

Praktikumsprotokoll

Versuch Nr. 406 Beugung am Spalt

**Frank Hommes
und
Kilian Klug**

**Durchgeführt am:
11 Mai 2004**

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theoretische Hintergründe	3
2.1	Fraunhofersche Beugung und Fourier-Transformation	6
2.2	Methode der kleinsten Quadrate	7
3	Durchführung und Auswertung	8
3.1	Bestimmung der Spaltbreite mit einem Mikroskop	8
3.2	Bestimmung der Spaltbreite über punktweise Messung der Beugungsfigur	8
3.3	Bestimmung der Spaltbreite mit Hilfe des Computers	9
3.4	Diskussion der Messergebnisse	11
4	Anhang	14

1 Einleitung

In diesem Versuch soll das Phänomen der Beugung von Licht an einem Spalt untersucht werden. Es steht dabei der Wellencharakter des Lichtes im Vordergrund. Die Deutung von Licht als Welle entspricht zwar nicht genau der eigentlich nur quantenmechanisch beschreibbaren Natur, kann aber hier durchaus als gute Näherung gebraucht werden.

Ziel des Versuches ist es, die Breite b eines Spaltes mit verschiedenen Methoden zu bestimmen.

2 Theoretische Hintergründe

Als Beugung von Licht bezeichnet man Abweichungen der Lichtausbreitung von den Gesetzen der geometrischen Optik, zu denen es kommt, wenn das Licht durch Öffnungen in der Größenordnung der Wellenlänge hindurchtritt.

Grundsätzlich unterscheidet man zwei Arten von Beugung - die Fresnel- sowie die Fraunhofer-Beugung (siehe Abb. 1).

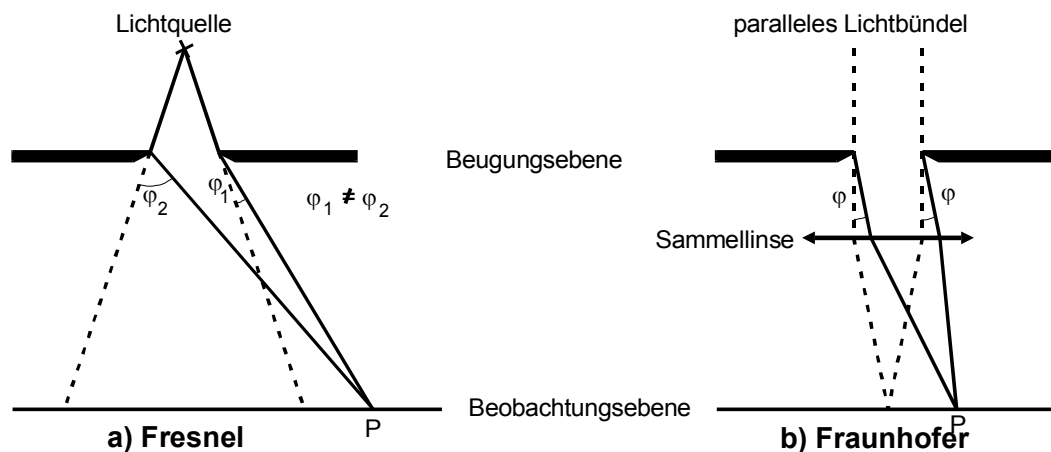


Abbildung 1: Fresnelsche und Fraunhofersche Beugung an einem Spalt (Die gestrichelten Linien deuten den Strahlenverlauf bei der geometrischen Optik an)

Bei der Fresnelschen Anordnung liegen Lichtquelle und Beobachtungspunkt P im Endlichen. Daraus folgt, dass in P Strahlen interferieren, die unter verschiedenen Winkeln gebeugt wurden. Im Gegensatz dazu treffen bei der Fraunhoferschen Anordnung die Strahlen parallel auf den Spalt, kommen also sozusagen aus dem Unendlichen. Alle Strahlen werden somit unter demselben Winkel gebeugt.

Damit ist klar, dass die Fraunhofer-Beugung (mathematisch) einfacher zu behandeln ist, weshalb im Folgenden auch nur diese Art betrachtet werden soll.

Als Beugungsobjekt wird ein Spalt verwendet, dessen Länge groß gegen seine Breite b ist, sodass die einfallende ebene Welle praktisch nur in einer Richtung beschränkt wird.

