

Versuch: Ringlaser

Paul Kremser, Tobias Grussenmeyer

Versuchsdurchführung: 1. und 2. Oktober 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Überblick	1
2	Aufgabestellung	1
3	Theoretische Grundlagen	1
3.1	Mitführungskoeffizient	1
3.2	Der Dispersionsterm	2
3.3	Frequenzunterschied zwischen links- und rechtsumlaufender Welle	5
4	Versuchsaufbau	6
5	Durchführung	7
6	Auswertung	8
6.1	Variabler Durchtrittspunkt	8
6.2	Variation der Drehzahl	11
6.3	Vergleich mit berechnetem Mitführungskoeffizient	13
7	Zusammenfassung	14

1 Überblick

Mit Hilfe eines Ringlasers soll der Mitführungskoeffizient bestimmt werden. Hierzu wird der Laserstrahl durch eine schräg stehende rotierende Quarzscheibe geführt. Dies hat zur Folge, dass rechts- und linksumlaufernde Welle veränderte optische Weglängen vorfinden. Durch Messung der daraus resultierenden Frequenzdifferenz lässt sich der Mitführungskoeffizient bestimmen.

2 Aufgabestellung

- Bestimmung des Mitführungskoeffizienten α durch Messung der Schwebungsfrequenz bei
 1. Variation des Durchtrittspunktes x_0 für 3 bis 4 feste Drehzahlen und
 2. Variation der Drehzahl für 3 bis 4 eingestellte Werte von x_0
- Vergleich des experimentell gefundenen Werts für α mit dem aus dem Brechungsindex berechneten Wert.

3 Theoretische Grundlagen

Im Vakuum breitet sich Licht mit der konstanten Lichtgeschwindigkeit c aus. Bei Ausbreitung von Licht in einem Medium hingegen hängt die Geschwindigkeit vom Brechungsindex $n(\lambda)$ und der Relativgeschwindigkeit des Mediums ab.

3.1 Mitführungskoeffizient

Der Mitführungskoeffizient α lässt sich aus der Relativitätstheorie ableiten. Hierzu betrachte man zwei Systeme K und K' welche sich in x -Richtung mit der Geschwindigkeit w voneinander entfernen. Für die Geschwindigkeit v in K , eines Teilchens welches sich in K' mit der Geschwindigkeit v' in x' -Richtung bewegt, gilt nach der Lorenztransformation:

$$v = \frac{v' + w}{1 + v' \times \frac{w}{c^2}} \quad (1)$$

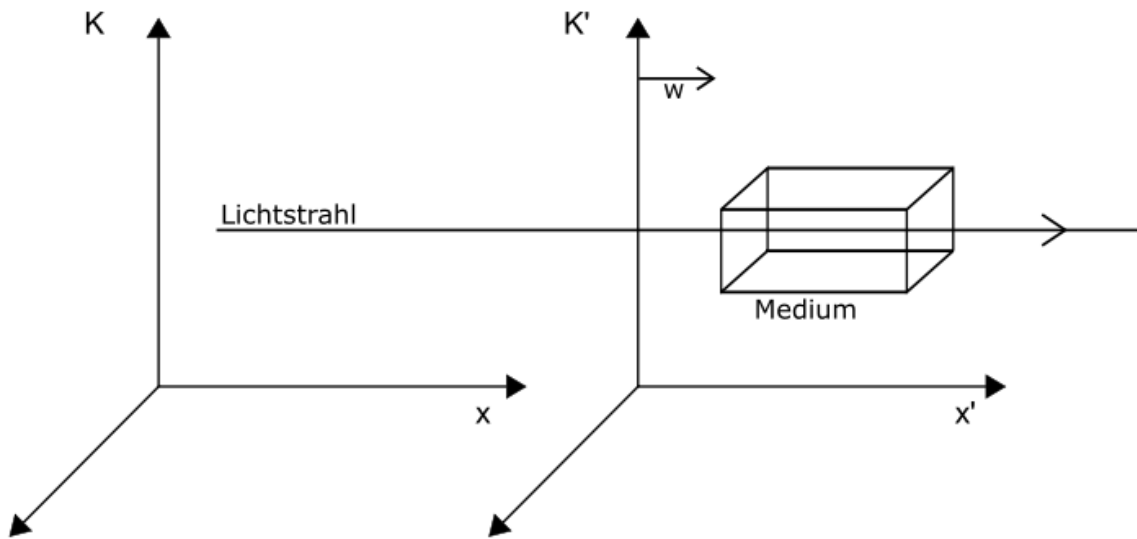


Abbildung 1: Lichtstrahl in einem bewegten Medium

Betrachtet man nun ein Medium welches sich mit der Geschwindigkeit $\pm w$ relativ zu K bewegt (siehe Abb.1), so ist die Geschwindigkeit v' eines Lichtstrahls welcher sich in x -Richtung ausbreitet gegeben durch $v' = \frac{c}{n}$ (n Brechungsindex). Was sich in K zu

$$v = \frac{\frac{c}{n} \pm w}{1 \pm \frac{w}{c n}} \quad (2)$$

transformiert. Da $w \ll c$ kann man die Abschätzung $\frac{1}{1 \pm x} \approx (1 \mp x)$ für $x \ll 1$ machen und erhält:

$$v \approx \left(\frac{c}{n} \pm w \right) \left(1 \mp \frac{w}{c n} \right) = \frac{c}{n} \pm \left(1 - \frac{1}{n^2} \mp \frac{w}{c n} \right) w \quad (3)$$

$$\approx \frac{c}{n} \pm \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) w = \frac{c}{n} \pm \alpha w \quad (4)$$

Erstaunlicherweise wurde selbige Formel bereits Anfang des 19ten Jahrhunderts von Frensel gefunden. Dieser ging allerdings von der Existenz eines Äthers aus und hatte die Vorstellung das der Äther von der Bewegung des Mediums mitgeführt würde. Daher nennt man diese Formel auch Mitführungsformel und α dem Mitführungskoeffizient.

