

FORTGESCHRITTENEN PRAKTIKUM I

SQUID

SUPERCONDUCTING QUANTUM INTERFERENCE DEVICE

IM HANDUMDREHEN EIN QUANTENSPRUNG

MARKUS KÖHLI

ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT
FREIBURG IM BREISGAU

24. AUGUST 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Supraleitung	3
1.1	Phänomenologie	3
1.2	Ströme	3
1.3	Thermoelektrische Phänomenologie	4
1.4	Magnetische Eigenschaften	4
1.5	London-Gleichungen	5
1.6	BCS-Theorie	6
1.6.1	Ergebnisse der BCS-Theorie	8
1.7	Ginzburg-Landau-Theorie	9
1.8	Flussquantisierung	9
1.9	Josephson-Effekt	10
1.9.1	Josephson-Gleichstrom	10
1.9.2	Josephson-Wechselstrom	11
2	Das SQUID	12
2.1	Aufbau des RF-SQUIDs	12
2.2	Arbeitspunkt des SQUIDs	15
2.3	Lock-In Methode	16
3	Versuchsaufbau	18
3.1	JSQ-Magnetometer	18
3.2	Widerstände	18
4	Aufgabenstellung	19
5	Versuchsdurchführung	19
5.1	Vorbereitung	19
5.1.1	Das SQUID-Pattern	19
5.2	Berechnung der Stärke des Magnetfeldes	20
5.3	Dipolmomente	21
6	Anhang	22
6.1	Satz von Stokes	22
6.2	Maxwell-Gleichungen	22
6.3	Wahrscheinlichkeitsstrom	22
6.4	Verteilungsfunktionen	23
6.4.1	Fermi-Statistik	23
6.4.2	Bose-Statistik	23
6.4.3	Zustandsdichte	24
6.4.4	JSQ Duo Sensor Control	26

1 Supraleitung

1.1 Phänomenologie

Grob lassen sich die Eigenschaften eines Supraleiters durch folgende Punkte charakterisieren:

- Der elektrische Widerstand eines Supraleiters sinkt unterhalb einer bestimmten materialabhängigen Temperatur T_c auf einen Wert nicht messbarer Größe.
- Ein Supraleiter verhält sich wie ein idealer Diamagnet. Die induzierten Ströme erzeugen ein Magnetfeld, welches ein von außen angelegtes exakt zu kompensieren vermag.
- In der Bandstruktur findet sich eine temperaturabhängige Energielücke von $E_F \pm \Delta E$ für die Einteilchenelektronenzustände (siehe BCS-Theorie). Dissoziation oder Einbringen von Elektronen mit einer Energie unterhalb dieser Schranke ist nicht möglich.
- Die Elektronen eines Supraleiters gehen unterhalb der kritischen Temperatur T_c in einen makroskopischen Quantenzustand über. In diesen sogenannten Cooper-Paaren bilden zwei Elektronen über hunderte Angström hinweg gebundene Zustände.

Supraleiter müssen dabei weder aus der Menge der Metalle stammen, noch kristalline Struktur aufweisen. Es existieren auch einige supraleitende Polymere und organische Verbindungen.

1.2 Ströme

Oberhalb der kritischen Temperatur verhält sich der Widerstand eines Supraleiters gemäß dem eines Leiters, er lässt sich allgemein beschreiben durch

$$\rho(T) = \rho_0 + k \cdot T^5$$

ρ_0 resultiert aus der Streuung an Verunreinigungen und Defekten im Material. Der zweite Summand lässt sich aus der Phononenstreuung herleiten.

Die Temperatur ist nicht der einzige Parameter, welcher den supraleitenden vom normalen Zustand trennt. Neben Größen wie Materialordnung und Druck spielen vor allem eine Rolle:

- Ein hinreichend starkes äußeres Magnetfeld sorgt für das Nichtzustandekommen oder Unterbrechen der Supraleitung.
- Große Ströme führen zu dem gleichen Effekt, da diese wiederum ein Magnetfeld erzeugen, welches die Supraleitung zerstört, sobald dieses den zuvor genannten kritischen Fluss übersteigt.
- Durch Einfluss eines äußeren elektromagnetischen Wechselfeldes der Größenordnung $\omega \approx \frac{\Delta E}{\hbar}$ können Elektronen über die 'Bandlücke' hinweg angeregt werden. Die Fähigkeit zur Supraleitung geht dann ebenfalls verloren.

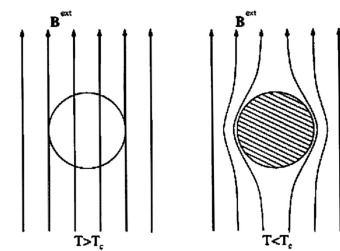
1.3 Thermoelektrische Phänomenologie

Leitfähigkeit hängt mit der Menge an vorhandenen Ladungsträgern zusammen (Drude-Sommerfeld-Modell), welche ebenso für den 'Transport' von Entropie verantwortlich sind. Aus diesem Grund ist festzustellen, dass gute Leiter auch gute Wärmeleiter sind.

Supraleiter sind dagegen schlechte Wärmeleiter. Einerseits befindet sich der Körper natürlich schon in einem Zustand hoher Ordnung, welcher kaum Unordnung - Wärme - zulässt, andererseits kann nur ein Bruchteil der vorhandenen Elektronen Entropie tragen. Auch ist ein elektrischer Strom nicht verknüpft mit einem Wärmestrom (Fehlen des Peltiereffektes).

1.4 Magnetische Eigenschaften

Unterhalb der kritischen Temperatur findet eine spontane Verdrängung des Magnetfeldes innerhalb des Supraleiters statt. Dieses Verhalten entspricht nur teilweise einer perfekten Leitfähigkeit, da das Magnetfeld nicht nur konstant, sondern konstant Null wird. Eine perfekte Leitfähigkeit würde im Gegensatz dazu den Erhalt eines Magnetfeldes implizieren, sofern dies anliegt und abgeschaltet wird.



Bezüglich diesem Verhalten unterscheidet man:

Abbildung 1: Querschnitt: Supraleiter im Magnetfeld

Supraleiter Typ I: Die Kategorie der ursprünglich zuerst entdeckten Materialien. Die höchste erreichbare kritische Temperatur liegt bei 23,2 K (Nb_3Ge). Unterhalb der kritischen äußeren Magnetfeldstärke H_c sinkt B abrupt auf 0 T. Nur innerhalb einer dünnen Schicht von wenigen Nanometern Dicke (sogenannte London'sche Eindringtiefe) dringt das Magnetfeld in den Supraleiter ein.

Hochtemperatursupraleiter Typ II: Bei diesem Typus kann Supraleitung trotz eines Magnetfeldes im Innern des Leiters stattfinden. Es existieren zwei kritische Feldstärken H_{c2} , bei welcher das Magnetfeld noch teilweise, und H_{c1} , bei welcher es ganz verdrängt wird. Der Mechanismus, welcher für diese Charakteristik verantwortlich ist, ist ein anderer als bei Typ I. Zwischen H_{c1} und H_{c2} bilden sich im Supraleiter 'Flussfäden' aus, in welchen das Magnetfeld von Null verschieden ist und das Material normalleitend (Jeder Flussfaden wird auch von einem Wirbelstrom umschlossen). Der Rest ist im supraleitenden Zustand.

Die höchste erreichte Temperatur liegt bei 138 K ($\text{Hg}_{12}\text{Tl}_3\text{Ba}_{30}\text{Ca}_{30}\text{Cu}_{45}\text{O}_{125}$).

Gruppe	I A	II A	III B	IV B	V B	VI B	VII B	VIII B	VIII B	IX B	X B	II B	III A	IV A	V A	VI A	VII A	VIII A	Schale
Periode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	K
1	1	2																2	
2	3	4											5	6	7	8	9	10	L
3	11	12											13	14	15	16	17	18	M
4	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	N
5	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	O
6	55	56		72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	P
7	87	88		104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	Q
	Fr	Ra		Rf	Db	Sg	Bh	Hs	Mt	Ds	Rg	Uub	Uut	Uuq	Uup	Uuh	Uus	Uuo	

Abbildung 2: Ausschnitt aus dem Periodensystem der Elemente, gekennzeichnet sind bisher bekannte Elemente, welche Supraleitung zeigen

1.5 London-Gleichungen ¹

Zur Berechnung der Eindringtiefe des Magnetfeldes in den Supraleiter wird vorausgesetzt, dass Beschleunigung von Ladungen e nur durch ein statisches elektrisches Feld \vec{E} stattfindet, beziehungsweise dass darüber hinaus keine bremsenden Effekte auftreten, das heißt $m\vec{v}_e = -e\vec{E}$. Diese Prämisse, zusammen mit der Definition der Stromdichte $\vec{j} = n_e e \vec{v}_e$ einer Ladungsdichte n_e , eingesetzt in die beiden Maxwellgleichungen

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\delta \vec{B}}{\delta t} \quad \text{und} \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

ergibt, indem man die Stromdichte nach der Zeit ableitet und diesen Ausdruck für \vec{E} in die erste obige Maxwell-Gleichung einsetzt:

$$\frac{\delta}{\delta t} \left(\nabla \times \vec{j} + \frac{n_e e^2}{mc} \vec{B} \right) = 0$$

Die Gleichung fordert zeitliche Invarianz des Magnetfeldes, da jede beliebige zeitunabhängige Form für \vec{B} gewählt werden kann, solange der durch die zweite obige Maxwell-Gleichung definierte Zusammenhang zwischen Strom und Magnetfeld eingehalten wird. Da im supraleitenden Zustand im Inneren des Leiters aber gilt, dass $\vec{B} = 0$, sind mögliche Lösungen dadurch bestimmt, dass der Ausdruck in Klammern nicht nur zeitlich invariant, sondern auch absolut Null ergibt. So folgt die London-Gleichung

$$\nabla \times \vec{j} = -\frac{n_e e^2}{mc} \vec{B}$$

Ableiten lassen sich daraus die folgenden beiden Gleichungen:

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{4\pi n_e e^2}{mc^2} \vec{B}, \quad \nabla^2 \vec{j} = \frac{4\pi n_e e^2}{mc^2} \vec{j}$$

Lösungen sind exponentiell abfallende Funktionen mit einer Reichweite von $\Lambda = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_e e^2}}$. Dies bedeutet, dass sowohl ein Magnetfeld über eine gewisse Länge in den Supraleiter eindringen kann, als auch dass in dieser Schicht eine Abschirmstromdichte \vec{j} senkrecht zum Magnetfeld fließt. Letzteres wird bei der Funktionsweise des SQUIDs wieder aufgegriffen werden.