Die nun auftretenden Beugungserscheinungen können mit einer Kombination aus dem Huygensschen Prinzip der Elementarwellen (Kugelwellen) und dem Interferenzprinzip erklärt werden. Demnach gehen von allen Punkten einer Wellenfront Elementarwellen aus, die miteinander interferieren. Die so erzeugte neue Wellenfront entspricht der Einhüllenden der Elementarwellen. Sämtliche zu einem bestimmten Zeitpunkt an einem bestimmten Ort zusammentreffenden Elementarwellen erzeugen zusammen den jeweiligen Schwingungszustand.

Zur Berechnung der Amplitude der gebeugten Welle in eine Richtung φ muss also über alle Strahlenbündel summiert werden, die von allen Punkten des Spaltes in diese Richtung emittiert werden. Diese haben aufgrund ihrer unterschiedlichen Entfernung vom Beobachtungspunkt den Gangunterschied

$$\delta = \frac{2\pi s}{\lambda} = \frac{2\pi x \sin \varphi}{\lambda} \quad (1)$$

($\lambda \triangleq$ Wellenlänge des Lichtes)
wie man in Abb. 2 erkennt.

Dieser Gangunterschied muss auch bei der folgenden Integration über die gesamte Spaltbreite berücksichtigt werden:

$$B(z, t, \varphi) = A_0 \int_0^b \exp \left\{ i \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} + \delta \right) \right\} dx$$

Man erkennt, dass hier im Integral die Formel einer ebenen Welle steht.

Ausführen der Integration und Ausklammern des Faktors $\exp(\pi i b \sin \varphi / \lambda)$ ergibt unter Ausnutzung der Eulerschen Formel

$$\sin \alpha = \frac{1}{2i} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$$

folgendes für die Amplitude B in Richtung φ :

$$B(z, t, \varphi) = A_0 \exp \left\{ i \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{\pi i b \sin \varphi}{\lambda} \right\} \cdot \frac{\lambda}{\pi \sin \varphi} \sin \left\{ \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right\} \quad (2)$$

Von Bedeutung (für die experimentelle Überprüfung) ist hierbei im Wesentlichen der letzte Teil. Die beiden Exponentialfunktionen geben nur Phasenbeziehungen wieder; die erste beschreibt die Orts- und Zeitabhängigkeit, die zweite beschreibt die Winkelabhängigkeit.

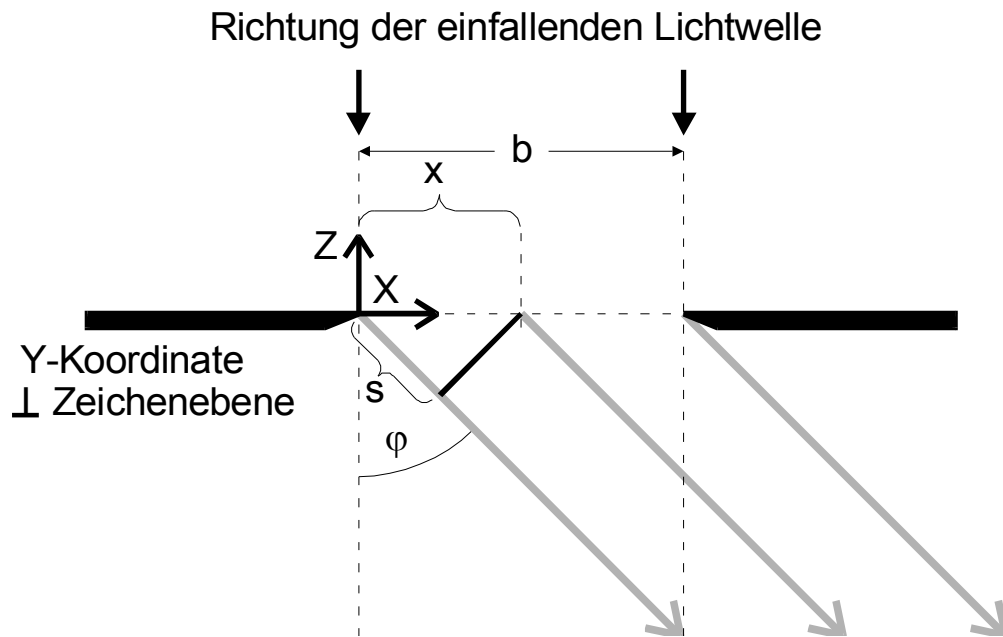


Abbildung 2: Skizze zur Ableitung einer Phasenbeziehung zwischen 2 Teilstrahlen bei der Fraunhoferschen Beugung am Spalt

Mit der Abkürzung

$$\eta := \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \quad (3)$$

lässt sich $B(\varphi)$ damit in der Form

$$B(\varphi) = A_0 b \frac{\sin \eta}{\eta} \quad (4)$$

schreiben.

