Ringlaser

Björn Lennartz Johannes Löhner-Böttcher

9.3.2009

In einer Ringlaser-Anordnung mit einem Helium-Neon-Laser wird durch eine rotierende Quarzglasscheibe die Lichtgeschwindigkeit der rechts und links herumlaufenden Welle in der Quarzglasscheibe verändert. Dies bedeutet eine Änderung des optischen Weges, die Frequenzen der Moden für den einen Umlaufsinn werden etwas erhöht, für den anderen etwas erniedrigt. Diese Schwebungsfrequenz als Differenzfrequenz wird gemessen und somit der Mitführungskoeffizient α von Licht bestimmt.

Inhaltsverzeichnis

1. Theoretische Grundlagen

Im Vakuum breitet sich Licht mit der konstanten Geschwindigkeit v = c aus.
Innerhalb eines Mediums ist die Lichtgeschwindigkeit v jedoch abhängig vom Brechungsindex n(λ) und außerdem von der Geschwindigkeit w, mit der sich das Medium relativ zum Beobachter bewegt. Das Licht wird demnach sozusagen mitgeführt.

1.1. Der Fresnelkoeffizient

Ausgehend von der Äthertheorie und der Lichtmitführung in einem Medium, fand Fresnel den Zusammenhang $v=\frac{c}{n}\pm\alpha\cdot\omega$ mit dem Mitführungskoeffizienten $\alpha=1-\frac{1}{n^2}$ für Licht, das sich in dieselbe (bzw. entgegengesetzte) Richtung des Mediums bewegt.

Fresnel kam so zu einer guten Näherung, obwohl die Äthertheotie später durch die Relativitätstheorie widerlegt wurde.

Die Erklärung des Mitführungskoeffizienten ergibt sich heute zwanglos und ohne zusätzliche Annahmen aus dem relativistischen Gesetz über die Addition von Geschwindigkeiten: $v=\frac{(\frac{c}{n}\pm w)}{(1+(\frac{(\frac{c}{n})\cdot w}{c^2}))}$

Man betrachtet ein System K', welches sich relativ zum Laborsystem K in x-Richtung mit der Geschwindigkeit w bewegt.
Aus der Lorentztransformation für die Geschwindigkeit v des Teilchens, die ein Betrachter in K beobachtet, ergibt sich ober genannte Formel.

Für den Fall $w\ll c$ lässt sich das vereinfachen zu $v=\frac{c}{n}\pm(1-\frac{1}{n^2})\cdot w$

1.2. Der Dispersionsterm

Beim Fresnel-Koeffizienten wurde die Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex noch nicht bedacht. Es muss hier der Dopplereffekt berücksichtigt werden, denn das Medium wird mit der Geschwindigkeit w_i gegenüber dem einfallenden Lichtstrahl bewegt.
Die relativistische Dopplerformel liefert für $w_i\ll c$:

$$v'=v(1\mp\frac{w_i}{c})$$

Nähert man $n(v')$ (siehe Ippendorf) durch eine Taylorreihe bis zum linearen Glied und setzt obere Gleichung ein, so erhält man

$$n(v')=n(v)+(v'-v)\frac{(dn(v))}{dv}=n(v)(1\mp\frac{w_i}{c}\frac{v}{(n(v))}\frac{(dn(v))}{dv})$$

Nach einigen Schritten (siehe Ipperdorf) ergibt sich:

$$v=\frac{c}{n}\pm w(1-(\frac{1}{n^2})-\frac{w_i}{w}\frac{\lambda}{n^2}\frac{dn}{(d\lambda)})$$

Lässt man nun Licht durch einen in Richtung von w_i bewegten Quarzstab fallen, so gilt

$w=w_i$ und es ergibt sich zu $v=\frac{c}{n}\pm(1-\frac{1}{n^2}-\frac{\lambda}{n^2}\frac{dn}{(d\lambda)})\cdot w$.

Der Mitführungskoeffizient unter Berücksichtigung des Dispersionsterms lautet also:

$$\alpha=1-\frac{1}{n^2}-\frac{\lambda}{n^2}\frac{dn}{(d\lambda)}$$

1.3. Frequenzdifferenz im Ringlaser

Die Geschwindigkeitsdifferenz des links- und rechtsherumlaufenden Strahls im Medium entspricht einem Unterschied der Brechungsindizes des Mediums für beide Strahlen, was einen Unterschied der jeweiligen optischen Wege bewirkt.

Für die sich im Resonator ausbildende stehende Welle gilt:

$N\cdot\lambda=L$ mit $N\in\mathbb{N}$ und $L=\sum n_i l_i$

L ist die optische Weglänge des Resonators und l_i die Längen der vom Lichtstrahl durchlaufenen Wegstrecken in Medien der Brechungsindizes n_i sind.

