

Memória Longa em Retornos Financeiros

Ana Cláudia Festucci de Herval
Orientadora: Thelma Sáfadi

Universidade Federal de Lavras - UFLA

10 de abril de 2019

- 1 Contextualização
 - Retornos Financeiros
 - Volatilidade
- 2 Modelos com Memória Longa
 - Testes para Memória Longa
 - Modelos para ML
 - Modelos ARFIMA
 - Modelos FIGARCH
- 3 Exemplos de aplicação
- 4 Referências

Contextualização

- Um dos objetivos em finanças é a avaliação de riscos de uma carteira de ativos financeiros. O risco é frequentemente medido em termos de variações de preços dos ativos;
- É preferível trabalhar com retornos pois são livres de escala e tem propriedades estatísticas mais interessantes, como estacionariedade e ergodicidade.

Contextualização

- Um dos objetivos em finanças é a avaliação de riscos de uma carteira de ativos financeiros. O risco é frequentemente medido em termos de variações de preços dos ativos;
- É preferível trabalhar com retornos pois são livres de escala e tem propriedades estatísticas mais interessantes, como estacionariedade e ergodicidade.

Retornos

- Seja P_t o preço de um ativo no instante t ;
- A variação de preços então é dada por $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$;
- A variação relativa, ou retorno líquido simples ou taxa de retorno, é $R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}}$;
- Denotando $p_t = \log P_t$, então o retorno composto continuamente ou log-retorno, é

$$r_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}} = \log(1 + R_t) = p_t - p_{t-1}$$

.

** Retornos igualmente espaçados - diários, semanais, por exemplo.

Retornos

- Seja P_t o preço de um ativo no instante t ;
- A variação de preços então é dada por $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$;
- A variação relativa, ou retorno líquido simples ou taxa de retorno, é $R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}}$;
- Denotando $p_t = \log P_t$, então o retorno composto continuamente ou log-retorno, é

$$r_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}} = \log(1 + R_t) = p_t - p_{t-1}$$

.

** Retornos igualmente espaçados - diários, semanais, por exemplo.

Retornos

- Seja P_t o preço de um ativo no instante t ;
- A variação de preços então é dada por $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$;
- A variação relativa, ou retorno líquido simples ou taxa de retorno, é $R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}}$;
- Denotando $p_t = \log P_t$, então o retorno composto continuamente ou log-retorno, é

$$r_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}} = \log(1 + R_t) = p_t - p_{t-1}$$

.

** Retornos igualmente espaçados - diários, semanais, por exemplo.

Retornos

- Seja P_t o preço de um ativo no instante t ;
- A variação de preços então é dada por $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$;
- A variação relativa, ou retorno líquido simples ou taxa de retorno, é $R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}}$;
- Denotando $p_t = \log P_t$, então o retorno composto continuamente ou log-retorno, é

$$r_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}} = \log(1 + R_t) = p_t - p_{t-1}$$

.

** Retornos igualmente espaçados - diários, semanais, por exemplo.

Retornos

- Seja P_t o preço de um ativo no instante t ;
- A variação de preços então é dada por $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$;
- A variação relativa, ou retorno líquido simples ou taxa de retorno, é $R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}}$;
- Denotando $p_t = \log P_t$, então o retorno composto continuamente ou log-retorno, é

$$r_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}} = \log(1 + R_t) = p_t - p_{t-1}$$

.

** Retornos igualmente espaçados - diários, semanais, por exemplo.

Retornos

Séries econômicas e financeiras apresentam características comuns a outras séries temporais, como

- tendência;
- sazonalidade;
- pontos atípicos;
- heteroscedasticidade condicional;
- não linearidade.

Retornos

Séries econômicas e financeiras apresentam características comuns a outras séries temporais, como

- tendência;
- sazonalidade;
- pontos atípicos;
- heteroscedasticidade condicional;
- não linearidade.

Retornos

Séries econômicas e financeiras apresentam características comuns a outras séries temporais, como

- tendência;
- sazonalidade;
- pontos atípicos;
- heteroscedasticidade condicional;
- não linearidade.

Retornos

Séries econômicas e financeiras apresentam características comuns a outras séries temporais, como

- tendência;
- sazonalidade;
- pontos atípicos;
- heteroscedasticidade condicional;
- não linearidade.

Retornos

Séries econômicas e financeiras apresentam características comuns a outras séries temporais, como

- tendência;
- sazonalidade;
- pontos atípicos;
- heteroscedasticidade condicional;
- não linearidade.

Retornos

Séries econômicas e financeiras apresentam características comuns a outras séries temporais, como

- tendência;
- sazonalidade;
- pontos atípicos;
- heteroscedasticidade condicional;
- não linearidade.

Retornos

Já os retornos financeiros

- raramente apresentam tendência e sazonalidade;
- geralmente não são autocorrelacionados;
- os quadrados dos retornos são autocorrelacionados;
- séries de retornos apresentam agrupamentos de volatilidade;
- a distribuição (incondicional) dos retornos apresentam caudas mais pesadas do que uma distribuição normal (simétrica e leptocúrtica);
- algumas séries de retornos são não lineares (responde de maneira diferente a choques positivos e negativos).