3.2 Der Dispersionsterm

In der Fresnelschen Mitführungsformel wurde die Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex noch nicht berücksichtigt. Da das Medium mit der Geschwindigkeit w_i gegenüber dem einfallenden Licht-

strahl bewegt wird, ist hier der Dopplereffekt zu berücksichtigen. Die relativistische Dopplerformel liefert für $w_i \ll c$:

$$\nu' = \nu \left(1 \mp \frac{w_i}{c} \right) \quad (5)$$

Nähert man $n(\nu')$ bis zum linearen Glied und setzt Gleichung 5 ein, so erhält man:

$$n(\nu') = n(\nu) + (\nu' - \nu) \frac{dn(\nu)}{d\nu} = n(\nu) \left(1 \mp \frac{w_i}{c} \frac{\nu}{n(\nu)} \frac{dn(\nu)}{d\nu} \right) \quad (6)$$

Setzt man dies in Gleichung 4 ein so erhält man:

$$v \approx \frac{c}{n(\nu')} \pm \left(1 - \frac{1}{(n(\nu'))^2} \right) w \quad (7)$$

$$\approx \frac{c}{n(\nu)} \left(1 \mp \frac{w_i \nu}{cn(\nu)} \frac{dn(\nu)}{d\nu} \right)^{-1} \pm w \left(1 - \frac{1}{(n(\nu))^2} \left(1 \mp \frac{w_i \nu}{cn(\nu)} \frac{dn(\nu)}{d\nu} \right)^{-2} \right) \quad (8)$$

Nähert man $(1 \mp x)^{-1} \approx (1 \pm x)$ und $(1 \mp x)^{-2} \approx (1 \pm 2x)$ für $x \ll 1$ folgt wegen $w \ll c$:

$$\nu \approx \frac{c}{n} \left(1 \pm \frac{w_i \nu}{cn} \frac{dn}{d\nu} \right) \pm w \left(1 - \frac{1}{n^2} \left(1 \pm 2 \frac{w_i \nu}{cn} \frac{dn}{d\nu} \right) \right) \text{ mit } n \equiv n(\nu) \quad (9)$$

und weiter:

$$\nu \approx \frac{c}{n} \pm w \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \pm \frac{w_i \nu}{n^2} \frac{dn}{d\nu} = \frac{c}{n} \pm \left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{w_i}{w} \frac{\nu}{n^2} \frac{dn}{d\nu} \right) \quad (10)$$

Berücksichtigt man $\lambda = c/\nu$ folgt hieraus:

$$v \approx \frac{c}{n} \pm w \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{w_i}{w} \frac{\lambda}{n^2} \frac{dn}{d\lambda} \right) \quad (11)$$