Für geringe Längenänderungen schwingt der Resonator in der gleichen Mode weiter, es gilt also N=const und deshalb dL = N dλ . Für kleine Differenzen ΔL folgt:

$$\frac{(\Delta L)}{L}=\frac{(\Delta\lambda)}{\lambda}=\frac{-(\Delta\nu)}{\nu}$$

Die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen den beiden entgegengesetzt verlaufenden Strahlen ist 2αω.

Es folgt: $\frac{(\Delta L)}{L}=\frac{\pm(n^2\alpha l\omega)}{Lc}=\frac{-(\Delta\nu)}{\nu}$ und für die gemessene Differenzfrequenz

zwischen den beiden Strahlen erhält man:

$$\Delta\nu=\frac{(2n^2\alpha l\omega)}{(\lambda L)}$$

Am rotierenden Quarzzylinder ergibt sich dann für α: $\alpha=\frac{(\Delta\nu\lambda L)}{(2nd\,x_0\omega)}$

2. Bestimmung des Mitführungskoeffizienten α durch Messung der Schwebungsfrequenz Δν

Da durch die Formel $\alpha = \frac{(L \cdot \lambda \cdot \Delta\nu)}{(2 \cdot n \cdot \omega \cdot d \cdot x_0)} = const. \cdot (\frac{(\Delta\nu)}{(\omega \cdot x_0)})$ (1)

ein direkter Zusammenhang zwischen dem Mitführungskoeffizienten α und der gemessenen

Frequenz Δν besteht, kann man α durch Messung von Δν bestimmen.

Durch den linearen Zusammenhang $\Delta\nu \sim \omega$ und $\Delta\nu \sim x_0$ kann man Δν durch Variation der Drehfrequenz ω und des Durchtrittspunktes x_0 der Scheibe messen.

L = optische Gesamtlänge des Resonators = 214,9cm
λ = Laserwellenlänge in Luft = 632,82nm
n = Brechungsindex von Quarzglas = 1,457
d = Dicke der Quarzscheibe = 1,27cm

2.1. Variation des Durchtrittspunktes x_0 für 3 feste Drehzahlen

Die Drehfrequenz der Quarzglasscheibe wurde auf einen festen Wert eingestellt.

Der Durchtrittspunkt des Laser auf der Scheibe wurde variiert. Für 10 verschiedenen

Durchtrittspunkte x_0 wurden jeweils 3 Schwebungsfrequenzen $\Delta\nu$ aufgenommen.

Die Schwebungsfrequenzen $\Delta\nu$ ermittelten wir, indem wir die Anzahl N der in einem

Zeitintervall Δt liegenden Schwebungsperioden zählten: $\Delta\nu = N \cdot (\frac{1}{(\Delta t)})$.

Für die Drehfrequenz gilt: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot (\frac{1}{(\Delta t)}) = 2 \cdot \pi \cdot f$

Durch die 3 Messungen pro Durchtrittspunkt ergab sich jeweils der Mittelwert für die

Schwebungsfrequenz:

$$\mu(\Delta\nu) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{3} \Delta\nu_i$$

und der Fehler:

$$\sigma(\Delta\nu) = \sqrt{\frac{1}{(2-1)} \cdot \sum_{i=1}^{3} (\Delta\nu_i - \mu(\Delta\nu))^2}$$

Der Ablesefehler der x-Werte wurde mit $\sigma(x) = 0{,}2\,mm$ abgeschätzt.

Durch einen linearen Fit mit ORIGIN ergeben sich Geraden $\Delta\nu = A + B \cdot x$ mit Steigung B.

Nach Gleichung (1) gilt also mit dem Ablesewert x und dem Mittelpunkt x_m :

$$\Delta\nu=\frac{(2\cdot n\cdot\omega\cdot d\cdot x_0\cdot\alpha)}{(L\cdot\lambda)}=const.\cdot x_0=const.\cdot(x-x_m)=A+Bx$$

Falls der Durchtrittspunkt in der Mitte der Scheibe liegt, gilt: $\Delta\nu(x_m)=0$

Also berechnet sich der Mittelpunkt x_m aus den Werten A und B der Geraden wie folgt:

$$A+Bx_m=\Delta\nu(x_m)=0 \quad \text{somit} \quad x_m=\frac{-A}{B}$$

Der Fehler des Mittelpunkts ergibt sich aus den Standardfehlern $\sigma(A)$ und $\sigma(B)$ zu:

$$\sigma(x_m)=x_m\cdot\sqrt{(\frac{(\sigma(A))}{A})^2+(\frac{(\sigma(B))}{B})^2}$$

