 (17-1)**

Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$. ¿Qué tan cerca de 2 debe estar $x$ para garantizar que $f(x)$ se encuentre a una distancia menor a $1/2$ respecto de 1? Acompañe su justificación analítica con una representación gráfica de la situación.

5. **EX1 (11-1)**

Use la definición de límite y demuestre que si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\in R$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M\in R$, entonces $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=L-M.$ .

6. **EX1 (06-2)**

Usando la definición de límite, demostrar que si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L>0$, entonces existe $\delta>0$ tal que para $x\in \mathrm{Dom}(f)$ y $0<|x-a|<\delta$ se cumple que $|f(x)|<2L$.

7. **EX1 (03-2)**

Sea $f$ una función que tiene por dominio el conjunto de los números reales, tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$. Demostrar que si $L\neq 0$, entonces existe $\delta>0$ tal que cuando $0<|x-\alpha|<\delta$ se tiene que $|f(x)|>\frac{|L|}{2}$.

8. **EX1 (02-1)**

Calcule $\lim\limits_{x\to c} f(x)$; siendo $f(x)=ax+b$, con $a\neq 0, b$ y $c$ constantes reales; y, luego, compruebe que dicho resultado cumple la definición de límite de una función $f$ en c.

# II. POR CÁLCULO LÍMITES ALGEBRAICOS

**Forma indeterminada:** $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to a} f(x)\begin{cases}\text{Procedimiento:}\\ \text{*Simplicar el término "(x-a)"}\\ \text{*Evaluar}\end{cases}$$

**PC2 (12-0)**

Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt[3]{2x-3}-\sqrt{3-x}}{x-2}\right)$$

**Solución**

Procedemos a evaluar: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt[3]{2x-3}-\sqrt{3-x}}{x-2}\right)=\frac{0}{0}$

Obtenemos una forma indeterminada por ello debemos eliminar el factor de indeterminación: $x-2$

$$\lim_{x\to 2}\left(\left(\frac{\sqrt[3]{2x-3}-1}{x-2}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{2x-3}^{2}+\sqrt[3]{2x-3}+1}{\sqrt[3]{2x-3}^{2}+\sqrt[3]{2x-3}+1}\right)-\left(\frac{\sqrt{3-x}-1}{x-2}\right)\left(\frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{3-x}+1}\right)\right)$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt[3]{2x-3}^{3}-1^{3}}{(x-2)\left(\sqrt[3]{2x-3}^{2}+\sqrt[3]{2x-3}+1\right)}-\frac{\sqrt{3-x}^{2}-1^{2}}{(x-2)\left(\sqrt{3-x}+1\right)}\right)$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt[3]{2x-3}^{2}+\sqrt[3]{2x-3}+1\right)}-\frac{(2-x)}{(x-2)\left(\sqrt{3-x}+1\right)}\right)$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{2x-3}^{2}+\sqrt[3]{2x-3}+1}+\frac{1}{\sqrt{3-x}+1}\right)$$

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$$

9. **EX1**

Calcule los siguientes límites.

a) **(16-1)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{2}x-\sqrt{2x^2+10x+18}}{\sqrt[5]{2x^5-3x^3}}$

b) **(15-1)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+2)^{-3}-2^{-3}}{x}$

c) **(14-0)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{5+x^2}-\sqrt[3]{19+x^3}}{x-2}$

d) **(13-2)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\sqrt{2-x}-x^{2/3}}{x-1}$

e) **(10-1)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-2x}}{x}$

f) **(09-2)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{\sqrt{x(x+a)}+x}{x^2\left(\sqrt[3]{x^3+3}-x\right)}\right)$

g) **(08-1)** $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ para $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2+1}}{x}$ y $a\neq 0$

h) **(07-1)** $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$, si $n\in Z^+$

i) **(07-1)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2-x}{\sqrt{x^2+2x-3}}+x\right)$

j) **(06-1)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)$

k) **(02-1)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)$, si $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

l) **(01-2)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

m) **(01-1)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^5-1}{x-1}\right)$

10. **EX1 (14-1)**

i. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=L$, $L>0$ y $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ calcule $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}$

ii. Si $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=3$ y $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=1$, halle $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$

**11. EX1 (02-2)**

Si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=L$. Calcular:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}.$$

**12. EX1 (02-2)**

Si $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x+1}$ y $g(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$. Calcular:

$$\lim_{x\to 2}\left((g\circ f)_{(x)}+(f\circ g)_{(x)}\right)$$

# LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

## PROPIEDADES

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{senx}}{\text{x}}=1$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\text{cosx}}{\text{x}}=0$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\text{cosx}}{\text{x}^2}=\dfrac{1}{2}$

**13. EX1**

Calcule los siguientes límites:

a) **(18-0)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos(x)}{x-\dfrac{\pi}{3}}$

b) **(17-0)**

$$\lim_{x\to 1}\frac{2\tan^2(x-1)-sen(x-1)\tan(x-1)-sen^2(x-1)}{(x-1)^4}$$

c) **(13-1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x^2+\pi)+1}{x}$

d) **(12-2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(2x)-2sen(x)}{x^3}$

e) **(12-0)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos(x)-\dfrac{1}{2}}{sen\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}$

f) **(10-1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$

g) **(09-2)** $\lim\limits_{x\to 1}\left((1-x)\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\right)$

h) **(09-1)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{sen(sen(x-1))}{x-1}+\dfrac{sen(\pi x)}{x(x-1)}\right)$

i) **(08-1)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{sen(a+2x-\pi)-2sen\left(a+x-\dfrac{\pi}{2}\right)+sen(a)}{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2}\right)$

,con a una constante en R.

j) **(09-1)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\right)$

k) **(07-2)** $\lim\limits_{x\to\pi/4}\left(\dfrac{\cos(x)-sen(x)}{\cos(2x)}\right)$

l) **(07-2)** $\lim\limits_{x\to 1}\left((x^3-1)^2\cos\left(\dfrac{1}{(x-1)^3}\right)\right)$

**m)** **(06-2)** $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{sen\left(\cos^2\dfrac{x}{2}\right)}{(x-\pi)^2}$

**n)** **(06-1)** $\lim\limits_{x\to 4^-} \left[\dfrac{x-4}{\sqrt{16-x^2}} + \dfrac{4-x}{\tan(x-4)}\right]$

**o)** **(06-1)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^3}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}$

**p)** **(06-1)** $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt[3]{x^2-1}\,\cos\left[\dfrac{3\pi\,(x+3)}{x^2-3x+2}\right]$

**q)** **(05-2)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$

**r)** **(05-1)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}$

**s)** **(04-2)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-sen(x)}{\cos(x)\left[\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)-sen\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]}$

**t)** **(04-1)**

$$\lim_{x\to\pi}\left(\frac{x}{\cos x}+\frac{x^2-(\pi+1)x+\pi}{2x^2-2\pi x}+\frac{2x-2\pi}{sen(x-\pi)}\right).$$

**14. EX1 (07-2)**

Sea f una función real tal que: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=L\in\mathbb{R}$.

**a)** Para cualquier valor c en R, pruebe que se cumple

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x+c)}{x+c}\right)=L.$

**b)** Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x+3)+f(x-2)}{x}\right)=8$, halle el valor de L.

**15. EX1 (02-1)**

Calcule:

**a)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x);\ si\ f$ es la función que cumple:

$$2\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)\le f(x)\le tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$x\neq 0\ \ y\ \ -\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}.$$

# LÍMITES LATERALES

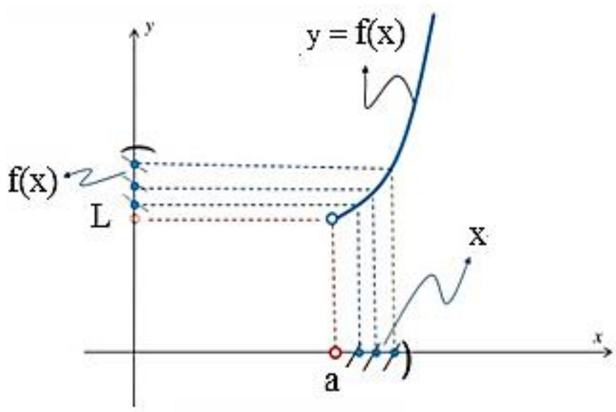
## DEFINICIÓN DE LÍMITES LATERALES

**Definición 1: (Por la Derecha)**

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L \equiv \forall\ \varepsilon>0,\ \exists\delta>0$, tal que si

$a<x<a+\delta\ \rightarrow |\ f(x)-L\ |<\varepsilon$

### Representación gráfica

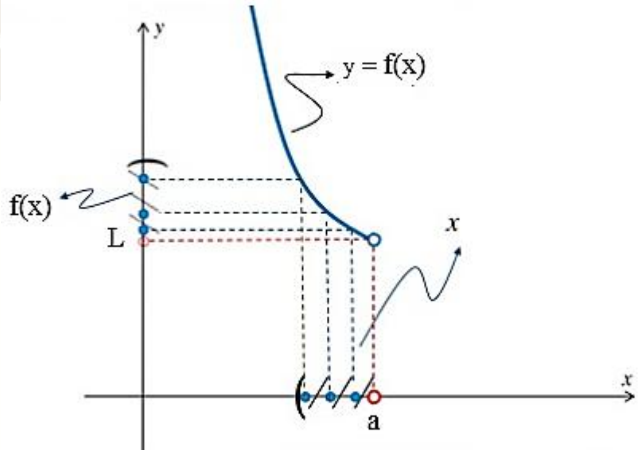



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$

**Definición 2: (Por la Izquierda)**

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L \equiv \forall\ \varepsilon>0,\ \exists\delta>0$, tal que si

$a-\delta<x<a\ \rightarrow |\ f(x)-L\ |<\varepsilon$




$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$

## PROPIEDAD

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ existe sí y solo sí existen los límites laterales y son iguales, esto es:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

**16. EX1 (19-0)**

**Analice el valor de la verdad o falsedad de la siguiente proposición.**

a) Si $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x-3}$ y $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}, x<0\\ \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}, x>0\end{cases}$

entonces $\lim\limits_{x\to 0} f\left(g(x)\right)=-1.$

**17. EX1 (18-2)**

Sea $g:\mathbb{R}-[a,-a]\to\mathbb{R}$ la función definida con la siguiente regla de correspondencia

$$g(x)=\frac{x-ax^3}{\left(|x|-a\right)\left(x+a^2\right)}$$

Calcule o analice $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ para los siguientes casos:

a) a=1 y $f(x)=\dfrac{1-\cos\left(\sqrt{x-1}\right)}{sen\left[(x-2)(x-1)\right]}-g(x)$

b) a=0 y $f(x)=g(x)+\dfrac{2-\cos(1/x)}{sen(x)}$

c) a=-1 y $f(x)=g(x)$

**18. EX1 17-2**

Sea $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\left(\sqrt[3]{1-2x}\right)^2-\sqrt[3]{27-54x}+2}{x}, & x<0\\ \dfrac{\ln\left[(x+1)^x\right]}{x}, & x>0\end{cases}$$

Analice la existencia de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

**19. EX1**

Calcule los siguientes límites, si existen:

a) **(18-1)** $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{1-\cos\left(x-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x-1}}$

b) **(18-0)** $\lim\limits_{x\to 3+}\sqrt{x-3}\,e^{sen\left(\frac{1}{x-3}\right)}$

**(16-1)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x+1|}{1-|x+2|}$

c) **(16-1)** $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{2-\sqrt{x}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{16-x^2}}$

d) **(16-1)**

Analice la verdad o falsedad de la siguiente proposición. Justifique su respuesta.

Dadas las funciones

$$f(x)=\sqrt{4-x^2} \quad y \quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}, & x>2\\ \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}, & 0<x<2\end{cases}$$

Entonces se cumple que

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

e) **(14-2)** $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$

f) **(10-2)**

$$\lim_{x\to -2}\left[(x^2+4x+4)\cos\left(\frac{x^3}{x+2}\right)\left|\sec(\pi x)\right|\right]$$

g) **(07-2)** $\text{Lim}_{x\to 2} f(x)$, para

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4-x^2}+2-x}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2x-x^2}}, & x<2\\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}, & 2<x\end{cases}.$$

h) **(04-1)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos^{-1}(1-x)}{\sqrt{8x-4x^2}}$

i) **(01-2)** $\text{Lím}_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+\left|x^2-4\right|}{\sqrt{2-x}}$

j) **(01-1)** $\text{Lím}_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-4}\right)$

k) **(01-1)** $\text{lím}_{x\to 0^+}\dfrac{Cos^{-1}(1-x)}{\sqrt{8x-4x^2}}$

**20. EX1 (15-2)**

Halle los valores de $a$, $b$ y $c$ $(a>0)$ para que $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ exista y $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=+\infty$, si

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a|x-3|}{(3bx-3)^2}, & x<5,\ x\neq 3.\\ \dfrac{x^2-3x-c}{x-5}, & x>5\end{cases}$$

**21. EX1 (11-1)**

Halle el valor de a, de modo que exista el siguiente límite $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-|x-a|-a^2}{|x-a|}$. Luego, halle el valor de dicho límite.

**22. EX1 (06-1)**

Enunciar la definición de límite lateral derecho, y usarla para demostrar que $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x-1}+3\right)=3$

**23. EX1 (04-1)**

Hallar $\underset{x\to 2}{lím}\ f\left(g\left(x\right)\right)$ donde $g$ y $f$ son las funciones definidas por:

$$g(x)=\begin{cases}4x-5, & si\ \ x<2\\ 7-x^2\ , & si\ x\geq 2\end{cases}\quad y$$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{5x+1}\ ; & si\ x\leq 3\\ 3x-5\,, & si\ x>3\end{cases}.$$

**24. EX1 (03-2)**

La función:

$$f(x)=\begin{cases}a\left(\dfrac{x^3-x^2+x+b}{x-2}\right), & x<2\\ c & ,\ x=2\\ \dfrac{x-2}{4\left(\sqrt[3]{x-1}-1\right)} & ,\ \ x>2\end{cases}.$$

es tal que $\underset{x\to 2}{lím}\ f(x)=c.$ Hallar los valores de las constantes a, b, y c.

**25. EX1 (03-1)m**

Sea $f$ una función definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2-3x+1}{x-1}, & x\neq 1\\ b\,, & x=1\end{cases}$$ ; a, b constantes reales.

