

Versuch: SQUID

Paul Kremser, Tobias Grussenmeyer

Versuchsdurchführung: 22. Oktober 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Überblick	1
2	Aufgabenstellung	1
3	Theoretische Grundlagen	2
3.1	Supraleitung	2
3.2	BCS-Theorie	3
3.3	Flussquantisierung	5
3.4	London-Gleichungen	6
3.5	Josephson-Effekt	7
3.6	Das SQUID	7
3.6.1	Aufbau des RF-SQUID	7
3.6.2	Arbeitspunkt des SQUIDs	10
3.6.3	Lock-In Verstärker	10
4	Versuchsaufbau	11
4.1	JSQ-Magnetometer	11
5	Durchführung	12
5.1	Kalibration des SQUID	12
5.2	Messung der Magnetfelder	13
6	Auswertung	14
6.1	Berechnung der Magnetfelder	14
6.2	Berechnung der Dipolmomente	14
6.3	Felder und Momente der Schleife	15
6.4	Felder und Momente der Gegenstände	19
7	Zusammenfassung	23

1 Überblick

In diesem Versuch soll mittels eines *SQUID* das Magnetfeld verschiedener Proben sowie einer Stromdurchflossenen Leiterschleife gemessen und deren Dipolmoment bestimmt werden. Ein SQUID (Superconducting **Q**uantum **I**nterference **D**evice) ist ein sehr kleiner, höchst empfindlicher Magnetfelddetektor, mit dem sich äußerst geringe Magnetfeldschwankungen registrieren lassen. Da die Nachweisgenauigkeit nur durch Quanteneffekte begrenzt ist, wird die Messgenauigkeit von keinem anderen Magnetfelddetektor übertroffen. Im wesentlichen besteht ein SQUID nur aus einem supraleitendem Ring der an einer sehr schmalen Stelle durch einen Isolator unterbrochen ist. Mit Hilfe geeigneter Elektronik können so kleinste Flussänderungen im Innern des Rings erkannt werden.

2 Aufgabenstellung

1. Kalibration des SQUID durch Variation der Einstellungen. Es soll eine möglichst große Amplitude des SQUID-Patterns bei möglichst kleinem Rauschen gefunden werden.
2. Vermessung der Magnetfelder einer rotierenden Leiterschleife welche von fünf verschiedenen Stromstärken durchflossen wird. Bestimmung der Dipolmomente und Vergleich mit berechnetem Wert.
3. Vermessung der Magnetfelder und Dipolmomente verschiedener Proben (Magnetspan, Stabmagnet, Geldstück, SIM-Karte)
4. (optional) polare Darstellung der Stärke des Magnetfeldes in Abhängigkeit des Drehwinkels

3 Theoretische Grundlagen

3.1 Supraleitung

Bei der normalen elektrischen Leitung entsteht der elektrische Widerstand durch Wechselwirkungen der Elektronen mit Gitterfehlern des Kristallgitters und Gitterschwingungen. Darüber hinaus können auch Streuprozesse der Elektronen untereinander eine wichtige Rolle spielen. Vor der Entdeckung der Supraleitung nahm man an, dass der elektrische Widerstand bei sinkender Temperatur asymptotisch gegen einen konstanten Wert (der nun nur noch aus der Wechselwirkung der Elektronen mit den Gitterfehlern resultiert) ginge. Anders als erwartet stellte sich jedoch heraus, dass für einige Stoffe der Widerstand unterhalb einer kritischen Temperatur schlagartig einen nicht messbaren Wert annimmt. Dieses Phänomen bezeichnet man als Supraleitung. Unter Supraleitung versteht man also elektrische Leitung ohne messbaren Widerstand, man spricht auch von einem Suprastrom.

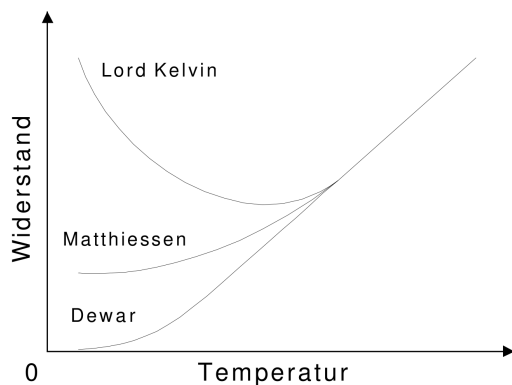


Abbildung 1: Elektrischen Widerstandes bei tiefen Temperaturen. Vorstellungen um 1900.

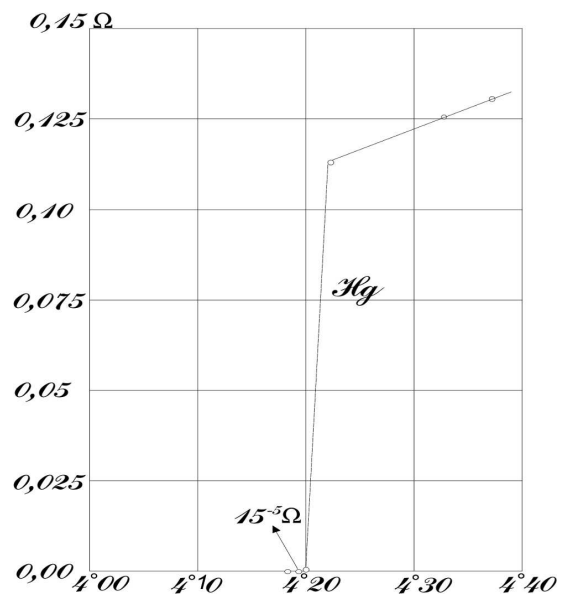


Abbildung 2: Sprungtemperatur von Quecksilber (Leiden 1911)

Allgemein wird die Supraleitung durch eine Paarbildung von Elektronen (Cooper-Paare) im Leiter erklärt (siehe hierzu 3.2). Durch die Kopplung der Elektronen im Supraleiter zu Cooper-Paaren wird die Energieabgabe an das Kristallgitter unterdrückt und so der widerstandslose elektrische Stromfluss ermöglicht.

Supraleiter sind ideale Diamagneten, im supraleitenden Zustand vermag ein Supraleiter bis zu einer oberen kritischen Grenze ein äußeres Magnetfeld (bis auf eine exponentiell abfallende

Eindringtiefe an der Oberfläche, siehe 3.4) vollständig aus seinem Inneren zu verdrängen.

Es sind zwei Arten von Supraleitern bekannt: Typ-I und Typ-II.

Bei Typ I Supraleitern existiert nur eine obere kritische Grenze des äußeren Magnetfeldes. Unterhalb dieser befindet sich der Supraleiter in der Meißner-Phase, überschreitet das Magnetfeld diese Grenze so bricht die Supraleitung zusammen.

Bei Typ II Supraleitern gibt es zwei kritische äußere Magnetfelder, bis zum ersten kritischen Feld verhält sich der Supraleiter wie Typ I, darüber können magnetische Feldlinien in Form so genannter Flussschläuche in das Material eindringen, ehe der supraleitende Zustand bei dem oberen kritischen Magnetfeld vollständig zerstört wird. Der magnetische Fluss in den Flussschläuchen beträgt immer ein ganzzahliges Vielfaches des magnetischen Flussquants (siehe 3.3).

Bei unserem SQUID handelt es sich um einen Typ II Supraleiter. Beispiele für solche sind die keramischen Hochtemperatursupraleiter. Zwei wichtige Gruppen sind YBaCuO (Yttrium-Barium- Kupferoxide) und BiSrCaCuO (Bismut- Strontium- Kalzium- Kupferoxide). Weiterhin zählen die meisten supraleitenden Legierungen zum Typ II, so die für MR-Magnete verwendeten Niob-Aluminium-Legierungen.