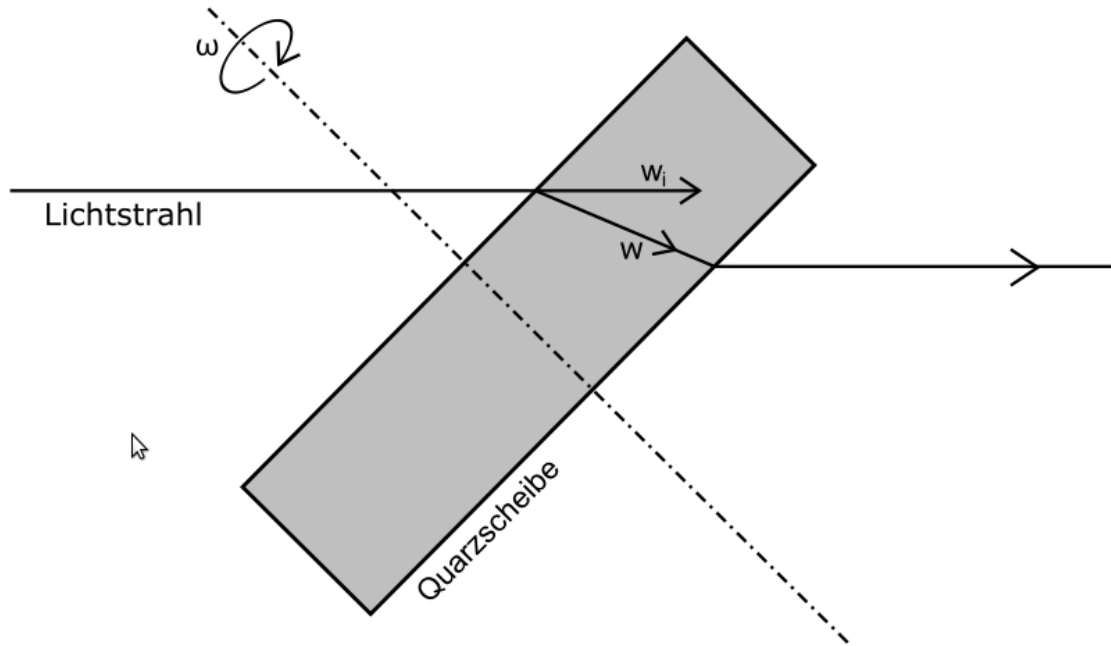


Abbildung 2: Lichtstrahl fällt durch eine rotierende Quarzscheibe

In unserer Anordnung (siehe Abb. 2) unterscheidet sich die Geschwindigkeitskomponente w der Quarzscheibe in Richtung des gebrochenen Strahls von der Komponente w_i in Richtung des einfallenden Strahls. Dabei sind diese Komponenten über den Brechungsindex verknüpft, es gilt:

$$\frac{w_i}{w} = n \quad (12)$$

eingesetzt in Gleichung 11 folgt daraus:

$$v = \frac{c}{n} \pm w \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right) \quad (13)$$

Vergleicht man dies mit Gleichung 4 sieht man das zu dem Mitführungskoeffizienten noch ein zusätzlicher Term

$$-\frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \quad (14)$$

hinzugekommen ist. Dieser wird auch *Dipersionsterm* genannt. Also erhalten wir für unsere Anordnung den Mitführungskoeffizienten

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \quad (15)$$

3.3 Frequenzunterschied zwischen links- und rechtsumlaufender Welle

Durch die Geschwindigkeitskomponente der Bewegung der Quarzscheibe entlang des Lichtstrahls erscheint das Medium für den links- bzw. rechtsumlaufenden Strahl dichter bzw. weniger dicht. Dies bedeutet also einen Unterschied im Brechungsindex und somit einen Unterschied der optischen Wege. Durch Überlagerung von links- und rechtsumlaufender Welle bildet sich im Ringlaser eine Stehende Welle für die folgendes gilt:

$$N \lambda = L \quad \text{mit } N \in \mathbb{N} \quad \text{und } L = \sum_i n_i l_i, \quad (16)$$

wobei L die optische Weglänge des Aufbaus ist und l_i die Längen der Wegstrecken mit Brechungsindex n_i sind, aus.

Für kleine Längenänderungen bleibt das System in der selben Schwingungsmode, d.h. $N = \text{const}$ und $dL = N d\lambda$. Für kleine ΔL gilt somit:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = -\frac{\Delta \nu}{\nu} \quad (17)$$

Der Geschwindigkeitsunterschied der beiden Strahlen ist $2 \alpha w$. Wenn l der optische Weg im ruhenden Medium ist, folgt:

$$\frac{\Delta(l n)}{l n} = \frac{v(w \neq 0) - v(w = 0)}{v(w = 0)} = \frac{\frac{c}{n} \pm \alpha w - \frac{c}{n}}{\frac{c}{n}} = \pm \frac{n \alpha w}{c} \quad (18)$$

Da die Änderung ΔL des optischen Wegs des Systems durch die Änderung des optischen Wegs im Medium gegeben ist, also durch $\Delta L = \Delta(l n)$, folgt:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{l n}{L} \frac{\Delta(l n)}{l n} = \pm \frac{n^2 \alpha l w}{L c} = -\frac{\Delta \nu}{\nu} \quad (19)$$

und für den gemessenen Frequenzunterschied der beiden Strahlen bekommt man:

$$\Delta \nu_{\text{exp}} = 2 \Delta \nu = \frac{2 n^2 \alpha l w \nu}{L c} = \frac{2 n^2 \alpha l w}{\lambda L} \quad (20)$$

Mittels etwas komplizierten Überlegungen (siehe Staatsex. ...) kann man w und l durch die Parameter der Rotierenden Quarzscheibe (Winkelgeschwindigkeit ω , Strahleintrittspunkt x_0 , Dicke der Scheibe d und Brechungsindex n) ausdrücken:

$$w l = \frac{d x_0 \omega}{n} \quad (21)$$

Durch Einsetzen in Gl. 20 bekommt man für den Mitführungskoeffizienten:

$$\alpha = \frac{\Delta\nu_{exp} \lambda L}{2 n d x_0 \omega} \quad (22)$$

4 Versuchsaufbau

Der Ringlaser besteht aus drei an den ecken eines gleichseitigen Dreiecks aufgestellten Spiegeln. Zwischen zwei dieser Spiegel befindet sich eine He-Ne-Entladungsrohr. In einem weiteren Arm der Anordnung befindet sich die rotierbare Quarzscheibe, diese wird über einen Gummiriemen mittels eines Motors angetrieben. Ebenso im Strahlengang befindet sich eine um 180° zur rotierenden Quarzscheibe gedrehte zweite Quarzscheibe der gleichen Dicke um die Verschiebung des Strahls an der ersten Scheibe auszugleichen. Der Laserstrahl trifft unter dem Brewsterwinkel in den Quarz ein um Reflexionen gering zu halten. Die beiden Scheiben sind auf einem beweglichen Schlitten gelagert dessen Position mit einer Mikrometerschraube eingestellt werden kann.

Um die Rotationsgeschwindigkeit der Quarzscheibe festzustellen befindet sich eine Lichtschranke an der Scheibe die an einen Zähler angeschlossen ist. Der Zähler zeigt die Umlaufdauer in μs an.

