

Versuch: Ultraschall

Paul Kremser, Tobias Grussenmeyer

Versuchsdurchführung: 6. und 7. Oktober 2009

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Überblick | 1 |
| 2 | Aufgabestellung | 1 |
| 3 | Theoretische Grundlagen | 2 |
| 3.1 | Beugung | 2 |
| 3.2 | Amplitudengitter | 2 |
| 3.3 | Aperturfunktion | 2 |
| 3.4 | Auflösungsvermögen | 3 |
| 3.5 | Phasengitter | 3 |
| 3.6 | Raman-Nath-Theorie | 4 |
| 4 | Versuchsaufbau | 5 |
| 5 | Durchführung | 6 |
| 6 | Auswertung | 6 |
| 6.1 | Gitterkonstante des Sinusgitters | 6 |
| 6.2 | Gitterkonstanten der fünf Amplitudengitter | 7 |
| 6.3 | Aperturfunktion und Verhältnis Spaltbreite zu -abstand von Gitter 1 | 11 |
| 6.4 | Auflösungsvermögen der Gitter | 12 |
| 6.5 | Vergleich der Messung am Phasengitter mit der Raman-Nath-Theorie | 12 |
| 6.6 | Bestimmung der Schallwellenlänge | 16 |
| 7 | Zusammenfassung | 19 |

1 Überblick

2 Aufgabestellung

Amplitudengitter

- Bestimmung der Gitterkonstante eines Sinusgitters aus dem Abstand des 1. Beugungsordnung
- Bestimmung der Gitterkonstanten von 5 Amplitudengittern
- Berechnung der Aperturfunktion für Gitter Nr. 1 (größte Gitterkonstante, höchste Dichte an Beugungsmaxima) aus den ermittelten Intensitäten der Beugungsordnungen und Zeichnen einer Periode der Aperturfunktion
- Bestimmung des Verhältnisses der Spaltbreite zum Spaltabstand aus der Aperturfunktion
- Bestimmung des Auflösungsvermögens der Gitter bei ihrer vollen Ausleuchtung

Phasengitter

- Messung der Intensitätsverteilung der Beugungsfigur eines Ultraschallwellengitters (Phasengitter) in Abhängigkeit von der Spannung am Ultraschallschwingquarz
- Vergleich der Messergebnisse mit der Raman-Nath-Theorie
- Bestimmung der Schallwellenlänge in Isooktan durch Ausmessen der Beugungsordnungen und Vergleich mit dem rechnerischen Wert

3 Theoretische Grundlagen

3.1 Beugung

Unter Beugung versteht man eine Richtungsänderung elektromagnetischer Wellen an einem Hindernis welche nicht von Reflexion oder Brechung herrührt. Dabei unterscheidet man zwischen zwei unterschiedlichen Versuchsanordnungen:

- Fresnel'sche Anordnung: Bei dieser Anordnung ist der Abstand Lichtquelle - Apertur oder Schirm - Apertur klein, d.h. die Form der Wellenfront des einfallenden Lichts ist nicht vernachlässigbar.
- Fraunhofer Anordnung: Im Gegensatz zur Fresnelschen Anordnung sind hier die Abstände groß, d.h. die Wellenfront des einfallenden Lichts kann als eben angenommen werden. Zusätzlich wird gefordert, daß die Beugungsöffnung groß gegen die Wellenlänge des einfallenden Lichtes ist.

Hier wird Beugung an Amplituden und Phasengittern an einer Fraunhofer Anordnung betrachtet.

3.2 Amplitudengitter

Jedes Gitter wird durch seine Gitterkonstante K charakterisiert. Die Gitterkonstante gibt den Abstand zweier benachbarter Spaltmitten an. Bei bekannter Wellenlänge λ lässt sich die Gitterkonstante aus dem Winkel des m -ten Intensitätsmaximum gegenüber dem 0-ten Maximum berechnen:

$$K = \frac{m \lambda}{\sin \theta} \quad (1)$$

3.3 Aperturfunktion

Jedem Objekt, an dem Beugung stattfindet, lässt sich eine Aperturfunktion g zuordnen. Die Aperturfunktion beschreibt die Eigenschaften des Objekts indem sie jedem Punkt in der Blendenebene einen Wert zuordnet. Mit Hilfe des Kirchhoffschen Integraltheorems und der daraus erhaltenen Integralformel für die Amplitude einer Kugelwelle auf dem Rand ihres Ausbreitungsgebietes kann man zeigen, dass die Fouriertransformierte der Aperturfunktion g des Beugungsobjekts gerade die Intensitätsverteilung I des Beugungsbildes ist.

$$I = |\Psi(x, y)|^2 = \left| \int_{Blende} g e^{-ikr} dA \right| \quad (2)$$

Umgekehrt lässt sich durch Fouriertransformation aber auch die Aperturfunktion aus der Intensitätsverteilung gewinnen. Die Fouriertransformierte einer Funktion ist wie folgt definiert:

$$F(g) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx \quad (3)$$

Ist die genaue Intensitätsverteilung nicht vollständig bekannt so kann man die Aperturfunktion ersatzweise in einer Fourierreihe nähern. Hierzu werden die Wurzeln der Intensitätsmaxima als Koeffizienten genommen:

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \pm \sqrt{I_j} \cos\left(\frac{x}{K} 2\pi j\right) \quad (4)$$

Bei einem Sinusgitter (hier treten nur Maxima 0-ter und 1-ter Ordnung auf) ergibt sich z.B.:

$$g(x) = \sqrt{I_0} + \sqrt{I_1} \cos\left(\frac{x}{K} 2\pi\right)$$

Aus dem erhaltenen Graph der Aperturfunktion kann man dann die Spaltbreite und den Spaltabstand ablesen.

3.4 Auflösungsvermögen

Die Definition des Auflösungsvermögens a ist:

$$a = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (5)$$

mit der Wellenlänge λ und dem Wellenlängenabstand $\Delta\lambda$ bei dem eine von λ verschiedene Wellenlänge bei Beugung gerade noch unterscheiden lässt. Zudem gilt:

$$a = N m \quad (6)$$

mit der Anzahl der ausgeleuchteten Gitterlinien N und der größten beobachteten Beugungsordnung m .

3.5 Phasengitter

Hier ist - im Gegensatz zum Amplitudengitter - die Transmission konstant, moduliert wird die Phase. Eine Ultraschallwelle erzeugt in Isooktan Bereiche unterschiedlicher Dichte und somit unterschiedli-

cher Brechungsindizes. Somit treten ehemals gleichphasige Wellen phasenverschoben aus dem Gitter aus und können miteinander interferieren. Für den Brechungsindex n in der Flüssigkeit gilt:

$$n(x) = n_0 + \Delta n \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda} x\right) \quad (7)$$

mit Λ der Schallwellenlänge, welche das Analogon der Gitterkonstante beim Amplitudengitter ist. Da Δn proportional zur Schallintensität S ist können wir den Brechungsindex mit der Amplitude der Schallwelle ändern.