Durch Ablesen der Daten aus den Abbildungen 1) – 3) errechnet man die Mittelpunkte:

ω = 223,60 Hz: $x_m=46{,}634\,mm$, $\sigma(x_m)=0{,}785\,mm$

ω = 172,14 Hz: $x_m=46{,}368\,mm$, $\sigma(x_m)=0{,}874\,mm$

ω = 280,50 Hz: $x_m=46{,}625\,mm$, $\sigma(x_m)=0{,}556\,mm$

Aus den drei Werten berechnet man nun das gewichtete Mittel

$$(\bar{x}_{m,G})=\frac{(\sum_{i=1}^{3}(\frac{x_{m,i}}{\sigma_i^2}))}{(\sum_{i=1}^{3}(\frac{1}{\sigma_i^2}))}=46{,}573\,mm$$

mit gewichtetem Fehler $$\sigma(\bar{x}_{m,G})=\sqrt{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{3}(\frac{1}{\sigma_i^2}))}}=0{,}403\,mm$$

zu $$\bar{x}_{m,G}=(46{,}573\pm0{,}403)\,mm$$

Anhand der Korrektur $x_0=x-\bar{x}_{m,G}$ für die gemessenen x-Werte und ihrem

Fehler $\sigma(x_0)=\sqrt{\sigma^2(x)+\sigma^2(\bar{x}_{m,G})}=0{,}450\,mm$

kann man nun aus allen Messwerten (gemittelter Wert aus 3 Messpunkten pro Durchtrittspunkt) und deren Drehfrequenz ω den

Mitführungskoeffizienten α berechnen: $\alpha=\frac{(L\cdot\lambda\cdot\Delta\nu)}{(2\cdot n\cdot\omega\cdot d\cdot x_0)}$

Man erhält so 10 α's pro Drehfrequenz und ihre Fehler:

$$\sigma(\alpha)=\alpha\cdot\sqrt{\left(\frac{\sigma(\Delta\nu)}{(\Delta\nu)}\right)^2+\left(\frac{\sigma(\omega)}{\omega}\right)^2+\left(\frac{\sigma(x_0)}{x_0}\right)^2}$$

Für ω nehmen wir einen relativen Fehler von 1% also $\sigma(\omega)=0{,}01\cdot\omega$ an.

Nun kann man das gewichtete Mittel für den Mitführungskoeffizienten α und ihren Fehler ausrechnen:

$$\bar{\alpha}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i}{(\sigma_i^2(\alpha))}\right)\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{(\sigma_i^2(\alpha))}\right)\right)}=0{,}5319$$

$$\sigma(\bar{\alpha})=\sqrt{\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{(\sigma_i^2(\alpha))}\right)\right)}}=0{,}0084$$

Es ergibt sich der Mitführungskoeffizient $\alpha_1=0{,}5319\pm0{,}0084$.

(Rechnungen siehe Anhang)