¹Fritz und Heinz London, 1935

1.6 BCS-Theorie ²

In einem Supraleiter wird der Strom nicht durch einzelne freie Elektronen getragen, wie es in einem metallischen Leiter der Fall ist, sondern es existiert ein schwach gebundener Paarzustand (Cooper-Paar), welcher für die typischen Eigenschaften verantwortlich ist.

Die effektive Anziehung zwischen zwei Elektronen rührt von der Deformation des Atomgitters her. Dadurch dass die Trägheit der positiven Ionenrümpfe wesentlich größer ist als die der Elektronen der Schale, bildet sich in der Trajektorie unmittelbar hinter einem geladenen Teilchen eine schwache positive Polarisierung aus, da die Atomkerne eine gewisse Zeit, in Größenordnung des Inversen der Debye-Frequenz³ ω_D (typische Werte liegen bei $T \approx 10^{-13}$ s), benötigen, um in ihre Ausgangsposition zurückzukehren. Über Entfernungen mehrerer Gitterkonstanten hinweg ist diese Kraft in der Summe anziehend, da die negative Ladung des Elektrons durch die Umgebung abgeschirmt wird - es wird sogar der Fall der sogenannten 'Überabschirmung' eintreten, das heißt, dass die Wechselwirkung zu einer schwachen Nettoanziehungskraft wird.

In der theoretischen Festkörperphysik wird dies als Phononen-vermittelte Wechselwirkung beschrieben, in welcher das Phonon die Polarisierung durch eine lokale 'Gitterschwingung' repräsentiert. Die Phononen allerdings sind als virtuelle Teilchen anzusehen, sie vermitteln nur die Wechselwirkung - würde eine reale Gitterschwingung angeregt werden, so führte dies zu einem Energieverlust und damit einem tatsächlichen Widerstand für den Strom [Beispielsweise wird die elektromagnetische Wechselwirkung durch virtuelle Photonen vermittelt, welche ebenfalls keine sichtbaren Lichtquanten darstellen]. Darstellen lässt sich dieser Prozess als modifizierte Coulomb-ähnliche Wechselwirkung zweier Elektronen mit Wellenvektoren \vec{k} , \vec{k}' und Energiedifferenz $\hbar\omega$:

$$V_{\vec{k},\vec{k}'} = 4\pi \frac{e^2}{q^2 - k_0^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_D^2}$$

Das Mediatorphonon besitzt den Wellenvektor \vec{q} und die Energie $\hbar\omega_D$. Außerdem wird die Größe \vec{k}_0 , genannt Thomas-Fermi Vektor, definiert durch $k_0^2 = 4\pi e^2 \frac{\delta n_0}{\delta \mu}$, wobei eine Ladungsträgerverteilung der Dichte n_0 und des chemischen Potentials μ angenommen wird.

Wenn die Differenzenergie der Elektronen, repräsentiert durch die phononische Wechselwirkung, sich in der Größenordnung von $\hbar\omega_D$ befindet, so kann sich eine (relativ gesehen starke) Anziehung ergeben.

Dass sich Paare dieser geringen Energiedifferenz (d.h. des Wellenvektors) finden, ist möglich, da es sich bei Elektronen um Fermionen handelt. Diese unterliegen der Fermi-Statistik, was bedeutet, dass jeder quantenmechanischer Zustand (z.B. Ort, Impuls, Drehimpuls, Spin) nur einfach besetzt wird. Bei Temperaturen nahe 0 K sind fast alle Zustände bis zur Fermi-Energie E_F befüllt, darüber sinkt die Besetzungsdichte rapide gegen 0. Dies bedeutet einerseits, dass es so möglich ist zu einem Elektron (mit einer Energie im Bereich der Fermi-Energie) ein zweites mit gleichem Impulsbetrag zu finden und andererseits, dass auch eine sehr schwach anziehende Wechselwirkung zu einem gebundenen Zustand führt, solange thermische Anregungen nicht möglich oder zu gering sind, um diesen Zustand zu zerstören.

Entscheidend ist nun, dass durch die Bindungsenergie die Gesamtenergie des Paares (um ΔE) unterhalb der der einzelnen Ladungsträger alleine, respektive der Fermienergie, liegt und beide Elektronen zusammen nun nicht mehr als Fermionen, sondern das kombinierte Spin 1/2 System als Boson behandelt wird, was dazu führt, dass dieser energetisch günstigere, da gebundene, Zustand von beliebig vielen Paaren bevölkert werden kann.

Statistisch betrachtet wird eine Ladungsträgerdichte durch das Produkt aus Zustandsdichte $D(E)$ und (Fermi-)Verteilungsfunktion $f(E)$ ermittelt. Letztere besitzt bei $T \approx 0$ für $E < E_F$ den Wert $f(E) \approx 1$ und fällt danach, wie erläutert, rasch gegen 0. Die Zustandsdichte, welche die Anzahl der Zustände pro Energieintervall angibt und für ein freies Teilchen wie $D(E) \propto \sqrt{E}$ skaliert, besitzt nun eine schmale Lücke von einigen meV um die Fermienergie herum, verursacht durch die gegenseitige (anziehende) Wechselwirkung der Elektronen. Diese führt dazu, dass Zustände um die Fermienergie herum zu kleine-

²John Bardeen, Leon Neil Cooper, John Robert Schrieffer, 1957

³Grenzfrequenz für die Existenz von Phononen im Festkörper

ren bzw. größeren Energien verschoben werden. Sofern die Energielücke groß genug und die Temperatur gering ist, werden nur Zustände unterhalb der zustandsfreien Zone besetzt. Dies ist die Verteilung, wie sie für die Einzelelektronen gilt. Sofern diese in den Cooper-Paarzustand übergehen, unterliegen diese der Bose-Statistik. Es ist nicht möglich ein Bild anzugeben, welches beides miteinander vereint, je nach Aspekt erscheint eine Beschreibung zweckmäßiger als die andere.

Die Anzahl der Cooper-Paare hängt von der Temperatur ab, denn diese bestimmt, wie groß die 'Breite' der Bose-Verteilungsfunktion ist.

Die beiden Spins der Elektronen kombinieren zu $S = 0$, eine parallel ausgerichtete Konfiguration mit $S = 1$ wurde bisher nicht beobachtet - der nicht verschwindende Eigendrehimpuls würde zusätzliche magnetische Eigenschaften zeigen.

Im BCS-Grundzustand, in dem alle⁴ Ladungen als Cooper-Paare vorliegen, ist die Gesamtwellenfunktion von N Elektronen ein Produkt von $N/2$ Paarwellenfunktionen:

$$\Psi(r_1, s_1, \dots, r_N, s_N) = \phi(r_1, s_\uparrow, r_2, s_\downarrow) \cdot \dots \cdot \phi(r_{n-1}, s_\uparrow, r_n, s_\downarrow)$$

Diese wird antisymmetrisiert⁵, um der Tatsache Rechnung zu tragen, dass es sich um Fermionen handelt, das heißt die Ein-Elektronen-Zustände nicht doppelt besetzt werden dürfen. Dies ist in so fern nicht widersprüchlich, da es sich bei den einzelnen Wellenfunktionen zwar um identische, aber bosonische, handelt und somit die Gesamtwellenfunktion nach Anwenden des Antisymmetrisierungsoperators nicht Null ergibt.

Jede einzelne (translationsinvariante) Paarwellenfunktion ϕ lässt sich als Überlagerung zweier Einzelelektronenwellenfunktionen darstellen. Dabei werden die beiden Zustände so gewählt, dass die Impulse \vec{k} vom gleichen Betrag, aber entgegengerichtetem Vorzeichen sind, sodass der Gesamtimpuls verschwindet. Diese Paarwellenfunktion ist, wie erläutert, eine Überlagerung von beiden Wellenfunktionen und daher auch nur einer, und zwar der relativen, Ortskoordinate lokalisiert.

$$\phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{1}{V_{ges}} \sum_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}_1} e^{-i\vec{k}\vec{r}_2}$$

Zur Durchführung einer quantitativen Berechnung muss noch die Art der Wechselwirkung definiert werden. In der BCS-Theorie wird eine effektive Wechselwirkung V für den Hamiltonoperator definiert, welche zwischen zwei Paarzuständen der Wellenvektoren \vec{k}_1, \vec{k}_2 und \vec{k}_3, \vec{k}_4 innerhalb eines Volumens L^3 existiert:

$$\left\langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 \left| V \right| \vec{k}_3 \vec{k}_4 \right\rangle = \begin{cases} -\frac{V_0}{L^3} & \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3 + \vec{k}_4 \quad \text{und} \quad |E(\vec{k}_i) - E_F| < \hbar\omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Als Wechselwirkungsumgebung um die Fermienergie herum wird meist eine Größenordnung von $\hbar\omega_D$ gewählt. Diese Vereinfachungen scheinen zwar recht willkürlich gewählt, dennoch liefern sie für viele Fragestellungen zufriedenstellende Ergebnisse.

Mit Hilfe der Variationsmethode⁶ können nun sowohl Eigenfunktionen, als auch Eigenwerte des gesuchten Grundzustandes berechnet werden⁷.

⁴in der BCS-Theorie werden nicht alle, sondern nur die 'Leitungselektronen' verwendet, welche eine Energie in Größenordnung der Fermi-Energie besitzen

⁵die Vielteilchenwellenfunktion wird durch Bildung der Slater-Determinante, ausgedrückt durch einen Antisymmetrisierungsoperator A , der Einteilchenwellenfunktionen erzeugt; dieses Konstrukt besitzt die geforderten Eigenschaften von Fermionen.