3.2 BCS-Theorie

Nach der BCS-Theorie sind die Elektronen bei tiefer Temperatur gepaart. Die Kopplung beruht auf einer Wechselwirkung zwischen den Elektronen und dem Kristallgitter. Ein Elektron wechselwirkt mit dem Gitter und deformiert es. Das gestörte Gitter wechselwirkt, seinerseits mit einem anderen Elektron in der Weise, dass zwischen den beiden Elektronen eine Anziehung besteht, die bei niedrigen Temperaturen stärker als die Coulomb-Abstoßung ist. Die beiden Elektronen gehen in einen gebundenen Zustand über und bilden ein so genanntes Cooper-Paar. Die beiden Elektronen in einem Cooper-Paar haben entgegengesetzte Spins, so dass das Cooper-Paar als Ganzes den Spin Null hat. Jedes Cooper-Paar verhält sich also wie ein Boson. Bosonen unterliegen nicht dem Pauli-Verbot, so dass sich beliebig viele Cooper-Paare im gleichen Quantenzustand befinden und die gleiche Energie besitzen können. Im Grundzustand des Supraleiters bei $T = 0K$ sind alle Elektronen in Cooper-Paaren gebunden, und alle Cooper-Paare haben dieselbe Energie. Im supraleitenden Zustand sind die Cooper-Paare stark korreliert und verhalten sich immer alle gleich. Der Stromfluss im Supraleiter wird dabei so realisiert, dass sich alle Elektronen in diesem Kollektiv gemeinsam bewegen. Dagegen kann Energiedissipation, die auf Stößen einzelner Elektronen mit den Gitterionen beruht, nicht stattfinden, es sei denn, die Temperatur ist so hoch, dass die Bindung der Cooper-Paare aufgebrochen wird.

Ergebnisse der BCS-Theorie:

Die Reichweite r_0 bzw. die Ausdehnung der Elektronen-Paarwellenfunktion berechnet sich zu:

$$r_0 \propto \frac{\hbar}{\partial p} \propto \frac{\hbar v_F}{\Delta E} \propto \frac{E_F}{k_F \Delta E} \quad (1)$$

Mit $E_F \approx (10^3 \text{ bis } 10^4) \cdot \Delta E$ und $k_F \approx 10^8 \text{ cm}^{-1}$ erhält man für r_0 Ergebnisse in der Ordnung von 10^3 \AA

Dieses Resultat, wenn auch nur abgeschätzt, ist wichtig, denn es impliziert zwei Sachverhalte: Erstens ist der Bereich der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der beiden Elektronen so groß, dass die Wellenfunktionen der Paare sich mehrfach überlappen, was zur Bildung eines kohärenten Gesamtzustandes führt. Zweitens wird dies, siehe unten, zu Tunnelphänomenen durch dünne Schichten führen. Die kritische Temperatur T_C , welche angibt, wann das Material ohne Einfluss eines äußeren Magnetfeldes in den supraleitenden Zustand übergeht, berechnet sich zu:

$$T_C = \frac{1,13}{k_B} \hbar \omega e^{-1/D_0 V_0} \quad (2)$$

k_B steht für die Boltzmann-Konstante, D_0 die Zustandsdichte des (noch) normalleitenden Materials und V_0 sowie $\hbar \omega$ sind definiert durch den ursprünglichen Hamiltonoperator. Der Exponent der e-Funktion liegt etwa in dem Bereich $[-2, \dots, -10]$. Für die Energielücke bei $T = 0K$ erhält man:

$$\Delta E(0) = 2 \hbar \omega e^{-1/D_0 V_0} \quad (3)$$

Die Energielücke ist allerdings temperaturabhängig. Sie wird schmaler, wenn sich die Temperatur in Größenordnung der Sprungtemperatur befindet. Dort verhält sie sich nach

$$\frac{\Delta E(T)}{\Delta E(0)} = 1,74 \sqrt{1 - \frac{T}{T_C}} \quad (4)$$

In ähnlicher Weise ergibt sich das temperaturabhängige Verhalten des kritischen Feldes H_C :

$$\frac{H_C(T)}{H_C} \approx 1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^2 \quad (5)$$

3.3 Flussquantisierung

Bei einem SQUID handelt es sich um einen kreisförmigen Supraleiter, der Kreisstrom im Innern lässt sich also als Wegintegral über die Stromdichte \vec{j} berechnen. Da dieser natürlich Null sein muss, folgt

$$\oint_C \vec{j} d\vec{l} = 0 \quad (6)$$

wobei C der Weg entlang des SQUID's ist. Mit dem Stoke'schen Satz folgt das sich der magnetischen Fluss Φ_B durch den Ring darstellen lässt als das geschlossene Integral über das Vektorfeld \vec{A} :

$$\oint \vec{A} d\vec{l} = \Phi_B \quad (7)$$

Die Cooper-Paare liegen wie oben beschrieben alle im gleichen Zustand vor, weshalb sie durch eine gemeinsame Wellenfunktion beschrieben werden können. Die Phase θ dieser Wellenfunktion ist ein eindeutiger Parameter, daher kann sie sich beim Umlauf um den Ring nur um Vielfache von 2π ändern:

$$\oint \vec{\nabla} \theta d\vec{l} = \Delta \theta = n 2\pi \quad (8)$$

Aus Gleichungen 6 - 8 folgt somit eine Quantisierung des magnetischen Flusses in Vielfache von Φ_0 , Fluxoide genannt:

$$|\Phi_B| = n \frac{\hbar c}{2e} = n \Phi_0 \quad (9)$$

$$\text{mit } \Phi_0 = 2,067833667(52) \cdot 10^{-15} \text{ Wb} \quad (1[\text{Wb}] = 1[\text{Tm}^2])$$

3.4 London-Gleichungen

Die Londongleichungen geben Aufschluss über die Eindringtiefe eines äußeren Magnetfelds in einen Supraleiter. Hierzu wird angenommen, dass Beschleunigung von Ladungen e nur von einem statischen elektrischen Feld \vec{E} herrühren:

$$m \dot{\vec{v}}_e = -e \vec{E} \quad (10)$$

Dies zusammen mit der Stromdichte $\vec{j} = n_e e \vec{v}_e$, wobei n_e Ladungsdichte, in die beiden Maxwellgleichungen:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (11)$$

- durch ableiten der Stromdichte nach der Zeit - eingesetzt, liefert

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \times \vec{j} + \frac{n_e e^2}{m c} \vec{B} \right) = 0 \quad (12)$$

Dies fordert Zeitliche Invarianz des Ausdrucks in der Klammer, da \vec{B} im inneren des Supraleiters aber Null ist, folgt dass die Klammer Null sein muss. Somit kommt man auf die London-Gleichung:

$$\vec{\nabla} \times \vec{j} = -\frac{n_e e^2}{m c} \vec{B} \quad (13)$$

aus der sich die beiden Gleichungen:

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{4\pi n_e e^2}{m c^2} \vec{B} \quad \text{und} \quad \nabla^2 \vec{j} = \frac{4\pi n_e e^2}{m c^2} \vec{j} \quad (14)$$

ableiten lassen. Lösungen für diese sind exponentiell abfallende Funktionen mit einer Reichweite von $\Lambda = \sqrt{\frac{m c^2}{4\pi n_e e^2}}$. Folglich kann ein äußeres Magnetfeld eine gewisse Länge in einen Supraleiter eindringen. In der vom Magnetfeld durchdrungenen Schicht fließt ein Abschirmstrom senkrecht zum Magnetfeld.

3.5 Josephson-Effekt

Der Josephson-Effekt besagt, dass Cooper-Paare widerstandsfrei zwischen zwei Supraleitern tunneln, die durch eine dünne, nichtsupraleitende Schicht voneinander getrennt sind. Eine solche Anordnung nennt man **Josephson-Kontakt**. Der Tunnelstrom tritt auf, ohne dass eine Spannung über dem Kontakt angelegt wird. Der Strom hängt von der Phasendifferenz der Wellenfunktion der Cooper-Paare in den beiden Supraleitern ab. Sei ϕ_1 die Phase der Wellenfunktion eines Cooper-Paars in dem einen Supraleiter. Dann haben auch alle anderen Cooper-Paare in diesem Supraleiter die Phase ϕ_1 , da sich alle Cooper-Paare in einem Supraleiter kohärent verhalten. Ist ϕ_2 die Phase der Wellenfunktionen aller Cooper-Paare im zweiten Supraleiter, so beträgt der Strom durch die Übergangsschicht:

$$I = I_{max} \sin(\phi_2 - \phi_1) \quad (15)$$

Darin ist I_{max} der maximale Strom. Dieser ist von der Dicke der Kontaktschicht abhängig. Die Gleichung 15 beschreibt die Abhängigkeit die als **Josephson-Gleichstrom-Effekt** bezeichnet wird.