**a)** Si $\underset{x\to 1}{lím}\ f\ (x)=L$, hallar los valores de $a$ y L.

**b)** Con los valores a y L encontrados en a), demostrar que para cierto $\delta>0.$ (que no es necesario encontrarlo) se cumple:

$$0<\left|x-1\right|<\delta\ \ \Rightarrow\ \ \frac{9}{10}<f(x)<\frac{11}{10}.$$

**c)** Si $f(x)=\begin{cases}x^2\ sen\left(\dfrac{1}{x}\right) & ,x\neq 0\\ 0\,, & x=0\end{cases}.$ hallar

$$\underset{h\to 0}{lím}\ \frac{f(h)-f(0)}{h}.$$

**26. EX1 (02-1)**

Dadas las funciones $f$ y $g$ definidas por:

$$f(x)=\begin{cases}-\sqrt{2-(x+1)^2}\ ; & si\ \ -2<x<0\\ \dfrac{1}{x}sen\left(\dfrac{\pi\ x}{3}\right); & si\ \ \ 0<x\leq 4\end{cases}.$$

$$y\quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x+5} & si\quad -4<x<0\\ \dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2+4}, & si\quad 2\leq x<8\end{cases}.$$

Calcule, si existen,

$$\underset{x\to 2^+}{Lím}\ (f\ _0\ g)(x)\quad y\quad \underset{x\to -1}{Lím}\ (g\ _0\ f)(x).$$

# LÍMITES INFINITOS

**27. EX1**

Calcule los siguientes límites:

**a)** **(18-1)** $\lim\limits_{t\to -\infty}\left(t+\sqrt{t^2+t}\right)sen\left(\dfrac{1}{t}\right)$

**b)** **(15-2)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)sen(x)}{x}\right]$

**c)** **(15-0)** $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right]$

**d)** **(14-2)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+5x+9}-6}{\sqrt[3]{x^3-3x-1}+3x}$

**e)** **(14-0)** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2}{\left|1-x^3\right|}sen^2\left(\dfrac{1}{x}\right)$

**f)** **(13-2)** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x\left(1-\cos^3\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)}{sen\left(\dfrac{2}{x}\right)}$

**g)** **(12-2)** $\underset{x\to +\infty}{lím}\ \dfrac{x+sen(\frac{\pi x}{2})}{2x+1}$

**h)** **(12-0)** $\underset{x\to 0}{lím}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)sen\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

**i)** **(05-2)** $\underset{x\to -\infty}{lím}\ \dfrac{\sqrt{2x^2+2x+2}}{x+2}$

**28. EX1(15-1)**

Considere la función

$$f(x)=\frac{b}{\left|b\right|-x+1}$$

**a)** Halle el valor de "$b$" de modo que $\underset{x\to 3^+}{lím}\ f(x)=+\infty$

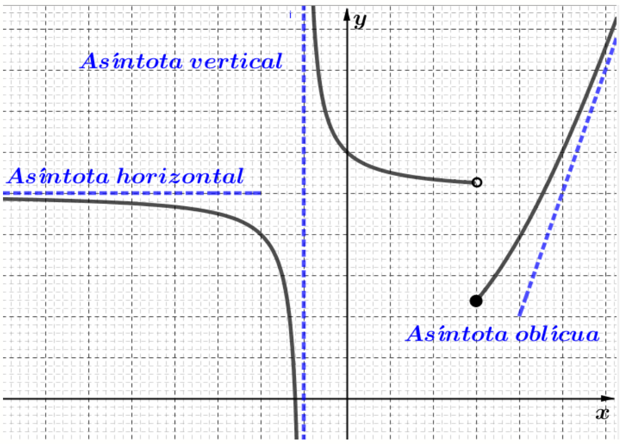
**b)** Usando el valor de "$b$" hallado, pruebe por definición el limite anterior.

**29. EX1(01-2)**

Enuncie el Teorema o Regla del Sandwich y, luego, halle

$$\underset{x\to 0}{Lím}\left(x^2\ sen\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

# GRÁFICAS




**30. EX1 (19-0)**

Considere una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumpla todas las siguientes condiciones:

- $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-x-1}{-x^2+x+6}$ si $0<x<3$
- $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-x}{3-x}}sen\left(\dfrac{1}{x}\right)-e^{-\frac{1}{x}},\quad si\quad x<-3$

**a)** Analice el comportamiento de $f$ cuándo $x\to 0^+,\quad x\to 3^-,\quad x\to -3^-$ y $x\to -\infty.$

**b)** Esboce la gráfica de $f$ considerando los resultados obtenidos en a) y que $f$ es impar.

**31. EX1 (17-2)**

Esboce la gráfica de una función $f:\mathbb{R}-\{3\}\to\mathbb{R}$ que cumpla con todas las siguientes condiciones:

**a)** $f$ es continua en $\mathbb{R}-\{3\}$.

**b)** $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-x-1}{-x^2+x+6}$, si $x>3$

**c)** $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=+\infty$

**d)** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=1$

**e)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

**f)** $(3/2,1)$ es un punto de intersección de la gráfica de $f$ con una asíntota e indique las ecuaciones de sus asíntotas, si existen.

**32. EX1 (17-1)**

Dada la función

$$f(x)=\frac{x^2+x}{\sqrt{|x^2-1|}};$$

**a)** Halle las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si existen.

**b)** Bosqueje la gráfica de $y=f(x)$, indicando los puntos de intersección con los ejes de coordenadas.

**33. EX1 (17-0)**

Halle las asíntotas de la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-x^3-1}{x^3-x}, & x>-1\\[2mm] \dfrac{\sqrt{9x^2+1}}{x}, & x\le -1\end{cases}$$

y use dicha información para esbozar la gráfica de $f$ si se sabe que pasa por los puntos $(-0.8,0)$ y $(1.4,0)$.

**34. EX1 (16-2)**

Considere la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x-3}{x-1}}, & x<1\\[2mm] 2, & x=1\\[2mm] \dfrac{x^3+x^2}{x^2-1}, & x>1\end{cases}$$

**a)** Determine las coordenadas de los puntos en los que la gráfica de $f$ corta a los ejes de coordenadas.

**b)** Analice la existencia de los siguientes límites. En aquellos casos en los que existan, halle su valor.

**i.** $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

**ii.** $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

**iii.** $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

**iv.** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

**c)** Haga un esbozo de la gráfica de $f$, considerando asíntotas e interceptos con los ejes. Sugerencia: Use los resultados obtenidos en a. y b.

**35. EX1(16-1)**

Dada la función

$$f(x)=\frac{(x-a)^2(x-2a)}{(x-3a)(x-4a)}$$

, donde $a$ es un número real positivo,

**a)** Halle las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $f$.

**b)** Bosqueje la gráfica de la función f, considerando asíntotas e intersecciones con los ejes de coordenadas.

**36. EX1 (15-2)**

Para la función real $f$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^3}{x^2+2x+1}, & si\ \ x>-1\\[2mm] \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2-1}}, & si\ \ x<-1\end{cases}$$

**a)** Halle las asíntotas de su gráfica.

**b)** Bosqueje la gráfica de dicha función.

**37. EX1 (15-1)**

Sea $f$ una función cuya regla de correspondencia es:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x-1}, & si \quad x<1\\ \dfrac{1}{(x-1)(x-2)^2}+2, & si \quad x>1, x\neq 2\end{cases}$$

**a)** Halle las ecuaciones de las asíntotas de la función.

**b)** Esboce la gráfica de la función.

**38. EX1 (15-0)**

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|6x+9|}{\sqrt{4x^2-9}}, & si \quad x<-3/2\\ \dfrac{8x^3}{(2x+3)^2}, & si \quad x>-3/2\end{cases}$$

Calcule las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas de la gráfica de $f$ y bosqueje la gráfica de $f$

**39. EX1 (14-2)**

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-4}{x+4}, & si \quad x<-4\\ \sqrt{9-(x+1)^2}, & si \quad -4\leq x\leq 2\\ \dfrac{(3-x)^2}{x-2}, & si \quad x>2\end{cases}$$

Halle las asíntotas de la gráfica de y esboce la gráfica indicando los puntos de intersección con los ejes coordenados

**40. EX1 (14-1)**

Halle las asíntotas de la gráfica de la función $f(x)=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$ indique los puntos de intersección con los ejes coordenados y esboce la gráfica de f.

**41. EX1 (14-0)**

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2-4}}, & si \quad x<-2\\ \dfrac{2x}{x-4}, & si \quad x\geq -2, \quad x\neq -2\end{cases}$$

Halle las asíntotas de la gráfica de la función y esboce la gráfica indicando los puntos de intersección con los ejes de coordenadas.

**42. EX1 (13-2)**

Halle las asíntotas de la gráfica de la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x+5)^2}{x+3} & si\, x<-3\\ \dfrac{x^2+3x-2}{x} & si\, -3<x<0\\ \dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}} & si\, x\geq 0\end{cases}$$

y esboce la gráfica indicando los puntos de intersección con el eje de abscisas.

**43. EX1 (13-1)**

Halle las asíntotas de la gráfica de la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x+9}{\sqrt{4x^2-9}}, & si\ x<-3/2\\ \dfrac{8x^3}{(2x+3)^2}, & si\ x>-3/2\end{cases}$$

y esboce la gráfica indicando los puntos de intersección con el eje de abscisas.

**44. EX1 (13-0)**

Dada la función f, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+2x+1}, & x>1\\ x^{2/3}(x+3)^{1/3}, & x\leq 1\end{cases}$$

**a)** Halle las asíntotas de la gráfica de *f*.

**b)** Bosqueje la gráfica *f*.

**45. EX1 (12-2)**

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^2-1}}$

**a)** Halle el dominio de f y analice la continuidad en su dominio.

**b)** Determine las asíntotas de la gráfica de f.

**c)** Esboce la gráfica de *y=f(x)*, considerando la parte a) y b).

**46. EX1 (12-0)**

Dada $f$ definida por:

$$\mathrm{f}(\mathrm{x})=\begin{cases}\dfrac{8-x^3}{x^2+x-6}; & si\ x\neq -3; x\neq 2\\ 2 ; & si\ x=-3; x=2\end{cases}$$

**a)** Hallar las asíntotas de la gráfica de *f*.

**b)** Analizar la continuidad de la función *f*, indicando los tipos de discontinuidad si hubiera.

**c)** Esbozar la gráfica de *f* indicando los puntos de intersección con los ejes coordenados.

**47. EX1 (11-2)**

Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^3}{(2x+3)^2}, & x>-\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{4x+6}{\sqrt{4x^2-9}}, & x<-\dfrac{3}{2}\end{cases}.$$

**a)** Halle las asíntotas de la gráfica de f.

**b)** ¿Existe intersección entre la gráfica de f con alguna asíntota?

**c)** Esboce la gráfica de f.

**48. EX1 (11-1)**

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$.

**a)** Halle el dominio de $f$

**b)** Demuestre que $f$ es una función par.

**c)** Halle las asíntotas del gráfico de $f$ y encuentre, si existen, los puntos de intersección del gráfico de $f$ con sus asíntotas oblicuas.

**d)** Bosqueje el gráfico de $f$.

**49. EX1 (10-2)**

**a)** Dada la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-x-2}$.

**b)** Halle las asíntotas de la gráfica de f.

**c)** Determine las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de f con los ejes coordenados.

**d)** Esboce la gráfica de f.

**50. EX1(10-1)**

Sea la función $f(x)=2x-x^3$. Usando la definición de derivada, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P (2; f (2)). Esboce la gráfica de f y de su recta tangente en P.

**51. EX1(10-1)**

Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}+e^x; & x>2\\ \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2-4}, & -2<x<2\\ -\dfrac{\sqrt{x^4-2x^2+4}}{x+2}; & x<-2\end{cases}$$

**a)** Para cada asíntota de la gráfica de f halle una ecuación.

**b)** Esboce la gráfica de f y de sus asíntotas en un mismo sistema de coordenadas.

**52. EX1 (09-2)**

Halle el valor de la cte. k sabiendo que la curva de ecuación $y=\dfrac{x^3+kx^2+1}{x^2+1}$ tiene una asíntota que pasa por el punto (1,3).

**53. EX1 (09-1)**

Analizando continuidad y hallando sus asíntotas, esboce la gráfica de la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4}{(1+x)^3} & ; \ x>-1\\ 1 & ; \ x=-1.\\ \dfrac{x-2}{x+1} & ; \ x<-1\end{cases}$$

**54. EX1 (08-2)**

Para la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+6x+1}{x+3}, & si\ \ x\le 2\ \ y\ \ x\ne -3\\ 0\ \ , & si\ \ x=-3\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}, & si\ \ x>2\end{cases}.$$

**a)** Analiza la continuidad de f;

**b)** Halle las asíntotas de la función f; y

**c)** Esboce la gráfica de la función f.

**55. EX1 (08-1)**

Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+3x-9}{x^2-9}, & si\ \ |x|<3\\ \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}, & si\ \ |x|>3\end{cases}$$

**a)** Halle las asíntotas de la gráfica de y = f(x);

**b)** Haga un bosquejo de la gráfica de y = f(x), indicando los tipos de discontinuidades que presenta.

**56. EX1 (07-2)**

Bosqueje la gráfica de la función y = f(x), indicando dominio, hallando sus asíntotas y las intersecciones con los ejes, y analizando continuidad, si:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{3x+3}+\dfrac{1}{x+2} & si\ \ x\le 1\\ \dfrac{x^2-2x+2}{2x} & si\ \ x>1\end{cases}.$$

**57. EX1 (07-1)**

Graficar la siguiente función indicando su dominio y asíntotas $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-3x+2}$

**58. EX1 (06-2)**

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+2} & si\ \ x<-2\\ \dfrac{x^4-2x^3}{x^3+2x^2-4x-8} & si\ \ x>-2\ \ y\ \ x\ne 2.\\ 1 & si\ \ x=2\ o\ x=-2\end{cases}$$

a) Analizar la continuidad de $f$ en su dominio, indicando si hay discontinuidades salvables y esenciales.

b) Hallar las asíntotas de la gráfica de $f$.

c) Bosquejar la gráfica de $f$.

**59. EX1 (06-2)**

Si la función $f: R \to R$ cumple $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in R$, y recta $y = 4x + 3$ es una asíntota oblicua a la derecha (en $+\infty$) de su gráfica, calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{\sqrt{8x^2 + sen\, x}}$.

**60. EX1 (06-1)**

Bosquejar la gráfica de la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+3}{x+2} & si \;\; x<-2 \\ \dfrac{x+1}{x^2-1} & si \;\; -2\le x\le 2\,, \quad x\neq \pm 1. \\ \dfrac{2x^2-x+1}{x+1} & si \quad x>2 \end{cases}$$

Señalando, si fuera el caso, las asíntotas de la gráfica y los puntos de intersección de la gráfica con los ejes coordenados. Analizar también la continuidad de la función.