Die Gestalt der Amplitudenfunktion entspricht etwa Abb. 3.

Diese Amplitude der Lichtwelle kann jedoch aufgrund der hohen Frequenz ($\omega = 10^{14}$ bis 10^{15} Hz) nicht direkt gemessen werden. Deshalb wird die zeitlich gemittelte Intensität untersucht. Die Intensität $I(\varphi)$ des an einem Parallelschlitz gebeugten Lichts ist gegeben durch

$$I(\varphi) \propto B(\varphi)^2 = A_0^2 b^2 \left\{ \frac{\lambda}{\pi b \sin \varphi} \right\} \cdot \sin^2 \left\{ \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right\}. \quad (5)$$

Sie beschreibt die Beugungsfigur, die bei den Nullstellen der Amplitudenfunktion (4) Minima besitzt.

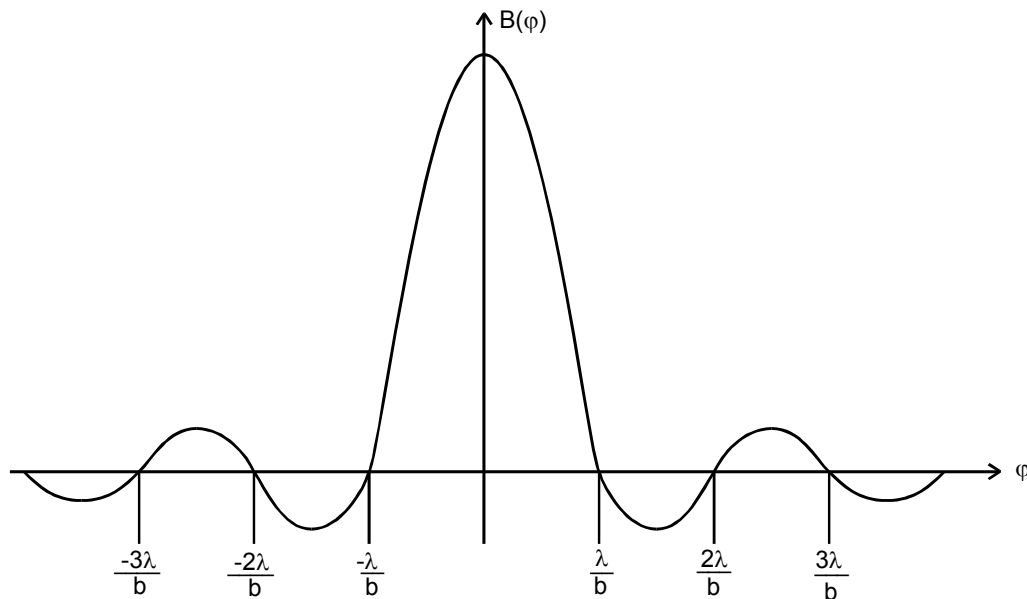


Abbildung 3: Amplitude einer an einem Parallelschlitz gebeugten, ebenen Welle

2.1 Fraunhofersche Beugung und Fourier-Transformation

Die Berechnung der Amplitudenverteilung bei der Fraunhoferschen Beugung ist auch auf eine allgemeinere Weise möglich.

Das oben erwähnte $B(\varphi)$ bildet die Fourier-Transformierte der Amplitudenverteilung der einfallenden Welle in der Beugungsebene ("Aperturfunktion"). Die Aperturfunktion gibt also die Gestalt des beugenden Objektes wieder.

Der hier benutzte Schlitz kann durch folgende Aperturfunktion $f(x)$ beschrieben werden:

$$f(x) = \begin{cases} A_0, & \text{für } 0 \leq x \leq b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (6)$$

Eingesetzt in die bekannte Formel der Fourier-Transformation ergibt dies

$$g(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix\xi} dx$$

$$\Rightarrow g(\xi) = \frac{2A_0}{\xi} \exp\left(\frac{i\xi b}{2}\right) \sin \frac{\xi b}{2}. \quad (7)$$

Man findet eine Übereinstimmung zwischen $g(\xi)$ und $B(\varphi)$ aus (6), wenn man in

(7)

$$\xi := \frac{2\pi \sin \varphi}{\lambda} \quad (8)$$

setzt.