Retornos

Já os retornos financeiros

- raramente apresentam tendência e sazonalidade;
- geralmente não são autocorrelacionados;
- os quadrados dos retornos são autocorrelacionados;
- séries de retornos apresentam agrupamentos de volatilidade;
- a distribuição (incondicional) dos retornos apresentam caudas mais pesadas do que uma distribuição normal (simétrica e leptocúrtica);
- algumas séries de retornos são não lineares (responde de maneira diferente a choques positivos e negativos).

Retornos

Já os retornos financeiros

- raramente apresentam tendência e sazonalidade;
- geralmente não são autocorrelacionados;
- os quadrados dos retornos são autocorrelacionados;
- séries de retornos apresentam agrupamentos de volatilidade;
- a distribuição (incondicional) dos retornos apresentam caudas mais pesadas do que uma distribuição normal (simétrica e leptocúrtica);
- algumas séries de retornos são não lineares (responde de maneira diferente a choques positivos e negativos).

Retornos

Já os retornos financeiros

- raramente apresentam tendência e sazonalidade;
- geralmente não são autocorrelacionados;
- os quadrados dos retornos são autocorrelacionados;
- séries de retornos apresentam agrupamentos de volatilidade;
- a distribuição (incondicional) dos retornos apresentam caudas mais pesadas do que uma distribuição normal (simétrica e leptocúrtica);
- algumas séries de retornos são não lineares (responde de maneira diferente a choques positivos e negativos).

Retornos

Já os retornos financeiros

- raramente apresentam tendência e sazonalidade;
- geralmente não são autocorrelacionados;
- os quadrados dos retornos são autocorrelacionados;
- séries de retornos apresentam agrupamentos de volatilidade;
- a distribuição (incondicional) dos retornos apresentam caudas mais pesadas do que uma distribuição normal (simétrica e leptocúrtica);
- algumas séries de retornos são não lineares (responde de maneira diferente a choques positivos e negativos).

Retornos

Já os retornos financeiros

- raramente apresentam tendência e sazonalidade;
- geralmente não são autocorrelacionados;
- os quadrados dos retornos são autocorrelacionados;
- séries de retornos apresentam agrupamentos de volatilidade;
- a distribuição (incondicional) dos retornos apresentam caudas mais pesadas do que uma distribuição normal (simétrica e leptocúrtica);
- algumas séries de retornos são não lineares (responde de maneira diferente a choques positivos e negativos).

Retornos

Já os retornos financeiros

- raramente apresentam tendência e sazonalidade;
- geralmente não são autocorrelacionados;
- os quadrados dos retornos são autocorrelacionados;
- séries de retornos apresentam agrupamentos de volatilidade;
- a distribuição (incondicional) dos retornos apresentam caudas mais pesadas do que uma distribuição normal (simétrica e leptocúrtica);
- algumas séries de retornos são não lineares (responde de maneira diferente a choques positivos e negativos).

Volatilidade

- Em toda atividade financeira (gestão de risco, seleção de carteiras, etc.) há a necessidade de se prever volatilidade;
- A volatilidade é uma medida de variabilidade de preços de ativos, que normalmente é difícil de se prever;
- Usualmente definida como o desvio padrão condicional de um retorno, não é medida diretamente, é uma variável não observada.

Volatilidade

- Em toda atividade financeira (gestão de risco, seleção de carteiras, etc.) há a necessidade de se prever volatilidade;
- A volatilidade é uma medida de variabilidade de preços de ativos, que normalmente é difícil de se prever;
- Usualmente definida como o desvio padrão condicional de um retorno, não é medida diretamente, é uma variável não observada.

Volatilidade

- Em toda atividade financeira (gestão de risco, seleção de carteiras, etc.) há a necessidade de se prever volatilidade;
- A volatilidade é uma medida de variabilidade de preços de ativos, que normalmente é difícil de se prever;
- Usualmente definida como o desvio padrão condicional de um retorno, não é medida diretamente, é uma variável não observada.

Modelo geral para a Volatilidade

Um modelo típico para a volatilidade é

$$r_t = \mu_t + \sqrt{h_t} \varepsilon_t$$

onde

$$\mu_t = E(r_t | \mathcal{F}_{t-1}) = E_{t-1}(r_t),$$

$$h_t = E((r_t - \mu_t)^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = E_{t-1}((r_t - \mu_t)^2)$$

e ε_t supostamente são i.i.d com média 0 e variância 1 (geralmente, supõe-se normal ou t-Student).

Modelo geral para a Volatilidade

Um modelo típico para a volatilidade é

$$r_t = \mu_t + \sqrt{h_t}\varepsilon_t$$

onde

$$\mu_t = E(r_t|\mathcal{F}_{t-1}) = E_{t-1}(r_t),$$

$$h_t = E((r_t - \mu_t)^2|\mathcal{F}_{t-1}) = E_{t-1}((r_t - \mu_t)^2)$$

e ε_t supostamente são i.i.d com média 0 e variância 1 (geralmente, supõe-se normal ou t-Student).