Im Resonator können sich rechts- und links-umlaufende Wellen ausbilden. Bei ruhender Quarzscheibe haben beide den selben optischen Weg, dreht sich jedoch die Scheibe so erhält man unterschiedliche Weglängen für die beiden Richtungen was sich in unterschiedlichen Frequenzen für die Umlaufsinne auswirkt. Dieser Frequenzunterschied kann als Schwebung mit einer Photodiode gemessen werden. Hierzu wird bei Spiegel S_3 ein kleiner Teil des Signals ausgekoppelt und mit Hilfe von S_4 werden beide Strahlen auf der Photodiode überlagert.

Um möglichst wenige Moden auf dem Oszilloskop sichtbar zu machen ist im Strahlengang eine Blende montiert. Ohne diese wäre die Messung nicht möglich da man sonst eine irreguläre Darstellung aus Anteilen vieler verschiedener Moden erhalten würde.

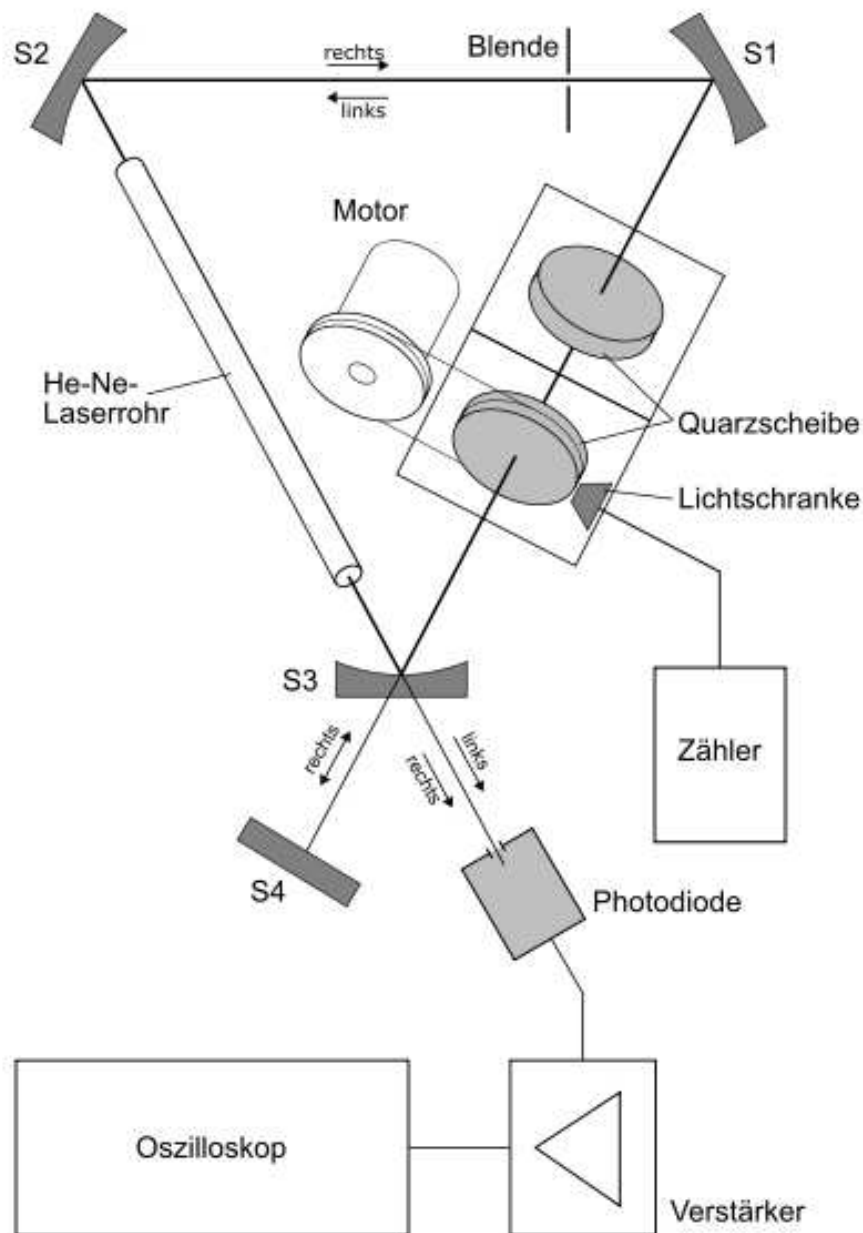


Abbildung 3: Versuchsanordnung Ringlaser

5 Durchführung

Nach der Justierung der Blende und des Auskopplungsspiegels konnte man auf dem Oszilloskop das Signal, welches sich leider nicht so triggern lässt das es still steht, sinusähnliche Formen annimmt. Mittels der Hold-Funktion des Oszilloskops konnte man ein Bild auswählen bei welchem die Wellenform eine Bestimmung der Frequenz zulässt.

Wir unternahmen 3 Messreihen mit konstanter Drehzahl der Quarzscheibe unter Variation des Ein-

trittspunktes des Strahls auf der Scheibe und 3 Messreihen mit festem Eintrittspunkt bei Variation der Drehzahl.