Besondere Bedeutung kommt nun der Umkehrbarkeit der Fourier-Transformation zu. Da die Aperturfunktion $f(x)$ die Fourier-Transformation von $B(\varphi)$ ist, kann man aus der Amplitudenfunktion $B(\varphi)$ die Gestalt $f(x)$ des beugenden Objektes errechnen.

2.2 Methode der kleinsten Quadrate

Die Auswertung des Versuches erfolgt größtenteils durch einen Rechner direkt vor Ort. Dieser verwendet zwar numerische Verfahren, jedoch soll hier kurz die sogenannte Methode der kleinsten Quadrate erläutert werden. Diese Methode würde man anwenden um manuell eine Ausgleichsrechnung durchzuführen um - in diesem Fall - den wahrscheinlichsten Wert für die Größe $\frac{\lambda}{b}$ zu erhalten. Von Interesse ist diese Größe, da sie als Parameter in Gleichung (6) einfließt.

Die bei Messungen auftretenden Größen sind in der Regel mit zufälligen Fehlern behaftet. An bestimmten Punkten sind also der Messwert y_i und der zugehörige Schätzwert \bar{y}_i nicht identisch. Damit entstehen Abweichungen

$$\Delta y_i = y_i - \bar{y}_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Im Wesentlichen fordert die Methode der kleinsten Quadrate nun, dass die Summe der Quadrate der Abweichungen minimal sein soll für alle beteiligten Größen.

Im vorliegenden Fall (nur 1 Parameter) bedeutet dies, dass das Minimum der Funktion

$$G\left(\frac{\lambda}{b}\right) := \sum_{i=1}^n \left(\frac{I(\zeta_i - \zeta_0) - I_{du}}{I(\zeta_0)} - B^2\left(\frac{\lambda}{b}; \zeta_i - \zeta_0\right) \right)^2$$

(mit I_{du} =Dunkelstrom, ζ_i =Detektorstellung, ζ_0 =Detektorstellung für die Richtung des ungebeugten Strahles)

bestimmt werden muss. Ein Minimum ist dann gegeben, wenn die Ableitung verschwindet:

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda/b} = 0$$

Daraus ergibt sich eine Gleichung mit dem gesuchten besten Schätzwert des Parameters $\frac{\lambda}{b}$ als Lösung.

Da λ bekannt ist (es wird ja ein He-Ne-Laser benutzt) kann daraus nun die gesuchte Spaltbreite b bestimmt werden.

3 Durchführung und Auswertung

Im Verlauf der Messung aufgenommene Daten sowie einige berechnete Größen finden sich in einer großen Tabelle im Anhang (Tab.(3)).

3.1 Bestimmung der Spaltbreite mit einem Mikroskop

Zuerst haben wir die Spaltbreite mit einem Mikroskop gemessen. Dafür haben wir die interne Skala in der Brennebene des Okulars mit einem Objektmikrometer geeicht. Dort entsprachen 20 Einheiten $720\text{ }\mu\text{m}$. Danach haben wir den Spalt gemessen und eine Dicke von 2,3 Einheiten erhalten. Über den Dreisatz erhalten wir eine Spaltbreite von $(82,8 \pm 4,5)\text{ }\mu\text{m}$ - hier wurde ein Ablesefehler angenommen.