3.6 Das SQUID

Das SQUID kann also kleinste magnetische Flussänderungen in der Größenordnung eines Flussquants registrieren. Es gibt verschiedene technische Umsetzungen, hier im Praktikum nutzen wir ein sogenanntes RF-SQUID (RF = Radio Frequency), ein vergleichsweise einfacher und günstiger Aufbau.

3.6.1 Aufbau des RF-SQUID

Das RF-SQUID besteht im wesentlichen aus einem ringförmigen Hochtemperatursupraleiter, der an einer Stelle durch eine sehr dünne Isolatorschicht unterbrochen ist und einem LC-Schwingkreis. Die Isolatorschicht ist nur wenige nm dick und erfüllt die Funktion eines Josephson-Kontakts.

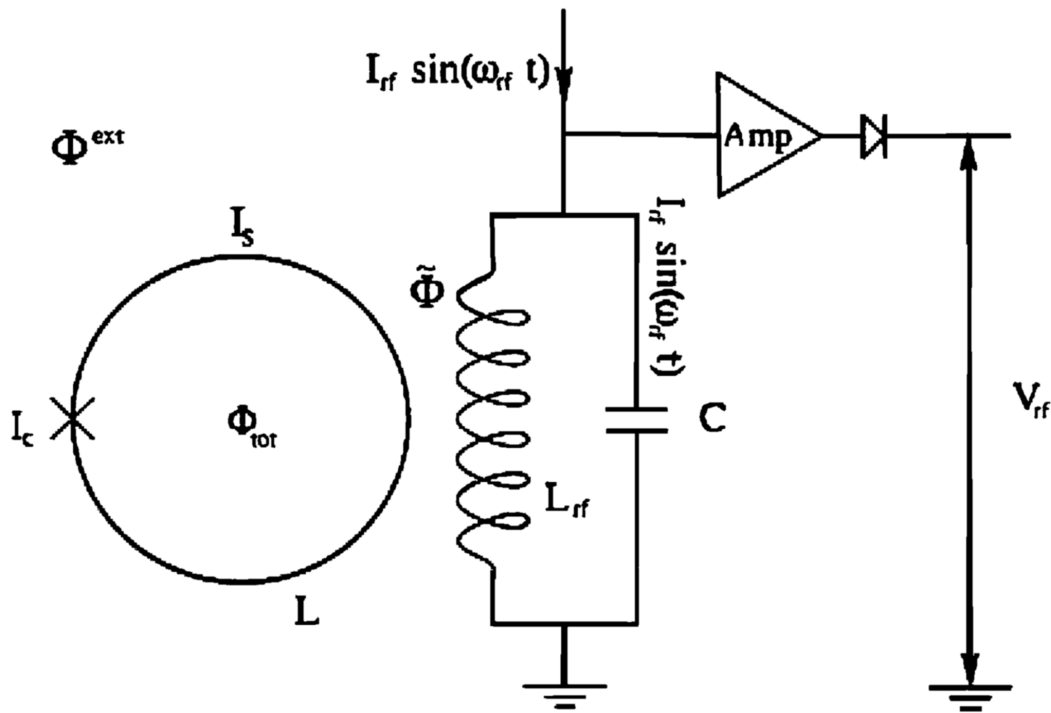


Abbildung 3: Aufbau unseres Radio Frequency SQUID.

Die kritische Temperatur wird durch eintauchen des SQUIDS in Stickstoff erreicht. Der Schwingkreis wird mit einer Frequenz von einigen hundert Megahertz betrieben und so ein externer magnetischer Fluss Φ_{ext} erzeugt. Dieser erzeugt einen Suprastrom der das Feld welches das SQUID zu durchdringen sucht kompensiert. Durch den Josephsonkontakt wird die Phase der Gesamtwellenfunktion der den Strom tragenden Cooperpaare verschoben:

$$\theta_2 - \theta_1 = 2\pi n - 2\pi \frac{\Phi_{tot}}{\Phi_0} \quad (16)$$

Ändert sich der externe Fluss um Werte die kleiner als das Flussquant Φ_0 sind, so ändert sich der interne Fluss nicht. Es tritt dann in einer dünnen Schicht unterhalb der Oberfläche ein Abschirmstrom I_s auf (kein Suprastrom), so dass der Fluss im Innern dennoch ein vielfaches von Φ_0 ist. Dieser erzeugt seinerseits einen Fluss $\Phi_s = LI_s$ (L ist durch Abmessung und Material bestimmt) so dass:

$$\Phi_{tot} = \Phi_{ext} - LI_s \quad (17)$$

Der Fluss im Innern wird also solange das SQUID supraleitend ist immer konstant auf einem bestimmten Vielfachen von Φ_0 gehalten. Wenn der externe Fluss um mehr als ein ganzes Flussquant verändert wird, bricht die Supraleitung kurz zusammen. Sie tritt dann sofort wieder ein wobei

sich der interne Fluss nun entsprechend der Veränderung des externen auf einen neuen Wert (der wieder ein vielfaches von Φ_0 ist) eingestellt hat. Dies liegt daran das der Abschirmstrom bei Erhöhung des externen Flusses um mehr als ein Flussquant den kritischen Strom übersteigt, sich dann ein neuer Flussschlauch ausbildet (somit erhöht sich der innere Fluss um Φ_0) und damit der Abschirmstrom wieder unter den kritischen sinkt. Für den durch den Josephsonkontakt unterbrochenen Supraleiter gilt dies gleichermassen allerdings gilt hier für den inneren Fluss wegen $I_s = I_{s,max} \sin(\theta_2 - \theta_1)$:

$$\Phi_{tot} = \Phi_{ext} - LI_{s,max} \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad (18)$$

Der Verlauf bei Anlegen eines äußeren Feldes ist in Abbildung 4 dargestellt. Die grauen Linien stellen die Zustände entsprechend der rechtsstehenden vielfachen von Φ_0 dar. Die gestrichelte Linie den Verlauf ohne Erreichen der kritischen Stromstärke. Der eckige hystereseförmige Verlauf mit Pfeilen soll idealisiert verdeutlichen wie sich das SQUID bei Variation des Magnetfeldes verhält.