⁶Sie wird eingesetzt, falls die Eigenfunktion und Eigenwerte des Grundzustandes (repräsentiert durch H_0) nicht bekannt sind. Man variiert möglichst geschickt gewählte Wellenfunktionen ψ_i in einem Unterraum des Hilbertraumes und sucht das Minimum von $\langle \psi_i | H_0 | \psi_i \rangle = E_0 < \langle \psi_i | \psi_i \rangle$, was dem Eigenwert, der Energie E_0 , des Grundzustandes entspricht

⁷Eine detaillierte Beschreibung, falls notwendig, wie V unter Zuhilfenahme von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren modelliert werden muss, damit obiges Verhalten dargestellt werden kann, findet sich in der Staatsexamensarbeit

1.6.1 Ergebnisse der BCS-Theorie

Die **Reichweite** r_0 bzw. die Ausdehnung der Elektronen-Paarwellenfunktion berechnet sich zu

$$r_0 \propto \frac{\hbar}{\delta p} \propto \frac{\hbar v_F}{\Delta E} \propto \frac{E_F}{k_F \Delta E}$$

Mit $E_F \approx (10^3 \text{ bis } 10^4) \cdot \Delta E$ und $k_F \approx 10^8 \text{ cm}^{-1}$ erhält man für r_0 Ergebnisse in der Ordnung von 10^3 \AA . Dieses Resultat, wenn auch nur abgeschätzt, ist wichtig, denn es impliziert zwei Sachverhalte: Erstens ist der Bereich der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der beiden Elektronen so groß, dass die Wellenfunktionen der Paare sich mehrfach überlappen, was zur Bildung eines kohärenten Gesamtzustandes führt. Zweitens wird dies, siehe unten, zu Tunnelphänomenen durch dünne Schichten führen.

Die **kritische Temperatur** T_c , welche angibt, wann das Material ohne Einfluss eines äußeren Magnetfeldes in den supraleitenden Zustand übergeht, berechnet sich zu:

$$T_c = \frac{1,13}{k_B} \hbar \omega e^{-1/D_0 V_0}$$

k_B steht für die Boltzmann-Konstante, D_0 die Zustandsdichte des (noch) normalleitenden Materials und V_0 sowie $\hbar \omega$ sind definiert durch den ursprünglichen Hamiltonoperator. Der Exponent der e-Funktion liegt etwa in dem Bereich $[-2, \dots, -10]$.

Für die **Energielücke** bei $T = 0 \text{ K}$ erhält man:

$$\Delta E(0) = 2 \hbar \omega e^{-1/D_0 V_0}$$

Die Energielücke ist allerdings temperaturabhängig. Sie wird schmaler, wenn sich die Temperatur in Größenordnung der Sprungtemperatur befindet. Dort verhält sie sich nach

$$\frac{\Delta E(T)}{\Delta E(0)} = 1,74 \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}$$

In ähnlicher Weise ergibt sich das temperaturabhängige Verhalten des **kritischen Feldes** H_c :

$$\frac{H_c(T)}{H_c} \approx 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2$$

1.7 Ginzburg-Landau-Theorie ⁸

Die Ginzburg-Landau-Theorie dient ebenfalls zur Beschreibung von Phänomenen der Supraleitung. Hier soll auf Grundlage dieser Theorie die Flussquantisierung erläutert werden.

Ansatz und Berechnung verlaufen anders als in der BCS-Theorie. Ausgehend von der Einteilchen-Beschreibung lässt sich ein Zwei-Teilchen-Zustand konstruieren, welcher sich verhält wie ein einziges Gesamtsystem. Mit dem Ansatz für die Wahrscheinlichkeitsstromdichte \vec{j} einer Wellenfunktion ψ

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} [\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi] = \frac{1}{m} \text{Re}[\psi^* p \psi]$$

kann ein Ausdruck für den Zwei-Teilchen-Strom bestimmt werden, sofern man für den Impulsoperator p in Anwesenheit eines Vektorfeldes \vec{A} einsetzt $p = \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \vec{A}$. Es ist dann

$$\vec{j} = -\frac{e}{2m} \left[\psi^* \left(\left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi \right) + c.c. \right] = - \left[\frac{2e^2}{mc} \vec{A} + \frac{e\hbar}{m} \nabla \theta \right] |\psi|^2$$

unter der Annahme, dass die Wellenfunktion $\psi = |\psi| e^{i\theta}$ nicht ihren Betrag, sondern nur die Phase ändert. Dies ist dann der Fall, wenn, weit unterhalb der Sprungtemperatur, die Zahl der Cooper-Paare konstant bleibt.

1.8 Flussquantisierung

Liegt der Supraleiter in Form eines Ringes vor, wie im Falle des SQUID, kann man den Kreisstrom als geschlossenes Wegintegral $0 = \oint \vec{j} d\vec{l}$ über die Stromdichte berechnen. Dieses muss natürlich Null ergeben.

Das geschlossene Integral über das Vektorfeld \vec{A} ergibt nach dem Stokes'schen Satz den magnetischen Fluss Φ_B durch den Ring. Da die Phase der Wellenfunktion ψ ein eindeutiger Parameter ist, darf diese sich bei einem Umlauf nur um ganze Vielfache von 2π ändern. Es gilt also:

$$\oint \vec{A} d\vec{l} = \Phi_B \quad \text{und} \quad \oint \nabla \theta d\vec{l} = \Delta\theta = 2\pi n$$

Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, dass wie im BCS-Grundzustand alle Cooper-Paare im selben Zustand vorliegen. Da sie alle durch eine einzige Wellenfunktion beschrieben werden, liegt eine eindeutige Phasenbeziehung zwischen diesen vor.

Für den magnetischen Fluss erhält man so eine Quantisierung in Flussquanten Φ_0 , Fluxoide genannt:

$$|\Phi_B| = n \frac{\hbar c}{2e} = n \Phi_0$$

$$\Phi_0 = 2,067833667(52) \times 10^{-15} \text{ Wb} \quad (1 [\text{Wb}] = 1 [\text{Tm}^2])$$

⁸Witali Lasarewitsch Ginzburg, Lew Dawidowitsch Landau, 1950 - also noch vor BCS

1.9 Josephson-Effekt ⁹

Befindet sich zwischen zwei Supraleitern ein dünner Isolator kann dieser aufgrund der exponentiell abfallenden Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Wellenfunktion im verbotenen Bereich durchtunnelt werden. Für Einzelelektronen ist dies in klassischer Weise möglich. Bei dieser Art von Tunneln steigt die Tunnelwahrscheinlichkeit proportional zur Potentialdifferenz - mit anderen Worten der Tunnelstrom verhält sich typischerweise ohmsch.

Aufgrund der 'ausgedehnten' Wellenfunktion, ist es ebenfalls für ein Cooper-Paar möglich, diesen Isolator als Ganzes zu durchtunneln.

Wie oben erläutert, wird die Gesamtheit aller Cooper-Paare durch eine einzige Wellenfunktion beschrieben. Diese Beschreibung ändert sich nicht durch diese Störung. Die Wellenfunktion des einen Supraleiters ψ_1 muss also in die des zweiten Supraleiters ψ_2 stetig übergehen. Um dem Rechnung zu tragen behilft man sich, indem eine symmetrische Kopplung K zwischen beiden getrennten Systemen, welche jeweils durch ihren eigenen Hamiltonoperator H beschrieben werden, eingeführt wird. Im Bilde der zeitabhängigen Schrödingergleichung ausgedrückt bedeutet dies:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\delta\psi_1}{\delta t} &= H_1\psi_1 + K\psi_2 \\ i\hbar \frac{\delta\psi_2}{\delta t} &= H_2\psi_2 + K\psi_1 \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem lässt sich lösen - zuerst allgemein, indem sich die Wellenfunktion $\psi = \psi_0 e^{i\theta}$ zeitlich sowohl in Phase- als auch im Betrag ändert. Man erhält sowohl eine Bedingung für den Real- als auch den Imaginärteil (Phasenableitung).

Für ψ_1 sehen die Lösungen folgendermaßen aus (Die Lösungen für ψ_2 ergeben sich analog):

$$\frac{\delta\psi_1}{\delta t} = \frac{2}{\hbar} \psi_{01}\psi_{02} K \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad \text{und} \quad \frac{\delta\theta_1}{\delta t} = \frac{1}{\hbar} \frac{\psi_{02}}{\psi_{01}} K \cos(\theta_2 - \theta_1) - \frac{H_1}{\hbar}$$

1.9.1 Josephson-Gleichstrom

Für eine konstante Phasenbeziehung $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2$ zwischen beiden Supraleitern, wie sie ohne zusätzlichen äußeren Einfluss gilt, erhält man unter der Annahme, dass $\psi_{01} \approx \psi_{02} = \psi_0$

$$\frac{\delta\psi_1}{\delta t} = -\frac{\delta\psi_2}{\delta t} = \frac{2}{\hbar} \psi_0 K \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

Sinnvollerweise lässt sich der Betrag von ψ als Anzahl, beziehungsweise Dichte der Cooper-Paare interpretieren, da diese Gesamtwellenfunktion der Einzelwellenfunktion der Elektronpaare ist. Daher ist auch

$$I \propto \frac{\delta\psi_1}{\delta t} \propto K \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

Die Conclusio besteht darin, dass zwischen zwei identischen Supraleitern ohne jede Potentialdifferenz ein Tunnelstrom fließt, welcher nur von der Phasendifferenz bzw. der Kopplung abhängt. Die tunnelnden Cooper-Paare verlieren 'innerhalb der Kontaktstelle' keine Energie, daher fällt über dem Isolator in diesem Fall kein Strom ab, auch wenn der Isolator kein Supraleiter ist.