3.2 Bestimmung der Spaltbreite über punktweise Messung der Beugungsfigur

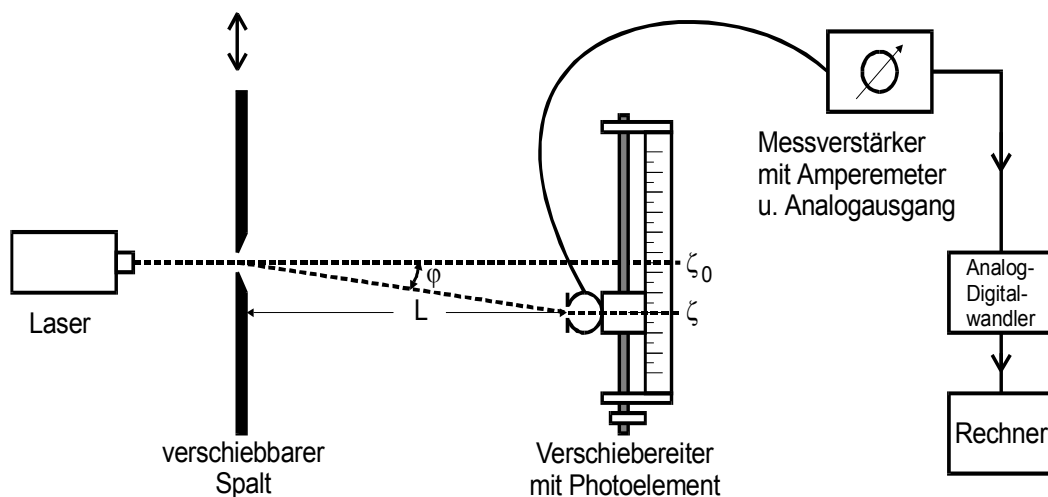


Abbildung 4: Versuchsanordnung zur Ausmessung einer Beugungsfigur

Mit einer Apparatur nach Abb. 4 messen wir die gebeugte Intensität $I(\xi)$ aus, welche entsteht, wenn wir mit einem He-Ne-Laser (der Wellenlänge $\lambda=633\text{nm}$), einen Spalt beleuchten. Gemessen wird mit einem Verschiebereiter, in dem sich ein Photoelement befindet, welches einen Strom proportional zur Intensität des Lichtes erzeugt. Da thermisches Rauschen auch registriert wird, muss man zuerst den sogenannten Dunkelstrom messen, indem man den Strom der Photozelle bei

Versuchsbedingungen (möglichst dunkel) am Amperemeter abliest. In unserem Fall beträgt der Dunkelstrom 22 nA.

Die so erhaltenen Werte für den (Photo-)Strom geben wir zur Auswertung in den Computer ein. Zudem wird hier der Abstand zwischen Spalt und Detektor benötigt, der während des gesamten Versuches 897mm betrug. Der Computer führt dann, wie oben erwähnt, eine Ausgleichsrechnung durch. Als ersten Schätzwert für die Spaltbreite geben wir den bei der Direkt-Messung per Mikroskop erhaltenen Wert von $82,8\mu\text{m}$ an. Damit ergeben sich folgende Daten:

Iteration	1	2	3
Spaltbreitenkorrektur [μm]	-4,97	0,28	-0,01
verbesserte Spaltbreite [μm]	77,83	78,11	78,10
Fehler der Spaltbreite [μm]	0,58	0,53	0,53
Relativfehler [%]	0,7	0,7	0,7

Tabelle 1: Ergebnisse der Computerauswertung der "Handmessung"

Endergebnis für die gesuchte Spaltbreite ist hier also $b = (78,10 \pm 0,53)\mu\text{m}$.

Mehr als die durchgeführten drei Iterationen hätten keine signifikanten Änderungen mehr erbracht.

Mit $A_0 = 4,79 \cdot 10^{-5} \frac{\text{A}}{\text{m}}$ und $\xi_0 = 25 \text{ mm}$ ergeben sich die Theoriekurven in Abb. 5 und Abb. 6. Im Wesentlichen stimmen die Theoriekurven mit den Messwerten überein, nur im Hauptmaximum liegen unsere Werte etwas darunter.

3.3 Bestimmung der Spaltbreite mit Hilfe des Computers

Um möglichst viele Messpunkte aufzunehmen, benutzen wir in der dritten Messung einen Computer mit angeschlossenem Analog-Digital-Wandler. Dieser besaß in unserem Fall leider keine Glättungskapazität, sodass die Messung Schwankungen ausgesetzt war. Dies erklärt auch, warum der Ausdruck (Abb.7) etwas verrauscht ist. Der Wandler ist über ein Potentiometer, mit welchem der Strom unter 2,3 Ampere gehalten wird, mit dem Amperemeter verbunden. Somit liest der Computer den Strom in Abhängigkeit des Vorschubs des Detektorschlittens ein. Da der Schlitten sehr langsam und gleichmäßig über einen großen Zeitraum bewegt werden muss, benutzen wir einen Motor, welcher den Schlitten am Beugungsmuster entlang bewegt.

Die zunächst erneut durchgeführte Messung ohne Laser für die Bestimmung eines Offset-Wertes ergibt leider kein brauchbares Resultat. Die angezeigten Werte schwanken sehr stark und schnell. Sie scheinen sich jedoch um Null herum zu

bewegen, so dass wir als Offset-Wert Null angeben.

Der vom Motor insgesamt zurückgelegte Verschiebeweg beträgt 99mm.

Insgesamt werden bei dieser Messung 13021 Messwerte aufgenommen.