Modelo geral para a Volatilidade

Um modelo típico para a volatilidade é

$$r_t = \mu_t + \sqrt{h_t}\varepsilon_t$$

onde

$$\mu_t = E(r_t|\mathcal{F}_{t-1}) = E_{t-1}(r_t),$$

$$h_t = E((r_t - \mu_t)^2|\mathcal{F}_{t-1}) = E_{t-1}((r_t - \mu_t)^2)$$

e ε_t supostamente são i.i.d com média 0 e variância 1
(geralmente, supõe-se normal ou t-Student).

Modelo geral para a Volatilidade

Um modelo típico para a volatilidade é

$$r_t = \mu_t + \sqrt{h_t}\varepsilon_t$$

onde

$$\mu_t = E(r_t|\mathcal{F}_{t-1}) = E_{t-1}(r_t),$$

$$h_t = E((r_t - \mu_t)^2|\mathcal{F}_{t-1}) = E_{t-1}((r_t - \mu_t)^2)$$

e ε_t supostamente são i.i.d com média 0 e variância 1 (geralmente, supõe-se normal ou t-Student).

Surgimento do conceito de Memória Longa

- Surgiram na década de 50, em estudos empíricos de Climatologia e Hidrologia;
- Hurst (1951,1957), Mandelbrot e Wallis (1968) e McLeod e Hipel (1978) notaram o fenômeno de ML em estudos de Hidrologia;
- Na Climatologia, um interesse particular é na série de temperaturas globais que apresentam uma aparente tendência crescente devido ao efeito estufa (Seater, 1993);
- Na década de 80, economistas notaram evidências de processos de ML para descrever dados econômicos e financeiros, como taxa de juros e inflação.

Surgimento do conceito de Memória Longa

- Surgiram na década de 50, em estudos empíricos de Climatologia e Hidrologia;
- Hurst (1951,1957), Mandelbrot e Wallis (1968) e McLeod e Hipel (1978) notaram o fenômeno de ML em estudos de Hidrologia;
- Na Climatologia, um interesse particular é na série de temperaturas globais que apresentam uma aparente tendência crescente devido ao efeito estufa (Seater, 1993);
- Na década de 80, economistas notaram evidências de processos de ML para descrever dados econômicos e financeiros, como taxa de juros e inflação.

Surgimento do conceito de Memória Longa

- Surgiram na década de 50, em estudos empíricos de Climatologia e Hidrologia;
- Hurst (1951,1957), Mandelbrot e Wallis (1968) e McLeod e Hipel (1978) notaram o fenômeno de ML em estudos de Hidrologia;
- Na Climatologia, um interesse particular é na série de temperaturas globais que apresentam uma aparente tendência crescente devido ao efeito estufa (Seater, 1993);
- Na década de 80, economistas notaram evidências de processos de ML para descrever dados econômicos e financeiros, como taxa de juros e inflação.

Surgimento do conceito de Memória Longa

- Surgiram na década de 50, em estudos empíricos de Climatologia e Hidrologia;
- Hurst (1951,1957), Mandelbrot e Wallis (1968) e McLeod e Hipel (1978) notaram o fenômeno de ML em estudos de Hidrologia;
- Na Climatologia, um interesse particular é na série de temperaturas globais que apresentam uma aparente tendência crescente devido ao efeito estufa (Seater, 1993);
- Na década de 80, economistas notaram evidências de processos de ML para descrever dados econômicos e financeiros, como taxa de juros e inflação.

Características da série com ML

- As séries apresentam persistência nas autocorrelações amostrais, ou seja, dependência significativa entre observações separadas por um longo intervalo de tempo;
- As autocorrelações da série original indicam não estacionariedade, porém a série diferenciada parece ser "superdiferenciada" (ou seja, processos com ML parecem situar-se entre $d = 0$ e $d = 1$).

Características da série com ML

- As séries apresentam persistência nas autocorrelações amostrais, ou seja, dependência significativa entre observações separadas por um longo intervalo de tempo;
- As autocorrelações da série original indicam não estacionariedade, porém a série diferenciada parece ser "superdiferenciada" (ou seja, processos com ML parecem situar-se entre $d = 0$ e $d = 1$).

Características da série com ML

- A função densidade espectral é não limitada na frequência zero, ou seja, sua função de autocorrelação não é absolutamente somável;

Definição 1

Suponha que X_t tenha autocorrelação ρ_j . Dizemos que X_t possui memória longa se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n |\rho_j|$$

é não finita.

Características da série com ML

- A função densidade espectral é não limitada na frequência zero, ou seja, sua função de autocorrelação não é absolutamente somável;

Definição 1

Suponha que X_t tenha autocorrelação ρ_j . Dizemos que X_t possui memória longa se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n |\rho_j|$$

é não finita.