3.6 Raman-Nath-Theorie

Für die Winkel der Intensitätsmaxima des Beugungsbildes gilt in m -ter Ordnung:

$$\sin \theta = \pm \frac{\lambda}{\Lambda} m \quad (8)$$

Die Intensitäten der Maxima m -ter Ordnung verhalten sich zu denen m' -ter Ordnung wie die Besselfunktion der m -ten zu denen der m' -ten Ordnung.

$$\frac{I_m}{I_{m'}} = \frac{J_m^2(\Delta n D \cdot 2\pi / \lambda)}{J_{m'}^2(\Delta n \cdot 2\pi / \lambda)} \quad (9)$$

4 Versuchsaufbau

Der Strahl eines He-Ne-Lasers ($\lambda = 632,8nm$) wird zunächst durch eine erste Linse $L_1(100mm)$ aufgeweitet, dann mit einer zweiten $L_2(150mm)$ in ein paralleles Strahlenbündel verwandelt. Der Strahl wird mittels einer Blende begrenzt und trifft dann auf das Beugungshinderniss (Gitter, Ultraschallzelle). Das Beugungsbild wird mittels einer dritten Linse $L_3(300mm)$ focussiert und über einen Drehspeigel 12,5 mal pro Sekunde über eine Photodiode geschoben. Deren Signal wird vorverstärkt und dann auf ein Oszilloskop zur Darstellung gegeben.

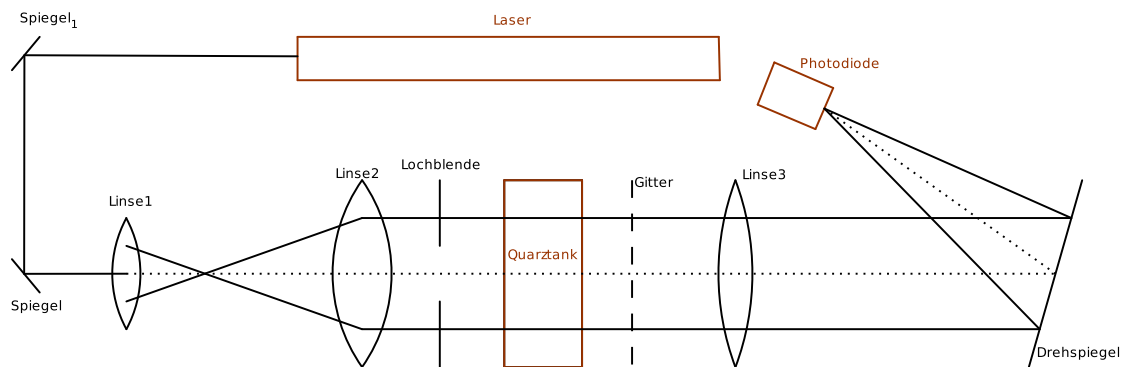


Abbildung 1: Versuchsaufbau mit Quarztank und Eichgitter

5 Durchführung

Zuerst nahmen wir alles aus dem Strahlengang um den Laserstrahl möglichst waagrecht und gerade auszurichten. Danach ordneten wir die optischen Elemente wie in obiger Abbildung an. Wir nahmen die Beugungsbilder von 5 verschiedenen Gittern sowie einem Eichungsgitter mit bekannter Gitterkonstante auf indem wir die Bilder des Oszilloskops auswerteten. Zur Ermittlung des Auflösungsvermögens versuchten wir den Durchmesser des Lichtstrahls zu bestimmen, dann zählten wir die Anzahl der Beugungsordnungen bei den verschiedenen Gittern. Daraufhin setzten wir die mit Isooktan gefüllte Ultraschallzelle ein und nahmen eine Serie von Beugungsbildern in Abhängigkeit zur angelegten Spannung auf. Um die Schallwellenlänge zu bestimmen nahmen wir nochmals ein Bild des Eichgitters auf, diesmal aber mit dem vorgesetzten Isooktantank. Zuletzt entnahmen wir wieder alle Linsen und brachten das Sinusgitter ein um den Abstand zwischen der nullten und ersten Beugungsordnung, sowie den Abstand zwischen Schirm und Gitter zu messen.

6 Auswertung

6.1 Gitterkonstante des Sinusgitters

Bei der Beugung am Sinusgitter masen wir als Abstand zwischen den Beugungsordnungen $a = (4,7 \pm 0,1)cm$ und zwischen Gitter und Schirm masen wir $b = (5,7 \pm 0,2)cm$. Der Sinus ergibt sich aus a und der Hypotenuse des durch durchtrittspunkt auf dem Gitter, nullter und erster Ordnung auf dem Schirm gebildeten Dreiecks. Diese Hypotenuse ergibt sich zu $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Also folgt für den Winkel:

$$\sin(\vartheta) = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

nach Gleichung 1 folgt also für Gitterkonstante K

$$K = \frac{\lambda}{\sin(\vartheta)} = \frac{\lambda}{a} \sqrt{a^2 + b^2} = \lambda \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1}$$

und für den Fehler s_K :

$$s_K = \sqrt{\frac{\partial K}{\partial a} s_a^2 + \frac{\partial K}{\partial b} s_b^2} = \frac{b\lambda}{a^2} \sqrt{\frac{a^2 s_b^2 + b^2 s_a^2}{a^2 + b^2}}$$

Hiermit erhielten wir als Ergebnis die Gitterkonstante des Sinusgitters:

$$K = (9,95 \pm 0,24) \cdot 10^{-7}m$$

6.2 Gitterkonstanten der fünf Amplitudengitter

Um die Gitterkonstante der 5 Amplitudengitter zu bestimmen musste zunächst die Zeitachse des Oszilloskops in den Sinus des Ablenk winkels umgerechnet werden. Hierfür wurde eine Eichmessung mit einem Referenzgitter R, dessen Gitterkonstante bekannt war durchgeführt. Die Angabe lautete 80 Linien pro cm, was einer Gitterkonstanten von $K_R = 0,0125\text{cm}$ entspricht. Also lies sich mit Gleichung 1 die Werte von $\sin(\vartheta)$ zu den verschiedenen Ordnungen m berechnen. Diese trugen wir dann gegen die von uns gemessenen Zeitwerte auf und ermittelten, aus dem so entstehenden linearen Zusammenhang $\sin(\vartheta)$, durch Geradenanpassung die Werte für a und b.