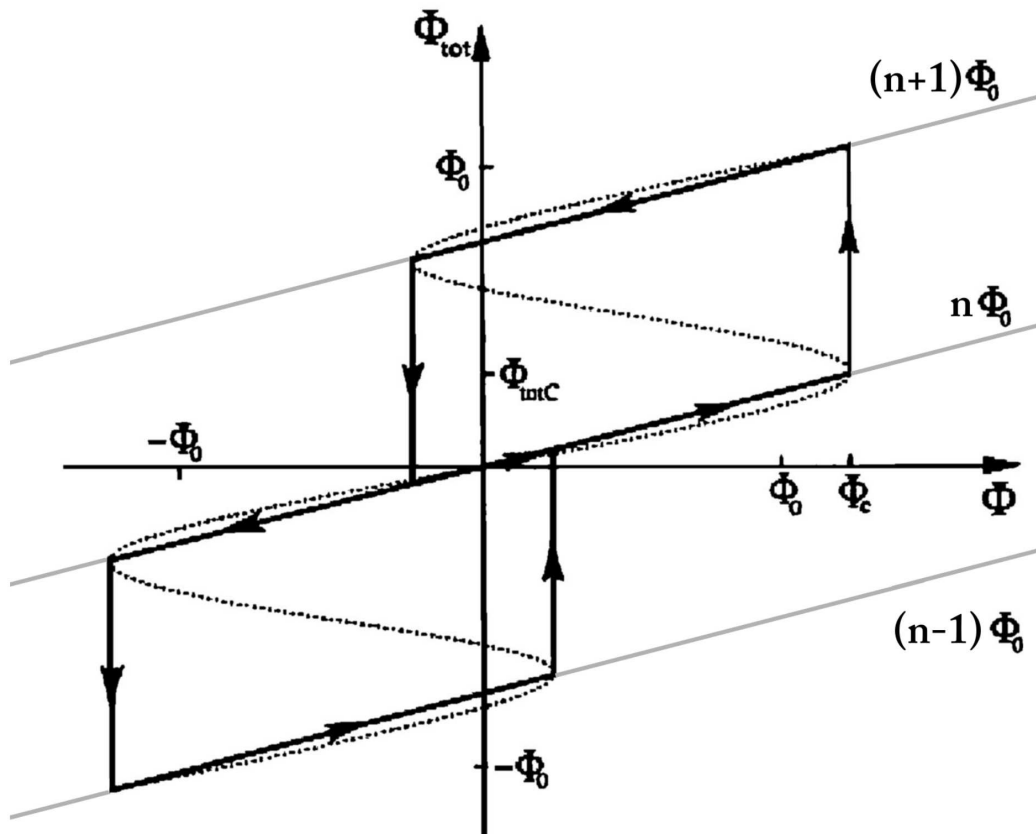


Abbildung 4: Verhalten des Flusses im SQUID bei Variation des äußeren Feldes.

3.6.2 Arbeitspunkt des SQUIDS

Die Amplitude des Stromes im Schwingkreis wird sehr klein gewählt, so klein, dass die damit verbundene Flussänderung gegenüber dem Flussquant Φ_0 verschwindend gering ist. Hierbei wird gebrauch davon gemacht, dass bei konstanter Stromamplitude die Amplitude der Spannung im Schwingkreis abhängig vom anliegenden äußeren Feld variiert. Dies bedeutet, dass V_{rf} dem Strom I_{rf} folgt, solange der externe Fluss nicht größer als der kritische Fluss ist. Bei kleinerem externen Fluss als ein Flussquant aber größerem als dem kritischen Fluss ergibt sich keine Änderung von V_{rf} .

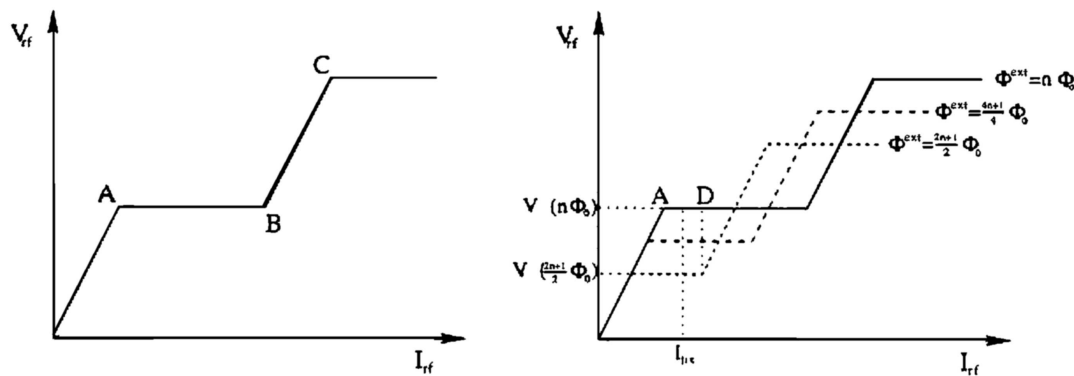


Abbildung 5: Verhältnis zwischen Strom und Spannung im Schwingkreis.

- Falls $\Phi_{ext} = n\Phi_0$, so entspricht die Amplitude der Spannung der Höhe des ersten Plateaus.
- Für ansteigendes Φ_{ext} wird der Hub der Spannung geringer, da das Plateau schon früher einsetzt. Das Minimum des Hubes wird erreicht, sofern der externe Fluss $\Phi_{ext} = (n + 1/2)\Phi_0$.
- Falls das externe Feld weiter anwächst, so steigt auch die Amplitude der Spannung, da der Strom eine Amplitude besitzt, welche bereits wieder über das Ende des Plateaus hinausgeht.
- Bei $\Phi_{ext} = (n + 1)\Phi_0$ wird schließlich das Maximum wieder erreicht.

Steigt der externe Fluss gleichmäßig an, so ändert sich die maximale Spannung im Schwingkreis periodisch. Die Periodendauer ist gekoppelt mit einer Änderung des externen Flusses um ganze Flussquanten Φ_0 .

3.6.3 Lock-In Verstärker

Bei der Methode des Lock-In Verstärkers wird dem zu messenden Signal ein Referenzsignal bekannter Frequenz aufmoduliert. Das somit erhaltene Signal und das Referenzsignal werden

in Phase auf einen Integrator (Operationsverstärker mit Kondensator) gegeben. Hierbei wird die Orthogonalität von sinus und cosinus ausgenutzt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega_1 \neq \omega_2 \\ \pi & \text{für } \omega_1 = \omega_2 \end{cases} \quad (19)$$

Durch den Integrator werden alle Frequenzen die nicht dem Referenzsignal entsprechen, und somit jegliches Rauschen, herausgefiltert.

Wichtig ist das Messsignal und Referenz genau in Phase sind da sonst die Amplitude des Integrals sinkt oder verschwindet. Im SQUID-Versuch ist dies durch die Elektronik fest eingestellt und muss daher vom Praktikanten nicht beachtet werden. Die einzige Einstellung die vorgenommen werden kann ist die Größe des Kondensators im Integrator welche die Integrationszeit bestimmt und somit die Glättung des Signals beeinflusst.

4 Versuchsaufbau

Die Komponenten des SQUID-Versuchs:

- Isoliertes Gefäß zur Aufnahme von flüssigem Stickstoff (Kryostat)
- Probenschlitten inklusive Aufsatz für zwei verschiedene Probenhalterungen - eine stromdurchflossene Leiterschleife und eine Mehrzweckhalterung
- Motor samt Spannungsversorgung und auf verschiedene Umdrehungsgeschwindigkeiten einstellbares Getriebe
- JSQ-Magnetometer, bestehend aus der SQUID-Sonde, deren Signalverarbeitungselektronik und Spannungsversorgung
- Oszilloskop zur Darstellung des SQUID-Signals
- Computer zur Auslese des Oszilloskops und Steuerung des Regelkreises des SQUIDs
- Widerstände zwischen 50Ω und 1000Ω , sowie diverse Proben mit unbekanntem Dipolmoment

4.1 JSQ-Magnetometer

Das SQUID lässt sich über die Software 'JSQ Duo Sensor Control' bedienen. Hier lässt sich folgendes einstellen:

- **VCA** - Die Stromamplitude des Schwingkreises. Die komplette Skala deckt, nicht ganz linear, einen Bereich von -115 dBm ($1,8 \cdot 10^{-9} \text{ W}$) bei einem eingestellten Wert von 0 bis -75 dBm ($1,8 \cdot 10^{-7} \text{ W}$) bei einem Wert von 4095.
- **VCO** - Regelung der Frequenz des Schwingkreises. Es können Werte von 630 MHz (0) bis 970 MHz (4095) eingestellt werden. Eine genaue Zuordnung findet sich im Benutzerhandbuch auf Seite 9.
- **OFF** - Dient zur Skalierung der Gesamtspannungsamplitude, dies wird hier dazu verwendet, das Signal um den Nullpunkt herum zu zentrieren.
- **Integr.C** - Kapazität des des Kondensators, welcher die Shaping-Zeit bestimmt. Größere Werte glätten das Signal mehr als kleine.
- **FB-R** Widerstandswert des sogenannten Feedback-Resistors. Durch seinen Wert wird die Spannung des Stromkreises festgelegt, was in diesem Fall die Verstärkung der Schaltung definiert. Je nach Einstellung gelten unterschiedliche Verhältnisse für die Relation von Spannung zur Anzahl der Flussquanten. Es sind folgende Werte des Transfer-Koeffizienten s_i wählbar (Siehe auch Benutzerhandbuch Seite 25):

$R/k\Omega$	1	3	6	10	15	20	50	100
$s_i/mV/\Phi_0$	21	60	120	195	290	380	950	1900

Im Betriebsmodus „Test“ wird eine zusätzliche Dreiecksspannung in den Schwingkreis eingekoppelt, welche für eine kontrollierte Flussänderung von mehreren Flussquanten Φ_0 sorgt. Hierdurch lässt sich die Spannungsantwort des SQUID welche am Oszilloskop beobachtet werden kann maximieren und somit der Arbeitspunkt wählen.