Características da série com ML

- Sua função de autocorrelação decresce hiperbolicamente para zero, ao passo que a série de memória curta, decresce exponencialmente;

Definição 2

Seja X_t um processo estacionário com função de autocorrelação ρ_k . Se existir um número real $\alpha \in (0, 1)$ e uma constante $C > 0$ tal que

$$\rho_k \rightarrow Ck^{-\alpha}, \text{ se } k \rightarrow \infty,$$

então X_t é chamado processo estacionário de memória longa.

Características da série com ML

- Sua função de autocorrelação decresce hiperbolicamente para zero, ao passo que a série de memória curta, decresce exponencialmente;

Definição 2

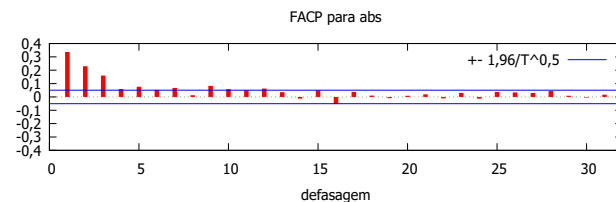
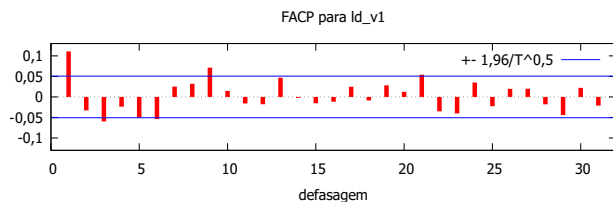
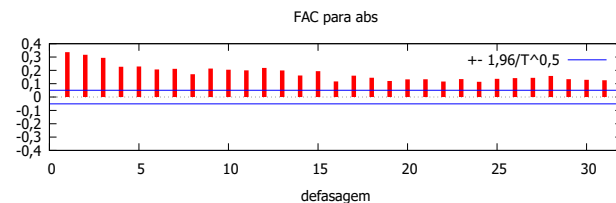
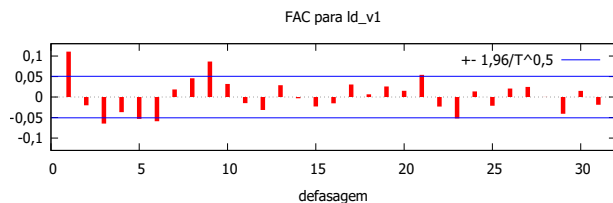
Seja X_t um processo estacionário com função de autocorrelação ρ_k . Se existir um número real $\alpha \in (0, 1)$ e uma constante $C > 0$ tal que

$$\rho_k \rightarrow Ck^{-\alpha}, \text{ se } k \rightarrow \infty,$$

então X_t é chamado processo estacionário de memória longa.

MC x ML

FAC e FACP dos retornos e dos retornos absolutos da Série de preços de ações da Petrobrás.



Características da série com ML

- O *coeficiente de Hurst* é um número entre 0,5 e 1 dado pela relação

$$H = 1 - \alpha/2$$

usado para mensurar a longa memória na série.

- Quanto maior H , a FAC do processo decai mais lentamente, ou seja, o processo tem memória mais longa.
- Quando uma série integrada fracionária possui memória longa, então

$$d = H - 1/2,$$

assim tanto d quanto H podem ser usados como medida de memória longa, desde que $0 < d < 1/2$.

Características da série com ML

- O *coeficiente de Hurst* é um número entre 0,5 e 1 dado pela relação

$$H = 1 - \alpha/2$$

usado para mensurar a longa memória na série.

- Quanto maior H , a FAC do processo decai mais lentamente, ou seja, o processo tem memória mais longa.
- Quando uma série integrada fracionária possui memória longa, então

$$d = H - 1/2,$$

assim tanto d quanto H podem ser usados como medida de memória longa, desde que $0 < d < 1/2$.

Características da série com ML

- O *coeficiente de Hurst* é um número entre 0,5 e 1 dado pela relação

$$H = 1 - \alpha/2$$

usado para mensurar a longa memória na série.

- Quanto maior H , a FAC do processo decai mais lentamente, ou seja, o processo tem memória mais longa.
- Quando uma série integrada fracionária possui memória longa, então

$$d = H - 1/2,$$

assim tanto d quanto H podem ser usados como medida de memória longa, desde que $0 < d < 1/2$.

Características da série com ML

Em relação ao valor de d , temos que:

- se $|d| > 1/2$, então a série é não estacionária;
- se $0 < d < 1/2$, então a série é estacionária e possui memória longa;
- se $-1/2 < d < 0$, então a série é estacionária e tem memória curta (neste caso, é identificada como *anti-persistente*).

Características da série com ML

Em relação ao valor de d , temos que:

- se $|d| > 1/2$, então a série é não estacionária;
- se $0 < d < 1/2$, então a série é estacionária e possui memória longa;
- se $-1/2 < d < 0$, então a série é estacionária e tem memória curta (neste caso, é identificada como *anti-persistente*).

Características da série com ML

Em relação ao valor de d , temos que:

- se $|d| > 1/2$, então a série é não estacionária;
- se $0 < d < 1/2$, então a série é estacionária e possui memória longa;
- se $-1/2 < d < 0$, então a série é estacionária e tem memória curta (neste caso, é identificada como *anti-persistente*).