Aus genau diesem Grund kann aber ein Magnetfeld in die Isolationsschicht eindringen. Dadurch ändert sich die Kopplung und damit die Phasenverschiebung. In Abhängigkeit zum magnetischen Fluss Φ und dem Flussquant Φ_0 ergibt sich für den Josephson-Gleichstrom I (siehe auch Abbildung 4)

$$I = I_0 \frac{\sin(\pi \Phi / \Phi_0)}{\pi \Phi / \Phi_0}$$

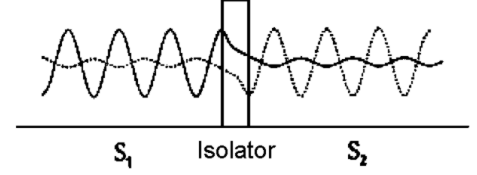


Abbildung 3: Wellenfunktion zweier durch einen Isolator getrennter Supraleiter

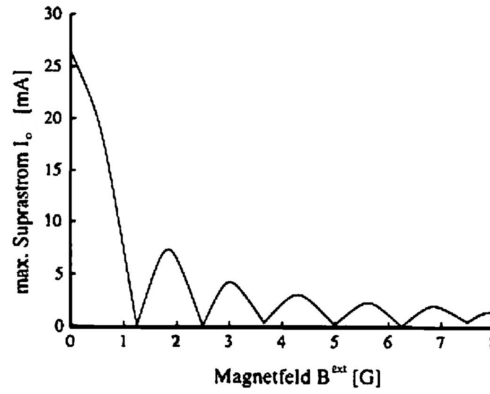


Abbildung 4: Maximaler Strom in Abhängigkeit des externen Magnetfeldes

1.9.2 Josephson-Wechselstrom

(Hier nicht benötigt)

Bringt man beide Supraleiter auf unterschiedliches Potential U , so ergibt die Differenz der Energien, für welcher der Hamiltonoperator beider Wellenfunktionen steht, gerade $2eU$. Dies ist möglich, da es sich bei der Trennschicht um einen Isolator handelt. Entlang einem einzigen Supraleiter lässt sich keine Potentialdifferenz erzeugen. Jetzt ist die Phasenbeziehung nicht mehr konstant, sondern

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{2e}{\hbar}Ut + \theta_0$$

damit löst das Anlegen einer Gleichspannung einen Wechselstrom aus:

$$I \propto 2K \sin\left(\frac{2e}{\hbar}Ut + \theta_0\right)$$

⁹Brian David Josephson, 1962

2 Das SQUID

Ein SQUID (Superconducting QUantum Interference Device) dient zur Messung von kleinen Änderungen in der Stärke von Magnetfeldern. Dazu nutzt es Effekte der Supraleitung wie beispielsweise die Flussquantisierung aus, womit Größenordnungen eines Flussquants Φ_0 gemessen werden können.

Es existieren verschiedene Bauweisen. Das RF-SQUID (radio frequency), ein günstiger und vergleichsweise einfacher Aufbau, wie er im Praktikum zum Einsatz kommt, wird hier beschrieben.

2.1 Aufbau des RF-SQUIDS

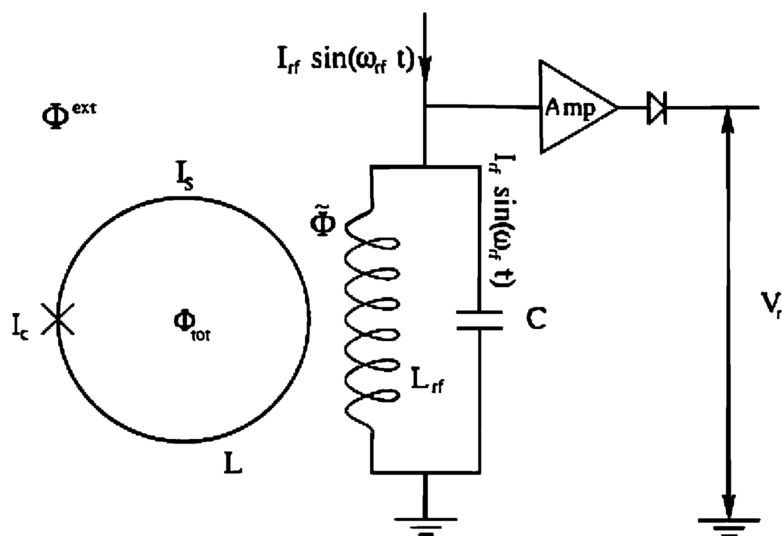


Abbildung 5: Aufbau eines RF-SQUID Systems bestehend aus Supraleitendem Ring und induktiv gekoppeltem Schwingkreis

Die Grundkomponente besteht aus einem Ring, welcher aus einem Hochtemperatursupraleiter besteht. Befindet sich der Torus in flüssigem Stickstoff, kann die kritische Temperatur erreicht werden. An einer Stelle ist der Ring durch eine Isolationsschicht (weak link) von wenigen Nanometern Dicke unterbrochen, diese hat die Funktionsweise eines Josephson-Kontaktes.

Das **Funktionsprinzip** ist folgendes:

In einem unmittelbar benachbarten Schwingkreis, hier betrieben mit einer Frequenz von einigen hundert Megahertz, wird ein magnetischer Fluss Φ_{ext} erzeugt. Dieser regt in dem Ring, welcher sich in supra-leitendem Zustand befindet, einen Suprastrom an, welcher gerade so groß ist, dass das externe Feld, welches das Material zu durchdringen sucht, exakt kompensiert wird und damit der Fluss im Innern Φ_{tot} zu einem resultierenden Magnetfeld der Stärke Null führt.

Da die Gesamtwellenfunktion der den Strom tragenden Cooper-Paare stetig im Innern sein muss, gilt, wie oben beschrieben, dass sich der Gesamtfluss nur um Vielfache des Flussquants Φ_0 ändern kann. Durch den eingebrachten Josephson-Kontakt wird die Phase der Gesamtwellenfunktion verschoben, allerdings behält das grundsätzliche Prinzip der Supraleitung seine Gültigkeit. Eine Berechnung der Phasendifferenz ergibt:

$$\theta_2 - \theta_1 = 2\pi n - 2\pi \frac{\Phi_{tot}}{\Phi_0}$$

Eine Änderung des externen Flusses kann innerhalb des supraleitenden Ringes keine Änderungen des internen Flusses herbeiführen, wenn diese kleiner als das elementare Flussquant Φ_0 ist (würde dies

dennoch geschehen, wäre diese auch damit verbunden, dass eine Induktionsspannung im Ring auftritt, welche aber nicht existieren darf, da die Supraleitung keinen Feldgradienten zulässt). Um dennoch den Fluss im Inneren auf Vielfache von Φ_0 zu halten, tritt in einer dünnen Schicht unterhalb der Oberfläche ein Abschirmstrom auf, welcher seinerseits einen Fluss von $\Phi_S = LI_S$ erzeugt, so dass

$$\Phi_{tot} = \Phi_{ext} - LI_S$$

Die Größe der Induktivität L ist durch Geometrie und Material vorgegeben.

Um dies noch einmal zu erwähnen: Sobald die kritische Temperatur unterschritten wird, ist der Fluss im reinen Supraleiter auf ganze Vielfache des Flussquants festgelegt und bleibt konstant auf genau diesem Wert unabhängig davon ob der externe Fluss erhöht wird, auch um mehr als ein ganzes Flussquant. Der Fluss kann, siehe unten, nur erhöht werden, wenn die Supraleitung kurzzeitig unterbrochen wird. Der Abschirmstrom sorgt dafür, dass der effektive Fluss im Leiter der selbe bleibt und eine zu starke Änderung des externen Flusses führt zur Überschreitung des kritischen Stromes und dadurch zum Zusammenbrechen der Supraleitung. Für den durch den Josephson-Kontakt unterbrochenen Supraleiter gilt dies gleichermaßen, allerdings bedingt das äußere Magnetfeld hier die Quantisierung des Flusses im Supraleiter und so ergibt sich mit obiger Phasendifferenz, eingesetzt in $I_s = I_{s,max} \sin(\theta_2 - \theta_1)$, ein komplizierteres Verhalten:

$$\Phi_{tot} = \Phi_{ext} + LI_{s,max} \sin(2\pi\Phi_{tot}/\Phi_0)$$

Grafik 6 beschreibt den Ablauf bei Anlegen eines äußeren Feldes ¹⁰:

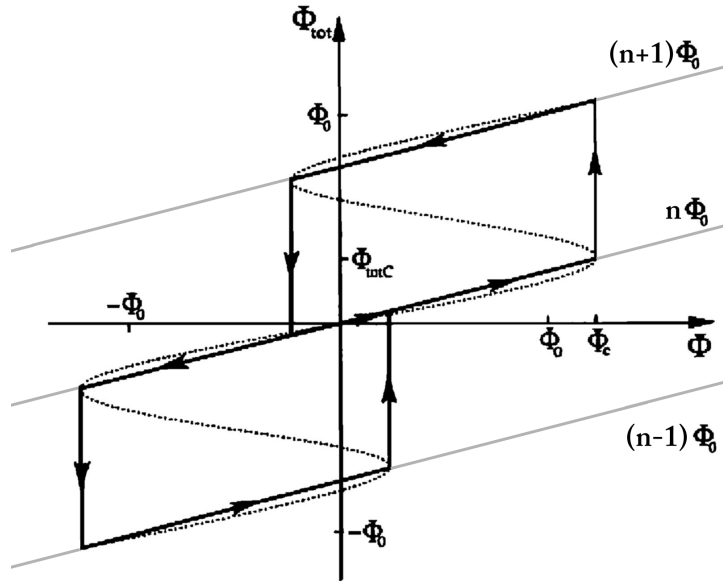


Abbildung 6: Verhalten des Flusses eines supraleitenden Ringes mit einem Josephson-Kontakt

- Das externe Feld wird erhöht, aufgrund des Dämpfungsterms (Induktivität) steigt aber der Fluss Φ_{tot} nicht gleichsam schnell an. Der Abschirmungsstrom kompensiert das äußere Feld, sodass sich der Supraleiter im Zustand $0 \cdot \Phi_0$ befindet.
- Sobald die kritische Stromstärke I_c , beziehungsweise der damit verbundene kritische Fluss Φ_c , überschritten wird, verschwindet die Supraleitung und es ist $\Phi_{tot} = \Phi_{ext}$.

¹⁰Zur Erinnerung: Wäre der Josephson-Kontakt ausgesprochen dick, so wäre $\Phi_{tot} = \Phi_{ext}$ und der Ring wäre 'normalleitend', im Bild eine Gerade. Je dünner der Kontakt, umso gestreckter in x-Richtung würde die gestrichelte Kurve.