Die Betriebsart „Messung“ wird wie der Name schon sagt für die Vermessung des magnetischen Feldes einer Probe verwendet.

5 Durchführung

5.1 Kalibration des SQUID

Das SQUID muss vor jeder Messung auf den Arbeitspunkt eingestellt werden. Hierzu betriebe wir es im Testmodus, in welchem wie oben beschrieben ein Dreieckssignal auf die Spule gegebene wird. Die Spannungsantwort hat dann einen sinusförmigen Verlauf und wird SQUID-Pattern genannt. Um die Amplitude des SQUID-Patterns zu maximieren, beobachteten wir die Amplitude auf dem Oszilloskop während wir Frequenz und Amplitude des Stroms durch den

Schwingkreis variierten. Wir erhielten ein sauberes Signal und erkannten auch ein eindeutiges Maximum der Amplitude, wobei wir leider vergaßen ein Bild unseres Patterns zu speichern. Die Einstellungen für maximale Amplitude betrugen:

VCA	VCO	OFF
1325	1456	1411

5.2 Messung der Magnetfelder

Als erstes haben wir die Leiterschleife mit verschiedenen Stromstärken vermessen. Hierzu wählten wir in der Software die „measure“ Einstellung und platzierten die Leiterschleife, welche sich an der Spitze einer Aluminiumstange befand, so in der SQUID-Aperatur dass sie sich mittig unter dem Supraleitenden Ring befand. Um das Magnetfeld der Leiterschleife in Abhängigkeit des Winkels betrachten zu können wird die Stange mit der Leiterschleife auf einen Schrittmotor mit Getriebe variabler Übersetzung geschoben. An der Stange befinden sich auch zwei Mignon-Zellen und eine kleine Platine mit verschiedenen Widerständen, welche über einen Jumper einzeln gewählt werden können. Über die Widerstände lässt sich der Strom durch die Leiterschleife gemäß des Ohmschen Gesetzes wählen. Die zur Verfügung stehenden Widerstände waren:

Bezeichnung	R1	R2	R3	R4	R5
R/Ω	51,47	100,8	300,8	510,6	1000

Bevor wir mit Messung begannen maßen wir die Batteriespannung ($2,92V$), den Abstand der Probendrehachse zum SQUID ($4,4 \pm 0,5cm$) und die Halbachsen der Leiterschleife (a: $1,85mm$ b: $2,55mm$). Dann maßen wir die Spannungsantwort des SQUID am Oszilloskop für jeden Widerstand über eine Umdrehung der Leiterschleife bei 10facher Übersetzung des Motors. Wir entschieden uns für die größte Übersetzung des Motors da das Oszilloskop beim Speichern der Messdaten immer die gleiche Anzahl an Messpunkten schrieb. Eine langsamere Drehung der Probe würde somit nicht zu einer besseren Messgenauigkeit führen sonder nur Zeit verschwenden.

Als nächstes nahmen wir uns den Stabmagneten vor. Für die Anbringung einer Probe am Motor stand eine Probenhalterung zur Verfügung. Diese bestand aus einer Aluminiumstange mit einem Drehbaren Ring am Ende. Durch den Ring ließ sich mittels vier Plastikschauben eine Probe von vier Seiten fixieren. Die vom Versuch aus zur Verfügung stehenden Proben waren jedoch großteils auf ein rundes Plastikschildchen geklebt welches sich in den Ring klemmen ließ und ohne Fixierung durch Schrauben hielt.

Als wir mit den Messungen der Leiterschleife und des Stabmagneten durch waren wurden wir von unserem Assistenten auf eine Anomalie in der Grundlinie des SQUID Signals hingewiesen:

Beobachtet man das SQUID-Signal auf dem Oszilloskop wenn sich keine Probe in der Apparatur befindet, über mehrere Sekunden (10-20), so stellt man ein leichtes Ansteigen und Abfallen des Signals fest. Dieser Verlauf hat die Form einer Kondensatoraufladung und scheint daher durch die Elektronik bedingt zu sein. Aus diesem Grund ist es günstiger das Signal über mehrere Umdrehungen der Probe aufzunehmen. In der Auswertung entschieden wir uns deshalb auch bei dem Fit für die Messung der Leiterschleife noch einen Steigungsterm zur Fitfunktion hinzuzufügen um die Änderung der „Nulllinie“, welche man im Zeitraum einer Umdrehung als linear ansehen kann, auszugleichen.

Anschließend haben wir noch den Magnetspan und eine Simkarte vermessen. Hierzu nahmen wir das Signal nun jeweils über mehrere Umdrehungen der Probe auf. Die Simkarte haben wir jeweils entlang einer der Hauptachsen rotieren lassen und so das Magnetfeld bezüglich drei Achsen vermessen.

6 Auswertung

6.1 Berechnung der Magnetfelder

Zur Berechnung der Magnetfelder aus dem gemessenen Spannungunterschied ΔV benutzen wir den vom Hersteller angegebenen Feld-Fluss-Koeffizienten $F = 9,3 \frac{nT}{\Phi_0}$. Das Magnetfeld ergibt sich hiermit zu:

$$B_z = F \frac{\Delta V}{s_i} \quad (20)$$

wobei s_i gemäß der Tabelle in Abschnitt 4.1 über den Feedback resistor bestimmt ist.

Die Fehler berechnen sich demnach einfach über die relativen Fehler von ΔV :

$$s_{B_z} = B \frac{s_{\Delta V}}{\Delta V} \quad (21)$$

6.2 Berechnung der Dipolmomente

Für eine stromdurchflossene Leiterschleife ist das Dipolmoment definiert durch

$$\vec{p}_m = I \vec{A} \quad (22)$$

mit Strom I und Flächennormale \vec{A} . Während der Auswertung fiel uns auf das unsere Messung für den Schleifenradius sehr ungenau war, weshalb wir nach Absprache mit dem Assistenten diese wiederholten. Wir gingen dabei von einer Ellipsenförmigen Schleife aus. Wir maßen also Innen- ($2a_{innen}$) und Aussendurchmesser ($2a_{außen}$) der kleinen Halbachse sowie Innendurchmesser b_{innen} der großen (da hier ein messen des äußeren Radius nicht möglich war).