Testes para Memória Longa

- Estatística R/S;
- Procedimento GPH.

Testes para Memória Longa

- Estatística R/S;
- Procedimento GPH.

Estatística R/S

- Introduzida por Hurst (1951) com o nome *rescaled range* (ou *range over standard deviation*) com o propósito de testar a existência da memória longa de uma série temporal;
- A ideia do teste é a construção de uma estatística R/S e construir um gráfico de R/S \times o tamanho amostral;
- Se a série tiver MC, os pontos devem estar ao longo de uma reta com inclinação $1/2$;
- Se for uma série com ML, a reta deve ter inclinação $H > 1/2$, para grandes amostras.

Estatística R/S

- Introduzida por Hurst (1951) com o nome *rescaled range* (ou *range over standard deviation*) com o propósito de testar a existência da memória longa de uma série temporal;
- A ideia do teste é a construção de uma estatística R/S e construir um gráfico de $R/S \times$ o tamanho amostral;
- Se a série tiver MC, os pontos devem estar ao longo de uma reta com inclinação $1/2$;
- Se for uma série com ML, a reta deve ter inclinação $H > 1/2$, para grandes amostras.

Estatística R/S

- Introduzida por Hurst (1951) com o nome *rescaled range* (ou *range over standard deviation*) com o propósito de testar a existência da memória longa de uma série temporal;
- A ideia do teste é a construção de uma estatística R/S e construir um gráfico de R/S \times o tamanho amostral;
- Se a série tiver MC, os pontos devem estar ao longo de uma reta com inclinação $1/2$;
- Se for uma série com ML, a reta deve ter inclinação $H > 1/2$, para grandes amostras.

Estatística R/S

- Introduzida por Hurst (1951) com o nome *rescaled range* (ou *range over standard deviation*) com o propósito de testar a existência da memória longa de uma série temporal;
- A ideia do teste é a construção de uma estatística R/S e construir um gráfico de $R/S \times$ o tamanho amostral;
- Se a série tiver MC, os pontos devem estar ao longo de uma reta com inclinação $1/2$;
- Se for uma série com ML, a reta deve ter inclinação $H > 1/2$, para grandes amostras.

Procedimento GPH

- Proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), é um método que ao mesmo tempo estima o valor de d e testa a existência da memória longa;
- Após algumas operações matemáticas, ele "cria" um modelo de regressão linear em que d é o parâmetro estimado via mínimos quadrados;
- O teste é $H_0 : d = 0$, ou seja, o processo não tem memória longa.

Procedimento GPH

- Proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), é um método que ao mesmo tempo estima o valor de d e testa a existência da memória longa;
- Após algumas operações matemáticas, ele "cria" um modelo de regressão linear em que d é o parâmetro estimado via mínimos quadrados;
- O teste é $H_0 : d = 0$, ou seja, o processo não tem memória longa.

Procedimento GPH

- Proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), é um método que ao mesmo tempo estima o valor de d e testa a existência da memória longa;
- Após algumas operações matemáticas, ele "cria" um modelo de regressão linear em que d é o parâmetro estimado via mínimos quadrados;
- O teste é $H_0 : d = 0$, ou seja, o processo não tem memória longa.

Procedimento GPH

- Proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), é um método que ao mesmo tempo estima o valor de d e testa a existência da memória longa;
- Após algumas operações matemáticas, ele "cria" um modelo de regressão linear em que d é o parâmetro estimado via mínimos quadrados;
- O teste é $H_0 : d = 0$, ou seja, o processo não tem memória longa.

Estimação do Parâmetro de ML

- Teste GPH já fornece automaticamente uma estimativa para d ;
- A estatística R/S também pode ser usada para se obter uma estimativa do coeficiente de Hurst H ;
- Outras formas: método do periodograma, método de Whittle, método de ondaletas, além do estimador de máxima verossimilhança;
- Soldá (2008) fez um estudo de simulação e comparou 7 estimadores para d , para modelos ARFIMA(0, d , 0), ARFIMA(1, d , 0) e ARFIMA(0, d , 1) e concluiu que a melhor performance ocorreu para o EMV, seguido do R/S .

Estimação do Parâmetro de ML

- Teste GPH já fornece automaticamente uma estimativa para d ;
- A estatística R/S também pode ser usada para se obter uma estimativa do coeficiente de Hurst H ;
- Outras formas: método do periodograma, método de Whittle, método de ondaletas, além do estimador de máxima verossimilhança;
- Soldá (2008) fez um estudo de simulação e comparou 7 estimadores para d , para modelos ARFIMA(0, d , 0), ARFIMA(1, d , 0) e ARFIMA(0, d , 1) e concluiu que a melhor performance ocorreu para o EMV, seguido do R/S .