- Die Supraleitung setzt aber wieder ein, da der nächsthöhere Zustand $1 \cdot \Phi_0$ günstiger liegt. Der Abschirmstrom ist in jenem geringer und unterhalb des kritischen Grenzwertes. Schwächt man nun das äußere Feld ab, so bleibt der Supraleiter in genau diesem Zustand.
- Die selbe Prozedur findet bei Verringerung des externen Feldes statt bis der Abschirmstrom wieder die kritische Stromstärke, jetzt bei dem kritischen Fluss $\Phi_0 - \Phi_c$ erreicht hat. Für negative äußere Felder daher analog.
- Die gestrichelte Linie stellt den Verlauf der Funktion ohne Erreichen der kritischen Stromstärke dar (der 'eckige' hystereseförmige Graph ist natürlich idealisiert). Die Linien ohne Pfeile stellen die Zustände dar.

Der externe Fluss wird durch einen Schwingkreis (tank circuit) erzeugt, in welchem ein Strom I_{rf} fließt. Durch Übertragungsverluste, repräsentiert durch den Qualitätsfaktor Q , und die gegenseitige Kopplung der Induktivitäten der Erreger- und der Supraleiterspule, repräsentiert durch den Faktor M , entsteht ein Gesamtfluss von

$$\Phi_{rf} = MQI_{rf}$$

Es gilt für den Kopplungsfaktor $M = K(LL_{rf})^{1/2}$ zwischen SQUID-Ring und Schwingkreis mit den jeweiligen Induktivitäten L und L_{rf} .

Der Qualitätsfaktor des Schwingkreises, welcher mit einer Kreisfrequenz ω_{rf} betrieben wird und einen effektiven Widerstand R_{rf} besitzt, ergibt sich zu $Q = R_{rf}/(\omega_{rf}L_{rf})$.

Der Strom I_{rf} hat die Form $I_{rf} = I_{rf,max} \sin(\omega_{rf}t)$.

Dadurch wird der Gesamtfluss Φ im SQUID beschrieben durch den Fluss Φ_{rf} , welcher durch den Schwingkreis erzeugt wird, und einen extern bereits vorhandenen Fluss Φ_{ext} :

$$\Phi = \Phi_{rf} + \Phi_{ext}$$

Es werden zwei Fälle dargelegt, um die Signalerzeugung zu demonstrieren, siehe auch Abbildung 7. Messgröße ist die Spannung am Schwingkreis V_{rf} :

1. $\Phi_{ext} = n \cdot \Phi_0$

Konsequenterweise beträgt der Fluss im Innern ebenfalls ganze Vielfache des Flussquants und daher $\Phi_{tot} = \Phi_{ext}$. Wird der Strom im Schwingkreis erhöht, so bedeutet dies auch einen linearen Spannungsanstieg in demselben. Gleichzeitig vergrößert sich der Fluss im Inneren des Ringes, was aber einen Abschirmstrom zur Folge hat, um den erhöhten Fluss durch ein Gegenfeld zu kompensieren (linearer Anstieg bis zum Punkt A).

Wird I_{rf} so weit erhöht, dass der kritische Strom erreicht wird, setzt das in Abbildung 6 dargestellt Verhalten ein. Dies zeigt, dass es nicht möglich ist, die Supraleitung aufrecht zu erhalten, wenn der Abschirmstrom zu groß wird. Dadurch, dass die Supraleitung unterbrochen wird, befindet sich der Ring im normalleitenden Zustand, er schwächt das äußere Feld, indem die Energie entzogen wird, die nun für den Stromfluss in seinem Inneren notwendig ist. Das Feld, und die damit verbundene (Induktions-)Spannung in der Spule, kann nicht über den Wert des kritischen Flusses hinaus erhöht werden. Dies ist durch das Plateau von Punkt A nach Punkt B verdeutlicht.

Genauer betrachtet springt der Supraleiter im Schleifendurchlauf für kurze Zeit in den nächsthöheren Zustand mit $n + 1$ und wieder zurück, anstatt wie bei kleineren Strömen eine stetige (in Abbildung 6 gestrichelte) Funktion darzustellen. Der Energieverlust führt dazu, dass der Schwingkreis stark gedämpft wird. Es werden einige Perioden benötigt, um den Fluss so weit zu erhöhen, dass ein erneuter Quantensprung stattfinden kann. Betreibt man den Schwingkreis mit einem höheren Strom I_{rf} im Rahmen der Breite des Plateaus, so führt dies nur dazu, dass die Periodenzahl, beziehungsweise die Zeit, zum Erreichen des kritischen Feldes geringer wird, so dass dann im Punkt B schließlich bei jedem Zyklus ein Quantensprung stattfindet.

Bei einer Stromstärke jenseits derer, welche dem Punkt B zuzuordnen ist, beginnt der Ablauf von vorne, für einen Fluss von $(n + 1)\Phi_0$. Der Anstieg verläuft in selber Weise linear bis zum Punkt C,

ab welchem zwei Quantensprünge stattfinden und der Abschirmstrom kompensiert die Differenz zu $n\Phi_0$, analog zu dem Plateau zwischen A und B. [Die Energie, welche durch den ersten Quantensprung entzogen wurde, ist natürlich immer noch vakant].

Zur Form des dargestellten Verlaufes: Der feste Flussquantensprung findet im Ursprung und bei Punkt B statt. Der Beginn des Plateaus und damit auch seine Länge ist festgelegt durch die kritische Stromstärke. V_{rf} bezeichnet die maximale Spannungsamplitude.

2. $\Phi_{ext} = (n + 1/2) \cdot \Phi_0$

Bis auf eine Verschiebung der Kurve ist der Verlauf identisch zu Fall 1 (Die gestrichelte Kurve beginnt ebenfalls im Ursprung, ist zu Anfangs jedoch deckungsgleich zu Fall 1). Der Unterschied besteht darin, dass durch den bereits vorhandenen externen Fluss ebenfalls schon ein Abschirmstrom zur Kompensation des zusätzlichen halben Flussquants im Supraleiter fließt. Erhöht man im Schwingkreis den Strom I_{rf} , so ist das Plateau, bei welchem ein Quantensprung stattfindet, schon früher erreicht. Gleichzeitig ist das Plateau aber auch kürzer - bedingt durch die Verschiebung der Kurve, da bereits ein Abschirmstrom vorhanden ist und daher $(n + 1)\Phi_0$ früher erreicht ist.

Der Messende stellt fest, dass bei festgelegter Stromstärke die Amplitude V_{rf} der Spannung geringer ist.

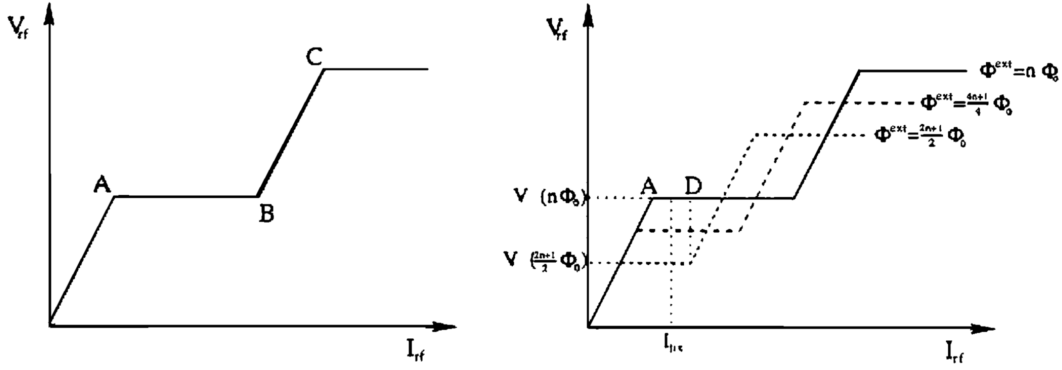


Abbildung 7: Verhältnis von Spannung zu Strom im Schwingkreis. (links) Fall 1. (rechts) Fall 2

2.2 Arbeitspunkt des SQUIDs

Es wird Gebrauch davon gemacht, dass bei konstanter Stromamplitude, abhängig vom bereits anliegenden äußeren Feld, die Amplitude der Spannung im Schwingkreis variiert.

Um zu verdeutlichen, wie verfahren wird, kann man annehmen, dass die Amplitude des Stromes sehr klein gewählt wird, so klein, dass die damit verbundene Flussänderung gegenüber dem Flussquant Φ_0 verschwindend gering ist. Dies würde bedeuten, dass V_{rf} dem Strom I_{rf} folgen würde, solange der externe Fluss nicht größer als der kritische Fluss wäre (linearer Bereich). Bei einem externen Fluss kleiner als ein Flussquant aber größer als der kritische Fluss würde sich keine Änderung von V_{rf} ergeben (Plateau).

Wählt man eine Stromamplitude, welche in Abbildung 7 ungefähr der Breite eines Hubes entspricht, erhält man eine maximale Varianz der Spannung, was in den folgenden Punkten erläutert und in Graph 8 dargestellt ist.

- Falls $\Phi_{ext} = n\Phi_0$, so entspricht die Amplitude der Spannung auf Höhe des ersten Plateaus, da dieses erreicht wird.
- Für ansteigendes Φ_{ext} wird der Hub der Spannung geringer, da das Plateau schon früher einsetzt. Das Minimum des Hubes wird erreicht, sofern der externe Fluss $\Phi_{ext} = (n + 1/2)\Phi_0$.

- Falls das externe Feld weiter anwächst, so steigt auch die Amplitude der Spannung, da der Strom eine Amplitude besitzt, welche bereits wieder über das Ende des Plateaus (welches, wie erläutert, ebenfalls kürzer wird) hinausgeht.
- Bei $\Phi_{ext} = (n + 1) \Phi_0$ wird schließlich das Maximum wieder erreicht.

Folglich: Steigt der externe Fluss gleichmäßig an, so ändert sich die maximale Spannung im externen Schwingkreis periodisch. Die Periodendauer ist gekoppelt mit einer Änderung des externen Flusses um ganze Flussquanten Φ_0 .

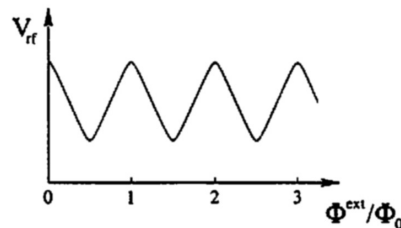


Abbildung 8: Spannungsverlauf in Abhängigkeit zum äußeren Fluss bei fester Stromamplitude

2.3 Lock-In Methode

Das im Praktikum vorhandene SQUID besitzt einen internen Lock-In Verstärker. Dieser ist nicht extern regelbar, woraus folgt, dass keine Kenntnis der Funktionsweise vorausgesetzt wird.