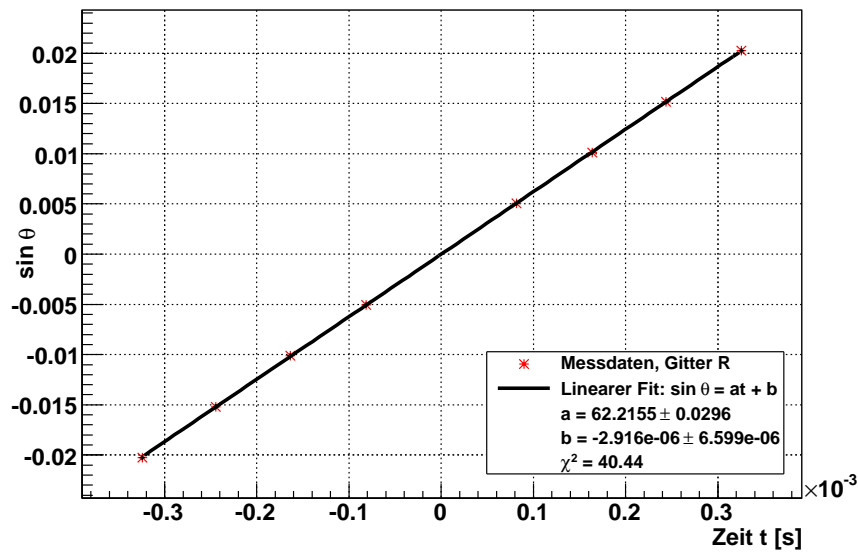


Abbildung 2: Eichung der Zeitachse durch Referenzgitter

Aus diesem Fit erhält man also direkt die Umrechnung $\sin(\vartheta) = at + b$ mit $a = (62,22 \pm 0,03)\text{s}^{-1}$ und $b = (2,92 \pm 6,7) \cdot 10^{-6}$. Wir können also nun Anhand der Zeitskala auf den Sinus des Beugungswinkels der Gitter mit unbekanntem K rückschliessen. Der Fehler hierfür ergibt sich zu:

$$s_{\sin(\vartheta)} = \sqrt{\left(\frac{\partial \sin(\vartheta)}{\partial t}\right)^2 s_t^2 + \left(\frac{\partial \sin(\vartheta)}{\partial a}\right)^2 s_a^2 + \left(\frac{\partial \sin(\vartheta)}{\partial b}\right)^2 s_b^2} = \sqrt{a^2 s_t^2 + t^2 s_a^2 + s_b^2} \quad (10)$$

Weiter lassen sich also nun auch über Gleichung 1 die Gitterkonstanten K_i für die fünf Amplitudengitter bestimmen. Dabei wird der lineare Zusammenhang

$$\sin(\vartheta) = \frac{\lambda}{K_i} m = a_i m \quad (11)$$

ausgenutzt und K_i aus der durch die Geradenanpassung ermittelten Steigung a_i berechnet. Der Fehler von $K_i = \frac{\lambda}{a_i}$ beträgt:

$$s_{K_i} = K_i \frac{s_{a_i}}{a_i} \quad (12)$$

Wir erhielten also als Ergebnis für die Gitterkonstanten der Gitter:

$$K_1 = (137,17 \pm 0,08) \mu m$$

$$K_3 = (109,2 \pm 0,12) \mu m$$

$$K_4 = (107,45 \pm 0,09) \mu m$$

$$K_{PHYWE08534} = (133,9 \pm 0,18) \mu m$$

$$K_{PHYWE08540} = (107,29 \pm 0,05) \mu m$$

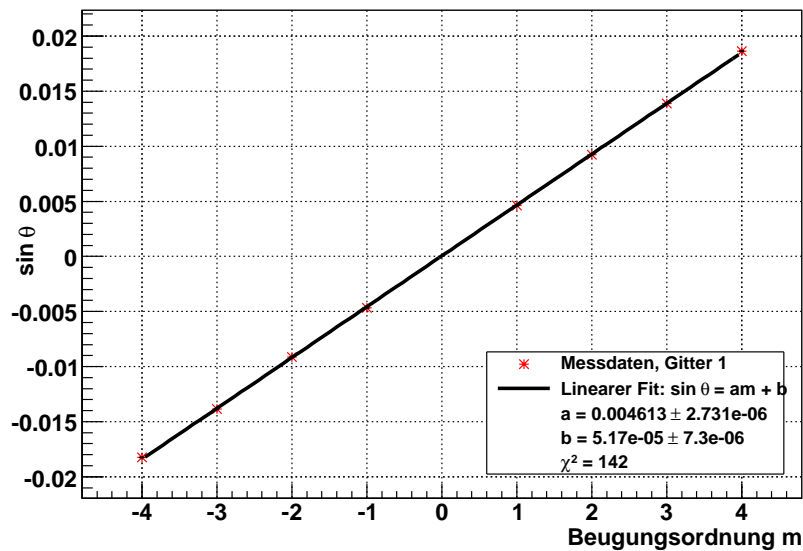


Abbildung 3: lineare Regression der Daten zu Gitter 1

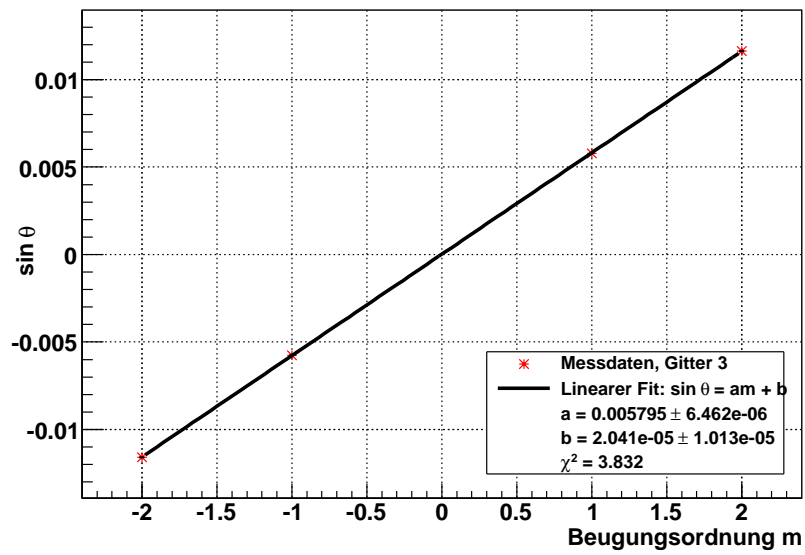


Abbildung 4: lineare Regression der Daten zu Gitter 3

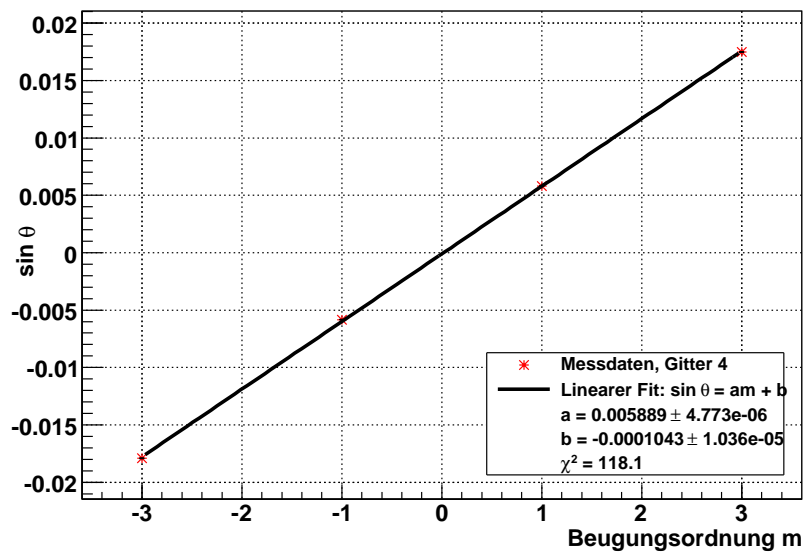


Abbildung 5: lineare Regression der Daten zu Gitter 4

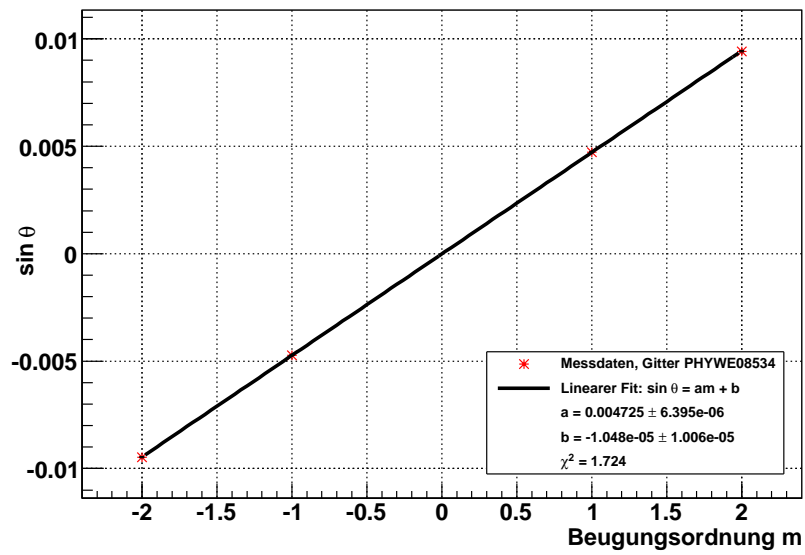


Abbildung 6: lineare Regression der Daten zu Gitter PHYWE08534

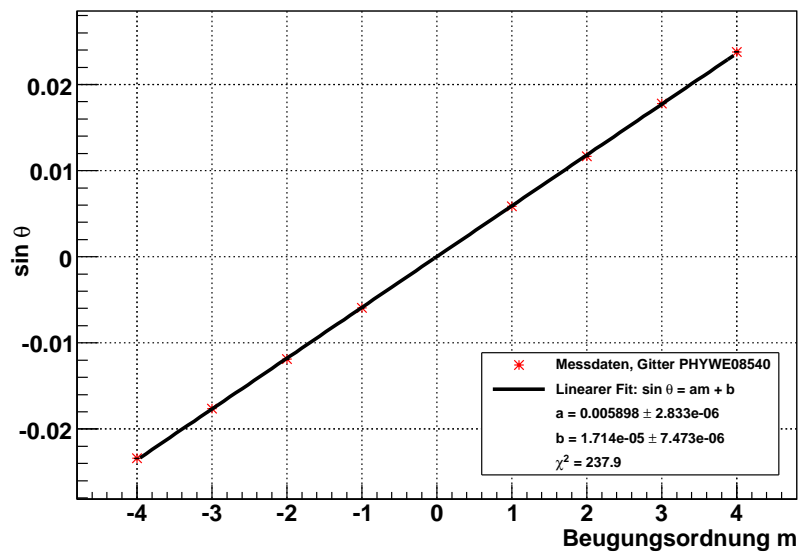


Abbildung 7: lineare Regression der Daten zu Gitter PHYWE08540

6.3 Aperturfunktion und Verhältnis Spaltbreite zu -abstand von Gitter 1

Wie in der Vorbereitung beschrieben nutzen wir zur Approximation der Aperturfunktion g die Fourierreihe:

$$g(x) = \sum_{j=0}^m \sqrt{I_j} \cos\left(\frac{x}{K} 2\pi j\right) \quad (13)$$

Die Intensitäten messen wir für jede Ordnung der Beugungsmaxima auf beiden Seiten und verwenden den Mittelwert. Dabei schätzten wir einen Ablesefehler von $5mV$.

$$I_0 = (6585 \pm 5)mV$$

$$I_1 = (226 \pm 5)mV$$

$$I_2 = (178 \pm 5)mV$$

$$I_3 = (118 \pm 5)mV$$

$$I_4 = (58 \pm 5)mV$$

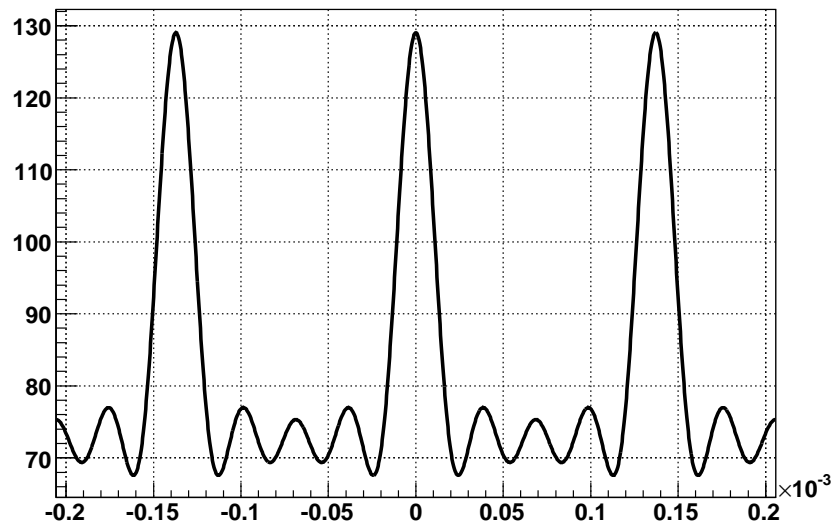


Abbildung 8: Approximation der Aperturfunktion für Gitter 1

Für das Verhältnis von Spaltbreite zu Spaltabstand benutzten wir den Wert der vollen Breite des halben Maximums (FWHM) als Wert für die Spaltbreite w . Der Spaltabstand d berechnete sich dann