Estimação do Parâmetro de ML

- Teste GPH já fornece automaticamente uma estimativa para d ;
- A estatística R/S também pode ser usada para se obter uma estimativa do coeficiente de Hurst H ;
- Outras formas: método do periodograma, método de Whittle, método de ondaletas, além do estimador de máxima verossimilhança;
- Soldá (2008) fez um estudo de simulação e comparou 7 estimadores para d , para modelos ARFIMA(0, d , 0), ARFIMA(1, d , 0) e ARFIMA(0, d , 1) e concluiu que a melhor performance ocorreu para o EMV, seguido do R/S .

Estimação do Parâmetro de ML

- Teste GPH já fornece automaticamente uma estimativa para d ;
- A estatística R/S também pode ser usada para se obter uma estimativa do coeficiente de Hurst H ;
- Outras formas: método do periodograma, método de Whittle, método de ondaletas, além do estimador de máxima verossimilhança;
- Soldá (2008) fez um estudo de simulação e comparou 7 estimadores para d , para modelos ARFIMA(0, d , 0), ARFIMA(1, d , 0) e ARFIMA(0, d , 1) e concluiu que a melhor performance ocorreu para o EMV, seguido do R/S .

Modelos para ML

- Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981) introduziram o modelo ARFIMA (ARIMA fracionário), que são capazes de modelar tanto a estrutura da correlação de ordens altas (memória longa) quanto a estrutura de correlação de ordens baixas (memória curta);
- Neste caso, os modelos são usados para modelar o comportamento de memória longa da volatilidade, supondo que esta seja uma variável observada;
- Para isso, usualmente se utiliza $|X_t|$ ou X_t^2 ;
- Alguns exemplos da literatura são os estudos sobre ações como $|X_t|$ (Taylor, 1986), ações como $|X_t|^p$ (Ding et al., 1993) e taxas de câmbio X_t^2 (Dacorogna et al., 1993).

Modelos para ML

- Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981) introduziram o modelo ARFIMA (ARIMA fracionário), que são capazes de modelar tanto a estrutura da correlação de ordens altas (memória longa) quanto a estrutura de correlação de ordens baixas (memória curta);
- Neste caso, os modelos são usados para modelar o comportamento de memória longa da volatilidade, supondo que esta seja uma variável observada;
- Para isso, usualmente se utiliza $|X_t|$ ou X_t^2 ;
- Alguns exemplos da literatura são os estudos sobre ações como $|X_t|$ (Taylor, 1986), ações como $|X_t|^p$ (Ding et al., 1993) e taxas de câmbio X_t^2 (Dacorogna et al., 1993).

Modelos para ML

- Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981) introduziram o modelo ARFIMA (ARIMA fracionário), que são capazes de modelar tanto a estrutura da correlação de ordens altas (memória longa) quanto a estrutura de correlação de ordens baixas (memória curta);
- Neste caso, os modelos são usados para modelar o comportamento de memória longa da volatilidade, supondo que esta seja uma variável observada;
- Para isso, usualmente se utiliza $|X_t|$ ou X_t^2 ;
- Alguns exemplos da literatura são os estudos sobre ações como $|X_t|$ (Taylor, 1986), ações como $|X_t|^p$ (Ding et al., 1993) e taxas de câmbio X_t^2 (Dacorogna et al., 1993).

Modelos para ML

- Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981) introduziram o modelo ARFIMA (ARIMA fracionário), que são capazes de modelar tanto a estrutura da correlação de ordens altas (memória longa) quanto a estrutura de correlação de ordens baixas (memória curta);
- Neste caso, os modelos são usados para modelar o comportamento de memória longa da volatilidade, supondo que esta seja uma variável observada;
- Para isso, usualmente se utiliza $|X_t|$ ou X_t^2 ;
- Alguns exemplos da literatura são os estudos sobre ações como $|X_t|$ (Taylor, 1986), ações como $|X_t|^p$ (Ding et al., 1993) e taxas de câmbio X_t^2 (Dacorogna et al., 1993).

Modelos para ML

- Baillie et al. (1996) propuseram incorporar ML a processos GARCH, utilizando o modelo FIGARCH (GARCH integrado fracionário), enquanto Bollerslev e Mikkelesen (1996) propuseram o FIEGARCH (EGARCH integrado fracionário);
- Modelos da família GARCH modelam a dinâmica de retornos juntamente com sua volatilidade, considerada variável latente (não observada);
- Também pode-se utilizar a volatilidade de Garman-Klass, baseada nos preços de abertura, máximo, mínimo e de fechamento de algum ativo (ação, por exemplo).

Modelos para ML

- Baillie et al. (1996) propuseram incorporar ML a processos GARCH, utilizando o modelo FIGARCH (GARCH integrado fracionário), enquanto Bollerslev e Mikkelesen (1996) propuseram o FIEGARCH (EGARCH integrado fracionário);
- Modelos da família GARCH modelam a dinâmica de retornos juntamente com sua volatilidade, considerada variável latente (não observada);
- Também pode-se utilizar a volatilidade de Garman-Klass, baseada nos preços de abertura, máximo, mínimo e de fechamento de algum ativo (ação, por exemplo).