Ein Lock-In Verstärker wird immer dann benutzt, wenn es gilt, ein schwaches Messsignal über einem starken Hintergrundrauschen zu detektieren.

Das oben dargestellte Signal des Schwingkreises würde grundsätzlich schon zur Auswertung genügen. Allerdings ist dieses sowohl durch Fluktuationen des Magnetfeldes, als auch durch das Rauschen der Elektronik überlagert. Man behilft sich, indem man dem zu messenden Signal, welches sich auf der Zeitskala von Sekunden ändert, ein Hochfrequenzsignal aufmoduliert und genau dieses im Lock-In Detektor wieder demoduliert.

En Detail ist die Funktionsweise folgende:

- Das Spannungssignal erhält durch einen Frequenzgenerator eine zusätzliche Sinus-förmige Amplitudenmodulation mit einer Hochfrequenzspannung von einigen MHz.
- Im Lock-In Detektor wird das modulierte Messsignal mit dem von dem Frequenzgenerator direkt stammenden Referenzsignal multipliziert und über einen Integrator (Operationsverstärker mit Kondensator) integriert.

Es wird das Prinzip der Orthogonalität von Sinus und Kosinus ausgenutzt. Denn es gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega_1 \neq \omega_2 \\ \pi & \text{für } \omega_1 = \omega_2 \end{cases}$$

So werden alle Frequenzanteile herausgefiltert, welche nicht der Modulationsfrequenz entsprechen. Durch die Signallaufzeiten und Elektronik sind Referenz und Messsignal allerdings phasenverschoben. Eine gleiche Phase beider Funktionen ist enorm wichtig, da sonst das Integral, welches das Ausgangssignal darstellt, einen kleineren Wert annimmt oder verschwindet.

Die Integrationszeit bestimmt ebenfalls, wie stark das Signal geglättet wird, sollte aber nicht zu klein gewählt werden, da andernfalls statistisches Rauschen nicht ausreichend eliminiert wird.

Im SQUID-Versuch ist die Modulation des Messsignals intern mit den Einstellungen für den Schwingkreis gekoppelt. Die Phase ist, da die Elektronik fest bleibt, ebenfalls auf einen konstanten Wert eingestellt. Damit ist als Parameter des Lock-In Detektors nur die Kapazität des Kondensators im Integrator wählbar.

3 Versuchsaufbau

Die Komponenten des SQUID-Versuches:

- Isoliertes Gefäß zur Aufnahme von flüssigem Stickstoff (Kryostat)
- Probenschlitten inklusive Aufsatz für zwei verschiedene Probenhalterungen - eine stromdurchflossene Leiterschleife und eine Mehrzweckhalterung
- Motor samt Spannungsversorgung und auf verschiedene Umdrehungsgeschwindigkeiten einstellbares Getriebe
- JSQ-Magnetometer, bestehend aus der SQUID-Sonde, deren Signalverarbeitungselektronik und Spannungsversorgung
- Oszilloskop zur Darstellung des SQUID-Signals
- Computer zur Auslese des Oszilloskopes und Steuerung des Regelkreises des SQUIDs
- Widerstände zwischen $50\ \Omega$ und $1000\ \Omega$, sowie diverse Proben mit unbekanntem Dipolmoment

3.1 JSQ-Magnetometer

Das SQUID lässt sich über die Software 'JSQ Duo Sensor Control' bedienen. Dort sind folgende Parameter einstellbar¹¹:

- **VCA** - Die Stromamplitude des Schwingkreises. Die komplette Skala deckt, nicht ganz linear, einen Bereich von $-115\ \text{dBm}$ ($1,8 \cdot 10^{-9}\ \text{W}$) bei einem eingestellten Wert von 0 bis $-75\ \text{dBm}$ ($1,8 \cdot 10^{-7}\ \text{W}$) bei einem Wert von 4095.
- **VCO** - Regelung der Frequenz des Schwingkreises. Es können Werte von 630 MHz (0) bis 970 MHz (4095) eingestellt werden. Eine genaue Zuordnung findet sich im Benutzerhandbuch auf Seite 9.
- **OFF** - Dient zur Skalierung der Gesamtspannungsamplitude, dies wird hier dazu verwendet, das Signal um den Nullpunkt herum zu zentrieren.
- **Integr.C** - Kapazität des des Kondensators, welcher die Shaping-Zeit bestimmt. Größere Werte glätten das Signal mehr als kleine.
- **FB-R** Widerstandswert des sogenannten Feedback-Resistors. Durch seinen Wert wird die Spannung des Stromkreises festgelegt, was in diesem Fall die 'Verstärkung' der Schaltung definiert. Je nach Einstellung gelten unterschiedliche Verhältnisse für die Relation von Spannung zur Anzahl der Flussquanten. Es sind folgende Werte des Transfer-Koeffizienten s_i wählbar (Siehe auch Benutzerhandbuch Seite 25):

$R / k\Omega$	1	3	6	10	15	20	50	100
$s_i / mV/\Phi_0$	21	60	120	195	290	380	950	1900

3.2 Widerstände

Um verschiedene Dipolmomente der Leiterschleife einzustellen, können bei einer Spannung von etwa 3,2 V (2 AA Zellen) per Jumper unterschiedliche Widerstände gewählt werden.

Folgende Typen wurden eingebaut, die Genauigkeit beträgt 0,1 %:

Bezeichnung	R1	R2	R3	R4	R5
R / Ω	51,47	100,8	300,8	510,6	1000

¹¹zur Auswertung wird aber nur der Absolutwert des Widerstandes benötigt

4 Aufgabenstellung

Die Agenda umfasst diese Punkte:

1. Justieren Sie das SQUID, indem Sie mit Hilfe des Control-Panels des Magnetometers die korrekten Einstellungen zum Betrieb kalibrieren. Finden Sie die optimalen Werte zur Maximierung der Amplitude des SQUID-Patterns.
2. Bestimmen Sie die Dipolmomente/Feldstärken der Leiterschleife mit fünf Widerständen und vergleichen Sie diese mit den berechneten Werten.
3. Bestimmen Sie die Dipolmomente/Feldstärken einer Reihe weiterer Proben.
4. (optional) Stellen Sie in einer Polardarstellung die Stärke des Magnetfeldes in Abhängigkeit des Drehwinkels dar.

5 Versuchsdurchführung

5.1 Vorbereitung

Es ist grundsätzlich darauf zu achten, während der Messungen alle Einstellungen zu protokollieren.

Es sind folgende Größen vor dem Beginn der Messung zu erfassen:

- Der Abstand des SQUID-Sensors zum Probenmittelpunkt, beziehungsweise dem der Leiterschleife
- Die Spannung, welche an der Leiterschleife anliegt
- Der Radius der Leiterschleife

Nachdem der Kryostat etwa bis zur Hälfte mit flüssigem Stickstoff befüllt wurde, muss das SQUID mindestens 15 Minuten eingetaucht sein, bevor mit der Messung begonnen werden kann.

Am Ende des Versuches muss Wasser und Eis von dem SQUID mit Hilfe des Kaltluft-Föhns gründlich entfernt werden, da sonst, trotz der geschlossenen Bauform, Korrosion das empfindliche Gerät zerstört!

5.1.1 Das SQUID-Pattern

Um mit dem SQUID Messungen durchführen zu können, muss zuerst der Arbeitspunkt eingestellt werden. Dieser ist so zu wählen, dass die Amplitude der Spannungsantwort maximal wird. Die Grundlagen dazu finden sich im Kapitel -Arbeitspunkt des SQUIDs-.

Benutzen Sie die Software 'JSQ Duo Sensor Control' im Test-Modus. Diese steuert einen zum SQUID gehörigen Funktionsgenerator, welcher eine Dreiecksspannung zusätzlich in den Schwingkreis einkoppelt. Dadurch entsteht eine kontrollierte Flussänderung über mehrere Φ_0 im SQUID, dessen Spannungsantwort am Oszilloskop beobachtet werden kann. Dieser Verlauf wird SQUID-Pattern genannt.

Schließen Sie den Referenz Ausgang des Funktionsgenerators an einen der Eingänge des Oszilloskopes an, welchen Sie als Trigger verwenden. In den anderen führen Sie das Signal des SQUIDs ein.

Bei einer gleichzeitigen Darstellung beider Kanäle sollte das SQUID-Pattern die Form aus Abbildung 9 aufweisen (der Dreiecksgenerator produziert ungleichmäßig stark ansteigende Flanken, daher ist auch die 'Frequenz' des SQUID-Signals auf beiden Seiten des Umkehrpunktes unterschiedlich groß). Die ansteigende Spannung führt zu einer Flussänderung im SQUID. Die 'Periode' des SQUID-Patterns entspricht gerade einer Einheit von Φ_0 , die dazugehörige Spannungsdifferenz hängt von der Größe des Widerstandes des Schwingkreises ab:

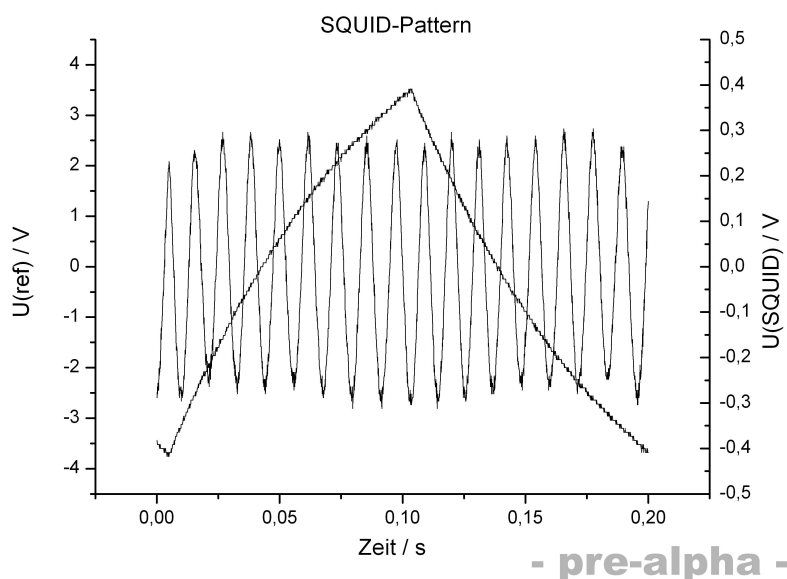


Abbildung 9: Beispielhafter Ausschnitt aus dem Signal des SQUIDs ($U(\text{SQUID})$) und des Funktionsgenerators ($U(\text{ref})$) im Test-Modus

- Stellen Sie den Schieberegler VCA auf einen Wert von etwa 1000 ein.
- Suchen Sie durch Variation von VCO den Wert der größten Amplitude der Spannung, falls mehrere Maxima zu finden sind, so wählen Sie das absolute Maximum.
- Verändern Sie den Wert von VCA so, dass die Amplitude schließlich maximiert wird.
- Zentrieren Sie das Signal des SQUID-Pattern durch Variation des Offsets um den Nullpunkt.