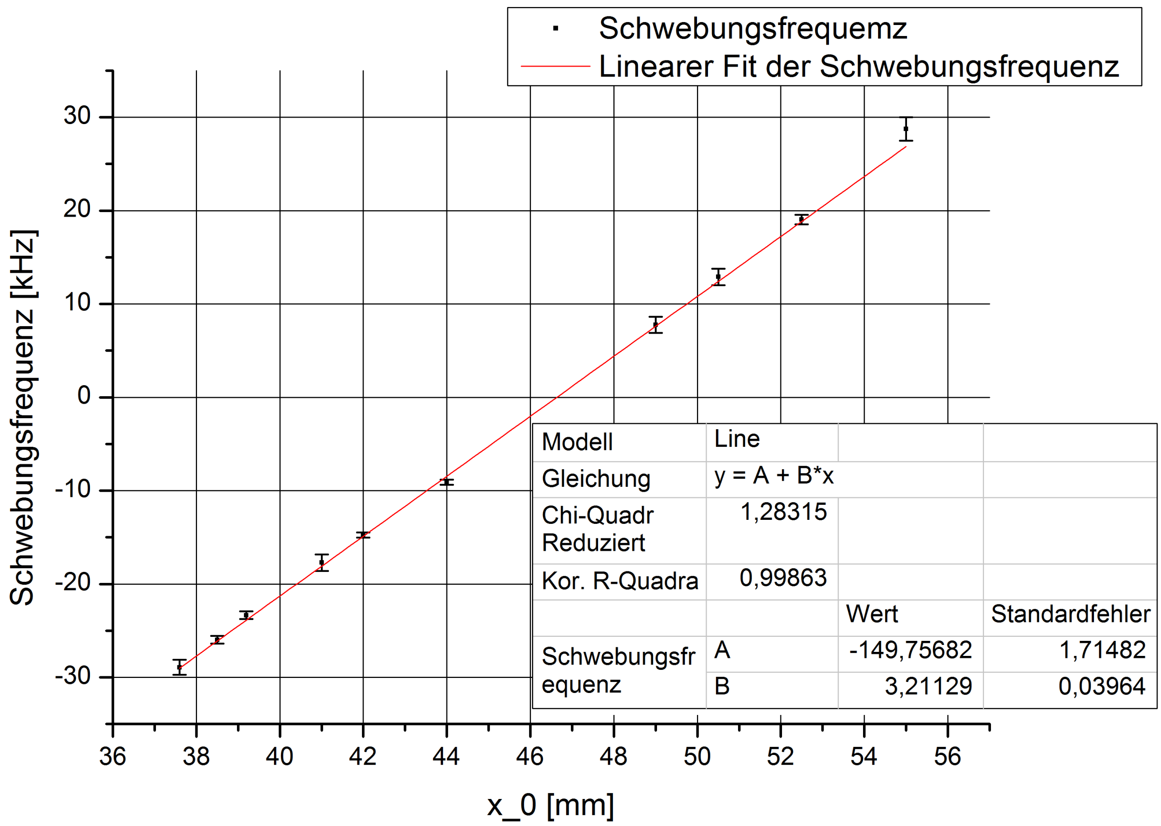

Abbildung 1: Schwebungsfrequenz Δν mit variablem Durchtrittspunkt x_0 bei ω= 223,6 Hz

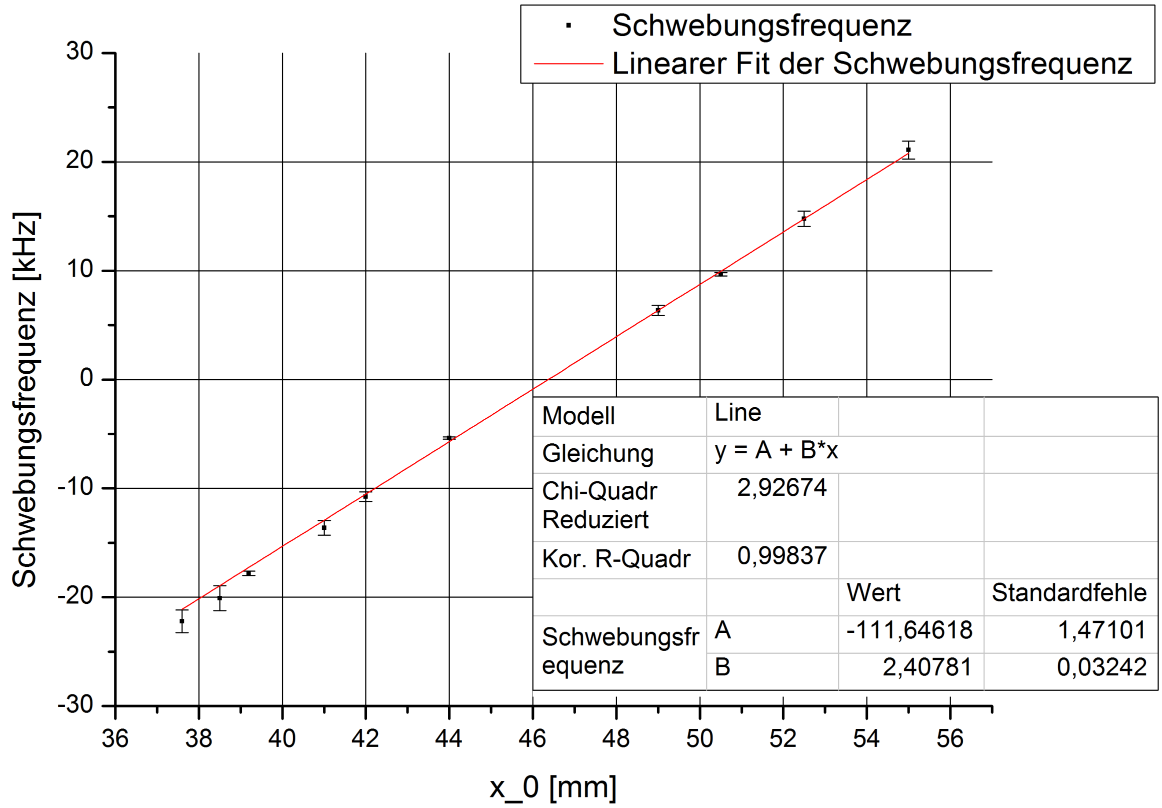

Abbildung 2: Schwebungsfrequenz Δν mit variablem Durchtrittspunkt x_0 bei ω=172,14Hz