**61. EX1 (05-2)**

Bosquejar la gráfica de la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x-2} & si \;\; x\le 1 \\ \dfrac{2x^3-x^2}{x^2-1} & si \;\; x>1 \end{cases}$$

, señalando, si fuera el caso, las asíntotas de la gráfica y los puntos de intersección de la gráfica con los ejes coordenados. Analizar también la continuidad de la función.

**62. EX1 (05-1)**

Bosquejar la gráfica de la función

$$f(x)=\frac{2(x^2-x-2)(x^2+3x+2)}{(x^2-1)(x+3)}$$

, indicando dominio y asíntotas (verticales y oblicuas)

**63. EX1 (04-2)**

a) Dada la función $g(x)=\dfrac{x^2-4x}{2x-6}$, $x>3$, esbozar la gráfica de $g$, indicando sus asíntotas.

b) Si $f$ es la función que cumple las condiciones siguientes.
   - Su dominio es $]-\infty,-3[\cup]3,\infty[$,
   - $f$ es una función par y su gráfica contiene a la gráfica de $g$.

   Dar la regla de correspondencia de f.

c) Esbozar la gráfica de la función f.

**64. EX1 (03-2)**

Sea la función $f$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}, & 0<x<1 \\ x^4, & x\ge 1 \end{cases}.$$

Calcular si existe $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

**65. EX1 (03-2)**

Determinar las asíntotas de la gráfica de la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2-4}, & x<2 \\ \sqrt{4x^2+3x}, & x>4 \end{cases}.$$

**66. EX1 (03-1)**

Hallar las asíntotas de la gráfica de la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x^2-1}, & x<-1 \\ \sqrt{13+9x^2}\,, & x\ge -1 \end{cases}.$$

**67. EX1 (02-2)**

a) Determinar las asíntotas de la gráfica de la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} \;, & x\le -2 \\ \dfrac{x}{x^2-2x} \;, & x>-2 \end{cases}.$$

b) Demostrar que la gráfica de la función $f(x)=x^3-3x+1,\; -2\le x\le 2.$ intercepta al eje X en tres puntos distintos.

**68. EX1 (02-1)**

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}\,; & si \;\; |x|>2 \\ \dfrac{x^3}{4-x^2}\,; & si \;\; |x|<2 \end{cases}$$

; determine las asíntotas de la gráfica $y=f(x)$.

**69. EX1 (01-2)**

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+4x-5}{x+2}, & si \;\; x\le 1 \;\; y \;\; x\neq -2 \\ \dfrac{x^3}{(x-1)^2} \;, & si \;\; x>1 \end{cases}.$$

a) Halle las asíntotas de la gráfica $y=f(x)$..

b) Bosqueje la gráfica de $y=f(x)$.

**70. EX1 (01-2)**

Esboce la gráfica de una función real $y = f(x)$ que cumpla las características siguientes:

**i.** $-3 \notin Dom(f)$, $f(-2) = -3$ y $f(0) = -6$

**ii.** La recta y = x + 1 es una asíntota en $+\infty$ de la gráfica de $f$;

**iii.** $\underset{x\to-\infty}{Lím} f(x) = -3$, $\underset{x\to 1}{Lím} f(x) = +\infty$, $\underset{x\to 2^+}{Lím} f(x) = -3$

**iv.** $Ran(f) = ]-5, +\infty[ \cup \{-6\}$ y $f$ Presenta una discontinuidad esencial (no evitable) en x = 2.

**71. EX1 (01-1)**

Dadas las funciones:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3 \quad y$$
$$g(x) = x^3 - 2x^2 + 2;$$

**a)** Justifique por qué las gráficas de dichas funciones se interceptan en algún punto de abscisa c.

**b)** Determine un intervalo de longitud menor que 1 que contenga al valor c, de la parte a).

**72. EX1 (01-1)**

Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 4 + 3\,sen(4x-8), & x > 2 \\ 5x - 6\ , & x \le 2 \end{cases} \quad y$$

$$g(x) = \begin{cases} 5 + 2x, & x > -3 \\ x^2 - 14, & x \le -3 \end{cases}.$$

Justificando su proceso, analice la continuidad de:

**a)** $f\ en\ R;\ y$

**b)** $g_o f$ en el intervalo ] 1, 5 [

**73. EX1 (01-1)**

Esboce la gráfica de una función $f(x)$ que cumple simultáneamente las siguientes condiciones:

i. $Dom(f) = [1, 4]$, $Ran(f) = [1, 5]$, $f(1) = 2 \quad y \quad f(4) = 5;$

ii. $f$ es creciente en $[3, 4]$ $y$ $f(2)$ es valor máximo en $[1, 3]$.

iii. $\underset{x\to 3^+}{Lím} f(x) = 1$ $y$ $\underset{x\to 3^-}{Lím} f(x) = 3;$

iv. $\underset{x\to a}{Lím} f(x) = f(a), \quad \forall a \in [1, 4] \quad y \quad a \neq 3.$

# CONTINUIDAD

La función $f$ es continua en $x = a$ si se cumple:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

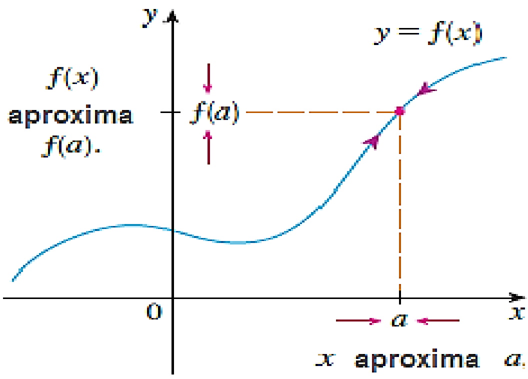
De manera equivalente, esta definición se puede plantear de la siguiente manera:

i. $\exists\ f(a)$

ii. $\exists \lim_{x\to a} f(x)$

iii. $i = ii$

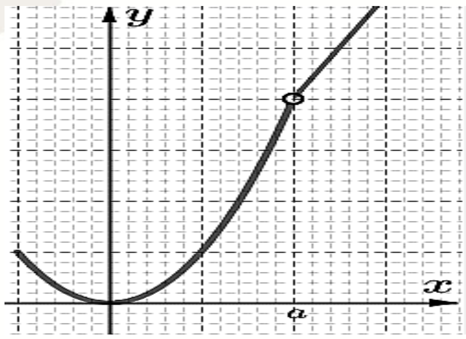
**Representación gráfica**



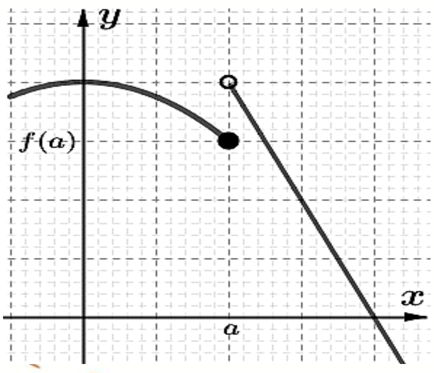

**NOTA:** Se dice que una función es discontinua en el punto $x = a$ cuando esta no es continua en dicho punto.

Diremos que una función $f(x)$ tiene una discontinuidad en x=**a** si se presenta alguna de las siguiente situaciones

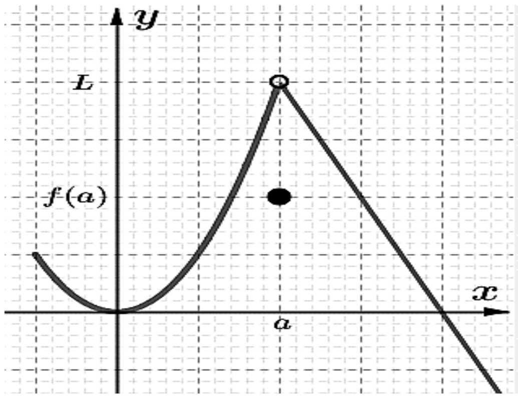
**1)** Si **a** no es un punto del dominio de $f(x)$.




**2)** No existe $\lim_{x\to a} f(x)$.



**3)** $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, pero $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$




**Clasificación de las discontinuidades de una función**

Supongamos que x=a es un punto de discontinuidad de la función. Entonces,

¿Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$?
- NO: discontinuidad esencial
  - $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$: de salto.
  - $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$: infinita o asintótica.
- SI: discontinuidad evitable, removible o eliminable

**74. EX1 (19-1)**

La función $f:]0,+\infty[-\{1\}\to\mathbb{R}$ es dada por

$$f(x)=\frac{x\ln x}{\arctan(x-1)}$$

**a)** Defina una extensión continua $g:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ de la función $f$

**b)** Calcule $g'(1)$

**75. EX1 (19-0)**

**Analice el valor de la verdad o falsedad de la siguiente proposición**

**a)** Sea $f:[0;3]\to\mathbb{R}$ una función continua tal que $f(0)=-3$ y $f(3)=0$ entonces existe $c\in\,]0;3[$ tal que $f(c)>0.$

**76. EX1 (18-1)**

Determine el valor de verdad (V o F) de las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta.

**a)** Existe una extensión continua $g:[1,2]\to\mathbb{R}$ de la función $f:]1,2[\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=(x-2)\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)e^{\left(\frac{1}{1-x}\right)}$$

**b)** La ecuación $\ln(x+1)=1-x$ admite una única solución.

**c)** Existe un número $x\in\mathbb{R}$ para el cual $y=\arctan(x)+x^2$ es negativo.

**77. EX1 (17-2)**

Justificando rigurosamente cada uno de sus procesos, analice el valor de verdad o falsedad de la siguiente proposición

Si $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función continua en $x=0$, con $g(0)=0$, y $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función tal que $|f(x)|\leq|g(x)|$ para todo $x\in\mathbb{R}$, entonces $f$ es continua en $x=0$.

**78. EX1 (17-1)**

Para funciones reales:

**a)** Si $\operatorname{Lim}\limits_{x\to a} g(x)=b$ y $f$ es una función continua en $b$; compruebe que

$$\operatorname{Lim}_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\operatorname{Lim}_{x\to a} g(x)\right).$$

**b)** Para la función $h$, definida por

$$h(x)=\begin{cases}\sqrt{10x^3-4x+1}, & si\ \ x\in[2,4[\\ \left(\dfrac{x^2-x-2}{x-2}\right)^2, & si\ \ x>4\end{cases}$$

Aplicando el resultado de la parte a), compruebe que $a=4$ es una discontinuidad evitable de la función $h$.

**79. EX1 (17-0)**

Calcular $\lim\limits_{x\to 2}(f\cdot g)(x)$, donde $f$ es una función continua en $\mathbb{R}$ con $-3\leq f(x)\leq 7$ y $g$ es la función con regla de correspondencia $g(x)=\frac{\arctan(x^2-4x+4)}{x^2-4}$.

**80. EX1 (16-2)**

Considere la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a^3x^3-4a}{bx-b}, & x<1\\ \dfrac{b+c}{102}, & x=1\\ \dfrac{\sqrt{x+c}-2}{\sqrt{x}-1}, & x>1\end{cases}$$

Si se sabe que $f$ es continua en todos los reales, determine los valores de $a, b$ y $c$.

**81. EX1 (16-1)**

Analice la verdad o falsedad de la siguiente proposición. Justifique su respuesta.

Si $f$ es una función continua en 0 tal que $Dom(f)=R$ y $f(a+b)=f(a)f(b)$, $\forall a,b\in R$ entonces se cumple que $f$ es continua en R.

**82. EX1 (15-2)**

Una función $f$ está definida por

$$f(x)=\frac{ax^3+bx^2}{x^2-2x-1}.$$

a) Hallar los valores de las constantes $a$ y $b$ para que la función sólo presente discontinuidades removibles.

b) Defina una función continua $g$ en todo R de modo que $g(x) = f(x), x \in Dom(f)$

**83. EX1 (15-1)**

Si la función $f$ está definida en $]0,1[$ por:

$f(x) = \dfrac{Sen\ \pi x}{x(x-1)}$.

Definir $f$ en 0 y en 1 para que la función $f$ sea continua en $[0,1]$.

**84. EX1 (13-2)**

Si $f$ es la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \beta x - 2 & si\ x \le 1 \\ \dfrac{\alpha x^2 - 2}{x-3} & si\ 1 < x < 2 \\ \beta\sqrt{x-1} - 6 & si\ x \ge 2 \end{cases}$$

, halle los valores de $\alpha$ y $\beta$ para que $f$ sea continua.

**85. EX1 (13-2)**

Si $f$ es continua en el intervalo $[0,1]$ tal que $f(0) = f(1)$, demuestre que $f(\alpha) = f\left(\alpha + \dfrac{1}{2}\right)$ para algún $\alpha \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$

**86. EX1 (12-2)**

Una función $f$ está definida por

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{kx^2 - 2kx + 1}.$$

Siendo $k$ una constante en $\mathbb{R}$. Analizando los valores de $k$, halle las discontinuidades esenciales y removibles de la función $f$ (si existen).

**87. EX1 (13-0)**

Sea la función $f$ y el número $a \in \mathbb{R}$ arbitrario,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\,x - sen\,a}{x-a}, & si\ x \ne a \\ \cos a, & si\ x = a \end{cases}.$$

¿Existen valores de tal que la función $f$ sea discontinua en dichos puntos?

**88. EX1 (11-1)**

Dadas las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x + Ln(x), & x > 1 \\ x^2, & x \le 1 \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}, & x > 0 \\ e^x, & x \le 0 \end{cases}.$$

Demuestre que la función g o $f$ es continua en R.

**89. EX1 (10-2)**

Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\,sen(x) + ax}{x}, & -\pi \le x < 0 \\ \dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x+1}, & 0 \le x < 3 \\ \ln(x-2) + b, & 3 \le x \le 2 + e \end{cases}.$$

a) Halle el valor de a y de b para que f sea continua en $[-\pi, 2 + e]$.

b) Grafique f teniendo en cuenta los resultados hallados previamente.

**90. EX1 (10-1)**

Analice el tipo de discontinuidad de la función f en los puntos x = -1 y x = 1, si $f(x) = (1+x)\arctan\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)$.

**91. EX1 (09-2)**

Bosqueje la gráfica de la función y = f(x), hallando dominio, discontinuidades, asíntotas e intersecciones con los ejes, si existen; siendo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 + 2x - x^2}{x-2}, & si\ x > 2 \\ 1, & si\ x = 2\ \ o\ \ x = -2. \\ \dfrac{4x^2}{(x+2)^2}, & x < 2\ \ y\ \ x \ne -2 \end{cases}$$

**92. EX1 (09-1)**

Halle las discontinuidades de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 5\sqrt{x} + 6}$ en $[0, +\infty[$, indicando el tipo de discontinuidad, si existe.