Es ist wichtig für den stabilen Betrieb, dass diese Einstellungen präzise durchgeführt werden. Die Werte für VCA, VCO und Offset (Kapazität des Kondensators für die Shaping-Zeit und Feedback-Resistor ausgenommen) dürfen nun nicht mehr im Laufe der Messung verändert werden. Ein Unterbrechen des Versuches macht eine Neukalibration erforderlich.

5.2 Berechnung der Stärke des Magnetfeldes

Das Magnetfeld der **Leiterschleife** im Abstand z berechnet sich zu:

$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{p}{z^3}$$

Das Dipolmoment p der Leiterschleife berechnet sich durch den Strom $I = V/R$, welcher eine Fläche A einschließt und durch die Spannung V am Widerstand R_i vorgegeben ist, nach $p = AI = AV/R_i$.

Durch den am SQUID eingestellten Wert des Feedback-Resistors s_i [V/Φ_0] lässt sich eine Spannung ΔV in einen Fluss umsetzen. Zur Berechnung der Stärke des Magnetfeldes, bestimmt durch diesen Fluss, benötigt man die Fläche der Öffnung des SQUIDs. Da aber durch den supraleitenden Zustand der Fluss verdrängt wird, gelangt nur ein Bruchteil in den Ring. Statt die 'effektive Fläche' zu benutzen, lässt sich aus dem Fluss direkt die Stärke des Magnetfeldes mit Hilfe des Feld-Fluss-Koeffizienten F [T/Φ_0] berechnen. Der Hersteller gibt einen Wert von $F = 9,3 \text{ nT}/\Phi_0$ an. Es gilt:

$$B_z = F \frac{\Delta V}{s_i}$$

(Die Kenntnis der 'effektiven Fläche' $A_{eff} = 1/F = 0,226 \text{ mm}^2$ ist nicht notwendig)

5.3 Dipolmomente

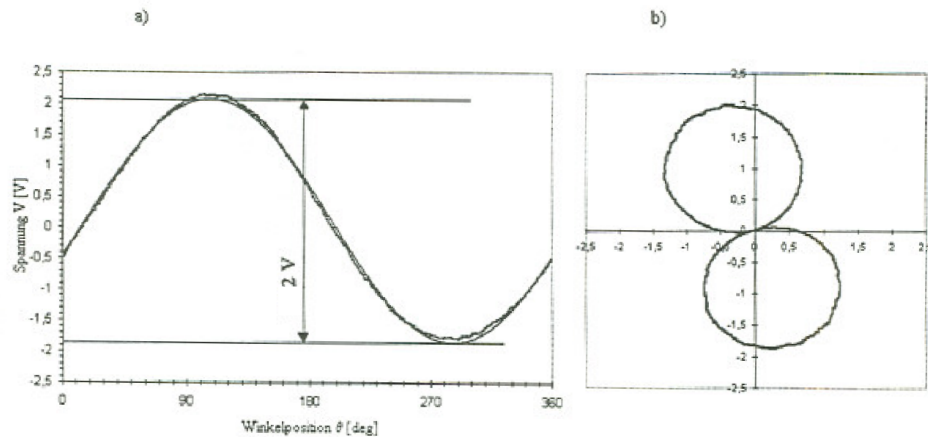


Abbildung 10: Exemplarische Darstellung einer Messreihe. Eine volle Periode mit angepasster Fitfunktion (links) und polarer Darstellung (rechts)

Zur Berechnung der Dipolmomente/Feldstärken nehmen Sie den Datensatz von mindestens einer kompletten Umdrehung der Probe auf.

Führen Sie einen Fit auf diesen Daten durch der Form:

$$f(x) = A + B \sin(Cx + D)$$

(Wann macht diese Parametrisierung Sinn?)

Daraus extrahieren Sie den Offset A , die Amplitude $B = \Delta V$ und die Kreisfrequenz $C = \omega$. Aus der Amplitude kann die maximale Stärke des Magnetfeldes $B_{z,max}$ berechnet werden. Stellen Sie in einem Diagramm die Feldstärke B_z in Abhängigkeit des Drehwinkels α dar.

Es bietet sich eine Darstellung in Polarkoordinaten an. Die dazu erforderliche Koordinatentransformation des kartesischen Systems (B_z, α) , in ursprünglicher Form $(\Delta V, t)$, in das polare (x_i, y_i) sieht wie folgt aus:

$$x_i = |B_z| \cos(\alpha)$$

$$y_i = |B_z| \sin(\alpha)$$

In Abbildung 10 ist beispielhaft dieses Vorgehen dargestellt. Eine vollständige Auswertung findet sich, falls notwendig, in der Staatsexamensarbeit.

6 Anhang

6.1 Satz von Stokes

Für ein (einfach differenzierbares) Vektorfeld \vec{A} , welches eine Oberfläche F durchdringt, gilt:

$$\int_F (\nabla \times \vec{A}) dF = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

wobei C eine geschlossene Kurve auf dem Rand dieser Oberfläche darstellt.

6.2 Maxwell-Gleichungen

Für die elektrische Feldstärke $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \delta\vec{A}/\delta t$ und die magnetische Flussdichte $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ eines Vektorfeldes \vec{A} und eines skalaren Feldes ϕ gilt:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad \text{Coulomb'sches Gesetz}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{Gauß'sches Gesetz}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\delta\vec{B}}{\delta t} \quad \text{Induktionsgesetz}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\delta\vec{E}}{\delta t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \text{Ampere'sches Gesetz}$$

mit der Ladungsdichte ρ und der Stromdichte \vec{j} .

6.3 Wahrscheinlichkeitsstrom

Sei $P(x, t)$ die Wahrscheinlichkeit einen Zustand 'zu messen' so ist $P(x, t) = |\Psi(x, t)|^2$. Dies ergibt 1, sofern zur Bildung des Skalarproduktes der normierten Wellenfunktionen über den gesamten Raum integriert wird. Die zeitliche Entwicklung wird beschrieben durch

$$\frac{\delta}{\delta t} P(x, t) = \frac{\delta}{\delta t} |\Psi(x, t)|^2 = \Psi^* \frac{\delta}{\delta t} \Psi + \Psi \frac{\delta}{\delta t} \Psi^* = \frac{1}{i\hbar} [\Psi^* H \Psi - (H \Psi)^* \Psi]$$

da die zeitliche Entwicklung eines Zustands durch die Schrödingergleichung (d.h. den Hamiltonoperator/die Energie) beschrieben wird

$$i\hbar \frac{\delta}{\delta t} \Psi^* = -H \Psi^*$$

mit $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$ (ohne zusätzliches Potential) ist

$$\frac{\delta}{\delta t} P(x, t) = \frac{\hbar}{2m} [\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*] = -i \nabla \frac{\hbar}{2m} [(\nabla \Psi^*) \Psi - \Psi^* \nabla \Psi]$$

Dies ergibt die Form einer Kontinuitätsgleichung (mit Teilchendichte ρ), sofern man den geklammerten Teil als Stromdichte j identifiziert.

$$\frac{\delta}{\delta t} \rho = -\frac{\delta}{\delta x} j$$

6.4 Verteilungsfunktionen

Verteilungsfunktionen geben die mittlere (Zustands-)Besetzungszahl $f(E)$ in Abhängigkeit der Energie E an.

Teilchen mit halbzahligem Spin nennt man **Fermionen**¹² und unterliegen der Fermi-Dirac-Statistik, welche den Charakter repräsentiert, dass jeder mögliche Zustand aus Quantenzahlen höchstens ein Mal besetzt werden darf - im Vergleich zu Teilchen mit ganzzahligem Spin, **Bosonen**¹³ genannt, welche der Bose-Einstein-Statistik folgen, und den selben Zustand mehrfach besetzen können. Für sehr kleine Temperaturen T bildet sich sogar der Extremfall aus - das Bose-Einstein-Kondensat, in welchem fast alle Teilchen den selben Grundzustand besetzen.

Während zwei 'verschiedene' Bosonen ununterscheidbar sind, gilt dies für Fermionen nicht. Vertauscht man in einer Vielteilchenwellenfunktion zwei Teilchen (ihre Quantenzahlen) so ändert die Gesamtwellenfunktion ihr Vorzeichen. Bildet man eine Vielteilchenwellenfunktion aus Produkten von Einteilchenwellenfunktionen, so muss diese antisymmetrisiert werden, damit der Vorzeichenwechsel bei Teilchenvertauschung gewährleistet ist.

6.4.1 Fermi-Statistik

Es gilt, mit $\beta = 1/k_B T$ und dem chemischen Potential μ (Fermi-Energie), welches ungefähr die Energie angibt, welche benötigt wird, um ein weiteres Teilchen dem Ensemble hinzuzufügen:

$$f(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1}$$

Kein Zustand kann mit einem zweiten Teilchen mit denselben Quantenzahlen besetzt werden. Je kleiner die Temperatur T , umso größer β und umso mehr nähert sich die Fermi-Verteilung einer Heaviside-(Stufen-)Funktion an.