Modelos para ML

- Baillie et al. (1996) propuseram incorporar ML a processos GARCH, utilizando o modelo FIGARCH (GARCH integrado fracionário), enquanto Bollerslev e Mikkelesen (1996) propuseram o FIEGARCH (EGARCH integrado fracionário);
- Modelos da família GARCH modelam a dinâmica de retornos juntamente com sua volatilidade, considerada variável latente (não observada);
- Também pode-se utilizar a volatilidade de Garman-Klass, baseada nos preços de abertura, máximo, mínimo e de fechamento de algum ativo (ação, por exemplo).

Modelos ARFIMA

Definição

Dizemos que $\{X_t\}$ é um processo autorregressivo fracionário integrado de médias móveis - ARFIMA(p, d, q) com $d \in (-1/2, 1/2)$, se $\{X_t\}$ for estacionário e

$$\phi(B)(1 - B)^d X_t = \theta(B)a_t$$

com $a_t \sim RB(0, \sigma_a^2)$ e $\phi(B)$ e $\theta(B)$ os polinômio autorregressivo e de médias móveis já conhecidos.

- A justificativa para o uso deste modelo é que o efeito do parâmetro d em observações distantes decai hiperbolicamente conforme a distância aumenta, enquanto os efeitos dos parâmetros ϕ e θ decaem exponencialmente.

FIGARCH

- Observe que um modelo GARCH(m, n) pode ser escrito como um ARMA(q, n) com $q = \max(m, n)$ na forma

$$\phi(B)r_t^2 = \alpha_0 + \beta(B)v_t,$$

onde $v_t = r_t^2 - h_t$ e

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_q B^q.$$

$$\beta(B) = 1 - \beta_1 B - \beta_2 B^2 - \dots - \beta_n B^n.$$

FIGARCH

- Observe que um modelo GARCH(m, n) pode ser escrito como um ARMA(q, n) com $q = \max(m, n)$ na forma

$$\phi(B)r_t^2 = \alpha_0 + \beta(B)v_t,$$

onde $v_t = r_t^2 - h_t$ e

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_q B^q.$$

$$\beta(B) = 1 - \beta_1 B - \beta_2 B^2 - \dots - \beta_n B^n.$$

FIGARCH

Definição

Um modelo FIGARCH(q, d, n) (*fractionally integrated GARCH*) é definido por

$$\phi(B)(1 - B)^d r_t^2 = \alpha_0 + \beta(B)v_t,$$

com $\phi(B)$ e $\beta(B)$ definidos acima e com raízes fora do círculo unitário.

- Note que, se $d = 0$, temos um modelo GARCH e se $d = 1$, temos o modelo IGARCH.

FIGARCH

Definição

Um modelo FIGARCH(q, d, n) (*fractionally integrated GARCH*) é definido por

$$\phi(B)(1 - B)^d r_t^2 = \alpha_0 + \beta(B)v_t,$$

com $\phi(B)$ e $\beta(B)$ definidos acima e com raízes fora do círculo unitário.

- Note que, se $d = 0$, temos um modelo GARCH e se $d = 1$, temos o modelo IGARCH.

Série Beveridge no Gretl

- A série de índices de preços anuais de trigo de Beveridge, entre 1500 e 1869.
- A série apresenta ML.
 - Teste GPH estima $\hat{d} > 0,5 \Rightarrow$ a série é não estacionária.
- Toma o retorno (diferença logarítmica na série).
 - Teste GPH estima $\hat{d} < 0 \Rightarrow$ a série é anti-persistente (tem MC e é estacionária).
- Retornos absolutos ou quadráticos demonstram a existência de volatilidade, mas não de ML.

Série D-PETRO no Gretl

- Série de preços diários das ações da Petrobrás, de 2/1/1995 à 27/12/2000.
- Retorno estacionário, retorno absoluto ou quadrático mostra a volatilidade.
- Retorno absoluto possui memória longa.
- Confirma com os testes GPH e R/S.

Ajuste dos retornos absolutos (Volatilidade observável)

- ARFIMA(1, d , 1), com $\hat{d} = 0,464$ estimado por GPH em "filtro diferença fracional"



$$(1 - 0,110)(1 - B)^{0,464}|r_t| = (1 + 0,379)a_t$$

- Ajusta a volatilidade com um modelo GARCH(1,1)

$$a_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t,$$

$$h_t = 0,177|r_{t-1}|^2 + 0,79h_{t-1}$$

Este modelo é adequado, com resíduos padronizados e quadrados dos resíduos padronizados sendo ruído branco.

Ajuste dos retornos absolutos (Volatilidade observável)

- ARFIMA(1, d , 1), com $\hat{d} = 0,464$ estimado por GPH em "filtro diferença fracional"



$$(1 - 0,110)(1 - B)^{0,464}|r_t| = (1 + 0,379)a_t$$

- Ajusta a volatilidade com um modelo GARCH(1,1)

$$a_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t,$$

$$h_t = 0,177|r_{t-1}|^2 + 0,79h_{t-1}$$

Este modelo é adequado, com resíduos padronizados e quadrados dos resíduos padronizados sendo ruído branco.