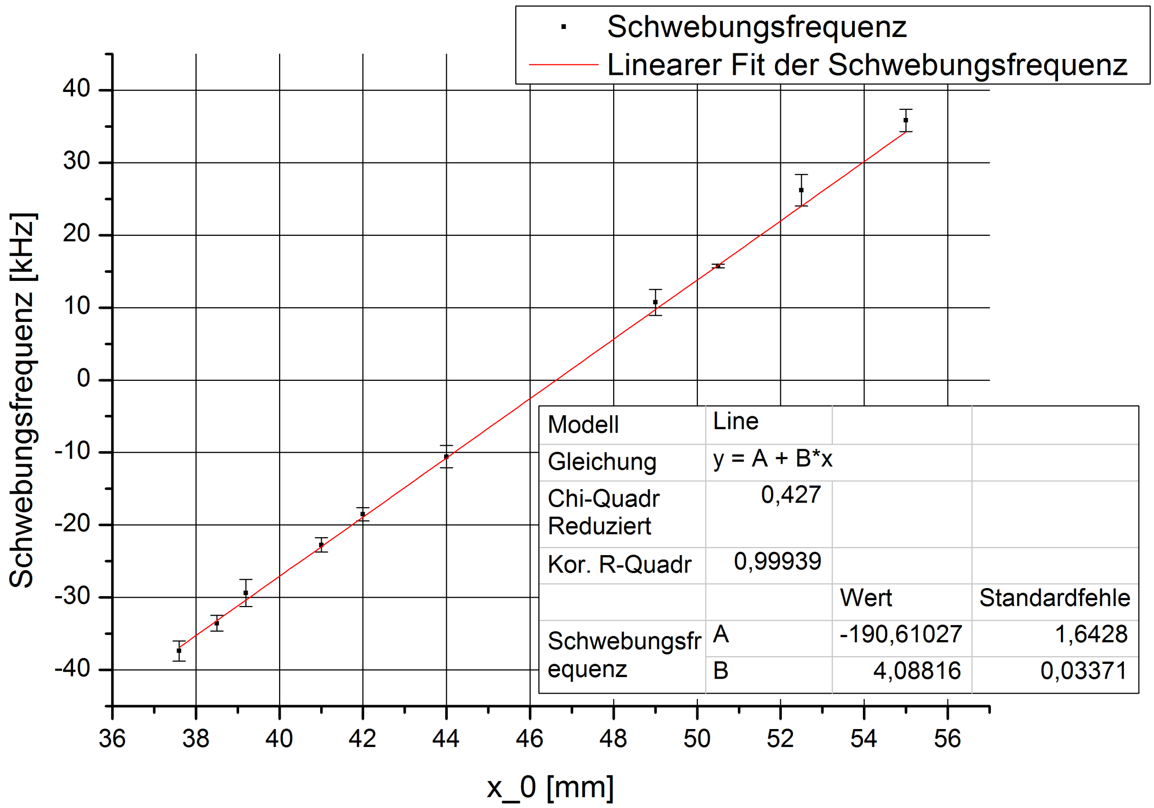

Abbildung 3: Schwebungsfrequenz Δν mit variablem Durchtrittspunkt x_0 bei ω= 280,5 Hz

2.2. Variation der Drehzahl ω bei 3 festen Durchtrittspunkten x_0

Der Durchtrittspunkt des Laser auf der Scheibe wurde auf einen festen Wert eingestellt.

Die Drehfrequenz der Quarzglasscheibe wurde wurde für 3 feste x_0 variiert.

Für 10 verschiedenen Drehfrequenzen ω wurden jeweils 3 Schwebungsfrequenzen

$\Delta \nu$ aufgenommen.

Auftragung der Drehfrequenzen ω gegen die gemittelten Schwebungsfrequenzen $\Delta \nu$, siehe Abbildungen 4) – 6).

Berechnung von ω : $\omega = 2 \cdot \pi \cdot (\frac{1}{(\Delta t)}) = 2 \cdot \pi \cdot f$ und $\sigma(\omega) = 0{,}01 \cdot \omega$

Berechnung der $\Delta \nu$: $\mu(\Delta \nu) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{3} \Delta \nu_i$ und $\sigma(\Delta \nu) = \sqrt{\frac{1}{(2-1)} \cdot \sum_{i=1}^{3} (\Delta \nu_i - \mu(\Delta \nu))^2}$

Nach Gleichung (1) gilt wieder: $\Delta \nu = \frac{(2 \cdot n \cdot \omega \cdot d \cdot x_0 \cdot \alpha)}{(L \cdot \lambda)}$

Der lineare Fit der Schwebungsfrequenz (mit ORIGIN) ist $\Delta \nu = A + B \cdot \omega$.