6 Auswertung

6.1 Variabler Durchtrittspunkt

Als wir den Abstand des Durchtrittspunktes zum Mittelpunkt der Quarzscheibe bei konstanter Motordrehzahl variierten, trugen wir die Differenzfrequenz gegen diesen Abstand auf. Die Differenzfrequenz lies sich in der Software direkt ablesen, wir maßen die Frequenz für einen, zwei und vier Peaks, bildeten den Mittelwert und nahmen die Standardabweichung als Fehler an. Den Messfehler der x -Werte schätzten wir mit $s_x = 0,01mm$ ab, da dieser per micrometerschraube recht genau justierbar war.

Nach Gleichung 22 gilt für den Zusammenhang zwischen Abstand und Differenzfrequenz:

$$\Delta\nu_{exp} = \frac{n\alpha\omega d}{L\lambda}x_0 = cx_0 = c(x - x_m) = ax + b \quad (23)$$

Liegt der Durchtrittspunkt in der Mitte der Quarzscheibe, dann gilt $\Delta\nu_{exp}(x_m) = 0$, also folgt:

$$ax_m + b = 0 \Leftrightarrow x_m = -\frac{b}{a} \quad (24)$$

Also lässt sich aus Steigung und Achsenabschnitt der an die Messwerte angepassten Geraden der Mittelpunkt x_m bestimmen. Der Fehler des Mittelpunkts ergibt sich aus s_a und s_b durch:

$$s_{x_m} = |x_m| \sqrt{\left(\frac{s_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{s_b}{b}\right)^2} \quad (25)$$

Für die ersten drei Messreihen bei denen x verändert wurde berechneten wir so den Mittelpunkt. Aus den so erhaltenen drei Werten für den Mittelpunkt x_m berechneten wir das gewichtete Mittel und erhielten so

$$x_m = (46,48 \pm 0,11)mm \quad (26)$$

Mit der Kenntniss von x_m lassen sich nun die Werte für α berechnen. Dazu setzen wir nur alle nun bekannten Werte in Gleichung 22 ein. Als Fehler erhalten wir:

$$s_\alpha = |\alpha| \sqrt{\left(\frac{s_{\Delta\nu_{exp}}}{\Delta\nu_{exp}}\right)^2 + \left(\frac{s_\omega}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{s_{x_0}}{x_0}\right)^2} \quad (27)$$

wobei wir x_0 nun mit Hilfe des Mittelpunktes berechnen können:

$$x_0 = x - x_m \text{ mit Fehler } s_{x_0} = \sqrt{s_x^2 + s_{x_m}^2} \quad (28)$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω bestimmten wir über die Umlaufdauer, $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Für die Umlaufdauer nahmen wir einen relativen Fehler s_t/T von 1% an. Also ergibt sich für den Fehler von ω : $s_\omega = 0,01\omega$. Aus den einzelnen Werten für α berechneten wir wieder das gewichtete Mittel und erhielten:

$$\alpha = 0,53 \pm 0,014 \quad (29)$$

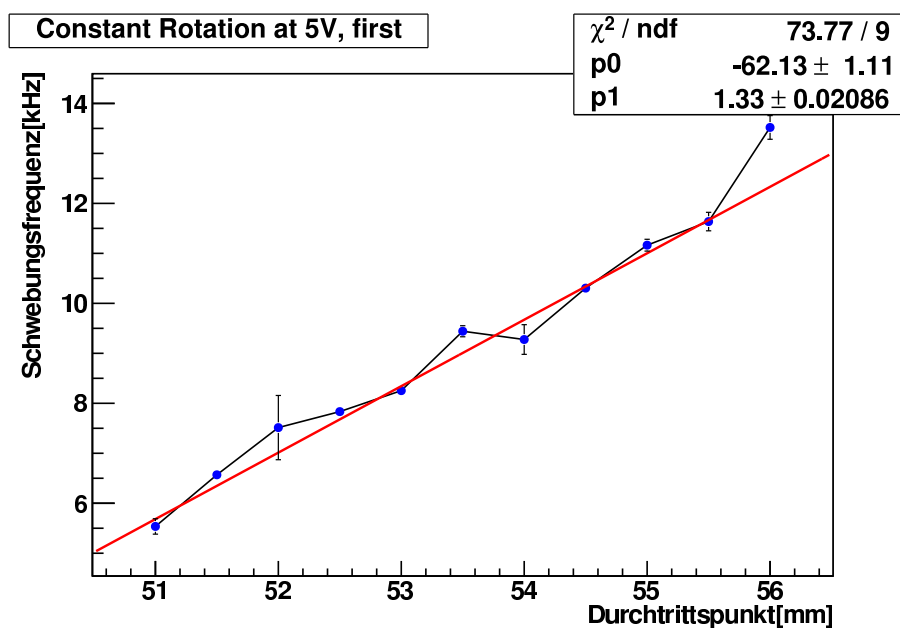


Abbildung 4: erste Messreihe bei 5V Motorspannung

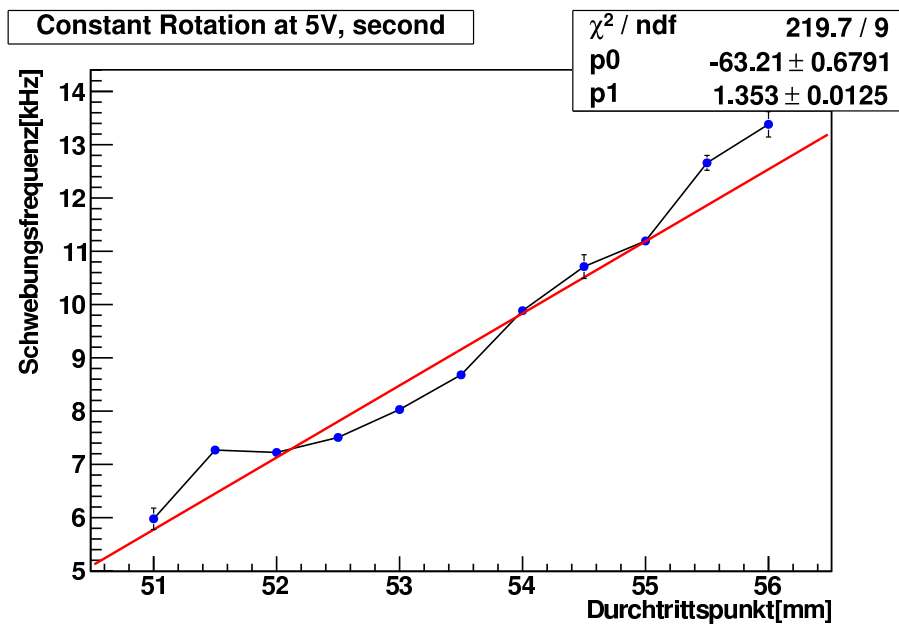


Abbildung 5: zweite Messreihe bei 5V Motorspannung

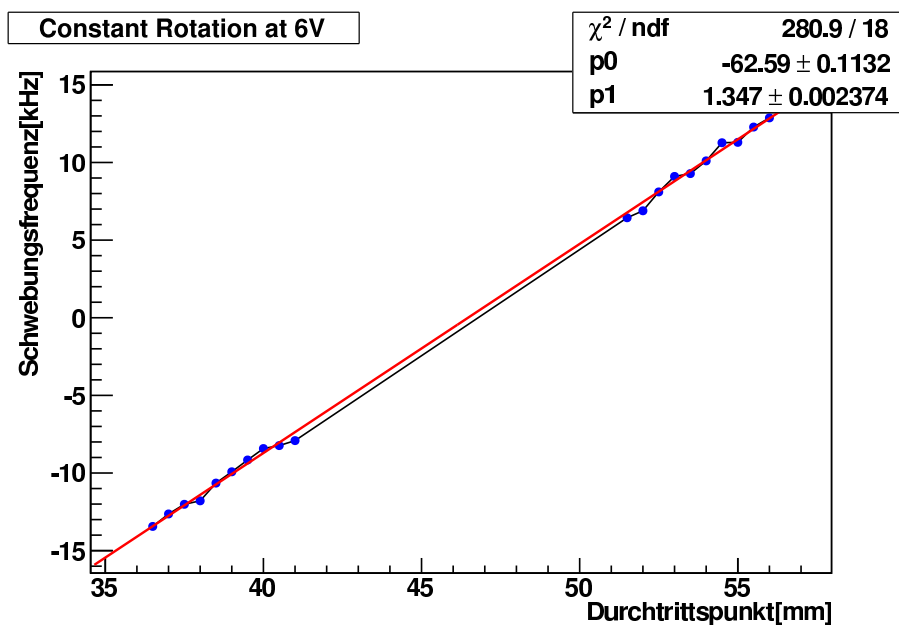


Abbildung 6: Messreihe bei 6V Motorspannung

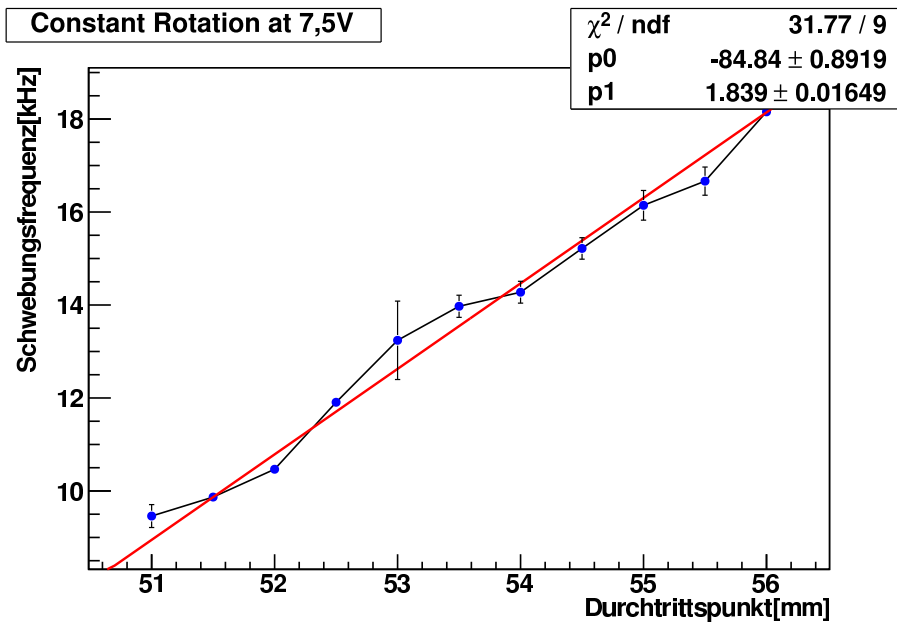


Abbildung 7: erste Messreihe bei 7,5V Motorspannung

6.2 Variation der Drehzahl

Bei den Messreihen mit Variation der Drehzahl haben wir jeweils die Schwebungsfrequenz $\Delta\nu_{exp}$ gegen die Winkelgeschwindigkeit ω aufgetragen. Wie sich ω und $\Delta\nu_{exp}$ und deren Fehler berechnen wurde bereits im Abschnitt Variation des Durchtrittspunktes behandelt.