mit Hilfe der Gitterkonstante K aus $d = K - w$. Damit folgt direkt das Verhältnis $v = \frac{w}{d}$, mit dem Fehler $s_v = v \frac{s_d}{d}$:

$$v = 0.19837 \pm 0,00019$$

6.4 Auflösungsvermögen der Gitter

Für den Durchmesser massen wir einen Wert von $d = (3 \pm 0,5) \text{ mm}$. Die Anzahl der ausgeleuchteten Gitterlinien beträgt $N = \frac{K}{d}$. Das Auflösungsvermögen folgt dann nach Gleichung 6

$$a = Nm = \frac{K}{d}m \quad (14)$$

mit dem Fehler

$$s_a = a \frac{s_N}{N} = a \sqrt{\left(\frac{s_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{s_K}{K}\right)^2} \quad (15)$$

Wir erhielten als Auflösungsvermögen:

$$a_1 = 109 \pm 18$$

$$a_3 = 55,0 \pm 9,2$$

$$a_4 = 27,9 \pm 4,7$$

$$a_{PHYWE08534} = 90 \pm 15$$

$$a_{PHYWE08540} = 84 \pm 14$$

6.5 Vergleich der Messung am Phasengitter mit der Raman-Nath-Theorie

Bei der Messung hatten wir leider einen nicht wegzubekommenden Peak neben dem Maximum der 0. Ordnung. Dieser wurde vermutlich von einer Reflexion verursacht. Aus diesem Grund verwendeten wir nur die Positionsdaten der Maxima links von der 0. Ordnung.

Gemessen wurde der Spannungsabhängige Verlauf der einzelnen Beugungsordnungen. Um einen Vergleich mit der Raman-Nath-Theorie anstellen zu können müssen die gemessenen Intensitätswerte auf $I_0(0) = J_0(0) = 1$ normiert werden. Um den Umrechnungsfaktor b der die Generatorspannung in das passende Argument der Besselfunktion zu erhalten nimmt man normalerweise den Spannungswert des ersten Minimums der 0. Ordnung und teilt ihn durch den x -Wert des ersten Minimums der Besselfunktion selbiger Ordnung. Entsprechend verfährt man mit dem ersten Maximum der 1. Ordnung.

Da sich in unserer Messung das erste Minimum der 0. Ordnung nicht bestimmen ließ basiert unsere Umrechnung nur auf den Daten der 1. Ordnung. Als Umrechnungsfaktor haben wir $b = 0,36824$ erhalten. Somit konnten wir die Quadrierten Besselfunktionen in die Graphen der einzelnen Ordnungen mit einfügen.

Für den Fehler auf die normierten Intensitäten erhält man:

$$s_{I/I_0} = |I/I_0| \sqrt{\left(\frac{s_I}{I}\right)^2 + \left(\frac{s_{I_0}}{I_0}\right)^2} \quad (16)$$

Für den Ablesefehler der Generatorspannung haben wir $0,1V$ angenommen.

Die Besselfunktionen wurden mittels der J_n Implementierung aus dem Pythonpaket SciPy berechnet.