**93. EX1 (07-1)**

Sean $f$ y $g$ dos funciones con dominio en $R$ tales que:

- $g(x) = x\,f(x) + 1.$
- $g(x+y) = g(x)g(y).$
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1.$

Demostrar que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = g(x).$

**94. EX1 (07-1)**

Supongamos que $g : R \to R$ es una función continua tal que

- $g$ es continua en cero
- $g(0) = 0.$

- $|f(x)| \le |g(x)|$ para todo $x \in R$.

Probar que $f$ es continua en cero.

**95. EX1 (06-2)**

Si la función $f$: $R \to R$ definida por $f(x)=\begin{cases} ax^2+x+1 & si\ x<1 \\ 2x^2-5x-4a & si\ x\ge 1 \end{cases}$, es una función continua, calcular el valor de a.

**96. EX1 (06-1)**

Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{b}{1-x}+\dfrac{c}{1-x^2} & si\ \ x<1\ ,\ x\ne -1 \\ -1/2 & si\ \ x=1 \\ \dfrac{a\left(\sqrt{x}-b\right)}{x^2-1} & si\ \ x>1 \end{cases}.$$

, continua en 1. Calcular los valores de las constantes a, b y c.

**97. EX1 (06-1)**

Si la función $f$: $R \to R$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+x+1 & si\ x<1 \\ 2x^2-5x-4a & si\ x\ge 1 \end{cases}$$

, es una función continua, calcular el valor de a.

**98. EX1 (05-2)**

Si f: R →R es una función tal que $|f(x)| \le |x|$ para todo $x \in \left]-1,1\right[$, f es continua en 0.

**99. EX1 (05-1)**

Sea f una función, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c, & x\le 1\ \ o\ \ x\ge 3 \\ a\dfrac{|x-2|}{x-2}+x, & 1<x<2 \\ d\,, & x=2 \\ a\dfrac{|x-2|}{x-2}+x, & 2<x<3 \end{cases}.$$

a, b, c y d números reales. Hallar a, b, c y d de modo que f sea continua

**100.EX1 (05-1)**

Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}+Ln(x+1)$.

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}, & x<-1 \\ \sin(\pi x) & ,x>-1 \end{cases}.$$

Hallar el intervalo más grande en el cual f es continua y calcular $\lim\limits_{x\to -1}(f\circ g)(x)$.

**101.EX1 (04-2)**

Considerar la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^3-x^2-7x+6}{x+2}+k, & x<-1,\quad x\ne -2 \\ \dfrac{x^2}{sen(x)}, & -1\le x<0 \\ \sqrt{x}, & x\ge 0 \end{cases}.$$

$k$ es una constante real.

**a)** Justificar por qué la función $f$ es continua en $R$ - { - 2, -1, 0 }

**b)** Analizar si $f$ es continua en 0.

**c)** Determinar el valor de $k$ para que $f$ sea continua en $-1$.

**d)** Con el valor de $k$ encontrado, calcular $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

**102.EX1 (03-1)**

Dada la función

$$f(x)=\frac{ax^2+b}{x^3-2ax^2+2ax-1}$$

**a)** Determine el valor de las constantes $a$ y $b$, sabiendo que la función $f$ presenta una discontinuidad evitable cuando $|x|=1$.

**b)** Con los valores de $a$ y $b$ hallados en el ítem a), ¿es posible aplicar el teorema del valor intermedio a la función $f$ en el intervalo $\left[-\frac{1}{2},0\right]$? Justifique su respuesta.

**103.EX1 (02-1)**

Hallar los valores de las constantes reales a y b de manera que la función $f$ sea continua en $-\pi/2\ \ y\ \ en\ \ \pi/2$; siendo

$$f(x)=\begin{cases} -2\,sen(x); & si\ \ x\le -\pi/2. \\ a\,sen(x)+b\,; & si\ \ -\pi/2<x<\pi/2. \\ \cos(x); & si\ \ x\ge \pi/2 \end{cases}$$

**104.EX1 (02-1)**

Sean las funciones f y g:

$$f(x)=\begin{cases} 1+x^2\,; & si\ \ x<-1 \\ -1-3x\,; & si\ \ x\ge -1 \end{cases}.$$

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-3}{1-x}, & si\ \ x\ne 2\ \wedge\ x\ne 1 \\ 1, & si\ \ x=2 \end{cases}.$$

**a)** Calcule $\lim\limits_{x\to 2} f(g(x))$, si existe.

**b)** Del resultado anterior, explique si la función compuesta $f\circ g$ es o no continua en 2.

# TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO
# (ó teorema del cero)

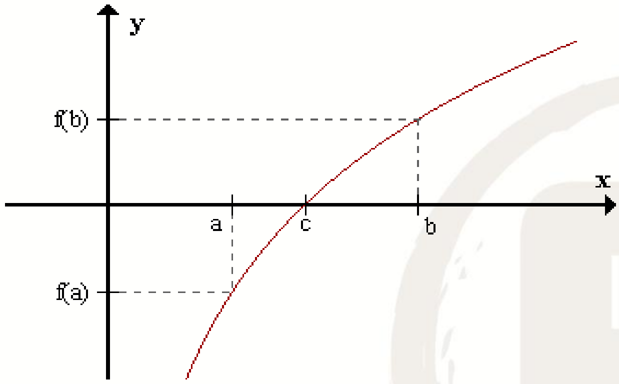
Sea la función $f$ que cumple:

i. $f$ es continua en el intervalo $[a,b]$

ii. $f(a)\cdot f(b)<0$

Entonces existe al menos un $c\in[a,b]$ tal que $c=f(0)$

**REPRESENTACIÓN GRÁFICA**




**105.EX1 (19-1)**

Demuestre las siguientes proposiciones.

**a)** La ecuación $x^2+2=e^x$ tiene al menos una solución

**b)** $f(x)=\dfrac{x^2+2}{e^x}$ es estrictamente decreciente sobre el intervalo $[0,+\infty[$

**c)** La ecuación $x^2+2=e^x$ tiene una única solución

**106.EX1 (18-2)**

Por cada $a\in\mathbb{R}$, considere la siguiente ecuación:

$$0=\arctan(2x+a)+2x-\sqrt{(2x)^2+1} \quad (*)$$

**a)** Analice el caso a=0, ¿la ecuación (*) tiene alguna solución $x\geq 0$? Justifique.

**b)** Encuentre todos los valores de $a\in\mathbb{R}$ para los cuales la ecuación anterior (*) admite al menos una solución $x>0$

**107.EX1 (18-0)**

Elija intervalos convenientes y aplique el teorema del valor intermedio para demostrar que las gráficas de las funciones

$$f(x)=x^2-2x, \quad \text{y} \quad g(x)=2\cos(x)$$

, se intersecan en dos puntos.

**108.EX1 (17-0)**

Demuestre que la ecuación $e^{-x}-x^3=0$ posee una <u>única</u> solución real.

**109.EX1 (16-1)**

Dadas las funciones

$f(x)=\left|x-\frac{\pi}{2}\right|$ y $g(x)=\arctan(x), x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

Demuestre analíticamente que las gráficas de $f$ y $g$ se interceptan en el intervalo $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

**110.EX1 (15-2)**

Sea $g$ una función continua en $[0,4]$ con $g(0)=s(4)$ y $g(2)\neq g(0)$. Pruebe que existe $c\in]0,2[$ tal que $h(c)=g(c)$ donde $h(x)=g(x+2)$

**111.EX1 (15-1)**

Sean $f$ y $g$ dos funciones continuas en el intervalo $[0,1]$ tales que

**i.** $f(x)\in[0,1]$, $\forall x\in[0,1]$

**ii.** $g(0)=1$, $g(1)=0$.

Pruebe que existe $c\in[0,1]$ tal que $f(c)=g(c)$

**112.EX1 (15-0)**

Sea $f:[a,b]\to[a,b]$ una función continua. Demuestre que existe un $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=c$

**113.EX1 (14-2)**

Demuestre que existe al menos un $x_0\in\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right[$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)=x^2$, definida implícitamente por la ecuación $sen\left(\dfrac{y}{x}\right)=\sqrt{\dfrac{xy}{2\pi}}$, en el punto $(2,\pi)$

**114.EX1 (14-1)**

Dado que 0 < a < 1 y b > 0, demuestre que la ecuación x=asenx+b tiene al menos una raíz positiva no mayor que a+b

**115.EX1 (14-0)**

Demuestre que la ecuación $ax^n=\cos(x)$ tiene una solución real en el intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, donde a > 0 y n entero positivo.

**116.EX1 (13-1)**

Si $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(0)=2$ y $f(2)=0$, demuestre que la recta $\mathcal{L}$: $y=mx$, $m>0$, interseca a la gráfica de $f$.

**117.EX1 (13-0)**

Demuestre que la ecuación $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}=0$ tiene una única raíz real en el intervalo [-1,1].

**118.EX1 (12-2)**

Demuestre que la ecuación $\cos(x)=x,\quad x\in[0,\pi]$ tiene una raíz en el intervalo $[0,\pi]$.

**119.EX1 (12-0)**

Dada la ecuación: cos(x)-2x=0 demostrar que dicha ecuación tiene al menos una solución real.

**120.EX1 (11-2)**

Sea la ecuación $e^x-2x^2=0,\ldots$ (1)

i. Demuestre que la ecuación (1) tiene una raíz real negativa.

ii. Localice dicha raíz en un intervalo de longitud igual a ½

**121.EX1 (11-1)**

Demuestre que la ecuación $x^3-x^2+x=3$, tiene una raíz real. Encuentre un intervalo de longitud 0.5 que contenga a dicha raíz.

**122.EX1 (10-2)**

Pruebe que la ecuación sec(x) = x + 2, tiene por los menos una raíz en el intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

**123.EX1 (10-1)**

Sea f una función continua en el intervalo [0,2] con f(0) = 2 y f (2) = 0.
Pruebe que la recta y=mx, m>0 interseca siempre a la gráfica de f.

**124.EX1 (09-2)**

Compruebe que:

**a)** Si f es continua en ] a, b [, con a < b, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=-\infty$, entonces existe un valor c en ] a, b [ tal que f(c) = 0.

**b)** La función $f(x)=\frac{x+1}{x}+\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x-2}$, , para x > 0, intercepta al eje X en dos puntos distintos.

**125.EX1 (08-1)**

Demuestre que las gráficas de las funciones f(x) = lnx y g(x) = 2 – x se cortan en un punto cuya abscisa se encuentra en el intervalo $]1,2[$

**126.EX1 (07-1)**

**a)** Enunciar el Teorema del cero.

**b)** Sea $f$ una función continua en el intervalo $[-b\,;0]$, $b>0$ tal que $f(0)=b$ y $f(-b)=0$. Demostrar que toda recta $L$ que pasa por el origen y de pendiente negativa, interseca al gráfico de $f$.

**127.EX1 (06-1)**

Enunciar el teorema del cero, y usándolo demostrar que la ecuación cos x = x tiene una raíz en el intervalo $[0,\pi/2]$.

**128.EX1 (05-2)**

Si la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha(\cos x-senx)}{\cos 2x} & si\ \ 0\le x<\dfrac{\pi}{4}\\[2mm] 2x\tan x-\dfrac{\pi}{\cos x} & si\ \ \dfrac{\pi}{4}\le x<\dfrac{\pi}{2}\\[2mm] \beta & si\ \ x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

, es continua en el intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, demuestre que la gráfica de la función g(x)=$\alpha x^3+\beta$ intercepta al eje X en el intervalo $]-2,2[$.

**129.EX1 (04-2)**

Justificar que las gráficas de las funciones $f$ y $g$, cuyas reglas de correspondencia son: $f(x)=3x^3$, $g(x)=4-2x$ tienen un punto de intersección. Su justificación debe ser analítica.

**130.EX1 (02-1)**

Si $f(x)=x+2^x$, muestre que la ecuación $f(x)-4=0$ admite una solución en el intervalo $]1,2[$

**131.EX1 (01-2)**

Sea $f$ una función continua en $[0,2]$ tal que $-1=f(1)\le f(x)\le f(0)=3$ para todo $x$ en $[0,2]$ y $f(2)=2$. Demuestre que la ecuación $f(x)=1$ tiene al menos dos soluciones reales en $]0,2[$.

# DERIVADA POR DEFINICIÓN

### TABLA

| | FUNCIÓN | DERIVADA |
|---|---|---|
| 1 | $C$ | $0$ |
| 2 | $x^n$ | $nx^{n-1}$ |
| 3 | $e^x$ | $e^x$ |
| 4 | $a^x$ | $a^x \ln a$ |
| 5 | $lnx$ | $\frac{1}{x}$ |
| 6 | $senx$ | $\cos x$ |
| 7 | $cosx$ | $-senx$ |
| 8 | $tanx$ | $\sec^2 x$ |
| 9 | $\cot x$ | $-\csc^2 x$ |
| 10 | $\sec x$ | $\sec x \tan x$ |
| 11 | $\csc x$ | $-\csc x \cot x$ |
| 12 | $Arcsenx$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 13 | $Arc\cos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 14 | $Arc\tan x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |

**Propiedades:**

i. $\left[f(x) \pm g(x)\right]' = f'(x) \pm g'(x)$

ii. $\left[f(x) \cdot g(x)\right]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

iii. $\left[C \cdot f(x)\right]' = C \cdot f'(x)$

iv. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$, $g(x) \neq 0$

**Versión 1:**

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

**Versión 2:**

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

**132.EX1 (19-1)**

Para cada ítem, calcule $f'(x_0)$ y encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.

a) $f(x) = \frac{\cos(2-x)}{x+3}$, $x_0 = 2$

b) $f(x) = |2x-5| + x^2 \tan(x-1)$, $x_0 = 1$

**133.EX1 (18-1)**

Determine el valor de verdad (V o F) de la siguiente proposición. Justifique su respuesta.

Cuando una función continua $f: ]-1, 1[ \to \mathbb{R}$ satisface $|x|^3 \leq f(x) \leq x^2$, para todo $x \in ]-1, 1[$, se cumple que $f$ es derivable en el origen y su derivada $f'(0)$ es cero.