Nach Gleichung 22 gilt:

$$\Delta\nu_{exp} = \frac{2 n d x_0 \alpha}{L \lambda} \quad (30)$$

Mit Hilfe einer linearen Regression $\Delta\nu_{exp} = p_0 + p_1 \omega$ lässt sich also α bestimmen:

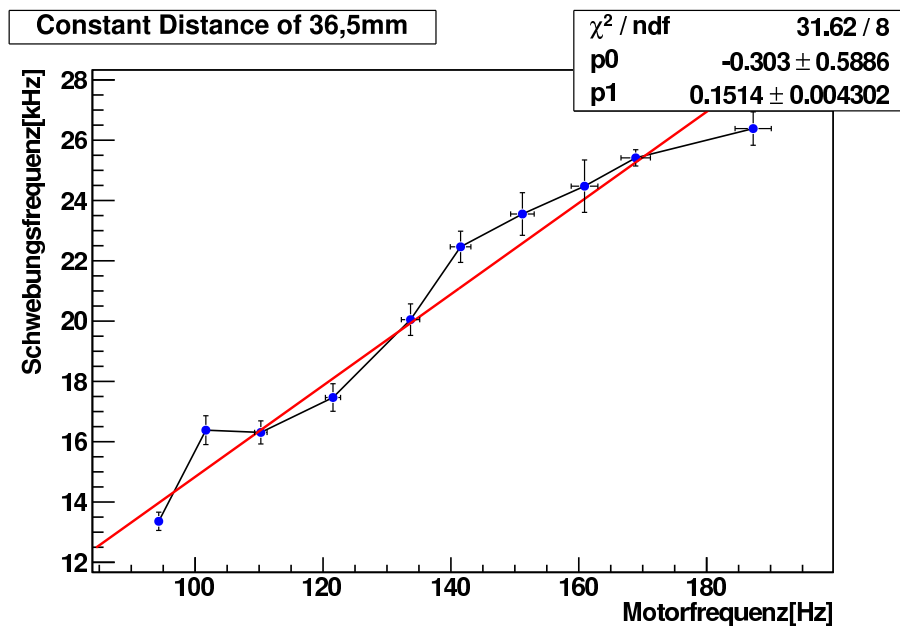
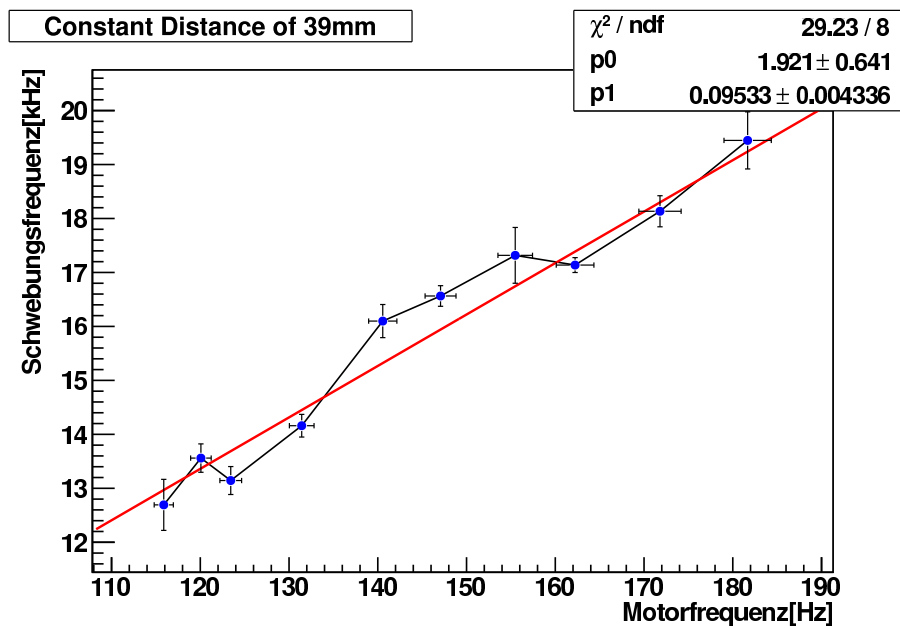
$$\alpha = \frac{L \lambda p_1}{2 n d x_0} \quad (31)$$