Der Mitführungskoeffizient α lässt sich also durch die Steigung B der Geraden bestimmen:

$$\alpha = \frac{(L \cdot \lambda \cdot B)}{(2 \cdot n \cdot d \cdot x_0)}$$

Das korrigierte x_0 ist hier wieder $x_0 = x - x_m$ mit $x_m = 46{,}573\, mm$.

Der Fehler von α berechnet sich nun durch Gauß'sche Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma(\alpha) = |\alpha| \cdot \sqrt{(\frac{(\sigma(B))}{B})^2 + (\frac{(\sigma(x_0))}{x_0})^2}$$

Nun berechnet man für alle drei Messreihen die α und σ(α):

$x_0 = -7{,}57\, mm$: $\alpha = 0{,}505$, $\sigma(\alpha) = 0{,}030$

$x_0 = -4{,}57\, mm$: $\alpha = 0{,}575$, $\sigma(\alpha) = 0{,}057$

$x_0 = 6{,}43\, mm$: $\alpha = 0{,}536$, $\sigma(\alpha) = 0{,}038$

Als gewichtetes Mittel und Fehler ergeben sich:

$$\bar{\alpha} = 0{,}526 \quad , \quad (\sigma(\bar{\alpha})) = 0{,}022$$

Also ein Mitführungkoeffizient $\alpha_2 = 0{,}526 \pm 0{,}022$

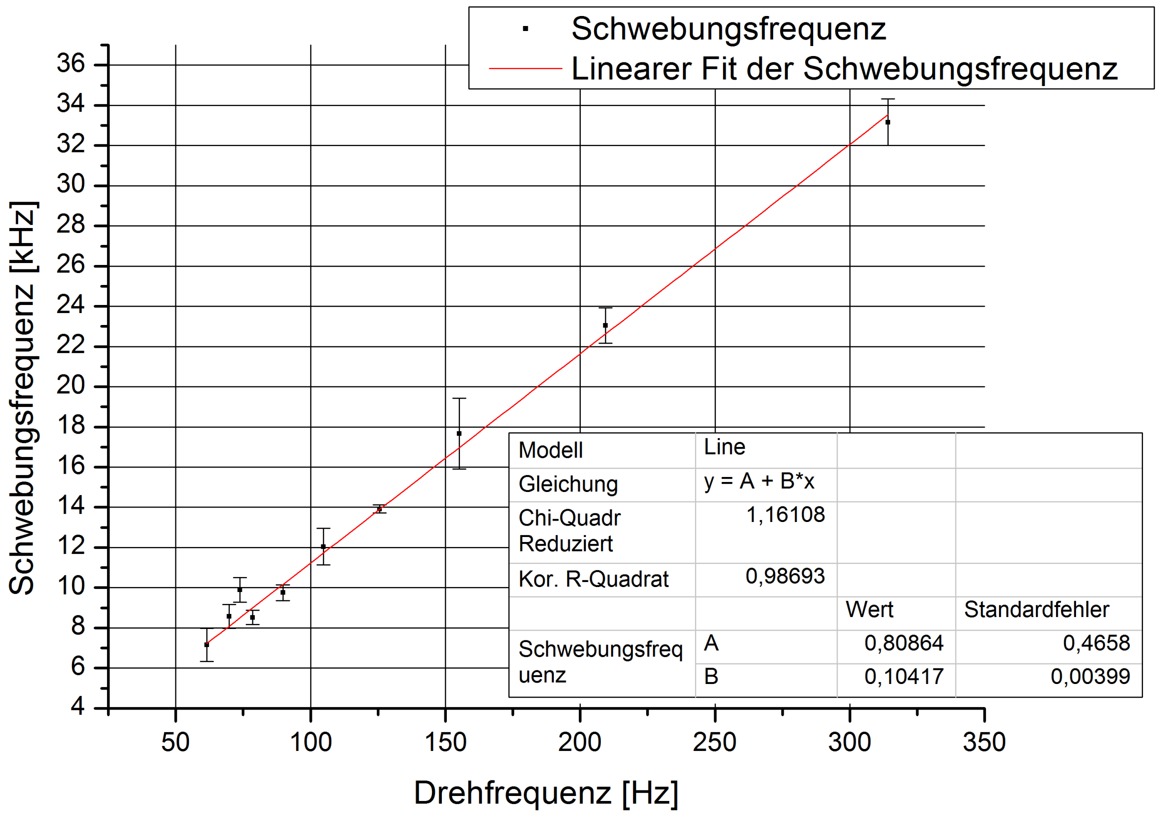

Abbildung 4: Schwebungsfrequenz Δν mit variabler Drehfrequenz bei $x = 39{,}0\,mm$,also $x_0 = -7{,}57\,mm$