Damit sich nur ca. 200 Punkte für den gesamten Verschiebeweg ergeben, lassen wir den Rechner jeweils ca. 65 Messpunkte zusammenfassen.

Mit dem Curser gehen wir Punkt für Punkt die vom Rechner graphisch dargestellte Intensitätskurve ab und können dabei die entsprechenden Daten ablesen.

Für die Minima (und das Hauptmaximum) fanden wir folgende Werte:

Minima links		Hauptmaximum		Minima rechts	
Kanal Nr.	Intensität	Kanal Nr.	Intensität	Kanal Nr.	Intensität
114	7,323	129	1857,538	144	6,846
99	3,215			159	4,431
84	2,938			174	3,185
69	2,415			189	2,154
54	2,138				
38	2,231				
23	2,615				
10	2,292				

Tabelle 2: Minima/Maximum, Kanäle und Intensitäten aus der (Motor) Computermessung

Nun muss aus der Intensität die Amplitude errechnet werden. Bei der Intensität evtl. auftretende negative Werte können ausgeglichen werden, indem der dem Betrag nach größte negative Wert herausgesucht und zu allen anderen Messwerten addiert wird.

Die Beugungsamplitude kann aber nun auch negative Werte annehmen, das Vorzeichen geht aber bei der Intensitätsmessung verloren. Deshalb wird es nachträglich rekonstruiert.

Die Amplitude ist in Abb.8 dargestellt.

Anschließend führt der Computer eine sogenannte Fast Fourier Transformation zur Berechnung der Aperturfunktion (siehe Abb.9) durch.

Nach der Auswertung anhand der oben beschriebenen Schritte, wurden die Intensitätskurve (Abb.7), die Amplitude (Abb.8) und die Aperturfunktion (Abb.9) ausgedruckt.

Es ist zu beachten, dass der Computer nur die halbe Aperturfunktion darstellt ($x=0$ entspricht also der Spaltmitte), da diese symmetrisch ist. Bewegt man den Cursor auf die Flanke der Kurve, kann hier ein x -Wert abgelesen werden (der etwa der Mittelwert zwischen den Werten der Geraden links und rechts der Flanke sein

sollte) aus dem sich für die Spaltbreite b ein Wert von

$$b \approx 2 \cdot 38,5 \mu\text{m} = 77 \mu\text{m}$$

ergibt.

Da die hier vorliegende Aperturfunktion unstetig ist, tritt das sogenannte Gibbs'sche Phänomen auf, d.h. um die Unstetigkeitsstelle kommt es zu Überschwingungserscheinungen.

3.4 Diskussion der Messergebnisse

Alle drei in diesem Versuch ermittelten Werte für die Spaltbreite liegen in der gleichen Größenordnung. Die Messung per Mikroskop scheint einen etwas zu großen Wert ($82,8 \mu\text{m}$) geliefert zu haben, da die beiden andern Werte ($77 \mu\text{m}$ und $78,1 \mu\text{m}$) recht nah beieinander liegen, dabei aber doch erkennbar kleiner sind. Da die computerbasierte Auswertung mehrere Iterationen durchlief ist anzunehmen, dass das Ergebnis hier dem wahren Wert näher kommt. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da am Mikroskop ein exaktes Ablesen sehr schwierig ist. Weitere Ungenauigkeiten sind möglicherweise durch die nicht konstanten Lichtverhältnisse während des Versuches entstanden. Auch eine Positionsveränderung des Lasers oder des Spaltes während einer Messreihe oder eine nicht exakte Positionierung zu Anfang ist nicht mit 100%-iger Wahrscheinlichkeit auszuschließen.