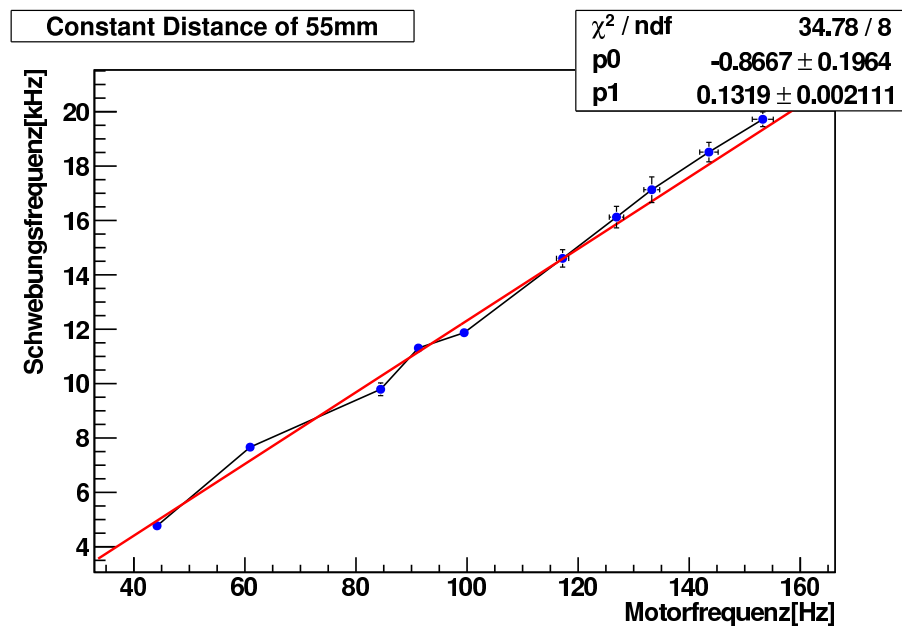
wobei x_0 aus dem in der Messung, mit Variablem Durchtrittspunkt, bestimmten Mittelpunkt x_m bestimmt haben. Mit Gauß erhält man für den Fehler auf α :

$$s_\alpha = |\alpha| \sqrt{\left(\frac{s_{p_1}}{p_1}\right)^2 + \left(\frac{s_{x_0}}{x_0}\right)^2} \quad (32)$$

Aus den drei Werten für α der verschiedenen Messreihen bildeten wir das gewichtete Mittel:

$$\alpha = 0,554 \pm 0,007 \quad (33)$$

Abbildung 8: Messreihe bei $x_0 = 36,5\text{mm}$ mit variabler DrehzahlAbbildung 9: Messreihe bei $x_0 = 39\text{mm}$ mit variabler Drehzahl

Abbildung 10: Messreihe bei $x_0 = 55\text{mm}$ mit variabler Drehzahl

6.3 Vergleich mit berechnetem Mitführungskoeffizient

Mit Hilfe des angegebenen Brechungsindex $n = 1,457$ und der Änderung des Brechungsindex mit der Wellenlänge $\Delta n / \Delta \lambda = -300\text{cm}^{-1}$ lässt sich der Mitführungskoeffizient nach Gleichung 15 berechnen:

$$\alpha_{ber} = 1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n} \frac{\Delta n}{\Delta \lambda} = 0,5420$$

Ohne den Disperionsterm erhält man:

$$\alpha_{Fres} = 1 - \frac{1}{n^2} = 0,5289$$

Die Ergebnisse aus den Messungen ergaben:

$$\alpha_{varx} = 0,534 \pm 0,0075$$

bei Variation des Durchtrittspunkt und

$$\alpha_{varf} = 0,554 \pm 0,007$$

bei Variation der Drehzahl. Bildet man aus diesen beiden Werten wieder das gewichtete Mittel so kommt man auf:

$$\alpha_{mittel} = 0,544 \pm 0,005$$

Vergleicht man diese gemessenen Werte mit den Berechneten, sieht man das bei Variation des Durchtrittspunkts α_{ber} innerhalb $1,1\sigma$ liegt, wobei α_{Fres} hier noch besser, nämlich innerhalb $0,7\sigma$ liegt. Dies lässt vermuten das hier der Dispersionsterm keine Rolle spielt, da allerdings 2σ hier grösser als der Abstand der beiden theoretischen Werte ist kann hier kaum eine Aussage über die Relevanz des Dispersionsterms getan werden.

Für den Wert bei Variation der Drehzahl erkennt man aber schon eine Relevanz des Dispersionsterms, hier liegt α_{ber} innerhalb $1,72\sigma$, während α_{Fres} nur innerhalb $3,6\sigma$ liegt. Für unser Endergebnis, das gewichtete Mittel aus den beiden Werten sieht man die Relevanz des Dispersionsterms recht gut, hier stimmt α_{ber} innerhalb $0,4\sigma$, wobei α_{Fres} nur innerhalb $3,1\sigma$ liegt. Also ist bei der von uns erreichten Messgenauigkeit der Dispersionsterm durchaus relevant.

7 Zusammenfassung

Die Ergebnisse dieses Versuchs sind einigermaßen zufriedenstellend. Der Versuchsaufbau könnte durch Ersetzen des Justierdrahtes der Blende und des Motorantriebs sicher noch etwas verbessert werden. Dennoch konnten wir eine Messgenauigkeit erzielen die auf eine Relevanz des Dispersionsterms schliessen lässt.

Die Ergebnisse aus den Messungen ergaben:

$$\alpha_{varx} = 0,534 \pm 0,0075$$

bei Variation des Durchtrittspunkts und

$$\alpha_{varf} = 0,554 \pm 0,007$$

bei Variation der Drehzahl. Daraus berechneten wir unser Endergebnis als gewichtetes Mittel zu

$$\alpha_{mittel} = 0,544 \pm 0,005$$