**134.EX1 (15-2)**

Sea $f$ una función que cumple la condición $|f(x)| \leq sen^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mediante la definición, calcule $f'(0)$

**135.EX1 (15-0)**

Sean $f, g: \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en $x = a$ tal que $g(a) \neq 0$. Demuestre que

$$\left[\frac{f}{g}(a)\right]' = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{\left[g(a)\right]^2}$$

**136.EX1 (14-2)**

Sea $f$ una función derivable en todo $x \in \mathbb{R}$. Si $G(x) = f(cx+b)$, use la definición de derivada para demostrar que $G'(x_o) = c f'(cx_o + b)$, para todo $x_o \in \mathbb{R}$

**137.EX1 (14-1)**

Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en a, calcule $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{2x}$

**138.EX2 (13-2)**

Sea $f:\mathbb{R}\to]0,+\infty[$ una función diferenciable con $f'(0)=1$ y $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R};\ f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$. Muestre que $f$ (0)=1, calcule $f$ '(a) si a $\in\mathbb{R}$ .

**139.EX2 (13-1)**

Sea $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ una función derivable con $f'(1)=1$ y $\forall x_1,x_2\in]0,+\infty[$: $f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)=f(x_1)-f(x_2)$.Calcule $f'(a)$ si $a>0$

**140.EX1 (13-0)**

Usando la definición de derivada lateral demuestre que no existe $f'(x_0)$, si $f(x)=|\cos(x)|,\quad x_0=\dfrac{\pi}{2}$

**141.EX1 (12-2)**

Sea *g* una función derivable tal que g(x)≠0, usando la definición de derivadas demuestre que

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=-\frac{g'(x)}{(g(x))^2}.$$

**142.EX2 (12-0)**

Si $f$ es derivable en $a$, calcular

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+5h)-f(a-2h)}{7h}.$$

**143.EX1 (06-2)**

Demostrar que si $f$ : R →R es una función derivable en x = a, entonces $f$ es continua en a.

**144.EX1**

Usando la definición de derivada calcular:

- **a) (15-1)** $f'(x)$, si $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{ax-b}}$
- **b) (11-2)** $f'(2)$, si $f(x)=\sqrt{3x-1}+(5x-1)^2$
- **c) (11-1)** $f'(0)$, si $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\ge 0\\ x^3, & x<0\end{cases}$.
- **d) (06-2)** $f'(0)$, si $f(x)=\sqrt{2x+9}$
- **e) (05-1)** $f'(x)$, si $f(x)=\sqrt{x^2+1}$
- **f) (04-2)** $f'(x)$, si $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x\neq 0$

# DERIVADAS LATERALES

**DERIVADA LATERAL POR LA DERECHA EN $x=a$**

$$f_+'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ \text{ó}$$

$$f_+'(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

**DERIVADA LATERAL POR LA IZQUIERDA EN $x=a$**

$$f_-'(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ \text{ó}$$

$$f_-'(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

**TEOREMA:**

La función $f$ es derivable en $x=a$ si y sólo si las derivadas laterales son iguales, esto es:

$$f_+'(a)=f_+'(a)=f'(a)$$

**145.EX1 (19-0)**

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}x^3\cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & x<0\\[2mm] \dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2}, & x>2\end{cases}$$

- **a)** Defina una extensión continua de $f$ de modo que su dominio sean todos los reales.
- **b)** Calcule la derivada de la función definida en la parte a).

**146.EX1 (18-2)**

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\tan(x)}{x+2}+1-\cos(x), & 0\le x<\pi/2\\[2mm] x^3 sen\left(\dfrac{1}{x}\right)+x, & x<0\end{cases}$$

- **a)** Responder si $f$ es continua en x=0. Justifique
- **b)** Analizar si $f$ es derivable en x=0. Justifique
- **c)** Escriba la función derivada $f$ '

**147.EX1 (18-0)**

Considere la función

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{si } -1<x\le 2,\\ \ln(x-2), & \text{si } 2<x<3,\\ \dfrac{x^2}{4}+x+\dfrac{1}{2}\ln(x-2), & \text{si } x\ge 3,\end{cases}$$

Halle la regla de correspondencia de la función $f'$ y las ecuaciones de todas las asíntotas de $f'$ (si las hay).

**148.EX1 (17-2)**

Justificando rigurosamente cada uno de sus procesos, analice el valor de verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

**a)** Si $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función continua en $x=0$, con $g(0)=0$, y $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función tal que $|f(x)|\le|g(x)|$ para todo $x\in\mathbb{R}$, entonces $f$ es continua en $x=0$.

**b)** El valor de la constante $a$ que permite a la función

$$g(x)=\begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}}+2, & x\neq 0 \\ a & , x=0 \end{cases}$$

, ser derivable en $x=0$, es $a=0$.

**149.EX1 (17-2)**

Justificando rigurosamente cada uno de sus procesos, analice el valor de verdad o falsedad de la siguiente proposición.

El valor de la constante $a$ que permite a la función

$$g(x)=\begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}}+2; & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$$

, ser derivable en $x=0$, es $a=0$

**150.EX1 (17-0)**

Considere la función $f$, continua en su dominio.

$$f(x)=\begin{cases} 5e^x \ln x + Ax, & 0<x<1 \\ 3, & x=1 \\ \dfrac{B}{x-B}+2, & x>1 \end{cases}$$

**a)** Determine los valores de A y B.

**b)** Analice si $f$ es derivable en su dominio. En aquellos puntos en donde lo sea, calcule su derivada.

**151.EX1 (15-0)**

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2 sen\left(\dfrac{1}{x}\right)+ax & , \ si \quad x>0 \\ 0 & , \ si \quad x=0. \\ x^3\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)+x+b & , \ si \quad x<0 \end{cases}$$

Halle los valores de $a$ y $b$ para que $f(x)$ sea derivable en $x=0$

**152.EX1 (14-2)**

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2 sen\left(\dfrac{1}{x}\right) & , \ si \quad x\neq 0 \\ 0 & , \ si \quad x=0 \end{cases}.$$

**a)** Halle $f'(0)$

**b)** Demuestre que $f'(x)$ no es continua en $x=0$

**c)** Demuestre que no existe $f''(0)$

**153.EX1 (14-1)**

Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función derivable tal que g'(2) = 1 y g(2) = 4, halle los valores de a y b de modo que la función f definida por $f(x)=\begin{cases} g(x) & si \quad x<2 \\ ax^2+b & si \quad x\ge 2 \end{cases}$ sea derivable en 2

**154.PC2 (14-1)**

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-2x(a+2)(x-2)^2 sen\left(\dfrac{1}{x-2}\right) & , \ si\ 1<x<2 \\ b(x-1)^2-6 & , \ si\ x\ge 2 \end{cases}$$

**a)** Halle los valores de $a$ y $b$ para que $f$ sea derivable en 2.

**b)** Con los valores de $a$ y $b$ hallados, determine la función $f'$ indicando su dominio.

**155.EX1 (14-0)**

Sea f una función definida por

$$f(x)=\begin{cases} -x^3+bx^2+\dfrac{1}{2}, & si \quad x<-1 \\ \dfrac{x^2+2x-1}{x-a}, & si \quad x\ge -1 \end{cases}$$

Halle los valores de a y b para que f sea derivable en $x=-1$.

**156.EX1 (13-2)**

Sea $f$ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3+x^2 & si\ x<1 \\ 2x^2-3x+4 & si\ x\ge 1 \end{cases}$$

, determine la función $f'$ indicando su dominio.

**157.EX1 (13-1)**

Sea $f$ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\beta}{x-2} & , si\ x\le 1 \\ \alpha x^2-2 & , si\ 1<x<2 \\ \beta\sqrt{x-1}-6 & , si\ x\ge 2 \end{cases}$$

a) Halle los valores de $\alpha$ y $\beta$ para que $f$ sea derivable en 2.
b) Con los valores de $\alpha$ y $\beta$ hallados, determine la función $f'$ indicando su dominio.

**158.EX1 (08-2)**

Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-3, & si\ x\in[-2\ ,\ 2[ \\ x^2-8x+17, & si\ x\in[2\ ,\ 6] \end{cases}.$$

a) Explique si es posible o no aplicar el teorema del valor intermedio a la función f en el intervalo $[-2\ ,\ 6]$.
b) Halle c $\in ]-2\ ,\ 6[$ , si existe, tal que f(c) = 3.
Usando definición de derivada, analiza si existe f'(2).

**159.EX1 (08-2)**

Si

$$f(x)=\begin{cases} g(x)\ sen\left(\frac{1}{x}\right), & si\ x\neq 0 \\ 0\ , & si\ x=0 \end{cases}$$

, siendo g una función tal que g(0) = g´(0) = 0. Hallar f´(0).

# REGLA DE LA CADENA

**160.EX1 (19-0)**

**Analice el valor de la verdad o falsedad de la siguiente proposición**

Si $f$ es una función par y derivable en todos los reales entonces $f'$ es una función impar.

**161.EX1 (19-0)**

a) Calcule $f'(0)$ sabiendo que

$$f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x^2+1}}+e^{\left(1+\cos^5\left(x^4+1\right)\right)}$$

b) Calcule $f'(x)$ si $f(x)=\arctan\left(\frac{1+2^x}{1-x}\right)$

c) Calcule $f'(x)$ si

$$f(x)=\left[\ln(ax)+k\left(1+kmx+\tfrac{1}{2}(ax)^2\right)\right]^m,$$

y que $a,k$ y $m$ son constantes positivas.

**162.EX1 (18-1)**

Para las funciones

$$f(x)=\operatorname{sen}(x\tan(x)) \qquad y$$

$$g(y)=\cos^2(y\operatorname{sen}(4y))$$

, halle $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)+g'\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

**163.EX1 (17-2)**

Halle $f'(0)$, si $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+4}{e^x}}+sen^3(3x)\cos(x^3)$

**164.EX1 (17-2)**

Halle $f'(0)$, si

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2+4}{e^x}}+sen^3(3x)\cos(x^3)$$

**165.EX1 (15-2)**

Dada la función

$$f(x)=\sec\left(\frac{x^4}{3x^5+3}\right)+\sqrt{x^3\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)+1}$$

, halle $f'(x)$

**166.EX1**

Calcular las derivadas:

a) **(14-1)** $f(x)=\sqrt[3]{\sec^2 x\tan^2 x+1}$ , halle $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

**b)** **(13-1)** Si $f(x)=\tan\left(\frac{xsen(x)}{2}\right)+\sin^2(x\cos(2x))$ ,halle $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

**c)** **(12-2)** Si $g(x)=x^2\sec(x)+\tan(x)$, halle $\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$.

**d)** **(06-2)** $f(x)=\sqrt{2x^2-3x}+sen\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$

**167.EX1 (15-1)**

Dadas las funciones $h(x)=\frac{3x^2}{\tan(\pi x)}$ $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ , encuentre $(g\circ h)'(x)$

**168.EX1 (15-0)**

Sea $f'(x)=\frac{1}{x}$. Si $g(x)$ es una función derivable tal que $f\circ g(x)=x$ , demuestre que $g'(x)=g(x)$

**169.EX1 (15-0)**

Sea $f(x)=(\cos x)\sqrt{1+sen^2x}$ , halle $f'(x)$

**170.EX2 (14-1)**

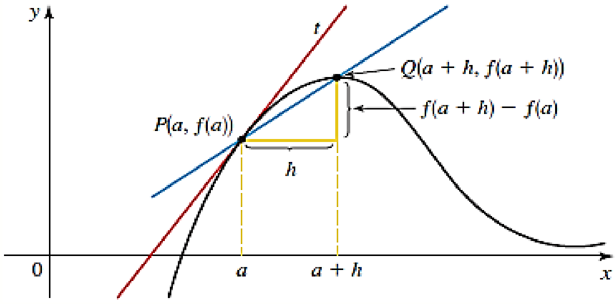
Demuestre que la función $f(x)=2arctan(x)+arcsen\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$, $x\geq 1$ es constante

**171.EX2 (13-1)**

Demuestre que la función $f(x)=arcsen\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-2arctan(\sqrt{x})$, $x\geq 0$ es una constante.

# RECTA TANGENTE

## Representación gráfica




NOTA: Podemos observar que la derivada de una función en el punto $x=a$ representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto.

**172.EX1 (16-1)**

Se sabe qué $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son funciones derivables en 0, $f(0)=6$ y que $g(0)=3$. La recta $L_1$ es tangente a la gráfica de $f$ en (0,6) y la recta $L_2$ es tangente a la gráfica $g$ en (0,3). Sabiendo que $L_1$ y $L_2$ se intersectan en un punto del eje X, encuentre la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de $\left(\frac{f}{g}\right)$ en el punto (0,2).

**173.EX1 (16-2)**

Considere la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1}, & x\leq 0\\ \frac{senx+cosx}{senx-cosx}, & 0<x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

**a)** Calcule la derivada de $f$, indicando su dominio. En $x=0$ la derivada debe hallarse por definición.

**b)** ¿Existe algún punto en la gráfica de $f$ en el que la recta tangente es horizontal? Justifique su respuesta.

**174.EX2 (12-2)**

Sea la función

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1}$$

Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función donde la recta tangente es paralela a la recta $L: y=-3x$.

**175.EX1 (18-1)**

Halle la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función

$$f(x)=\arctan\left(1+x^2\right)-\frac{x^2}{5}+\frac{1}{\pi}\tan(\pi x)\sqrt[3]{\cos^2(\pi x)}$$

, en el punto donde $x=1$.

**176.EX1 (15-2)**

Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$f(x)=\begin{cases} 7x+\alpha, & 0\le x\le 1 \\ \beta\sqrt{7x^2+2}, & x\ge 1 \end{cases}.$$

En el punto de abscisa $x=2$, si la función $f$ es diferenciable en $x=1$

**177.EX1 (15-1)**

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0,13)$ y que es tangente a la gráfica de función $f(x)=x^3-3$

**178.EX1 (14-2)**

Halle la ecuación de la recta que es tangente a la gráfica de $f(x)=\begin{cases} 2-(x-2)^2 & si\ x>0 \\ -2+(x+2)^2 & si\ x<0 \end{cases}$ en dos puntos diferentes.

**179.EX1 (14-1)**

Usando derivadas, encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x)=4(x+2)^2-1$ que pasan por el punto P (0,-10).

**180.EX1 (14-0)**

Por el punto $\left(\frac{3}{2},9\right)$ se trazan las rectas tangentes a la parábola $f(x)=-x^2+4x+3.$ Determine sus ecuaciones.

**181.EX1 (13-2)**

Justificando sus procedimientos, analice la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- **i.** Si $f$ no es continua en $x_0\in Dom(f)$, la discontinuidad es removible.
- **ii.** Si $f$ es continua en $x_0$ pero $f$ no es derivable en $x_0$, entonces no existe la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$

**182.EX1 (13-2)**

Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^3+4$ que pasa por el punto P(1,0) exterior a la gráfica de $f$

**183.EX1 (13-1)**

Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^3$ que pasa por el punto $P(2,0)$.