Ajuste dos retornos absolutos (Volatilidade observável)

- ARFIMA(1, d , 1), com $\hat{d} = 0,464$ estimado por GPH em "filtro diferença fracional"



$$(1 - 0,110)(1 - B)^{0,464}|r_t| = (1 + 0,379)a_t$$

- Ajusta a volatilidade com um modelo GARCH(1,1)

$$a_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t,$$

$$h_t = 0,177|r_{t-1}|^2 + 0,79h_{t-1}$$

Este modelo é adequado, com resíduos padronizados e quadrados dos resíduos padronizados sendo ruído branco.

Ajuste dos retornos absolutos (Volatilidade observável)

- ARFIMA(1, d , 1), com $\hat{d} = 0,464$ estimado por GPH em "filtro diferença fracional"



$$(1 - 0,110)(1 - B)^{0,464}|r_t| = (1 + 0,379)a_t$$

- Ajusta a volatilidade com um modelo GARCH(1,1)

$$a_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t,$$

$$h_t = 0,177|r_{t-1}|^2 + 0,79h_{t-1}$$

Este modelo é adequado, com resíduos padronizados e quadrados dos resíduos padronizados sendo ruído branco.

Ajuste dos retornos absolutos (Volatilidade observável)

- ARFIMA(1, d , 1), com $\hat{d} = 0,464$ estimado por GPH em "filtro diferença fracional"



$$(1 - 0,110)(1 - B)^{0,464}|r_t| = (1 + 0,379)a_t$$

- Ajusta a volatilidade com um modelo GARCH(1,1)

$$a_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t,$$

$$h_t = 0,177|r_{t-1}|^2 + 0,79h_{t-1}$$

Este modelo é adequado, com resíduos padronizados e quadrados dos resíduos padronizados sendo ruído branco.

Ajuste dos retornos (Volatilidade não observável)

- Ajustar AR(9) - ARCH(3)
- Dificuldade: FIGARCH (volatilidade é não observada)
- O modelo AR(9) com defasagens específicas em 1,3,6 e 9 é definido por

$$(1 - 0,103B + 0,060B^3 + 0,052B^6 - 0,077B^9)r_t = a_t.$$

- Um modelo ARCH(3) é definido por

$$a_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t,$$

$$h_t = 0,0002 + 0,223r_{t-1}^2 + 0,369r_{t-2}^2 + 0,088r_{t-3}^2.$$

Ajuste dos retornos (Volatilidade não observável)

- Ajustar AR(9) - ARCH(3)
- Dificuldade: FIGARCH (volatilidade é não observada)
- O modelo AR(9) com defasagens específicas em 1,3,6 e 9 é definido por

$$(1 - 0,103B + 0,060B^3 + 0,052B^6 - 0,077B^9)r_t = a_t.$$

- Um modelo ARCH(3) é definido por

$$a_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t,$$

$$h_t = 0,0002 + 0,223r_{t-1}^2 + 0,369r_{t-2}^2 + 0,088r_{t-3}^2.$$

Ajuste dos retornos (Volatilidade não observável)

- Ajustar AR(9) - ARCH(3)
- Dificuldade: FIGARCH (volatilidade é não observada)
- O modelo AR(9) com defasagens específicas em 1,3,6 e 9 é definido por

$$(1 - 0,103B + 0,060B^3 + 0,052B^6 - 0,077B^9)r_t = a_t.$$

- Um modelo ARCH(3) é definido por

$$a_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t,$$

$$h_t = 0,0002 + 0,223r_{t-1}^2 + 0,369r_{t-2}^2 + 0,088r_{t-3}^2.$$

Comparação dos modelos

	ARFIMA-GARCH	AR-ARCH
AIC	-7495,28174	-7458,61846
BIC	-7474,03420	-7432,05902
HQC	-7487,36573	-7448,72344

- Além de ser mais parcimonioso, o modelo ARFIMA-GARCH para $|r_t|$ apresentou menores valores para os critérios de informação.

Comparação dos modelos

	ARFIMA-GARCH	AR-ARCH
AIC	-7495,28174	-7458,61846
BIC	-7474,03420	-7432,05902
HQC	-7487,36573	-7448,72344

- Além de ser mais parcimonioso, o modelo ARFIMA-GARCH para $|r_t|$ apresentou menores valores para os critérios de informação.

Conclusões

- As dificuldades encontradas foram com relação ao ajuste de modelos FIGARCH.
- Mesmo os exemplos encontrados na literatura, notou-se que estes modelos eliminavam a volatilidade presente na série de retornos mas não eliminava as autocorrelações de ordens baixas (resíduo padronizado não era ruído branco) - Exemplos de Soldá e Morettin (DJIA).
- Outra dificuldade em ajustar os modelos fGARCH no R - não mostra a estimativa de d .

Referências



MORETTIN, P.A. *Econometria financeira: um curso em séries temporais financeiras*. 2 ed. São Paulo: Blucher, 2011.



SOLDA, G.Y. *Modelos de memória longa, GARCH e GARCH com memória longa para séries financeiras*. 2008. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo.