Modelos Heterocedásticos

Paulo Henrique Sales Guimarães

Universidade Federal de Lavras

paulo.guimaraes@des.ufla.br

11 de outubro de 2018

As séries econômicas e financeiras apresentam algumas características que não são comuns a outras séries temporais tais como (Morettin, 2011):

As séries econômicas e financeiras apresentam algumas características que não são comuns a outras séries temporais tais como (Morettin, 2011):

- tendências;

Introdução

As séries econômicas e financeiras apresentam algumas características que não são comuns a outras séries temporais tais como (Morettin, 2011):

- tendências;
- sazonalidade;

Introdução

As séries econômicas e financeiras apresentam algumas características que não são comuns a outras séries temporais tais como (Morettin, 2011):

- tendências;
- sazonalidade;
- pontos influentes (*outliers*);

As séries econômicas e financeiras apresentam algumas características que não são comuns a outras séries temporais tais como (Morettin, 2011):

- tendências;
- sazonalidade;
- pontos influentes (*outliers*);
- heteroscedasticidade condional;

Introdução

As séries econômicas e financeiras apresentam algumas características que não são comuns a outras séries temporais tais como (Morettin, 2011):

- tendências;
- sazonalidade;
- pontos influentes (*outliers*);
- heteroscedasticidade condional;
- não linearidade.

A maior parte dos estudos em séries financeiras concentra-se na análise da série de retornos ao invés da série de preços.
O retorno de um ativo entre os instantes de tempo $t - 1$ e t é dado por:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \tag{1}$$

Na prática é comum trabalharmos com o log retorno, definido da forma:

$$r_t = log\frac{P_t}{P_{t-1}} = p_t - p_{t-1} \tag{2}$$

Fatos estilizados

Os fatos estilizados para séries de retornos são regularidades estatísticas observadas em um grande número de séries financeiras a partir de estudos empíricos em diversos mercados.
Podem-se resumir os principais fatos estilizados em:

Os fatos estilizados para séries de retornos são regularidades estatísticas observadas em um grande número de séries financeiras a partir de estudos empíricos em diversos mercados.
Podem-se resumir os principais fatos estilizados em:

- estacionariedade;

Fatos estilizados

Os fatos estilizados para séries de retornos são regularidades estatísticas observadas em um grande número de séries financeiras a partir de estudos empíricos em diversos mercados.

Podem-se resumir os principais fatos estilizados em:

- estacionariedade;
- fraca dependência linear e dependência não linear;

Fatos estilizados

Os fatos estilizados para séries de retornos são regularidades estatísticas observadas em um grande número de séries financeiras a partir de estudos empíricos em diversos mercados.
Podem-se resumir os principais fatos estilizados em:

- estacionariedade;
- fraca dependência linear e dependência não linear;
- caudas pesadas da distribuição ou excesso de curtose;

Fatos estilizados

Os fatos estilizados para séries de retornos são regularidades estatísticas observadas em um grande número de séries financeiras a partir de estudos empíricos em diversos mercados.

Podem-se resumir os principais fatos estilizados em:

- estacionariedade;
- fraca dependência linear e dependência não linear;
- caudas pesadas da distribuição ou excesso de curtose;
- comportamento heterocedástico condicional;

Fatos estilizados

Os fatos estilizados para séries de retornos são regularidades estatísticas observadas em um grande número de séries financeiras a partir de estudos empíricos em diversos mercados.
Podem-se resumir os principais fatos estilizados em:

- estacionariedade;
- fraca dependência linear e dependência não linear;
- caudas pesadas da distribuição ou excesso de curtose;
- comportamento heterocedástico condicional;
- apresentam agrupamentos de volatilidades ao longo do tempo;

Fatos estilizados

Os fatos estilizados para séries de retornos são regularidades estatísticas observadas em um grande número de séries financeiras a partir de estudos empíricos em diversos mercados.
Podem-se resumir os principais fatos estilizados em:

- estacionariedade;
- fraca dependência linear e dependência não linear;
- caudas pesadas da distribuição ou excesso de curtose;
- comportamento heterocedástico condicional;
- apresentam agrupamentos de volatilidades ao longo do tempo;
- os quadrados dos retornos são autocorrelacionados.

Volatilidade

Um dos aspectos mais especiais da volatilidade é o fato de esta não ser diretamente observável. Pode ser definida como o desvio padrão condicional de uma variável, comumente um retorno. Há três enfoques para o cálculo de volatilidades:

Um dos aspectos mais especiais da volatilidade é o fato de esta não ser diretamente observável. Pode ser definida como o desvio padrão condicional de uma variável, comumente um retorno. Há três enfoques para o cálculo de volatilidades:

- volatilidade implícita (modelo de Black - Scholes para opções europeias);

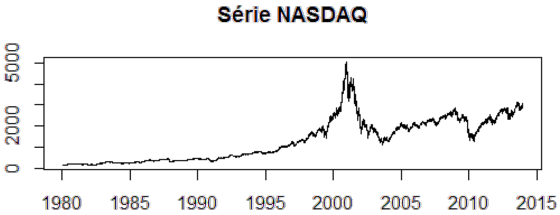
Um dos aspectos mais especiais da volatilidade é o fato de esta não ser diretamente observável. Pode ser definida como o desvio padrão condicional de uma variável, comumente um retorno. Há três enfoques para o cálculo de volatilidades:

- volatilidade implícita (modelo de Black - Scholes para opções europeias);
- volatilidade estatística (modelos ARCH);

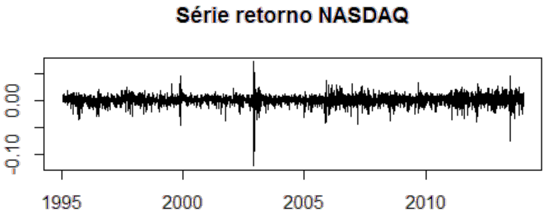
Volatilidade

Um dos aspectos mais especiais da volatilidade é o fato de esta não ser diretamente observável. Pode ser definida como o desvio padrão condicional de uma variável, comumente um retorno. Há três enfoques para o cálculo de volatilidades:

- volatilidade implícita (modelo de Black - Scholes para opções europeias);
- volatilidade estatística (modelos ARCH);
- volatilidade histórica.

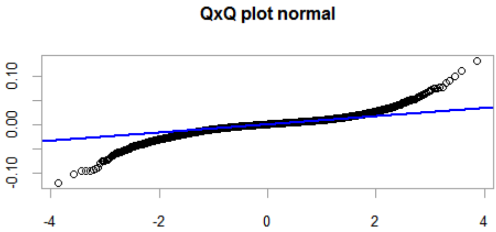


(a) Tempo

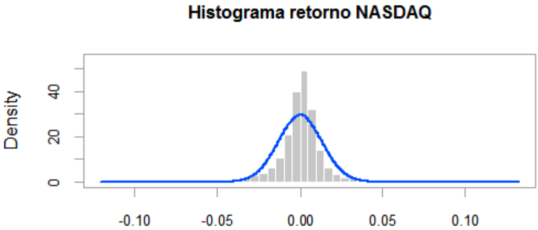


(b) Tempo

Volatilidade



(d)



(c)

Por que razão a volatilidade não é constante?

Por que razão a volatilidade não é constante?

- Especulação;

Por que razão a volatilidade não é constante?

- Especulação;
- Quando uma "bolha especulativa"arrebenta;

Por que razão a volatilidade não é constante?

- Especulação;
- Quando uma "bolha especulativa"arrebenta;
- Graves crises econômicas e políticas;

Por que razão a volatilidade não é constante?

- Especulação;
- Quando uma "bolha especulativa"arrebenta;
- Graves crises econômicas e políticas;
- Assimetria de informação.

Antes do artigo seminal de Engle (1982) as dependências temporais nos momentos superiores eram tratados como simples ruído. Engle mostrou que as dependências temporais do segundo momento podem explicar razoavelmente a evolução (comportamento) da volatilidade ao longo do tempo. Os modelos HC permitem:

Antes do artigo seminal de Engle (1982) as dependências temporais nos momentos superiores eram tratados como simples ruído. Engle mostrou que as dependências temporais do segundo momento podem explicar razoavelmente a evolução (comportamento) da volatilidade ao longo do tempo. Os modelos HC permitem:

- modelar a volatilidade (e as covariâncias condicionais no caso multivariado);

Antes do artigo seminal de Engle (1982) as dependências temporais nos momentos superiores eram tratados como simples ruído. Engle mostrou que as dependências temporais do segundo momento podem explicar razoavelmente a evolução (comportamento) da volatilidade ao longo do tempo. Os modelos HC permitem:

- modelar a volatilidade (e as covariâncias condicionais no caso multivariado);
- estimar de forma mais eficiente os parâmetros definidos na média condicional;

Antes do artigo seminal de Engle (1982) as dependências temporais nos momentos superiores eram tratados como simples ruído. Engle mostrou que as dependências temporais do segundo momento podem explicar razoavelmente a evolução (comportamento) da volatilidade ao longo do tempo. Os modelos HC permitem:

- modelar a volatilidade (e as covariâncias condicionais no caso multivariado);
- estimar de forma mais eficiente os parâmetros definidos na média condicional;
- estabelecer intervalos de confiança para y uma vez que os ICs dependem da variância do erro de previsão e este depende da variância (condicional).

Na análise de modelos não-lineares as inovações (choques aleatórios) a_t são em geral supostos i.i.d e o modelo tem a forma:

$$X_t = g\left(a_{t-1}, a_{t-2}, ...\right) + a_t h\left(a_{t-1}, a_{t-2}, ...\right) \tag{3}$$

de modo que $g\left(\cdot\right)$ denota a média condicional e $h^2\left(\cdot\right)$ é a variância condicional. Se $h^2\left(\cdot\right)$ for não - linear, o modelo diz-se não - linear na variância. Como exemplo tem-se o modelo ARCH(1) da forma:

$$X_t = a_t \sqrt{\alpha X_{t-1}^2}. \tag{4}$$

Para capturar a estrutura de correlação na variância condicional da inflação do Reino Unido, Engle (1982) propôs um modelo denominado como ARCH (Modelo Autorregressivo para a Heteroscedasticidade Condicional), que é um exemplo de modelo não-linear.

Modelos ARCH e GARCH

Para capturar a estrutura de correlação na variância condicional da inflação do Reino Unido, Engle (1982) propôs um modelo denominado como ARCH (Modelo Autorregressivo para a Heteroscedasticidade Condicional), que é um exemplo de modelo não-linear.

Uma generalização do modelo ARCH foi sugerida por Bollerslev (1986, 1987, 1988), o chamado modelo GARCH (generalized ARCH), que pode ser usado para descrever a volatilidade com menos parâmetros do que um modelo ARCH.

Modelos ARCH

Um modelo ARCH (r) é definido da forma:

$$r_t = \sqrt{\sigma_t}\varepsilon_t, \tag{5}$$

$$\sigma_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + ... + \alpha_r r_{t-r}^2, \tag{6}$$

em que ε_t é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d) com média zero e variância um, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0, i > 0$.
Na prática pode-se supor que $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ ou $\varepsilon_t \sim t_\nu$.

$$E(r_t) = E[E(r_t|\mathfrak{I}_{t-1})] = E[E(\sigma_t \varepsilon_t|\mathfrak{I}_{t-1})] = E[\sigma_t \underbrace{E(\varepsilon_t|\mathfrak{I}_{t-1})}_{=0}] = 0,$$

e que $Var(r_t) = E(r_t^2)$. Portanto,

$$\begin{aligned} E(r_t^2) &= E[E(r_t^2|\mathfrak{I}_{t-1})] = E[E(\sigma_t^2 \varepsilon_t^2|\mathfrak{I}_{t-1})] \\ &= E[\sigma_t^2 \underbrace{E(\varepsilon_t^2|\mathfrak{I}_{t-1})}_{=1}] = E(\sigma_t^2) \\ &= E(\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(r_{t-1}^2). \end{aligned}$$

Fazendo a restrição $0 < \alpha_1 < 1$

Se o processo r_t for estacionário de segunda ordem, então, para todo t e k, segue que $E(r_t^2) = E(r_{t-k}^2)$.

Se μ e σ^2 são média e variância incondicionais do processo r_t, então

$$\sigma^2 = E(r_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(r_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma^2$$

e, consequentemente a variância incondicional de r_t é

$$Var(r_t) = \sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1},$$

implicando que $\alpha_0 > 0$ e $0 < \alpha_1 < 1$.

$$
\begin{aligned}
Cov(r_t, r_{t+k}) &= E(r_t r_{t+k}) = E[E(r_t r_{t+k}|\mathfrak{I}_{t+k-1})] \\
&= E[r_t E(r_{t+k}|\mathfrak{I}_{t+k-1})] = E[r_t E(\sigma_{t+k}\varepsilon_{t+k}|\mathfrak{I}_{t+k-1})] \\
&= E[r_t \sigma_{t+k} \underbrace{E(\varepsilon_{t+k}|\mathfrak{I}_{t+k-1})}_{=0}] = 0
\end{aligned}
$$

para todo $k \geq 1$.

Poranto, r_t é uma sequncia de variáveis não correlacionadas (ruído branco), com média zero e variância dada por $\alpha_0/(1-\alpha_1)$.

Modelos ARCH

Um dos fatos estilizados é que os retornos apresentam geralmente caudas mais longas, de modo que a curtose é maior do que 3.

A curtose, supondo que $r_t \sim$ ARCH(1) com $\varepsilon_t \sim NID(0,1)$, é dada por

$$K = \frac{E(r_t^4)}{[Var(r_t)]^2} = 3\left(\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}\right) > 3$$

Uma generalização dos modelos ARCH foi sugerida por Bollerslev (1986,1987,1988) o chamado modelo GARCH (de ARCH generalizado). Este modelo pode ser usado para descrever a volatidade com menos parâmetros do que um modelo ARCH (parcimônia).

Um modelo GARCH (m, n) é definido da forma:

$$r_t = \sqrt{\sigma_t}\varepsilon_t \tag{7}$$

$$\sigma_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \sigma_{t-j}, \tag{8}$$

em que ε_t são v.as. i.i.d., com média zero, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, ..., m-1, \beta_j \geq 0, j = 1, ..., n-1, \alpha_m > 0, \beta_n > 0$ e $\sum_{i=1}^{q} (\alpha_i + \beta_i) < 1$, com q = max (m,n).

Modelos GARCH

Um modelo bastante usado na prática é o GARCH(1,1), para o qual a volatilidade conditional é expressa como:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \qquad (9)$$

em que $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_1, \beta_1 \in (0,1)$.
Para os modelos GARCH temos as mesmas vantagens e desvantagens dos modelos ARCH:

Um modelo bastante usado na prática é o GARCH(1,1), para o qual a volatilidade conditional é expressa como:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \tag{9}$$

em que $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_1, \beta_1 \in (0, 1)$.
Para os modelos GARCH temos as mesmas vantagens e desvantagens dos modelos ARCH:

- Volatilidades altas são precedidas de retornos ou volatilidades grandes,observando-se os grupos de volatilidades presentes em séries financeiras;

Modelos GARCH

Um modelo bastante usado na prática é o GARCH(1,1), para o qual a volatilidade conditional é expressa como:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \tag{9}$$

em que $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_1, \beta_1 \in (0, 1)$.
Para os modelos GARCH temos as mesmas vantagens e desvantagens dos modelos ARCH:

- Volatilidades altas são precedidas de retornos ou volatilidades grandes,observando-se os grupos de volatilidades presentes em séries financeiras;
- Retornos positivos e negativos são tratados de forma similar, já que quadrados dos retornos entram na fórmula da volatilidade.

A curtose, supondo que $r_t \sim$ GARCH(1,1) com $\varepsilon_t \sim NID(0,1)$, é dada por

$$K = \frac{E(r_t^4)}{[E(r_t^2)]^2} = 3\left(\frac{1-(\alpha_1+\beta_1)^2}{1-(\alpha_1+\beta_1)^2-2\alpha_1^2}\right) > 3$$

Vemos, pois, que se admitirmos que r_t siga um modelo GARCH, as caudas serão mais pesadas do que as da normal, o que é uma propriedade vantajosa do modelo.

A variância condicional de r_t é

$$Var(r_t) = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)}, \tag{10}$$

sendo que $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ uma restrição.

O modelo EGARCH foi proposto por Nelson (1991) como uma alternativa ao fato de que os modelos ARCH e GARCH tratarem de forma simétrica os retornos, uma vez que a volatilidade é uma função quadrática dos mesmos. Entretanto, é sabido que a volatilidade reage de forma assimétrica aos retornos, tendendo a ser maior para retornos negativos. Um modelo EGARCH (1,1) é dado por:

$$r_t = \sqrt{\sigma_t}\varepsilon_t, \tag{11}$$

$$ln(\sigma_t) = \alpha_0 + \alpha_1 g(\varepsilon_{t-1}) + \beta_1 ln(\sigma_{t-1}), \tag{12}$$

em que ε_t são v.as i.i.d. com média zero e $g(\cdot)$ é chamado de curva de impacto de informação, dada da forma:

$$g(\varepsilon_t) = \theta\varepsilon_t + \gamma\left\{|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)\right\}. \tag{13}$$

O logaritmo da variância no modelo EGARCH flexibiliza as restrições de positividade imposta aos parâmetros. Os efeitos em σ_t para choques positivos ou negativos em $t-1$ é da forma:

$$g(\varepsilon_t) = \begin{cases} (\theta+\gamma)\varepsilon_{t-1} - \gamma E(|\varepsilon_{t-1}|), & \text{se } \varepsilon_t \geq 0 \\ (\theta-\gamma)\varepsilon_{t-t} - \gamma E(|\varepsilon_{t-1}|), & \text{se } \varepsilon_t < 0 \end{cases} \tag{14}$$

A equação da variância do modelo APARCH(p,q) (*Asymmetric Power* ARCH) de Ding, Granger e Engle (1993) pode ser escrita da forma:

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(|r_{t-i}| - \gamma_i r_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^\delta \qquad (15)$$

em que $\alpha_0 > 0$, $\delta > 0$,$\alpha_i \geq 0$, $-1 < \gamma_i < 1$ reflete o efeito alavanca (*leverage*), $i = 1, ..., p$ e $\beta_j \geq 0$, $j = 1, ..., q$. Uma solução estacionária existe se $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i(1 + \gamma_i^2) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1$.

Modelos APARCH

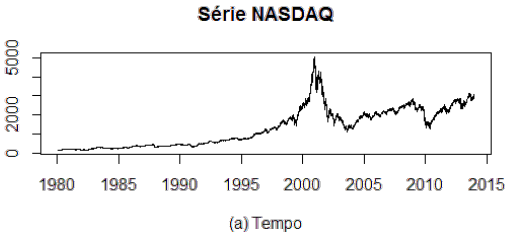
Segundo Wurtz *et al.* (2009), a família de modelos APARCH inclui os modelo ARCH e GARCH, além de cinco outras extensões ARCH como casos especiais:

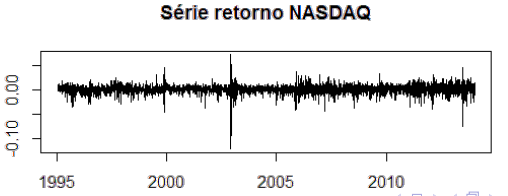
- Modelo ARCH de Engle, quando $\delta = 2$, $\gamma_i = 0$ e $\beta_j = 0$.
- Modelo GARCH de Bollerslev, quando $\delta = 2$ e $\gamma_i = 0$.
- Modelo TS-GARCH de Taylor e Schwert, quando $\delta = 1$ e $\gamma_i = 0$.
- Modelo GJR-GARCH de Glosten, Jagannathan e Runkle, quando $\delta = 2$.
- Modelo T-ARCH de Zakoian, quando $\delta = 1$.
- Modelo N-ARCH de Higgens e Bera, quando $\gamma_i = 0$ e $\beta_j = 0$.
- Modelo Log-ARCH de Geweke e Pentula, quando $\delta \to 0$.

Bolerslev (2008) identified over 150 different ARCH models. Here are some of the most common:

- GJR-GARCH
- TARCH
- STARCH
- AARCH
- NARCH
- MARCH
- SWARCH
- SNPARCH
- APARCH
- TAYLOR-SCHWERT
- FIGARCH
- FIEGARCH
- Component
- Asymmetric Component
- SQGARCH
- CESGARCH
- Student t
- GED
- SPARCH

Série NASDAQ (Principal índice de ações da bolsa eletrônica americana) no período de 28 de abril de 1980 a 26 e junho de 2014.





Aplicações

	rt
nobs	8617.000000
NAs	0.000000
Minimum	-0.120432
Maximum	0.132546
1. Quartile	-0.004893
3. Quartile	0.006547
Mean	0.000401
Median	0.001098
Sum	3.453428
SE Mean	0.000146
LCL Mean	0.000116
UCL Mean	0.000686
Variance	0.000182
Stdev	0.013508
Skewness	-0.260368
Kurtosis	8.688440

1. Ghalanos, Alexios. 2015. Rugarch: Univariate Garch Models. https:CRAN.R-project.org/package=rugarch.
2. Morettin P.A. Econometria Financeira, Blucher 2 ed. Sao Paulo, 2013.
3. Morettin P.A.; Toloi, C.M.C, Análise de Séries Temporais, Blucher, Sao Paulo, 2006.
4. Tsay, R.S. Analysis of Financial Time Series, 2nd ed., Wiley, 2005.