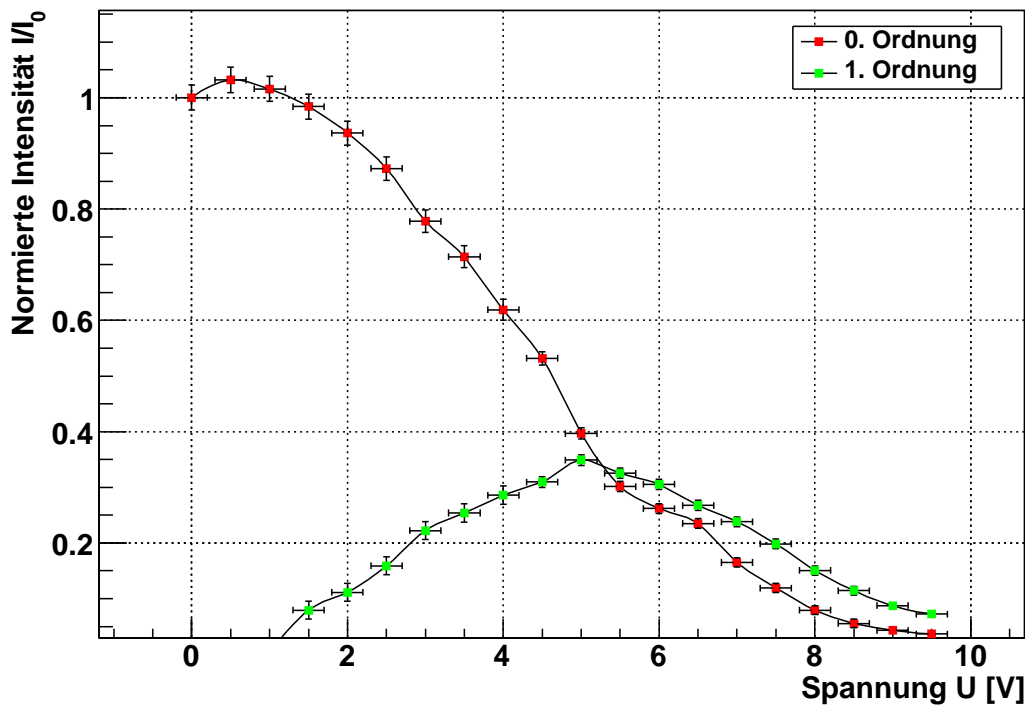
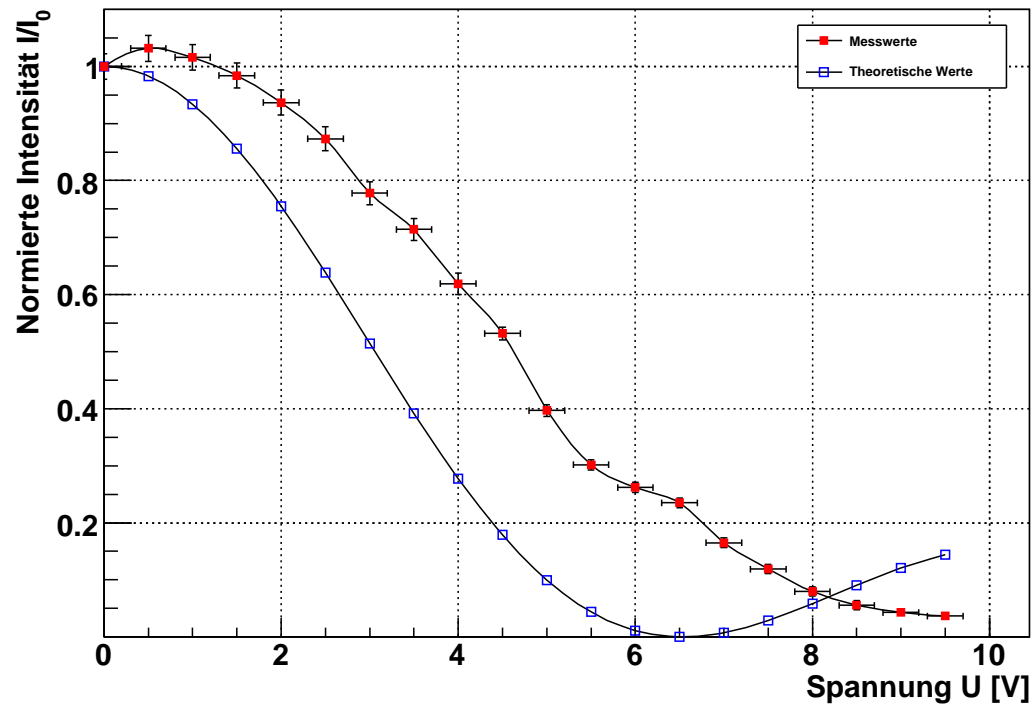
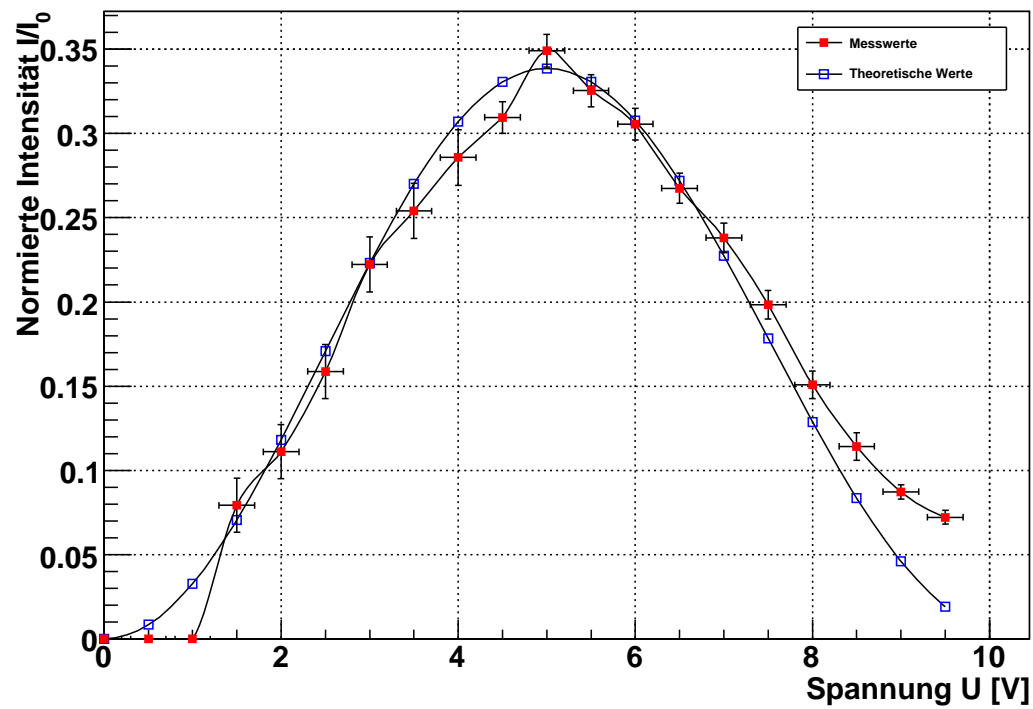