**184.EX2 (13-0)**

¿En qué punto de la curva $C: y=x\ln x$ la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $P_1(1,0)$ y $P_2(e, e)$?

**185.EX1 (12-2)**

Sean las funciones $f(x)=x^2+1$ y $g(x)=-x^2-2$ .Halle la ecuación de la recta tangente, simultáneamente tanto a la gráfica *f* como a la gráfica $g$ .

**186.EX1 (11-1)**

Si $f(x)=\frac{x}{x+1}$. Use la definición de derivada para encontrar $f'$(a).Además, halle la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f$ en el punto P (1, $f$(1)).

**187.EX1 (10-2)**

Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f (x) = -cotx – x en el punto x = $\pi/4$ .

**188.EX1 (09-2)**

Halle las ecuaciones de las rectas tangentes a las gráficas de las funciones $f(x)=\frac{2}{x-2}$ y $g(x)=2\sqrt{x-2},$ en el punto donde se interceptan dichas gráficas.

**189.EX1 (09-1)**

Usando la correspondiente definición, compruebe que la pendiente de la recta tangente en cada punto (a, f (a)) de la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, es negativa cuando a < 0.

**190.EX1 (09-1)**

Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=3x^2-2x+1$ en el punto de abscisa 2 de dicha gráfica, usando la definición.

**191.EX2 (09-1)**

Halle la función derivada de f indicando su dominio, usando la definición; y, luego, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=\sqrt{x^2-3x}$ en el punto P de abscisa – 1 de dicha gráfica.

**192.EX1 (06-2)**

Demostrar que existe al menos un punto P en la gráfica de la función $f$ (no necesita calcularlo), definida por $f(x)=x\cos x+x^2-4x$, $x\in[-\pi/2,\pi/2]$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en P sea paralela a la recta que pasa por los puntos A(–1, 6) y B(1, –2).

**193.EX1 (05-1)**

Para una función f, impar y derivable en R, la recta tangente a su gráfica en el punto P (-2, f(-2)) tiene por ecuación y = 3x + 7. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto Q(2, f(2)).

**194.EX1 (04-2)**

Suponiendo que una función $f$ cumple las siguientes condiciones:

**i.** $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \ \forall x_1, x_2 \in R.$

**ii.** $f(1) = 2,$

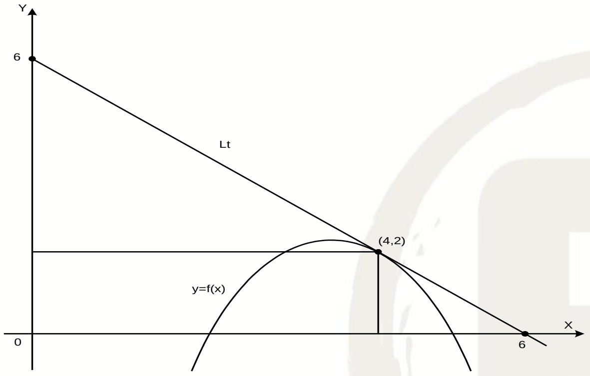
**iii.** $f'(0) = 2,$

Demostrar que $f(0) = 0.$

Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa 2.

**195.EX1 (04-1)**

El gráfico de una función definida por la regla de correspondencia $y = f(x)$ se muestra a continuación:




Si, además, de la recta $l_t$ es tangente al gráfico de $f$ en el punto (4, 2),

**a.1.** Encontrar la derivada de la función $f$ en 4.

**b.1** Si $g(x) = f(x-8)$, hallar $g'(12)$.

# DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA

**196.EX1 (17-2)**

Sea $f(x) = \arctan\left(e^x\right) + 2x, \ x \in \mathbb{R}$.

**a)** Determine la función $f'$ indicando su dominio.

**b)** Suponiendo que la función tiene inversa, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f^{-1}$ en el punto de abscisa $\frac{\pi}{4}$.

**c)** Sea $g$ una función continua en el intervalo $[0,1]$ tal que $g(0) = 1$ y $g(1) = 0$. Demuestre que la gráfica de la función $f$ interseca a la gráfica de $g$

**197.EX1 (17-1)**

Sea $h$ una función derivable con inversa derivable donde la pendiente de $h^{-1}$ en el punto $(\pi, 0)$ es $2$. Si $f(x) = \dfrac{h(sen(x))}{e^x}$, halle $f'(0)$.

**198.EX2 (14-1)**

Dada la función $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$$

**i.** Justifique la existencia de $f^{-1}$ y halle su dominio.

**ii.** Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f^{-1}$ en el punto (0,1).

**199.EX2 (14-0)**

Dada la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} arccos(x-1), & si\ 0 \le x \le 2 \\ -(x-2)^2 + 4, & si\ x > b \end{cases}$$

**i.** Halle el mayor valor posible de $b$ para que $f$ sea inyectiva.

**ii.** Con el valor hallado en (a), encuentre la regla de correspondencia de $f^{-1}$ indicando su dominio.

**iii.** Grafique $f$ y $f^{-1}$ en un mismo plano.

**iv.** Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f^{-1}$ en el punto $f(1) = \frac{\pi}{2}$

**200.EX2 (13-1)**

Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + x + 2$

**i.** Justifique la existencia de $f^{-1}$.

**ii.** Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f^{-1}$ en el punto (4,1).

**201.EX2 (12-2)**

Si $f(x)=\cos(2x)+3x$, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y=f^{-1}(x)$ en el punto (1,0).

**202.EX2 (11-1)**

Dada la función $f$ definida por

$$f(x)=\left(\frac{x^2}{2}-4\right)arcsen\left(\frac{x}{4}\right)+\frac{x\sqrt{16-x^2}}{4},$$

$0<x<4$. Halle la pendiente de la recta tangente al gráfico de $f^{-1}$ en el punto $\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3},2\right)$

**203.EX1 (09-2)**

Dada la función f definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) & , \quad si \ \ 1\le x<2 \\ \frac{2}{\pi}Arc\ sen(x) & , \quad si \ -1\le x<1\end{cases}.$$

**a)** Halle la función inversa de f.

**b)** Usando definición de derivada, compruebe que la función inversa de f, hallada en la parte a), no es derivable en 1.

# DERIVACIÓN IMPLÍCITA Y DERIVACIÓN PARAMÉTRICA

**204.EX1 (19-0)**

**Analice el valor de la verdad o falsedad de la siguiente proposición**

El punto $\left(2;\frac{1}{2}\right)$ es un punto de la gráfica de la curva $C: x^2y-2x+8y=2$ en el que la recta tangente es horizontal.

**205.EX1 (18-0)**

Considere la curva descrita por la ecuación

$$x^3+y^3-3x^2+3y^2=0.$$

Halle la ecuación de la recta normal a la curva en el punto $(1,-1)$.

**206.EX1 (18-0)**

Dada la curva en paramétricas

$$C:\begin{cases}x(t)=\ln\left(\tan\left(t/2\right)\right)+\cos\left(t\right) \\ y(t)=sen(t)\end{cases}, \quad 0<t<\pi$$

¿Existe $\frac{dy}{dx}$ para todos los valores de $t\in\left]0,\pi\right[$?

**207.EX1(17-2)**

Justificando rigurosamente cada uno de sus procesos, analice el valor de verdad de verdad o falsedad de la siguiente proposición.

La ecuación de la recta tangente a la curva $\sqrt{x^2+y^2}=\ln(x-y)+5$, en el punto $(4,3)$ es $\mathcal{L}: y=\frac{x}{8}+\frac{5}{2}$.

**208.EX1 (17-2)**

Considere la curva

$$\mathcal{C}_1:\begin{cases}x=(t+1)^{-1} \\ y=\dfrac{t}{t-1}\end{cases}, \quad -1<t<1.$$

**a)** Encuentre la ecuación de recta $\mathcal{L}$ que es tangente a la curva $\mathcal{C}_1$ en el punto $(1,0)$.

**b)** Si la recta $\mathcal{L}$ hallada en el ítem (a) resulta también una recta tangente a la circunferencia $\mathcal{C}_2$

$$\mathcal{C}_2:\begin{cases}x=r\cos(t) \\ y=r\sin(t)\end{cases}, \quad t\in[0,2\pi],$$

, calcule el radio $r$ de esta circunferencia.

**c)** Encuentre aquellos puntos de $\mathcal{C}_2$ en donde la recta tangente resulta paralela a $\mathcal{L}$.

**209.EX1 (17-1)**

Dada la curva $C:\begin{cases} x = t^3 + 2t \\ y = 2t \end{cases}, \text{t} \in [-1, 0]$. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva que pasa por el punto $(1,1)$.

**210.EX1 (15-0)**

Halle la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ definida implícitamente por la ecuación $e^y + xy = e$ en el punto de abscisa $x = 0$

**211.EX1 (14-2)**

Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ definida implícitamente por la ecuación

$sen\left(\dfrac{y}{x}\right) = \sqrt{\dfrac{xy}{2\pi}}$ en el punto $(2, \pi)$

**212.EX1 (13-0)**

Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $C: 4x^2 - y^2 + 4 = 0$ que pase por el punto $Q\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ (dos soluciones)

**213.EX2 (12-0)**

Sea $e$ la curva definida por

$$e:\begin{cases} x(t) = 2\cos^3\left(\dfrac{t}{2}\right) \\ y(t) = 2sen^3\left(\dfrac{t}{2}\right) \end{cases};\ t \in [0; 2\pi].$$

Halle la ecuación de recta tangente a la curva $e$ que tiene pendiente 1.

**214.EX2 (11-2)**

Si $\tan(xy) = \dfrac{x}{y}$ halle $\dfrac{dy}{dx}$

**215.EX2 (10-2)**

La curva definida por la ecuación $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ se llama lemniscata, cuya gráfica se muestra. Halle las coordenadas de los puntos sobre la curva en los cuales la tangente es horizontal.

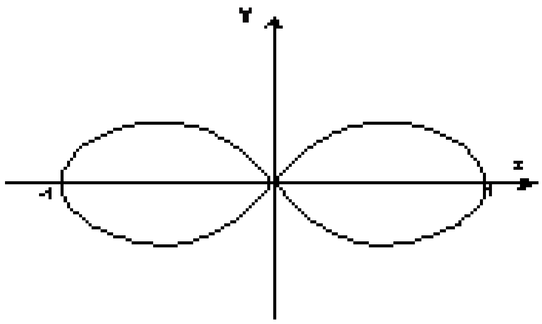



Figura 1: lemniscata

**216.EX2 (09-1)**

Demuestre que si $\alpha$ es el ángulo de inclinación de la recta tangente a la gráfica de la función y = f(x) en el punto $\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$, donde f está definida implícitamente por la ecuación $\dfrac{4xy+1}{\pi} + sen(2y) = 2x + \dfrac{1}{\pi}\tan(xy)$, entonces $\tan(\alpha) = \dfrac{3\pi}{4}$.

**217.EX2 (08-2)**

Halle las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, en los puntos de abscisa x = -1/8.

# RAZÓN DE CAMBIO

**218.EX1 (19-0)**

Un tanque de agua tiene la forma de un cono circular recto invertido de modo que la longitud de su altura es el doble de la de su diámetro. El agua ingresa al tanque a una rapidez constante y cuando se encuentra a una altura de 1m, la razón de cambio de la profundidad del agua es de 1cm por minuto. ¿Con qué rapidez ingresa el agua al tanque?

**219.EX1 (18-2)**

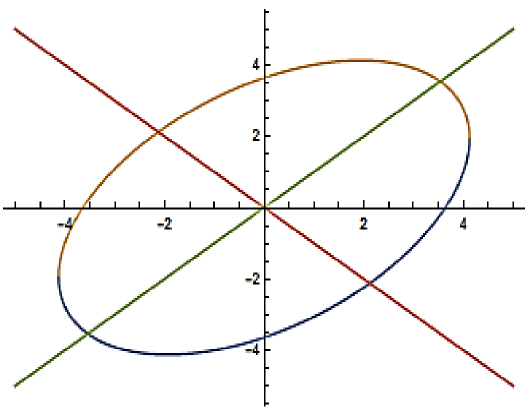
Considere el triángulo ABC de modo que el vértice A esta sobre el eje X, el vértice B se encuentra sobre la curva de ecuación $y = 2\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$, cuya abscisa aumenta a razón constante de dos unidades por segundo. Si el vértice C sobre el eje Y se elige de modo que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son perpendiculares, responder a que rapidez aumenta el área del triángulo ABC cuando A está a 2 unidades a la derecha del origen de coordenadas

**220.EX1 (18-1)**

En un sistema de coordenadas donde las distancias son medidas en metros, una partícula se desplaza siguiendo la elipse cuya ecuación es

$$\frac{(x+y)^2}{50} + \frac{(y-x)^2}{18} = 1$$

Determine la tasa de variación (razón de cambio) de la abscisa cuando la partícula pasa por el punto $\left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ y la ordenada disminuye a razón de 1 m/s (vea la figura 1)

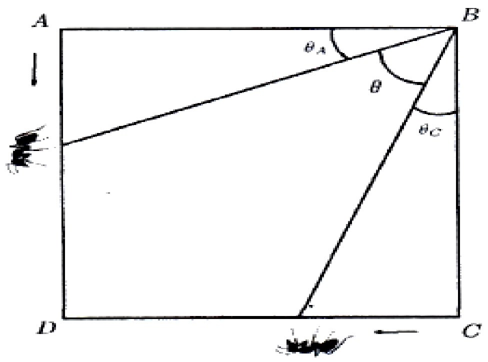



**221.EX1 (18-0)**

A un depósito cilíndrico de base circular y 5 m de radio, le está entrando agua a razón de 25 l/s. Calcule la rapidez a la que sube la superficie del agua.

**222.EX1 (17-2)**

Dos hormigas caminan por el borde de un cuadrado ABCD de 12 cm de lado. Una hormiga parte de A hacia D a 0,9 cm/s y la otra hormiga parte de C hacia D a razón de 0.5 cm/s. Halle la razón de cambio del ángulo $\theta$ formado por los segmentos que unen el vértice B del cuadrado con la posición de las hormigas cuando han pasado 10 segundos desde el inicio de sus recorridos. (Sugerencia: considere $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta_A - \theta_C$)




**223.EX1 (17-1)**

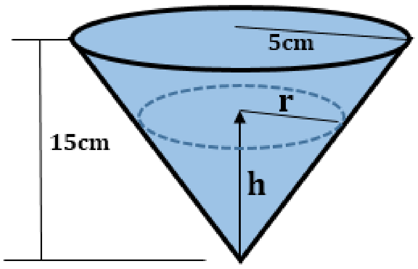
Una persona de $1,65\,m.$ de estatura se encuentra en una habitación que esta alumbrada por un foco colocado en el centro a $4,95\,m.$ de altura. Si en determinado instante la persona se aleja del centro a razón de $6\,m/s,$ halle a razón de cuantos metros por segundo crece su sombra en ese instante.

**224.EX1 (15-1)**

Un depósito en forma de cono invertido, tal como se muestra en la figura, está completamente lleno de agua, se practica un pequeño agujero en el vértice del cono lo que ocasiona que la altura del nivel de agua descienda a razón constante de 3 cm/segundo. Considere que el nivel de agua se mide del vértice hacia la superficie del agua.

**a)** determine a que razón cambia el radio de la sección del cono cuando la altura del nivel de agua es de 10cm.

**b)** determine a que razón cambia el volumen de agua en el cono, cuando la altura del cono es de 10cm.




**225.EX1 (14-2)**

Desde un edificio de 356 metros de altura se deja caer una piedra con velocidad inicial cero. La ecuación de movimiento de la piedra es $y(t) = -16t^2 + At + B$. Determine la velocidad de la piedra cuando llega al piso.

**226.EX2 (14-1)**

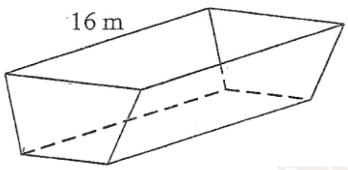
Un cuerpo M que parte del extremo A del diámetro $\overline{AB}$ de un patio circular de "$r$" metros de radio, se mueve con velocidad de 5m/s a lo largo de $\overline{AB}$. En el extremo C del diámetro $\overline{CD}$ perpendicular a $\overline{AB}$, se ubica una luz que proyecta la sombra de M sobre la pared circular. ¿Con que rapidez se mueve la sombra a lo largo de la pared cuando M se encuentra $\frac{r}{2}$ de A?

**227.EX2 (14-0)**

La sección transversal de un canal de 5 metros es un trapecio isósceles con base menor de 2 metros, base mayor de 3 metros y una altura de 2 metros. El agua corre por el canal a un ritmo de $1m^3/min$. ¿Con que rapidez aumenta el nivel del agua cuando ésta tiene 1 metro de profundidad?

**228.EX2 (13-2)**

Un deposito colocado horizontalmente tiene la forma de un prisma recto de 16 m de largo y las caras de sus extremos son trapecios isósceles de 4m y 7m respectivamente (vea la figura). Se vierte agua en el depósito a razón de 10 $\mathrm{m}^3$/min. ¿Con que rapidez se eleva el nivel del agua cuando esta tenga una altura de 2m?




**229.EX2 (13-1)**

Un rombo ABCD tiene 10cm de lado. Si los vértices opuestos B y D se mantienen en el eje Y mientras que los vértices A y C se separan a razón de 2cm/s manteniendo el rombo, calcule la rapidez con que cambia el área del rombo en el instante en que los vértices se han separado 16cm.

**230.EX1 (13-0)**

El periodo de oscilación de un péndulo (en segundos) se determina por la fórmula $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Donde "*l*" es la longitud del péndulo en centímetros y *g=981cm/s²* es la aceleración de la fuerza de gravedad. ¿Cuándo se debe alterar la longitud de un péndulo de *l=20cm*, para que el período T aumente 0,05 segundos?

**231.EX1 (13-0)**

En una parábola P: $y=x^2$ la cuerda $\overline{PQ}$ y las rectas tangentes a la gráfica de P y Q forman un trapecio, cuyas bases son los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$, siendo la longitud del segmento $\overline{RS}$ igual a 2 unidades. Si $\overline{PQ}$ siempre es ortogonal al eje focal de P y se acerca al vértice de la parábola con una velocidad de 2 unidades por segundo, ¿con qué velocidad varía el área del trapecio PQRS cuando la cuerda $\overline{PQ}$ está a 4 unidades de distancia del vértice de P?

**232.EX2 (13-0)**

Demuestre que de todos los triángulos isósceles inscritos en una circunferencia dada uno de ellos tiene perímetro máximo.

**233.EX2 (13-0)**

Una barca disminuye su movimiento a consecuencia de la resistencia del agua que es proporcional a la velocidad de la barca. La velocidad inicial de ésta es de 1,5m/s, al cabo de 4 segundos se reduce a 1m/s.

**a)** Halle la velocidad v(t) de la barca en un tiempo $t>0$

**b)** ¿Qué tiempo habrá transcurrido cuando v(t)=1cm/s?

**c)** ¿Qué distancia recorrerá la barca hasta detenerse?

**234.EX2 (12-2)**

Una partícula P sigue la trayectoria de la curva $y=\arctan(x)$, acercándose al origen de coordenadas y siendo la rapidez con la que cambia su ordenada constante e igual a 2cm/s.

**a)** Calcule la rapidez con la que cambia la abscisa de P, cuando la ordenada de la partícula es $-\frac{\pi}{4}cm$.

**b)** Halle la rapidez con que cambia el área del triángulo OQP, en el instante en que la ordenada es $-\frac{\pi}{4}cm$, si O es el origen de coordenadas y Q es la proyección de P sobre el eje X.

**235.EX2 (12-0)**

Un foco luminoso está colocado en un poste a una altura de H metros sobre el nivel del suelo. Una persona de h metros de altura (h < H ambas constantes) camina en dirección perpendicular al poste, alejándose de este a razón de *u* m/s.

**i.** Calcular la rapidez con que se mueve el extremo de la sombra de dicha persona, en función de u.

**ii.** ¿Cuál es esa rapidez si el foco luminoso está situado a 4m sobre el nivel del suelo, la persona mide 1,75m de altura y camina a una razón de 1m/s?

**236.EX2 (11-2)**

Considere un ΔAOC, tal que O es el origen de coordenadas, A y C son puntos sobre la parábola $y=\frac{1}{4}x^2+1$, el segmento $\overline{AC}$ es paralelo al eje X y $\overline{OH}$ es una de las alturas de dicho triangulo. Si el punto H se mueve hacia arriba a una tasa constante de 2 unidades/seg, ubicándose al inicio en (0; 1). ¿Cuál es la velocidad con que está aumentando el área del ΔAOC, cuando t = 4,5s?

**237.EX2 (11-1)**

Dos motocicletas que viajan de noche en dirección opuesta por una carretera recta de doble vía, están aproximándose la una a la otra. Cada motocicleta va por el centro de su respectivo carril y los centros de los dos carriles están a 10 metros de distancia uno del otro. La motocicleta que viaja hacia el oeste se desplaza a razón de 25m/s, la motocicleta que viaja hacia el este se desplaza a razón de 30m/s, y la luz de su faro proyecta la sombra de la otra motocicleta sobre una cerca que bordea la carretera, a 20m del centro del carril contrario. ¿Con qué rapidez se mueve la sombra que proyecta sobre la cerca la motocicleta que viaja en dirección oeste?

**238.EX2 (10-2)**

Un caballo de paso recorre a una velocidad constante de 20 km/h a lo largo de una circunferencia en cuyo centro se halla un farol. En el punto inicial de su recorrido está ubicado una pared que sigue la dirección de la tangente. ¿A qué velocidad se desplaza la sombra del caballo a lo largo de la pared en el momento en que éste ha recorrido 1/8 de la circunferencia desde el punto inicial?

**239.EX2(10-1)**

En el golfo de México una fuga submarina de petróleo ha ocasionado en la superficie del mar, una mancha circular de color negra. Considere esta mancha como la base de un cono invertido cuyo vértice es el punto de fuga del petróleo a 50 km de profundidad. Si cada día la fuga vierte $200\pi km^3$ de petróleo, calcule la velocidad diaria a la que crece el radio de la macha, cuando éste es de 10 km.

**240.EX2 (10-1)**

Un globo se eleva verticalmente siguiendo una trayectoria recta a una razón constante de 0,4 m/s. Justo cuando el globo está a 26 metros de altura, un ciclista que se mueve a una razón constante de 4 m/s pasa debajo del globo. ¿Con qué rapidez crece la distancia entre el globo y el ciclista, 10 segundos después?

**241.EX2 (09-2)**

Un vaso para envasar jugos tiene la forma de un tronco de cono circular recto de 15 cm de altura, radio superior de 4 cm y radio inferior de 2 cm. El vaso, que está lleno de un cierto jugo, tiene un agujero en la base inferior que ocasiona una fuga del líquido a razón de $100cm^3/h$. ¿A qué velocidad está variando la profundidad del líquido en el instante en que la profundidad es de 10 cm?

Sugerencia: Volumen de un tronco de cono de altura h y de radios R y r, es: $V=\frac{1}{3}\pi h\,(R^2+r^2+Rr)$.

**242.EX2 (09-1)**

La rapidez (velocidad) con que aumenta el área del círculo formado por una onda, cuyo radio de 3 m aumenta a una rapidez (velocidad) de 50 cm/s; que resulta de arrojar una piedra a un estanque de aguas tranquilas, formándose ondas circulares concéntricas cuyos radios aumentan al paso del tiempo.

**243.EX2 (09-1)**

La razón con que cambia el radio de una esfera respecto al cambio de su volumen, cuando el volumen de dicha esfera es de 36$\pi$cm3.

**244.EX2 (08-1)**

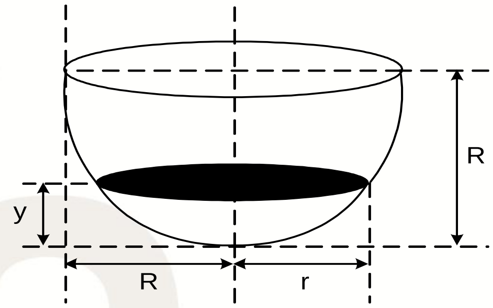
En un depósito de forma hemisférica (media esfera) con R = 13 metros de radio, se llena de agua a razón de 6 m$^3$/min.

Sabiendo que el volumen de agua almacenada en el depósito es $V=\frac{\pi}{3}y^2(3R-y)m^3$, , cuando su profundidad es y metros.

**a)** ¿Con que razón cambia el nivel del líquido cuando el agua tiene 8 m de profundidad?

**b)** ¿Cuál es el radio r de la superficie del agua cuando su profundidad es y metros?

**c)** ¿Con que razón cambia el radio r cuando el agua tiene 8 m de profundidad?




**245.EX2 (08-2)**

El área de una corona circular, de radios interior y exterior variables, es constante e igual a $8\pi cm^2$ y el área del círculo exterior varía a razón de $10\pi cm^2/s$. Calcule la velocidad con que varía la longitud de la circunferencia del círculo interior cuando su área es $9\pi cm^2$.

**246.EX2 (07-1)**

Una persona de 6 pies de estatura camina hacia un edificio a la velocidad de 5 pies/s. Si en el piso se encuentra una lámpara a 50 pies del edificio, ¿qué tan rápido se acorta la sombra que la persona proyecta sobre el edificio cuando él está a 30 pies de éste.

**247.EX2 (06-2)**

Hugo y Luis caminan por calles distintas, rectas y que se cruzan perpendicularmente. Hugo camina hacia el cruce de las calles a razón de 2 m/s y Luis se aleja del cruce a razón de 1 m/s. Cuando Hugo está a 15 metros y Luis está a 20 metros del cruce de las calles, calcular.

**a)** La razón con que cambia la distancia que hay entre ellos, y

**b)** La razón con que cambia el ángulo $\theta$, que forma la calle donde camina Luis y la recta que determinan las posiciones de Hugo y Luis.

# APROXIMACIÓN LINEAL

**248.EX1 (19-1)**

**a)** Use la linealización de $f(x)=\ln(1+x)$ en torno al punto 0 para aproximar $\ln(1,05)$

**b)** Demuestre que para todo $x>0$ se cumple que

$$x-\frac{x^2}{2}<In(1+x)<x$$

**c)** Demuestre que el error cometido en la aproximación del ítem a) es menor a $\dfrac{(0,05)^2}{2}$

**249.EX1 (19-0)**

Sea $h:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}$ la función dada por

$$h(x)=-e^{\frac{1}{1+x}}$$

**a)** Estime $h(0,1)$, usando aproximación lineal.

**b)** Si $x_0$ es la solución de la ecuación $h(x)+\dfrac{1}{\pi}=0$. Demuestre que la aproximación lineal de $h$ alrededor de $x_0$ es

$$h(x)\approx-\frac{1}{\pi}+\frac{(\ln(\pi))^2}{\pi}\left(x+1+\frac{1}{\ln(\pi)}\right)$$

**250.EX1 (18-2)**

Sea $g:]0,\infty[\to\mathbb{R}$ la función dada por $g(x)=\dfrac{1}{2^{x^2}}$

**a)** Si $x_0$ es la solución de la ecuación $g(x)-\dfrac{\ln(2)}{2^4}=0$, halle la aproximación lineal a g alrededor de $x_0$

**b)** Si $x_1$ satisface $g(x)=\beta$, donde

$$\beta=\frac{\ln(2)}{2^4}+\frac{1}{2^4},$$

halle el valor aproximado de $x_1$

**251.EX1 (17-1)**

Dada la función $f(x)=\sqrt{x^2+x},$ usando diferenciales halle la expresión lineal $L(x)$ que se aproxima a $f(x),$ alrededor de $a=2;$ y aproxime el valor de $f(2,16).$

**252.EX2 (14-0)**

Halle el valor aproximado de $\sqrt{\dfrac{1-(0,1)}{1+(0,1)}}$ usando diferenciales

**253.EX2 (11-2)**

Aproxime $f\,'(-\frac{1}{4})$, si $f(x)=\arctan(sen(x))$

**254.EX2 (10-1)**

Determine un valor aproximado de $y=e^{-\sin(2x)}$, , cuando $x=\dfrac{9\pi}{8}$.

**255.EX2 (08-1)**

Halle el cambio aproximado de la función

$$P(t)=1-\left(\frac{300}{300+t}\right)^3$$

, cuando t cambia de 300 a 301, usando diferenciales.

# MISCELÁNEA

**256.EX1 (16-2)**

Analice la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

**a)** Sean $f$ y $g$ dos funciones definidas en todos los números reales. Si $f$ y $g$ son funciones inyectivas, entonces la función $f+g$ también es inyectiva.

**b)** Si $f$ es una función continua en $a$ entonces $f$ es derivable en $a$.

**c)** Si $f$ y $g$ son dos funciones definidas en un intervalo que contiene al número $a$, entonces $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(g(a))$.