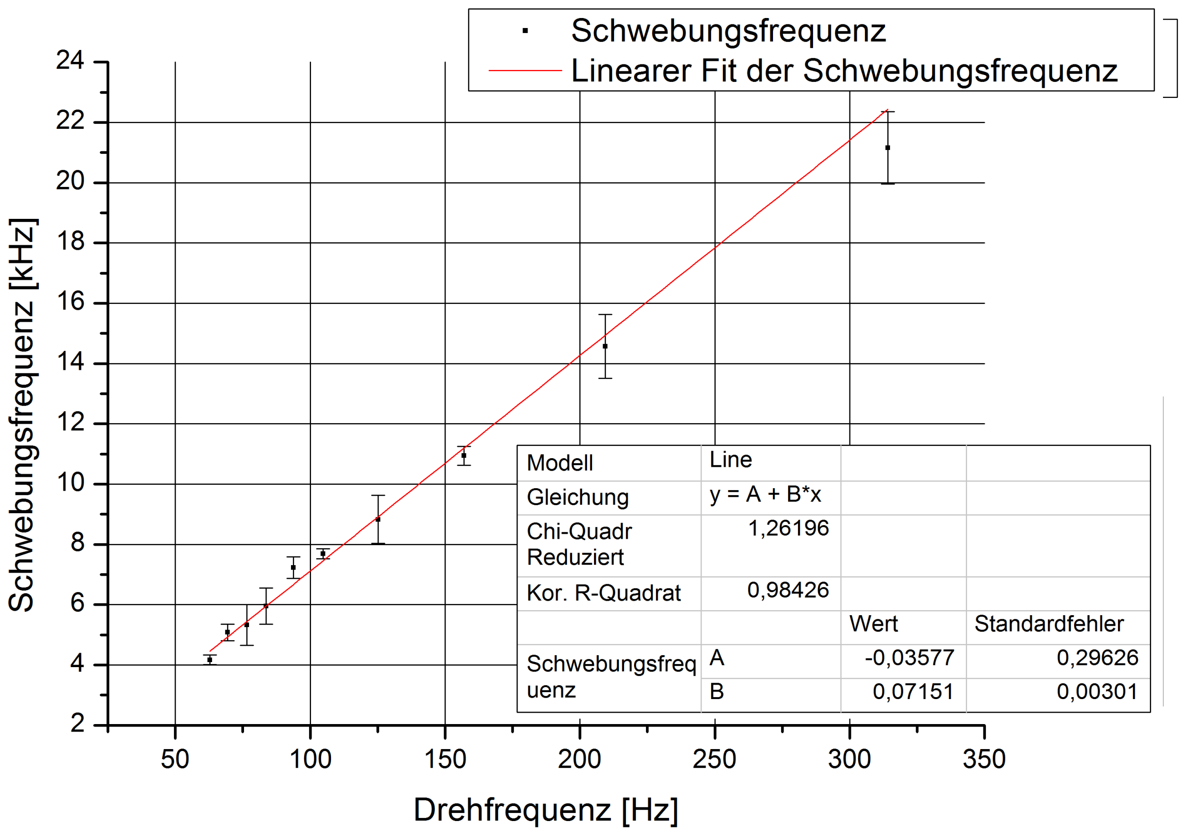

Abbildung 5: Schwebungsfrequenz Δν mit variabler Drehfrequenz bei $x = 42{,}0\,mm$,also $x_0 = -4{,}57\,mm$

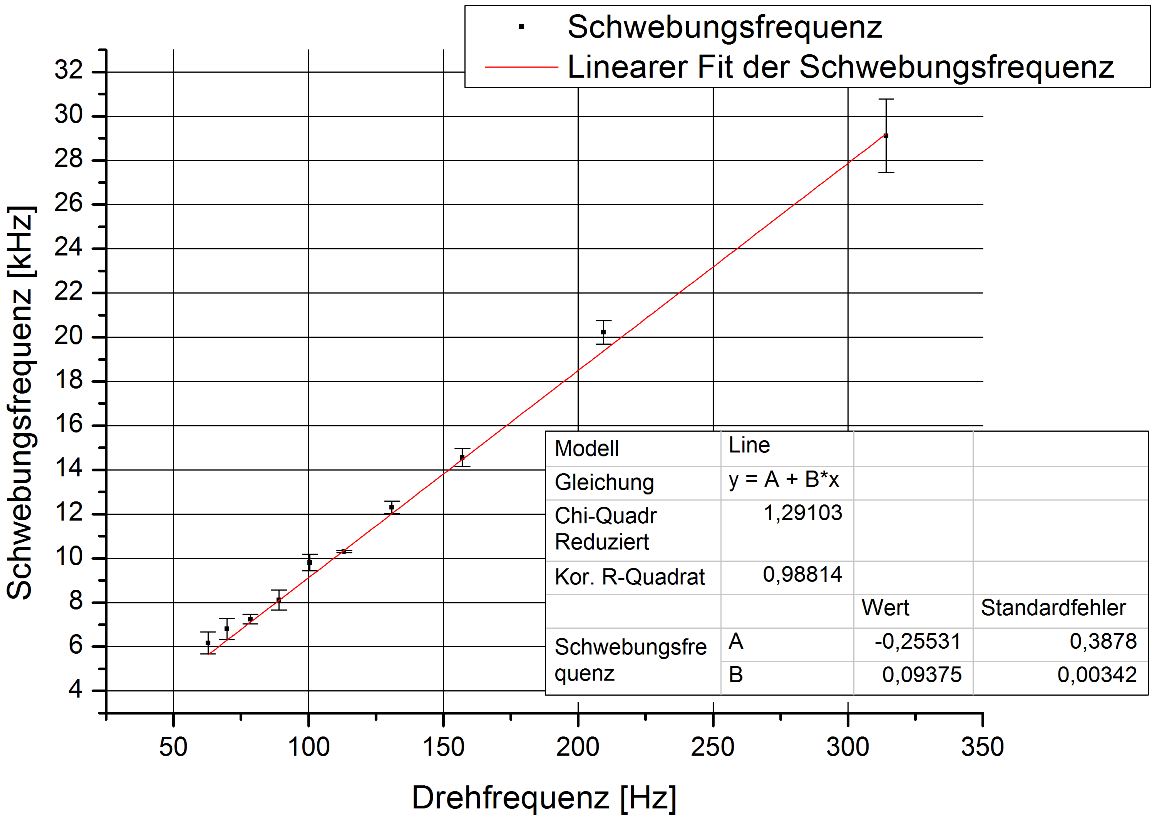

Abbildung 6: Schwebungsfrequenz Δν mit variabler Drehfrequenz bei $x=53{,}0\,mm$,also $x_0=6{,}43\,mm$

2.3. Mittlung von α anhand des gewichteten Mittels aus 2.1. und 2.2.

Berechnet man das gewichtete Mittel der Werte des Mitführungkoeffizienten aus 2.1. und 2.2., also aus u $\alpha_1=0{,}5319\pm0{,}0084$ und $\alpha_2=0{,}5259\pm0{,}0218$ so ergibt sich ein gemittelter Mitführungskoeffizient:

$$\bar{\alpha}_G=\frac{\left(\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\alpha_i}{\sigma_i^2}\right)\right)}{\left(\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{\sigma_i^2}\right)\right)}=0{,}5314$$

und dem gewichteten Fehler $\sigma(\bar{\alpha}_G)=\sqrt{\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{\sigma_i^2}\right)\right)}}=0{,}0080$.

Unser berechneter Mitführungkoeffizient ist also $\bar{\alpha}_G=0{,}531\pm0{,}008$

3. Vergleich von experimentell gemessenem und aus Brechungsindex berechneten Mitführungkoeffizienten α

Man kann den Mitführungskoeffizienten α auch durch den Brechungsindex n der Quarzglasscheibe anhand der Formel berechnen:

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2} - \frac{(\lambda \cdot \Delta n)}{(n \cdot \Delta \lambda)} \quad .$$

- Brechungsindex der Quarzglasscheibe: n = 1,457

- Änderung von n in Abhängigkeit zur Wellenlänge: $\frac{(\Delta n)}{(\Delta \lambda)} = -300 \frac{1}{cm}$

Es ergibt sich: $\alpha = 0{,}5420$

- Der Dispersionsterm $\frac{(\lambda \cdot \Delta n)}{(n \cdot \Delta \lambda)} = 0{,}0130$ macht demnach ca. 2,4% von α aus.

Vergleicht man nun den Wert des Mitführungskoeffizienten $\bar{\alpha}_G = 0{,}531 \pm 0{,}008$

aus 2.3. mit dem aus der Formel berechneten Wert $\alpha = 0{,}542$

so zeigt sich, dass der berechnete Wert nicht ganz im $1\sigma - Bereich$ von $\bar{\alpha}_G$ liegt,

dafür aber nach $\frac{(\alpha - \bar{\alpha}_G)}{(\Delta(\bar{\alpha}_G))} = 1{,}375$ im $1{,}4\sigma - Bereich$.

Wir sehen unsere Messung als recht gut an.

Als mögliche Gründe für die Abweichung kommen statistische und systematische Fehler, wie

- Ableseungenauigkeiten der Schwebungsfrequenzen
- Unterschätzung der Fehler
- Ungenauigkeiten im Aufbau
- große Variation der Drehfrequenzen nach längerer Messzeit

in Frage.