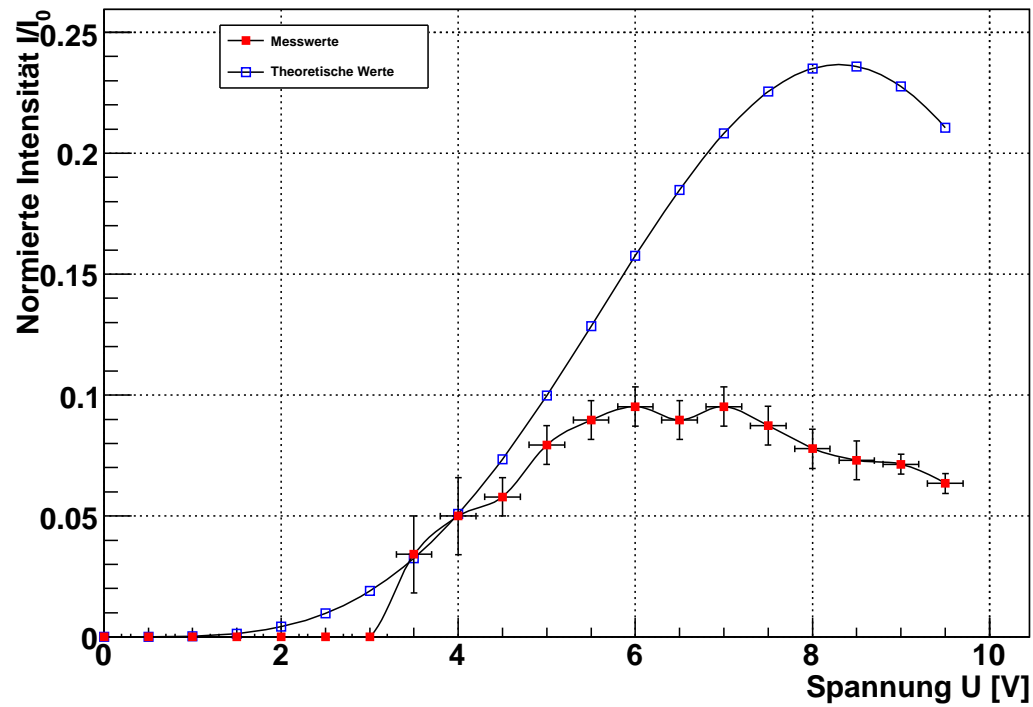
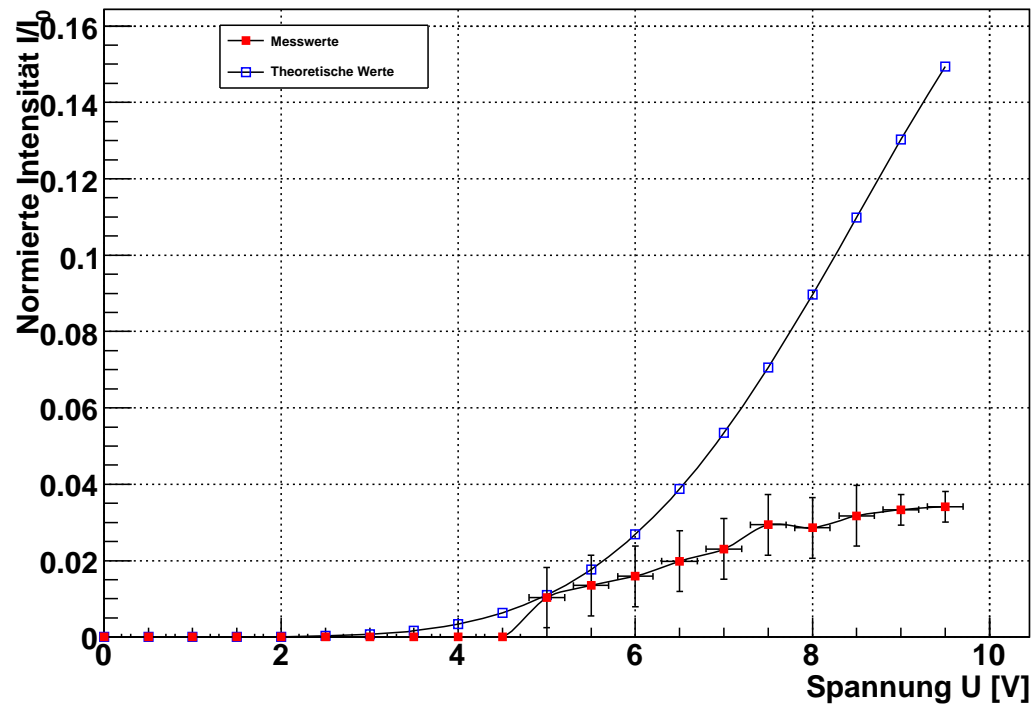
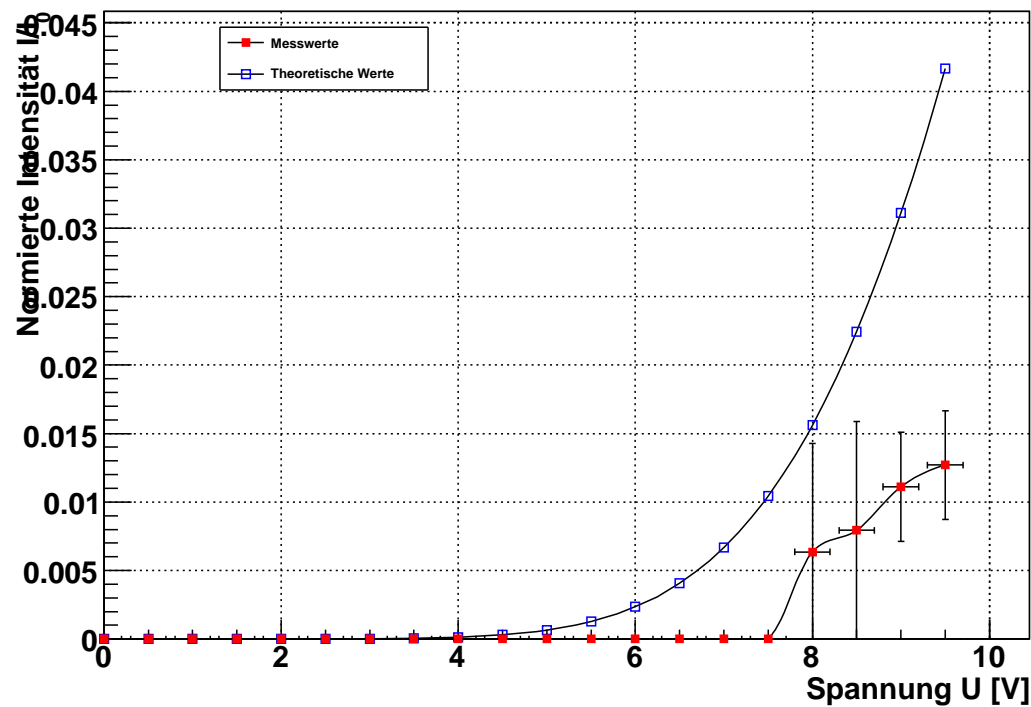