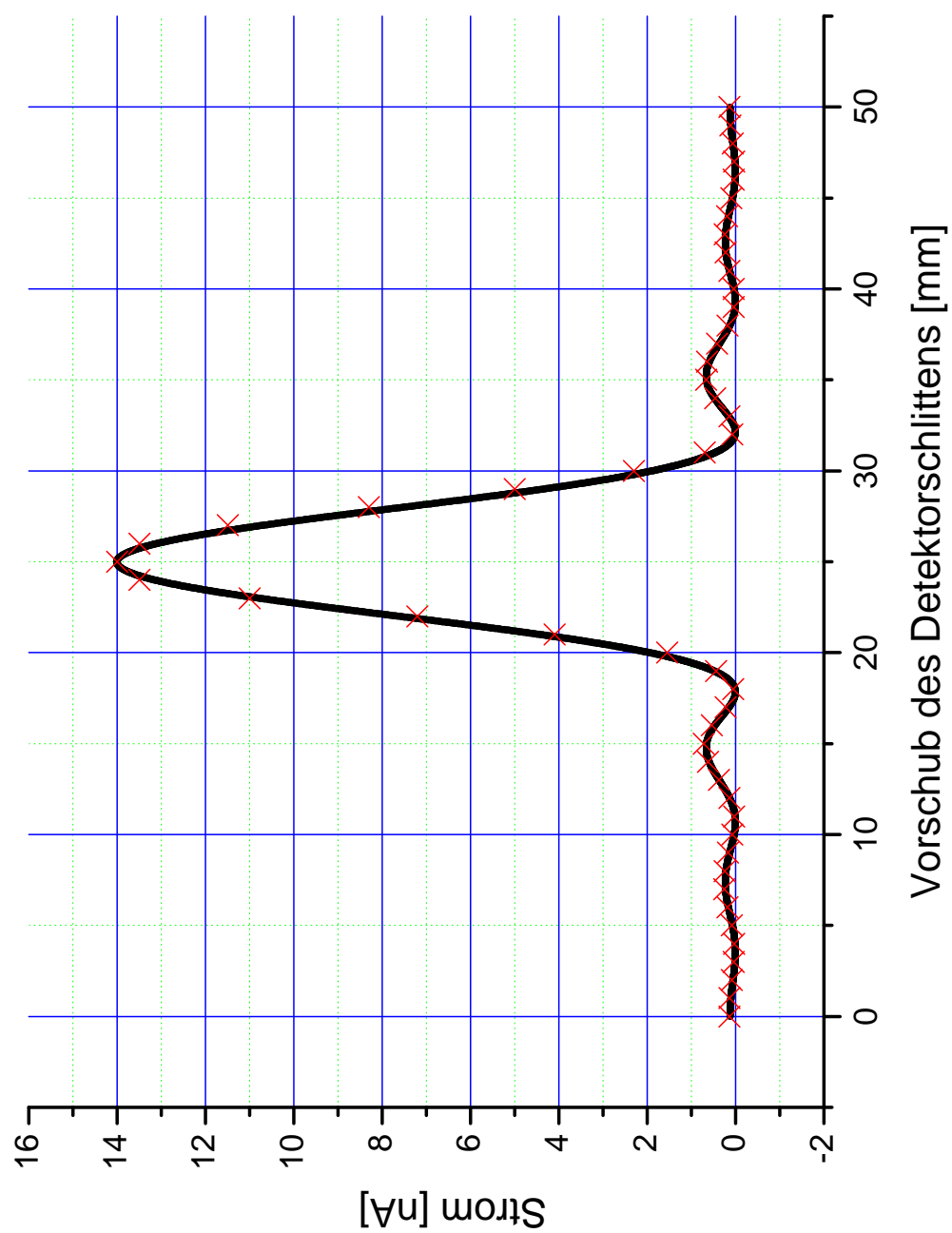


Abbildung 5: Die Intensität in Abhängigkeit des Stroms

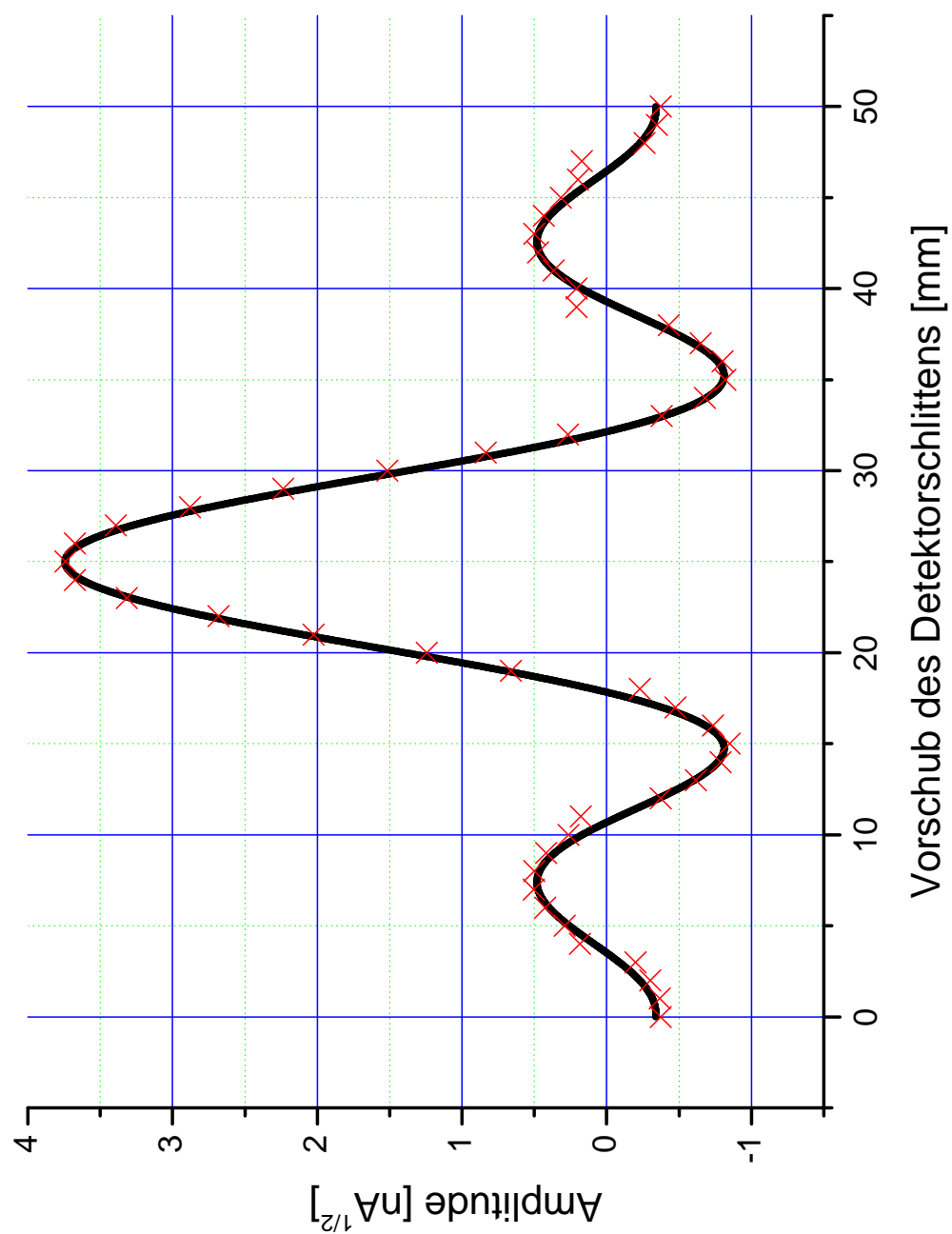


Abbildung 6: Die Amplitudenfunktion aus der Handmessung

4 Anhang

$\xi_i - \xi_0$	Abstand [mm]	Strom [nA]	$I - I_0$	Amplitude
-25	0	140	118	-10.862
-24	1	135	113	-10.630
-23	2	90	68	-8.246
-22	3	40	18	-4.242
-21	4	35	13	-3.605
-20	5	85	63	7.937
-19	6	180	158	12.569
-18	7	255	233	15.264
-17	8	250	228	15.099
-16	9	175	153	12.369
-15	10	70	48	6.928
-14	11	32	10	-3.162
-13	12	140	118	-10.862
-12	13	380	358	-18.920
-11	14	620	598	-24.454
-10	15	720	698	-26.419
-9	16	540	518	-22.759
-8	17	225	203	-14.247
-7	18	52	30	-5.477
-6	19	440	418	20.445
-5	20	1550	1528	39.089
-4	21	4100	4078	63.859
-3	22	7200	7178	84.723
-2	23	11000	10978	104.775
-1	24	13500	13478	116.094
0	25	14000	13978	118.228
1	26	13500	13478	116.094
2	27	11500	11478	107.135
3	28	8300	8278	90.983
4	29	5000	4978	70.554
5	30	2300	2278	47.728
6	31	700	678	26.038
7	32	72	50	7.0710
8	33	145	123	-11.090
9	34	460	438	-20.928
10	35	670	648	-25.455

$\xi_i - \xi_0$	Abstand [mm]	Strom [nA]	$I - I_0$	Amplitude
11	36	640	618	-24.859
12	37	420	398	-19.949
13	38	185	163	-12.767
14	39	43	21	-4.582
15	40	44	22	4.690
16	41	135	113	10.630
17	42	225	203	14.247
18	43	250	228	15.099
19	44	190	168	12.961
20	45	100	78	8.831
21	46	39	17	4.123
22	47	30	8	2.828
23	48	68	46	-6.782
24	49	120	98	-9.899
25	50	140	118	-10.862

Gemessene und berechnete Daten