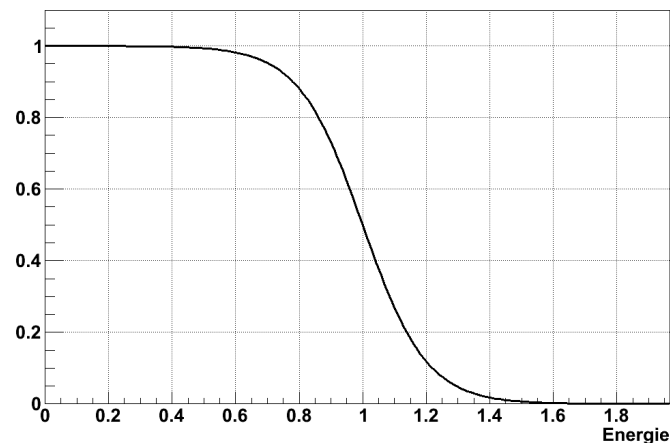


Abbildung 11: Fermi-Verteilungsfunktion für $\beta = 10$ und $\mu = 1$

6.4.2 Bose-Statistik

Es gilt, ähnlich wie bei der Fermi-Statistik, lediglich mit anderem Vorzeichen im Nenner, was aber tiefgreifende Folgen hat:

$$f(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} - 1}$$

¹²nach Enrico Fermi

¹³nach Satyendranath Bose

Es tritt eine Polstelle um μ herum auf. Dies bedeutet, dass es einen Zustand, den Grundzustand, gibt, in welchem sich beliebig viele Bosonen befinden dürfen. Geringe Temperaturen lassen die Funktion schmaler werden.

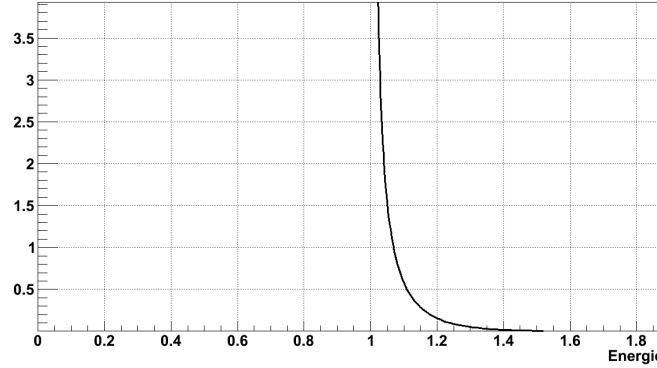


Abbildung 12: Fermi-Verteilungsfunktion für $\beta = 10$ und $\mu = 1$

6.4.3 Zustandsdichte

Die Zustandsdichte $D(E)$ charakterisiert die Menge an Zuständen, welche in einem Energieintervall $[E, E + \Delta E]$ verfügbar sind.

Im dreidimensionalen Fall lässt sich dies durch die Energie $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ eines freien Teilchens mit Wellenvektor \vec{k} berechnen. Dort ist die Anzahl der Zustände N durch eine Kugel im k -Raum mit Volumen $V_k = 4/3\pi k^3$ gegeben. Zu jedem erlaubten Wert des Wellenvektor gehört ein Volumen im Ortsraum von V_x . Daraus folgt:

$$N(k) = \frac{V_k}{V_x} = \frac{V}{3\pi^2} k^3$$

Substituiert man in diesem Ausdruck k durch eine Funktion von E mit $k = \sqrt{E2m/\hbar^2}$, so erhält man für die Zustandsdichte:

$$D(E) = \frac{\delta N(E)}{\delta E} = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} \propto \sqrt{E}$$

Die Anzahl der Zustände wächst mit der Wurzel der Energie.

Befindet sich ein Intervall nicht erlaubter Energie, beispielsweise aufgrund einer attraktiven Wechselwirkung, innerhalb der eigentlich erlaubten Zustände, so werden diese zu größeren beziehungsweise kleineren Energien hin verschoben (da die Wechselwirkung ebenfalls einen Beitrag zur Energie leistet).

Im Falle der Supraleitung ergibt sich eine Energielücke in der Zustandsdichte der Eielektronenzustände aufgrund der Elektron-Phonon-Wechselwirkung. Abbildung 14 zeigt die Zustandsdichte im Supraleiter um die Fermi-Energie herum. Die breite Lücke $2\Delta E$ sei für $T = 0 K$. Die schmalere deutet an, dass für schmale verbotene Energieintervalle die thermische Energie ausreicht, damit Elektronen höher gelegene (Leitungs-)Zustände besetzen können.

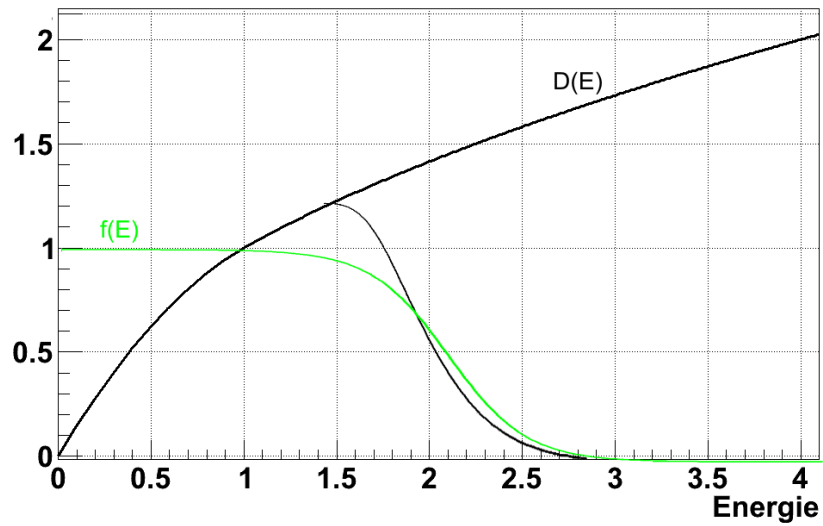


Abbildung 13: Zustandsdichte freier Elektronen $D(E)$ und Fermi-Verteilungsfunktion $f(E)$ in kombinierter Darstellung

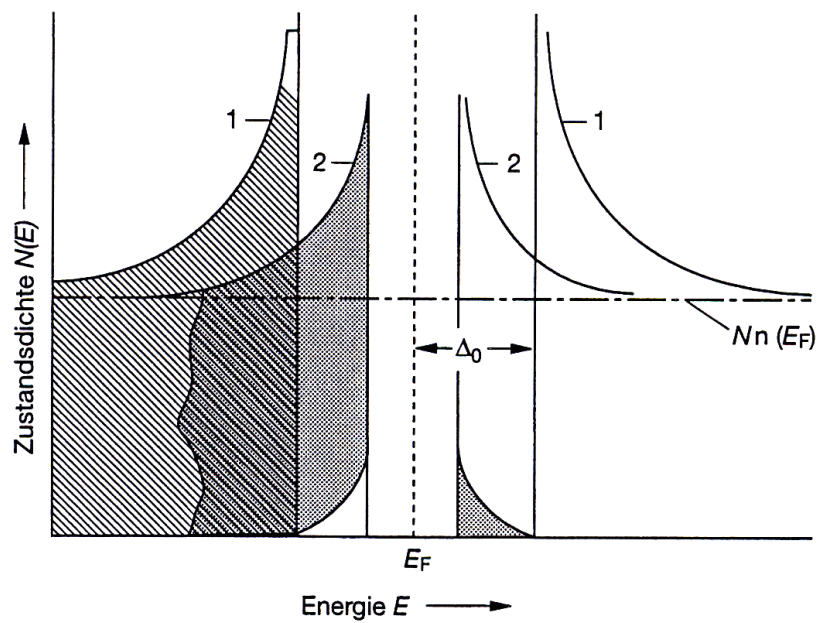


Abbildung 14: Zustandsdichte ungepaarter Elektronen im Supraleiter mit Energielücke für zwei verschiedene Temperaturen, aus [Buckel, Kleiner: Supraleitung, 6.Auflage 2007]

6.4.4 JSQ Duo Sensor Control

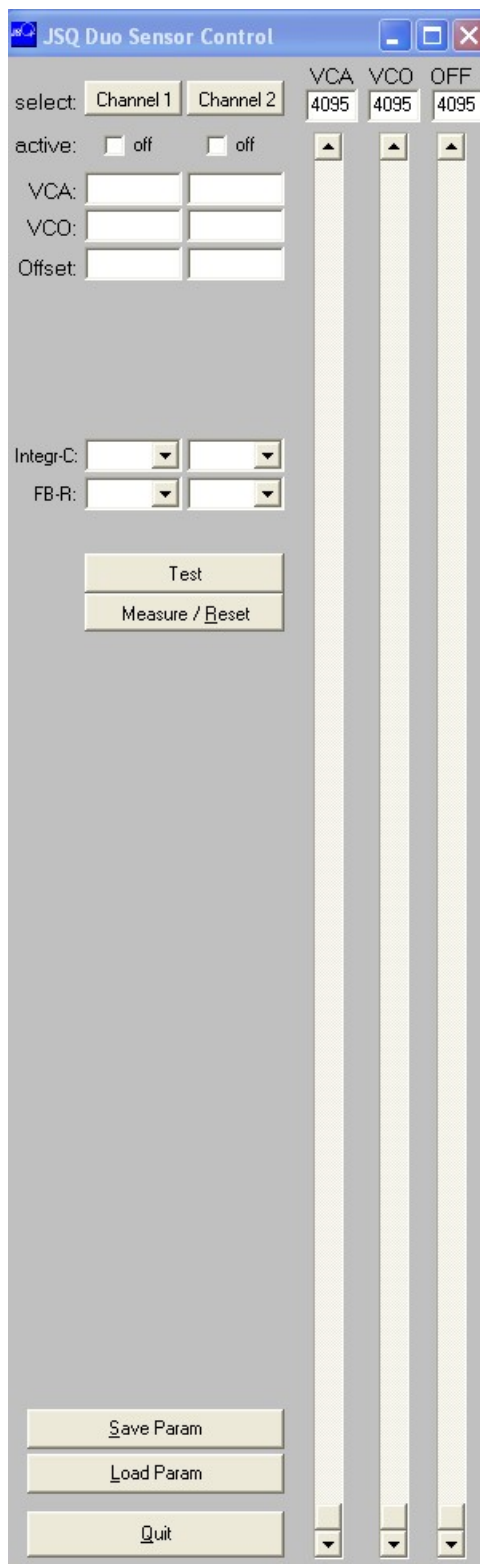


Abbildung 15: Das Steuerpanel von 'JSQ Duo Sensor Control'