Abbildung 9: Verlauf der 0. und 1.Ordnung mit der Generatorspannung

Abbildung 10: 0.Ordnung und Besselfunktion J_0^2 Abbildung 11: 1.Ordnung und Besselfunktion J_1^2

Abbildung 12: 2.Ordnung und Besselfunktion J_2^2 Abbildung 13: 3.Ordnung und Besselfunktion J_3^2

Abbildung 14: 4.Ordnung und Besselfunktion J_4^2

6.6 Bestimmung der Schallwellenlänge

Durch die Veränderung des Versuchsaufbaus (Einsetzen der Ultraschallzelle) musste die Eichung der Zeitachse aufs neue durchgeführt werden. Hierzu setzten wir das Gitter R (80 Striche/cm) hinter die Ultraschallzelle in der Strahlengang und bestimmten wieder die Zeitunterschiede zw. 0. und m -ter Ordnung.

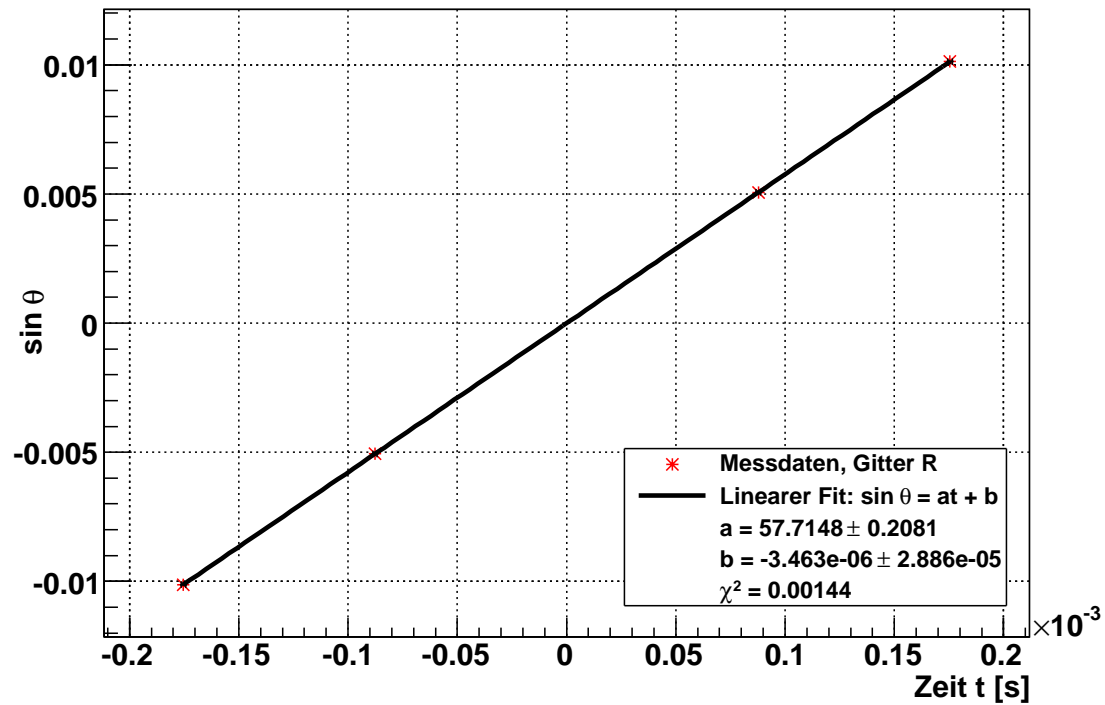


Abbildung 15: Eichung der Zeitachse mit Gitter R

Durch lineare Regression erhält man den Zusammenhang zw. Zeit und $\sin \theta$: $\sin \theta = a t + b$ mit $a = (57,7 \pm 0,2) \frac{1}{s}$ und $b = (0,4 \pm 2,9) \cdot 10^{-5}$.

Die Schallwellenlänge lässt sich dann analog zur Gitterkonstante mit linearer Regression aus dem Graph $\sin \theta$ gegen m berechnen:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{a} = (5.678 \pm 0,052) \cdot 10^{-4} m \quad (17)$$

Mit der Schallgeschwindigkeit in Isooktan von $c = 1111 \frac{m}{s}$ lässt sich die Ultraschallfrequenz berechnen zu:

$$f = \frac{c}{\Lambda} = (1.957 \pm 0.018) MHz \quad (18)$$

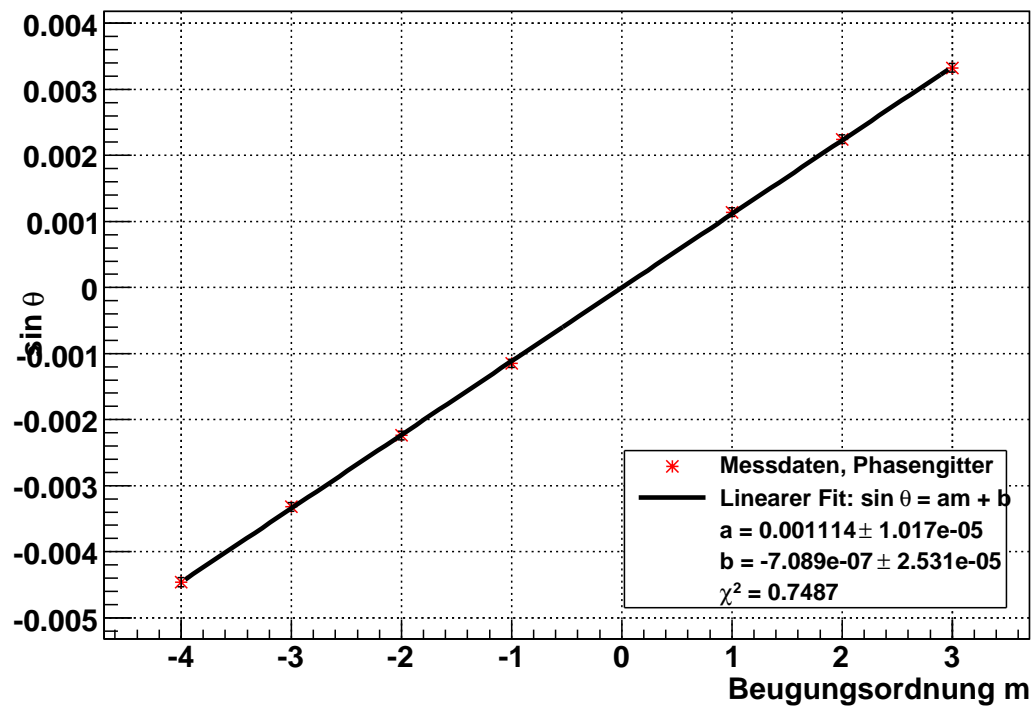


Abbildung 16: Ultraschallphasengitter

Fazit Leider konnten wir die Raman Nath Theorie nur teilweise verifizieren, und die Auflösungsvermögen liessen sich nur bis auf einen zu grossen Fehler bestimmen. Letzteres lag an der schlechten Messmöglichkeit des Strahldurchmessers. Alle anderen Versuchsteile erzielten befriedigende Ergebnisse.

7 Zusammenfassung

- Als Gitterkonstante des Sinusgitters erhielten wir

$$K = (9,95 \pm 0,24) \cdot 10^{-7} m.$$

- Als Gitterkonstanten der fünf Amplitudengitter erhielten wir

$$K_1 = (137,17 \pm 0,08) \mu m$$

$$K_3 = (109,2 \pm 0,12) \mu m$$

$$K_4 = (107,45 \pm 0,09) \mu m$$

$$K_{PHYWE08534} = (133,9 \pm 0,18) \mu m$$

$$K_{PHYWE08540} = (107,29 \pm 0,05) \mu m$$

- Für Gitter 1 erhielten wir über die Aperturfunktion den Abstand von Spaltbreite zu Spaltabsand zu

$$v = 0.19837 \pm 0,00019$$

- Als maximal Auflösungsvermögen der Gitter erhielten wir

$$a_1 = 109 \pm 18$$

$$a_3 = 55,0 \pm 9,2$$

$$a_4 = 27,9 \pm 4,7$$

$$a_{PHYWE08534} = 90 \pm 15$$

$$a_{PHYWE08540} = 84 \pm 14$$

- Durch die Messergebnisse am Phasengitter lies sich die Raman-Nath-Theorie nur teilweise verifizieren, für die erste Beugungsordnung stimmt der Kurvenverlauf der Messergebnisse recht gut mit dem erwarteten überein. Für die zweite stimmt der Verlauf qualitativ auch noch ungefähr, für alle anderen erkannten

wir leider keine Übereinstimmung unserer Messungen mit der jeweiligen quadrierten Besselfunktion. Dies deutet auf einen systematischen Fehler unserer Messung hin, zB könnte aufgrund der geringen Füllhöhe des Isooktantanks die Korrelation zwischen angelegter Spannung und dadurch entstehender Amplitude der Ultraschallwelle verändert worden sein.

- Als Schallwellenlänge erhielten wir

$$\Lambda = (5.678 \pm 0,052) \cdot 10^{-4}m$$