Wir berechneten so die Dicke d der Schleife und mittelten auf die Halbachsen a und b . Als Fläche A erhielten wir also:

$$A = \pi ab = \pi \frac{a_{innen} a_{auen}}{2} (b_{innen} + d) = \pi \frac{a_{innen} a_{auen}}{2} (b_{innen} + (a_{auen} - a_{innen})) \quad (23)$$

da alle Messungen denselben absoluten Fehler s_{mes} haben (wir schätzten 0.1 mm, mit Schiebelehre gemessen) erhielten wir als Fehler der Fläche:

$$s_A = A \left(\frac{s_a}{a} + \frac{s_b}{b} \right) = A \left(\left(\frac{s_{mes}}{a_{innen}} + \frac{s_{mes}}{a_{auen}} \right) + \frac{3s_{mes}}{b} \right) \quad (24)$$

damit wird der Betrag des theoretischen Dipolmoments zu:

$$p_{theo} = AI \quad (25)$$

Da der Fehler der Fläche viel größer als der des Batteriestroms ist kann man letzteren vernachlässigen und der Fehler des theoretischen Dipolmoments berechnet sich dann zu:

$$s_{p_{theo}} = \frac{s_A}{A} p_{theo} \quad (26)$$

Gleichzeitig gibt es die Möglichkeit das Dipolmoment aus der Messung des Magnetfeldes B auf der Dipolachse zu bestimmen:

$$p_m = \frac{2\pi B_z z^3}{\mu_0} \quad (27)$$

für den Fehler gilt hier:

$$s_{p_m} = \sqrt{\left(\frac{\partial p_m}{\partial B_z} \right)^2 s_{B_z}^2 + \left(\frac{\partial p_m}{\partial z} \right)^2 s_z^2} = p \sqrt{\left(\frac{s_{B_z}}{B_z} \right)^2 + \left(\frac{3s_z}{z} \right)^2} \quad (28)$$

6.3 Felder und Momente der Schleife

Zur Analyse der Daten verwendeten wir ROOT in Verbindung mit Python.

Wie oben erwähnt entschieden wir uns bei der Leiterschleife aufgrund der anormalen Grundlinie für einen linearen Term in der Fitfunktion. Dieser soll hier nochmal mathematisch gerechtfertigt werden. Hierzu folgende Tabelle die zeigt das sich χ^2 durch Einfügen dieses Terms verbessert. Auch an den Fits selbst kann man dies augenscheinlich erkennen.

Widerstand	χ^2 bei Fit ohne linearem Term	χ^2 bei Fit mit linearem Term
R1	$9 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-5}$
R2	$10 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-5}$
R3	$6 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-5}$
R4	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$
R5	$6 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$

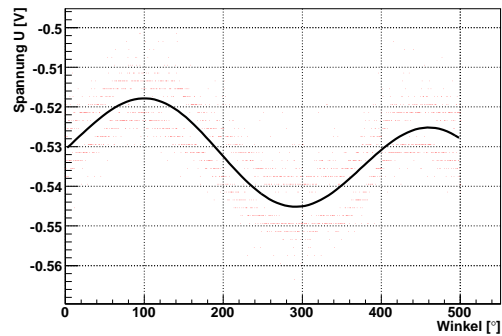
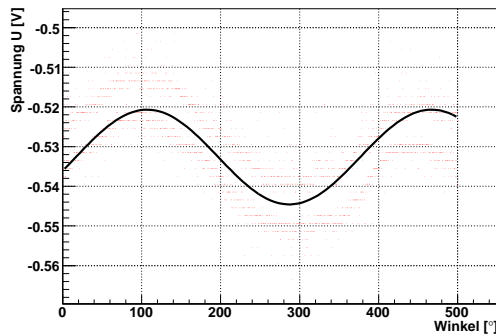


Abbildung 6: Fit an R5 ohne Steigungsterm. Abbildung 7: Fit an R5 mit Steigungsterm.

Für die verschiedenen Widerstände erhielten wir durch unsere Messung folgende Magnetfelder und Dipolmomente:

Widerstand	B_z	s_{B_z}	p_{mes}	$s_{p_{mes}}$	p_{theo}	$s_{p_{theo}}$	$\frac{p_{theo}}{p_{mes}}$
R1	2.1e-09	3.1e-12	9.1e-07	3.1e-07	8.4e-07	1.1e-07	0.93
R2	1.1e-09	3e-12	4.7e-07	1.6e-07	4.3e-07	5.7e-08	0.91
R3	3.7e-10	2.4e-12	1.6e-07	5.3e-08	1.4e-07	1.9e-08	0.92
R4	2.1e-10	2.2e-12	9.1e-08	3.1e-08	8.5e-08	1.1e-08	0.93
R5	1.2e-10	2.2e-12	4.9e-08	1.7e-08	4.3e-08	5.7e-09	0.88

Die zur Polardarstellung verwendete Koordinatentransformation ist definiert ist durch:

$$x = |B_z| \cos(\alpha)$$

$$y = |B_z| \sin(\alpha)$$

Die verwendete Fitfunktion ist:

$$f(x) = f_0 + f_1 \cdot x + f_2 \sin(f_3 \cdot x + f_4)$$

mit $f_0 \hat{=}$ Offset

$f_1 \hat{=}$ Steigung (s.o.)

$f_2 \hat{=}$ Amplitude ($\hat{=}\frac{\Delta V}{2}$)

$f_3 \hat{=}$ Kreisfrequenz

$f_4 \hat{=}$ Phasenverschiebung

Wir erhielten aus unseren Daten folgende Fits sowie Darstellungen in Polarkoordinaten:

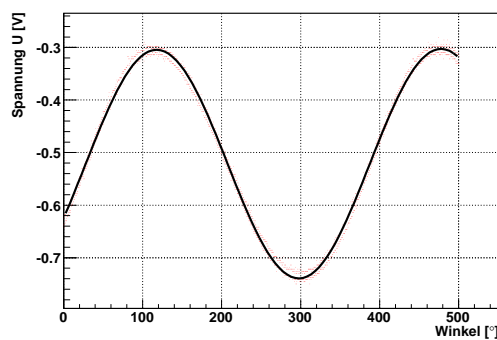


Abbildung 8: Fit an R1.

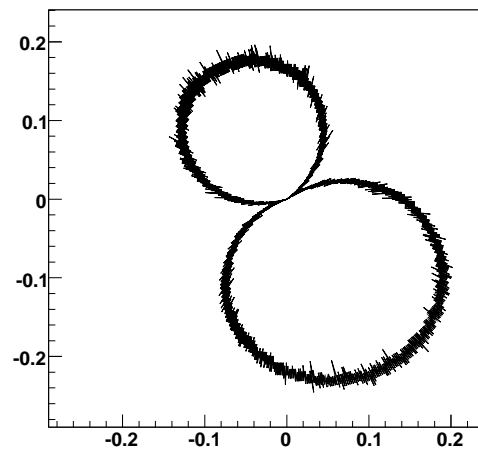


Abbildung 9: Polardarstellung.

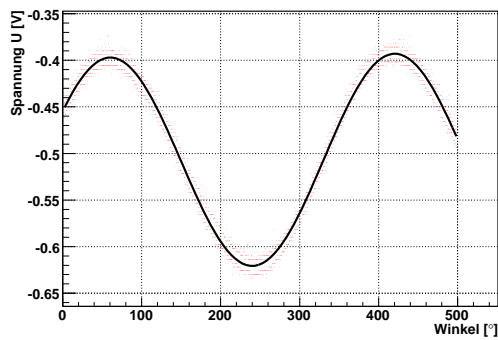


Abbildung 10: Fit an R2.

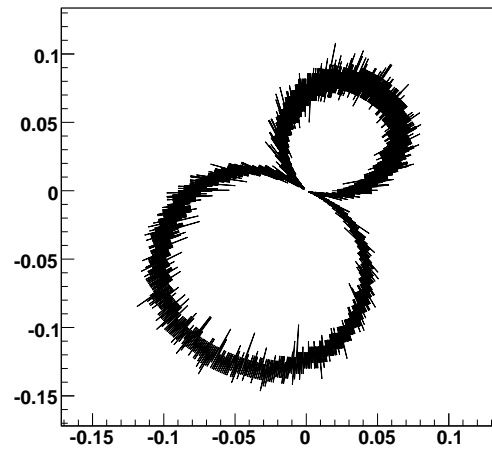


Abbildung 11: Polardarstellung.

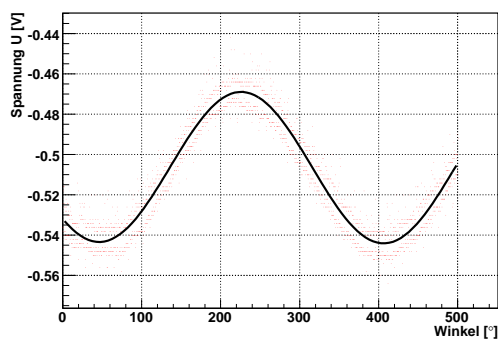


Abbildung 12: Fit an R3.

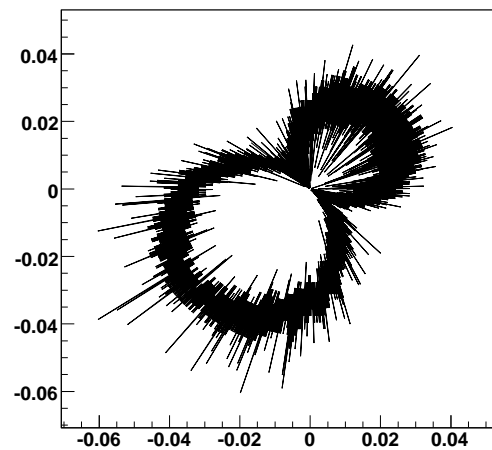


Abbildung 13: Polardarstellung.

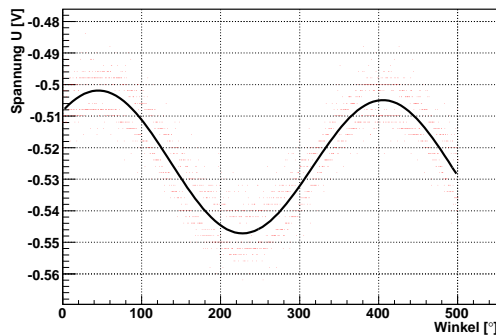


Abbildung 14: Fit an R4.

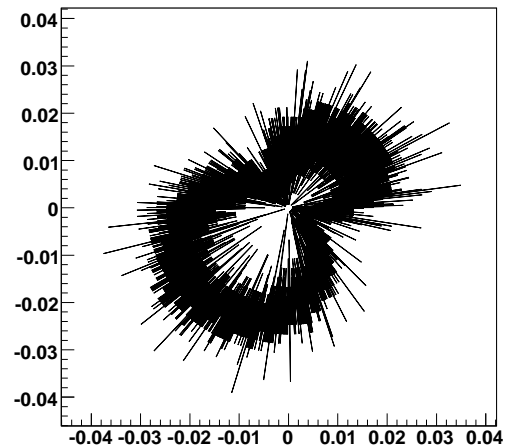


Abbildung 15: Polardarstellung.

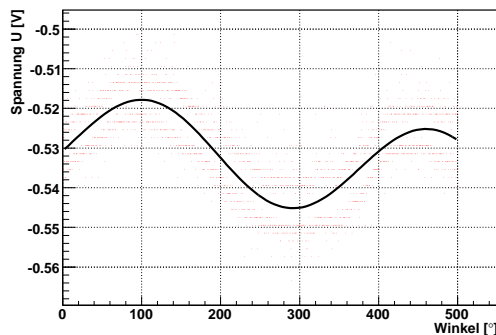


Abbildung 16: Fit an R5.

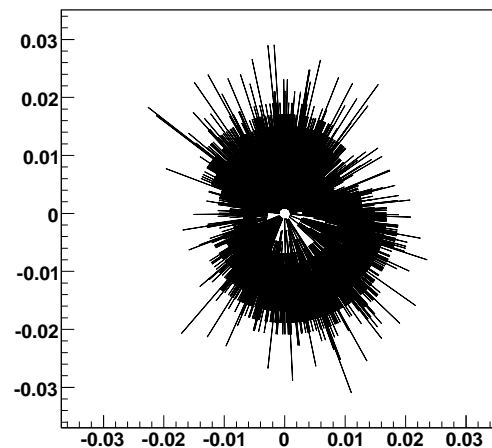


Abbildung 17: Polardarstellung.

6.4 Felder und Momente der Gegenstände

Bei der Vermessung der Gegenstände erhielten wir folgende Werte für Magnetfeld und Dipolmoment. Bei der SIM-Karte erhielten wir für zwei Achsen ein Bild was nicht dem eines Dipols sondern eines Quatropols zu entsprechen scheint (siehe Abbildung 25 und 27). Hierfür schafften wir es leider nicht mehr eine passende Fitfunktion zu finden. Daher enthält die Tabelle für diese Messung weder Magnetfeld noch Dipolmoment.

Gegenstand	B_z	s_{B_z}	p_{mes}	$s_{p_{mes}}$
5 cent	1.1e-23	2.3e-25	4.6e-21	3.1e-21
Stabmagnet	2.9e-22	1.3e-24	1.2e-19	8.4e-20
Magnetspan	1.1e-21	4e-24	4.7e-19	3.2e-19
SIM Achse3	1.1e-22	1.8e-24	4.9e-20	3.3e-20

Als Fits Und Polardarstellung erhielten wir:

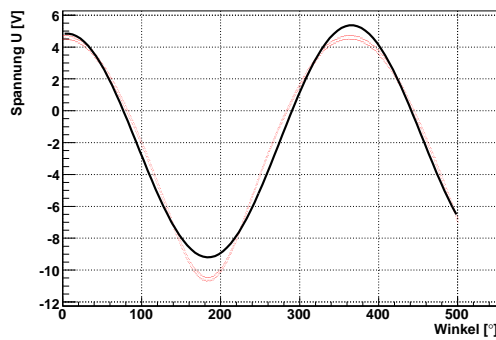


Abbildung 18: Fit an Stabmagnet.

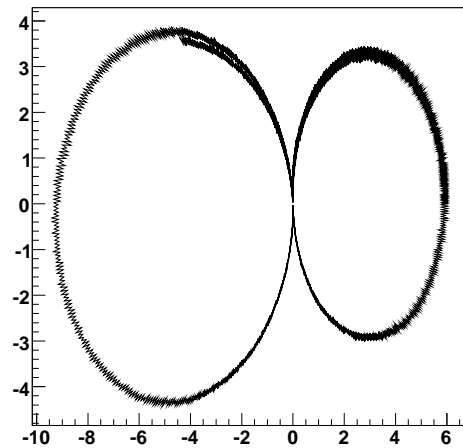


Abbildung 19: Polardarstellung.

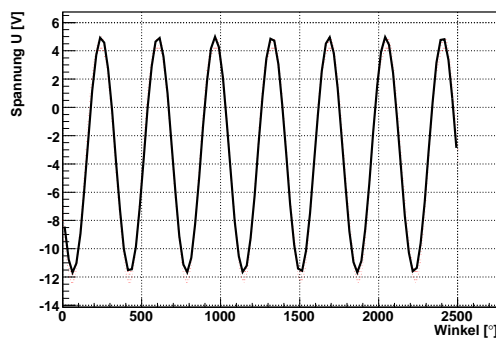


Abbildung 20: Fit an Magnetspan.

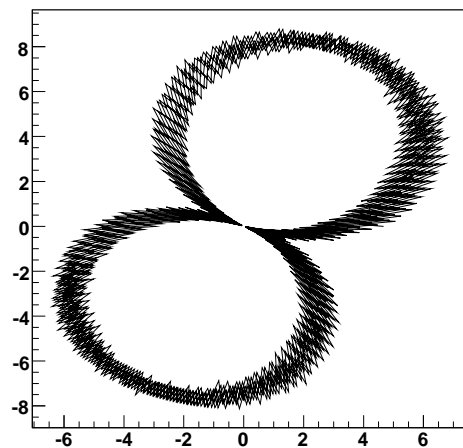


Abbildung 21: Polardarstellung.

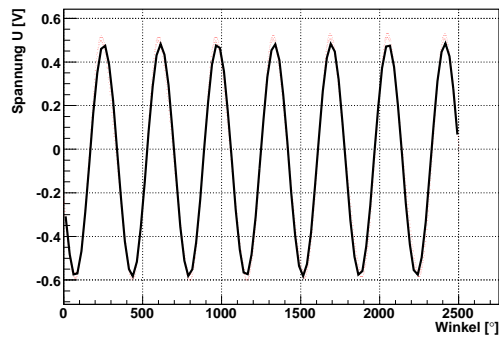


Abbildung 22: Fit an 5 cent.