**d)** La gráfica de la función $f(x) = ln(1+e^{-x})\arctan\left(\frac{x}{x^2+sen^3x}\right)$ tiene asíntota horizontal cuando $x\to+\infty$.

**e)** La función $f(x) = arccosx - x$ es decreciente en el intervalo $[0,1]$.

**f)** La ecuación $arccosx = x$ posee una única solución real en el intervalo $[0,1]$.

**257.EX1 (16-1)**

Analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta.

**a)** Si $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = L\epsilon R$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

**b)** Dadas las funciones

$$f(x) = \sqrt{4-x^2} \quad y \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, x>2 \\ \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}, 0<x<2 \end{cases}$$

Entonces se cumple que $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

**c)** Si $f$ es una función continua en 0 tal que $Dom(f) = R$ y $f(a+b) = f(a)f(b), \forall a,b\epsilon R$ entonces se cumple que $f$ es continua en R.

**d)** Toda recta que corta a la gráfica de una función en un solo punto es recta tangente a dicha gráfica en ese punto.

**e)** La función $f(x) = \begin{cases} x^3\cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ es continua y derivable en 0.

**258.EX1 (14-0)**

Justificando sus procesos, analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

**a)** Si $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = 10$ y $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = 7$, entonces $\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = \frac{4}{51}$.

**b)** La grafica de $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x^2}$ tiene una única asíntota.

**c)** Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función tal que $|f(x)|\leq|x|$ para todo x $\in\,]-1,1[$, entonces f es continua en 0.

**d)** Si las funciones f y g definidas sobre $\mathbb{R}$ son discontinuas en a, entonces la función f.g es discontinua en a.

**259.EX1 (13-1)**

Justificando su procedimiento, analice la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

**i.** $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 10$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

**ii.** Si $f$ es una función definida para todo $x\in\mathbb{R}$ y la recta $\mathcal{L}$: $y = x+1$ es asíntota oblicua izquierda de su gráfica, entonces $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

**260.EX1 (12-0)**

Analizar la verdad o falsedad de cada una de las siguientes afirmaciones, justificando sus respuestas:

**a)** Si $\acute{l}\acute{i}m_{x\to 2} f(x) = 3$, entonces existe δ> 0 tal que:

$$0<|x-2|<\delta \to f(x) > \frac{12}{5}$$

**b)** Dada *f* definida por

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\arccos(2x-1);\ x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$$, entonces Ran(f)=[0;4]

**c)** Si f es creciente en $\mathbb{R}$, entonces la función g(x)=f(3-2x)es decreciente en $\mathbb{R}$

**d)** La gráfica de $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}$ tiene una única asíntota.

**261.EX1 (08-1)**

La nota N(x) que obtendrá un estudiante en un examen depende del número x, de horas que haya dedicado a su preparación, y está dada por la expresión:

$$N(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3}, & si\ \ 0\leq x\leq 15 \\ \frac{4x}{0,2x+3}, & si\ \ x>15 \end{cases}.$$

**a)** Muestre que a más horas de preparación para el examen, la nota también será mayor; y las notas a obtenerse son procesos continuos del número de horas dedicados a la preparación para el examen.

**b)** Halle el menor tiempo de preparación para obtener una nota aprobatoria (10,5)

**c)** Muestre que la nota a obtenerse nunca podrá ser mayor de 20.

**262.EX1 (10-2)**

Justificando sus respuestas, analice la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. Si $f'(x_0) = -2$ entonces no existe el siguiente límite. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0-3h)-f(x_0)}{2h}$.
2. Si f(x) = $\sqrt{2-x}$, entonces $\lim\limits_{x\to -2} f^{-1}(x) = -2$.

**263.EX1 (10-2)**

a) Sea la función

$$f(x) = arc\,sen\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - 2\pi,\ con\, x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[.$$

Calcule el siguiente límite, si existe. $\lim\limits_{x\to -2\pi} \dfrac{x+2\pi}{f^{-1}(x)}$.

b) Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función continua en $\mathbb{R}$ tal que si: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x+2)-f(x)+2}{sen(x)} = 1$, , pruebe que f(2) = f(0) – 2

**264.EX1 (09-1)**

Justificando sus procesos, analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ existen, entonces la gráfica de h(x) = f(x) + g(x) tiene una asíntota horizontal por la derecha.

b) La ecuación 2x3 + $\sqrt{\pi-1}\,(x^2-1)=0$ tiene al menos una solución real positiva.

c) La gráfica de la función $f(x)=\sqrt[3]{x^3+2x}$ tiene asíntota oblicua.

d) Si $f(x) = \dfrac{5-x}{\sqrt{x^2-25}}$, entonces

$\lim\limits_{x\to 5^+} (f(x)) = \lim\limits_{x\to -5^-} (f(x))$.

**265.EX1 (08-2)**

Para funciones dadas;

a) Justificando sus procesos, analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

i. La recta x + 2 = 0 es una asíntota de la función $f(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x^2-4}$.

ii. Si $|g(x)| \le 1$, para todo x ∈ R y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\bullet g(x)) = 0$.

iii. La función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{Sen(x)}, & si\ x \ne 0 \\ 0, & si\ x = 0 \end{cases}$, , tiene una discontinuidad removible (o salvable o evitable) en 0.

b) Si $f(x) = \dfrac{4x^2-1}{Arc\,Sen(1-2x)}$, calcule $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$.

**266.EX1 (08-1)**

Analice la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones, justificando sus respuestas:

a) Si $\lim\limits_{x\to a^-} g(x) = c$ con c > 0, y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = 0$ ; entonces la recta x = a es una asíntota vertical de la gráfica de la función $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

b) Si f es una función par en Dom(f) = R y $f(x) = \sqrt{4x^2-8x+9}$ para x ≤ 0; entonces las rectas y = -2x + 2 e y = 2x + 2 son asíntotas del gráfico de f.

c) La función h(x) = sen(ln (4 – x)) es continua en el intervalo $]-\infty, 4[$.

**267.EX1 (07-2)**

En un punto de discontinuidad a de la función f, donde $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ existen en R; se define el salto de f en a como el número real $S_{(f,a)} = \left|\lim\limits_{x\to a^+} f(x) - \lim\limits_{x\to a^-} f(x)\right|$. .

Según esto:

a) Calcule los saltos de f en cada punto de discontinuidad de f, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3-5x+1, & si\quad x \le -1 \\ \dfrac{x^3+1}{x^2-1}, & si\quad -1 < x < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x-2}{x+2}, & si\quad x > \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

b) Halle α y β en R, para que el salto de f en a = 2 sea 4; donde: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+\alpha}{x-2}, & x < 2 \\ \beta x^2 + 4, & 2 < x \end{cases}$.

**268.EX1 (07-2)**

Justificando sus respuestas, analice la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Si f y g son funciones impares, entonces la función producto fg es también una función impar.

b) La función f(x) = x5 – 16 x + 6, tiene por lo menos tres ceros (tres valores para c tal que f(c) = 0) en el intervalo [-3, 2]

c) La función $h(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2+4}}$ es continua en el intervalo [-2, 5].

d) La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x^3-4x+1}{3x^2+4x-1}$ tiene una asíntota oblicua.

**269.EX1 (07-1)**

Analizar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) La gráfica de $f$ definida por $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{\sqrt{9-x^2}}$ tiene dos asíntotas verticales.

b) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ no existe.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(2x-1)}{2x-1}=1.$

d) Si $L=3/5$ , entonces la función definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{5x} & ;\ \text{si}\quad x\neq 0 \\ L & ;\ \text{si}\quad x=0 \end{cases}$ es continua en todo su dominio.

**270.EX1(06-2)**

a) Si $\underset{x\to a}{lím}\,|f(x)|$ existe, entonces también existe $\underset{x\to a}{lím}$ $f(x)$.

b) La función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(x+1)^2-1}{x} & si\ \ x\neq 0 \\ 0 & si\ \ x=0 \end{cases}$, tiene una discontinuidad salvable (removible) en cero.

c) Si $f$ y g son funciones continuas en [2, 3] tales que $f(2)<g(2)$ , $f(3)>g(3)$ y $h(x)=f(x)-g(x)$, para todo x en [2, 3], entonces existe c en ]2, 3[ tal que h(c) = 0.

d) Si $f$ es una función derivable en x = a y $f(a)>0$, entonces $f'(a)>0$.

**271.EX1 (06-1)**

Analizar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justificar su respuesta.

a) Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:[0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ son funciones definidas por $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x}$ , entonces $f\circ g=g\circ f$.

b) Las rectas $x=-2$ y $x=2$ son asíntotas verticales de la gráfica de la función $f$ definida por $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x^2-4}$.

c) Si $f$: R →R es tal que $\underset{x\to x_0}{lím}|f(x)|=|f(x_0)|$, entonces $f$ es continua en $X_0$.

d) Si las funciones $f$ y g definidas sobre R son discontinuas en x0 , la función producto $fg$ es discontinua en x0.

**272.EX1 (05-2)**

Analizar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justificar su respuesta.

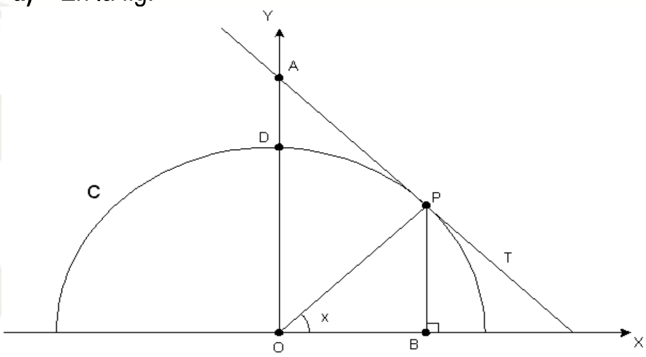
a) Si $\underset{x\to+\infty}{lím} f(x)=0$ entonces $\underset{x\to+\infty}{lím} f(x)\,sen\dfrac{1}{x}=0$.

b) Si para todo $M<0$ existe $\delta>0$ tal que $x\in Dom(f)$ y $a<x<a+\delta$ implica que $f(x)<M$, entonces $\underset{x\to a^+}{lím} f(x)=-\infty$.

c) La función $f(t)=\begin{cases} \dfrac{sen(t^2)}{t} & si\ \ t\neq 0 \\ 1 & si\ \ t=0 \end{cases}$ tiene discontinuidad esencial en 0.

**273.EX1 (05-2)**

a) En la fig:




C es la circunferencia de radio 1 y centro en el origen de coordenadas. La recta T es tangente a C en el punto P y $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. Si la recta T corta al eje Y en A y la proyección de P sobre el eje X es el punto B, calcular $\underset{x\to\frac{\pi}{2}^-}{lím}\dfrac{d(A,D)}{d(0,B)}$.

**274.EX1 (05-1)**

Responder, justificando su respuesta, con verdadero o falso, cada uno de los siguientes enunciados. Si el enunciado es verdadero, debe presentar un argumento que lo justifique; si es falso basta mostrar una gráfica o un contraejemplo

a) Si $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x),\ \dfrac{1}{2}\leq x\leq 4.$

y $f(x)=\dfrac{1}{2}g(x-2)+1$, entonces el rango de f es el intervalo $\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$.

b) Si $f(x)=\sqrt{-x}$ , entonces $\lim\limits_{x\to 2} f^{-1}(x)=4.$

c) La ecuación $x-1+\sin x=\cos x-\sqrt{1+x}$ , admite al menos una raíz en ] o, π/2 [

**275.EX1 (03-2)**

Analizar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justificar su respuesta.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+7x}-x\right)=0.$

b) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe y $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x).g(x)\right)$ existe $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe,

c) $\lim\limits_{y\to 0} f(y)=\lim\limits_{x\to a} f(x-a).$

**276.EX1 (03-1)**

Analizar, justificando su desarrollo, la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones

a) Si $f$ es una función definida en ]a,b[ y el $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty$, entonces $f$ es creciente en dicho intervalo.

b) Si una función $f$ es inyectiva en su dominio, entonces $f$ es decreciente en su dominio.

c) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x^2)$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe.

d) Si $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ existe y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe.

**277.EX1 (03-1)**

a) Si $f(x)=\dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{dx+e}$ con $a>0$ y $d\neq 0$, hallar: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Calcular $\lim\limits_{x\to p}\dfrac{sen\left(x^2-p^2\right)}{x-p}$

c) Enunciar el Teorema del Emparedado, Sandwich o Estricción. Empleando dicho teorema, evaluar el siguiente límite $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

**278.EX1 (02-2)**

a) Si $f(x)=3+2x-x^2$ , $x\leq 0$.

Encontrar las funciones: $f^{-1}$ y $(f\circ f)$.

b) Definir:

i. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

ii. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=L$

**279.EX1(02-2)**

a) Si $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2} & , \quad x\geq 3\\ \sqrt{2x-1} & , \quad \dfrac{1}{2}<x<3\end{cases}$ y

$g(x)=\dfrac{2x+1}{x}$ , $x\geq\dfrac{1}{2}$.

Hallar la función: $(g\circ f)$.

b) Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{2/x}$.

**280.EX1(01-2)**

Determine el valor de V o F (justificando su respuesta) de cada una de las siguientes afirmaciones:

a) Si $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5,$ existe un número real $\delta>0$ tal que $si\ x\in Dom(f)\ y\ 0<|x-2|<\delta,$ Entonces $f(x)>0,2.$

b) Si

$$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=2 \ y$$
$$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=1,$$
$$entonces\ \lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\ g(x)\right)=\frac{3}{4}.$$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x}=2.$

**281.EX1 (01-1)**

Analice, justificando su desarrollo, la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Si la función $f(x)$ está definida en el intervalo $]a,b[\ y\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$, entonces, $f$. Es decreciente en $]a,b[$ .

b) Para funciones $f\ y\ g$ , si el producto $f(x)\,g(x)$ es continua en a, $g(x)$ es continua en a, y $g(a)\neq 0,$ entonces $f(x)$ es continua en a.

c) Si la función $f(x)$ es acotada en $[a,b]$, entonces $f(x)$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo en $[a,b]$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{|sen(x)|}{x}\right)=1.$


COMO DESCARGAR
EL MATERIAL COMPLETO
1. Web:
Ingresa a reservas.lafaku.com
2. Documentos:
Selecciona el curso del cual quieres descargar el material.
3. Descarga:
Selecciona la PC o EX y descarga el material de Faku.
No olvides separar tus horarios por nuestra intranet.
WWW.LAFAKU.COM Llámanos al (01) 564 0047 •