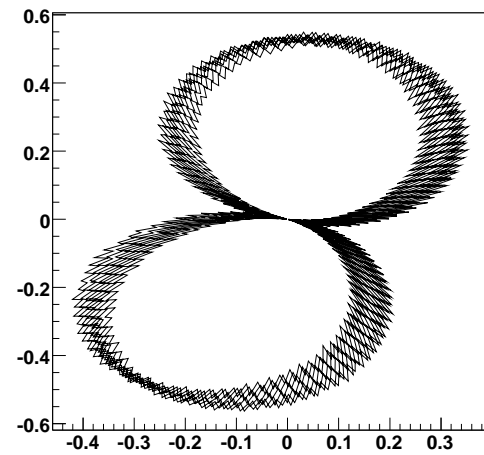


Abbildung 23: Polardarstellung.

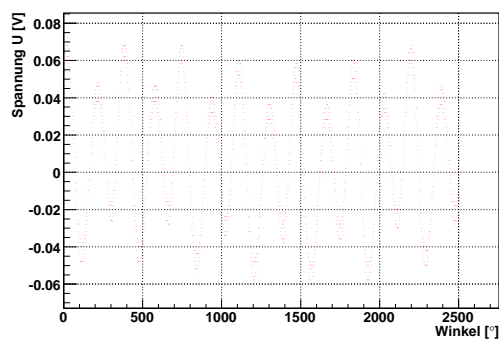


Abbildung 24: Fit an SIM Achse 1.

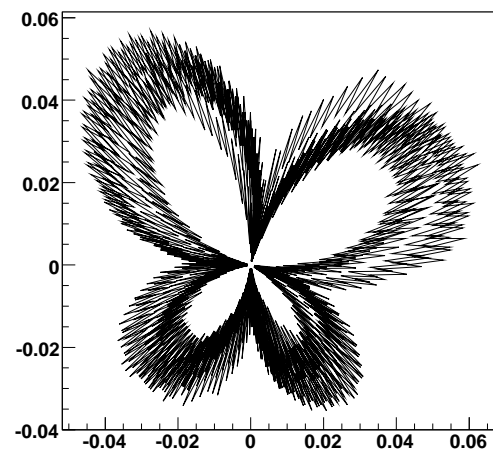


Abbildung 25: Polardarstellung.

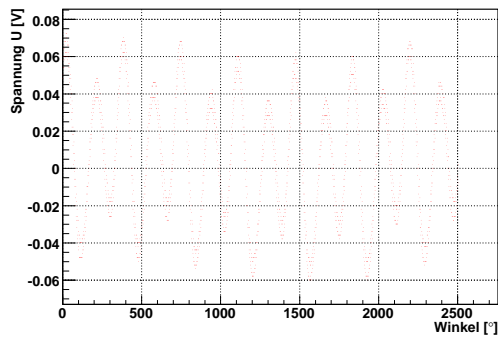


Abbildung 26: Fit an SIM Achse 2.

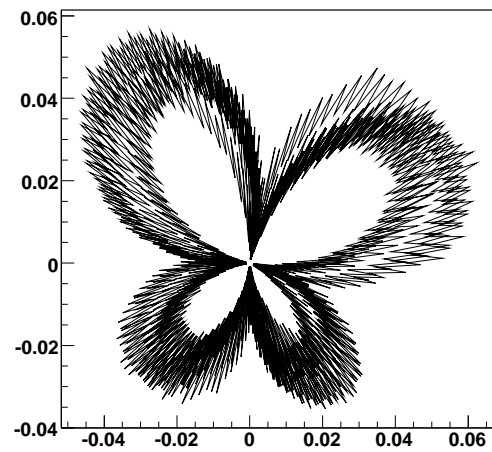


Abbildung 27: Polardarstellung.

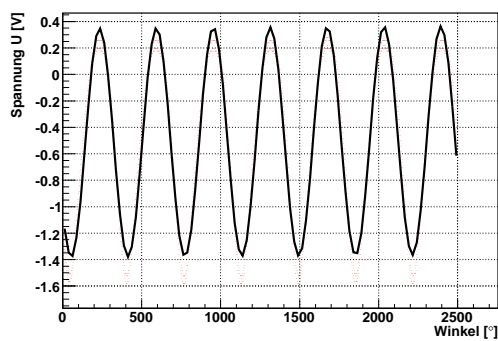


Abbildung 28: Fit an SIM Achse 3.

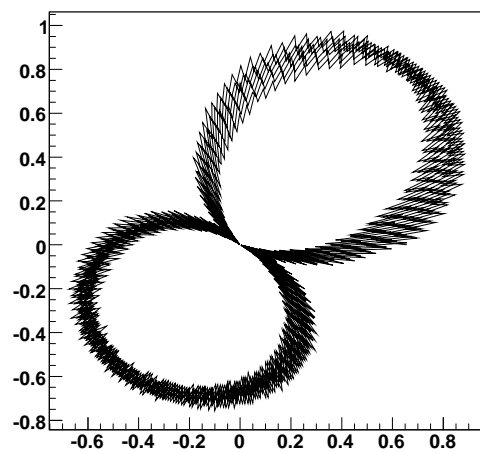


Abbildung 29: Polardarstellung.

7 Zusammenfassung

Wir konnten anhand der Messungen mit der Leiterschleife die Theorie recht gut verifizieren (Faktor 0,88 bis 0,93 zwischen theoretischem und gemessenem Wert). Systematischen Fehler stellen vor allem die Längenmessungen (Abstand SQUID-Probe und Längenbestimmung zur Berechnung der Schleifenfläche) dar. Für die Fläche der Leiterschleife erhielten wir durch eine geringfügig bessere Messung (Messung mit Schiebelehre statt Lineal und Berechnung als Ellipse nicht als Kreis) deutlich bessere Werte für die Messung (vor der korrigierten Fläche hatten wir einen Faktor von etwa 0,6 zwischen Theorie und Messung). Ein weiterer systematischer Fehler stellt die Abschirmung des SQUID's gegen äußere Felder dar. Während der Messung erhielten wir einen Anruf per Handy was ein starkes Rauschen verursachte. Dies könnte auch durch die Elektronik verursacht worden sein, als wir aber einen Magneten an der hinter dem SQUID hängenden Tafel verschoben und dies das Offset des Signals signifikant veränderte, war klar das die Abschirmung verbessert werden kann. Hier nochmal unsere Messergebnisse:

- **Messergebnisse der Leiterschleife**

Widerstand	B_z	s_{B_z}	p_{mes}	$s_{p_{mes}}$	p_{theo}	$s_{p_{theo}}$	$\frac{p_{theo}}{p_{mes}}$
R1	2.1e-09	3.1e-12	9.1e-07	3.1e-07	8.4e-07	1.1e-07	0.93
R2	1.1e-09	3e-12	4.7e-07	1.6e-07	4.3e-07	5.7e-08	0.91
R3	3.7e-10	2.4e-12	1.6e-07	5.3e-08	1.4e-07	1.9e-08	0.92
R4	2.1e-10	2.2e-12	9.1e-08	3.1e-08	8.5e-08	1.1e-08	0.93
R5	1.2e-10	2.2e-12	4.9e-08	1.7e-08	4.3e-08	5.7e-09	0.88

- **Messergebnisse der Gegenstandsmessungen**

Gegenstand	B_z	s_{B_z}	p_{mes}	$s_{p_{mes}}$
5 cent	1.1e-23	2.3e-25	4.6e-21	3.1e-21
Stabmagnet	2.9e-22	1.3e-24	1.2e-19	8.4e-20
Magnetspan	1.1e-21	4e-24	4.7e-19	3.2e-19
SIM Achse3	1.1e-22	1.8e-24	4.9e-20	3.3e-20