

**Fortgeschrittenen Praktikum I**  
**Ringlaser**

Wiebke Herzberg und Kolja Glogowski

27. September 2004

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Aufgabenstellung</b>	<b>3</b>
<b>2. Theoretische Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1. Der Fresnelkoeffizient . . . . .	3
2.2. Der Dispersionsterm . . . . .	4
2.3. Frequenzdifferenz im Ringlaser . . . . .	6
2.4. Der <i>He-Ne</i> -Laser . . . . .	7
<b>3. Versuchsaufbau und Durchführung</b>	<b>9</b>
<b>4. Auswertung</b>	<b>11</b>
4.1. Variation des Durchtrittspunktes . . . . .	11
4.2. Variation der Drehzahl . . . . .	14
4.3. Vergleich mit berechnetem Mitführungskoeffizient . . . . .	17
<b>5. Zusammenfassung</b>	<b>18</b>
<b>A. Quelltexte</b>	<b>19</b>
A.1. Berechnung des Mitführungskoeffizienten ( <code>ringlaser.py</code> ) . . . . .	19
A.2. Vergleich mit berechnetem $\alpha$ ( <code>alpha_vgl.py</code> ) . . . . .	24
A.3. Hilfsroutinen ( <code>tools.py</code> ) . . . . .	25

## 1. Aufgabenstellung

- Bestimmung des Mitführungskoeffizienten  $\alpha$  durch Messung der Schwebungsfrequenz bei
  1. Variation des Durchtrittspunktes  $x_0$  für 3 bis 4 feste Drehzahlen und
  2. Variation der Drehzahl für 3 bis 4 eingestellte Werte von  $x_0$ .
- Vergleich des experimentell gefundenen Werts für  $\alpha$  mit dem aus dem Brechungsindex berechneten Wert.

## 2. Theoretische Grundlagen

Das Licht breitet sich im Vakuum mit der konstanten Geschwindigkeit  $v = c$  aus. Innerhalb eines Mediums ist die Lichtgeschwindigkeit  $v$  jedoch abhängig vom Brechungsindex  $n(\lambda)$  und außerdem von der Geschwindigkeit  $w$ , mit der sich das Medium relativ zum Beobachter bewegt. Das Licht wird sozusagen ‘mitgeführt’.

### 2.1. Der Fresnelkoeffizient

Schon im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts entwickelte Fresnel, ausgehend von der Äthertheorie und unter der Annahme, dass der Äther und somit das Licht teilweise von dem Medium mitgeführt wird, den Zusammenhang:

$$v = \frac{c}{n} \pm \alpha w \quad \text{mit} \quad \alpha = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad (1)$$

für Licht das sich in dieselbe (bzw. entgegengesetzte) Richtung des Mediums bewegt. Dabei wird  $\alpha$  der *Mitführungskoeffizient* genannt.

Fresnel kam so, trotz der aus unserer heutigen Sicht falschen Annahmen der Äthertheorie, zu einer guten Näherung des Sachverhalts.

Heute lässt sich der Mitführungskoeffizient direkt aus der Relativitätstheorie ableiten. Man betrachte dazu ein System  $K'$ , welches sich relativ zum Laborsystem  $K$  in  $x$ -Richtung mit der Geschwindigkeit  $w$  bewegt. In diesem bewege sich ein Teilchen mit der Geschwindigkeit  $v'$  in  $x'$ -Richtung. Dann folgt aus der Lorentztransformation für die Geschwindigkeit  $v$  des Teilchens, die ein Betrachter in  $K$  beobachtet:

$$v = \frac{v' + w}{1 + v' w / c^2} . \quad (2)$$

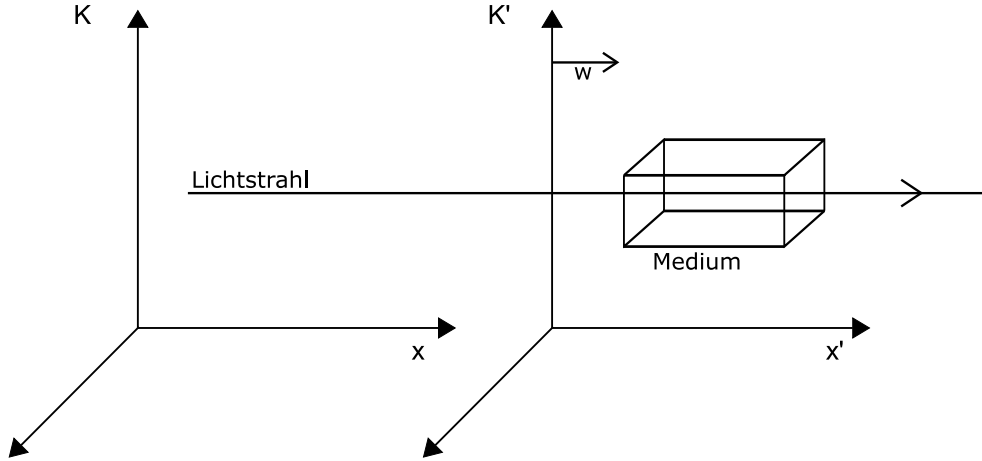


Abbildung 1: Lichtstrahl im bewegten Medium

Betrachtet man nun ein Medium welches sich mit der Geschwindigkeit  $\pm w$  relativ zum Laborsystem bewegt (siehe Abbildung 1), dann ist die Geschwindigkeit eines sich in  $x$ -Richtung ausbreitenden Lichtstrahls im Medium  $v' = c/n$  und für den Beobachter im Laborsystem nach Gleichung 2:

$$v = \frac{c/n \pm w}{1 \pm \frac{w}{cn}} \quad (3)$$

Wegen  $w \ll c$  erhält man mit der Abschätzung  $(1 \pm x)^{-1} \approx (1 \mp x)$  für  $x \ll 1$ :

$$\begin{aligned} v &\approx \left( \frac{c}{n} \pm w \right) \left( 1 \mp \frac{w}{cn} \right) = \frac{c}{n} \pm \left( 1 - \frac{1}{n^2} \mp \frac{w}{cn} \right) w \\ &\approx \frac{c}{n} \pm \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) w = \frac{c}{n} \pm \alpha w \end{aligned} \quad (4)$$

also die von Fresnel bereits auf anderem Wege hergeleitete Mitführungsformel.

## 2.2. Der Dispersionsterm

Betrachtet man die Fresnelsche Mitführungsformel genauer, so stellt man fest, dass die Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex noch nicht bedacht wurde. Hierbei ist der Doppler-Effekt zu berücksichtigen, denn das Medium wird mit der Geschwindigkeit  $w_i$  gegenüber dem einfallenden Lichtstrahl bewegt. Die relativistische Dopplerformel liefert für  $w_i \ll c$ :

$$\nu' = \nu \left( 1 \mp \frac{w_i}{c} \right) \quad (5)$$

Nähert man  $n(\nu')$  durch eine Taylorreihe bis zum linearen Glied und setzt Gleichung 5 ein, so erhält man:

$$n(\nu') = n(\nu) + (\nu' - \nu) \frac{dn(\nu)}{d\nu} = n(\nu) \left( 1 \mp \frac{w_i}{c} \frac{\nu}{n(\nu)} \frac{dn(\nu)}{d\nu} \right) \quad (6)$$

Berücksichtigt man dies in Gleichung 4, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} v &\approx \frac{c}{n(\nu')} \pm \left(1 - \frac{1}{(n(\nu'))^2}\right) w \\ &\approx \frac{c}{n(\nu)} \left(1 \mp \frac{w_i \nu}{c n(\nu)} \frac{dn(\nu)}{d\nu}\right)^{-1} \pm w \left(1 - \frac{1}{(n(\nu))^2} \left(1 \mp \frac{w_i \nu}{c n(\nu)} \frac{dn(\nu)}{d\nu}\right)^{-2}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

Mit den Näherungen  $(1 \mp x)^{-1} \approx (1 \pm x)$  und  $(1 \mp x)^{-2} \approx (1 \pm 2x)$  für  $x \ll 1$  gilt nun wegen  $w \ll c$ :

$$v \approx \frac{c}{n} \left(1 \pm \frac{w_i \nu}{c n} \frac{dn}{d\nu}\right) \pm w \left(1 - \frac{1}{n^2} \left(1 \pm 2 \frac{w_i \nu}{c n} \frac{dn}{d\nu}\right)\right) \quad \text{mit } n \equiv n(\nu) \quad (8)$$

und weiter:

$$v \approx \frac{c}{n} \pm w \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \pm \frac{w_i \nu}{n^2} \frac{dn}{d\nu} = \frac{c}{n} \pm w \left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{w_i \nu}{w} \frac{1}{n^2} \frac{dn}{d\nu}\right) . \quad (9)$$

Durch die Substitution  $\lambda = c/\nu$  erhält man daraus:

$$v = \frac{c}{n} \pm w \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{w_i \lambda}{w} \frac{1}{n^2} \frac{dn}{d\lambda}\right) \quad (10)$$

Nun kann man noch je nach Aufbau berücksichtigen, wie  $w$  und  $w_i$  zusammenhängen. Lässt man das Licht beispielsweise durch einen in Richtung von  $w_i$  bewegten Quarzstab fallen (Abbildung 2), so gilt  $w = w_i$ , der einfallende Strahl verläuft dann nämlich genau gleich wie der gebrochene und Gleichung 10 wird zu:

$$v = \frac{c}{n} \pm w \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n^2} \frac{dn}{d\lambda}\right) \quad (11)$$

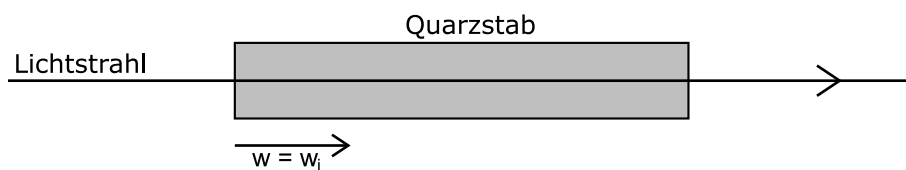


Abbildung 2: Ein Lichtstrahl fällt durch einen bewegten Quarzstab

Im Versuch verwenden wir aber stattdessen eine rotierende Quarzscheibe. Die Geschwindigkeitskomponente  $w$  der Quarzscheibe in Richtung des gebrochenen Strahls unterscheidet sich von der Komponente  $w_i$  in Richtung des einfallenden Strahls (Abbildung 3). Dabei gilt  $w_i/w = n$  und mit Gleichung 10 ergibt sich:

$$v = \frac{c}{n} \pm w \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}\right) \quad (12)$$

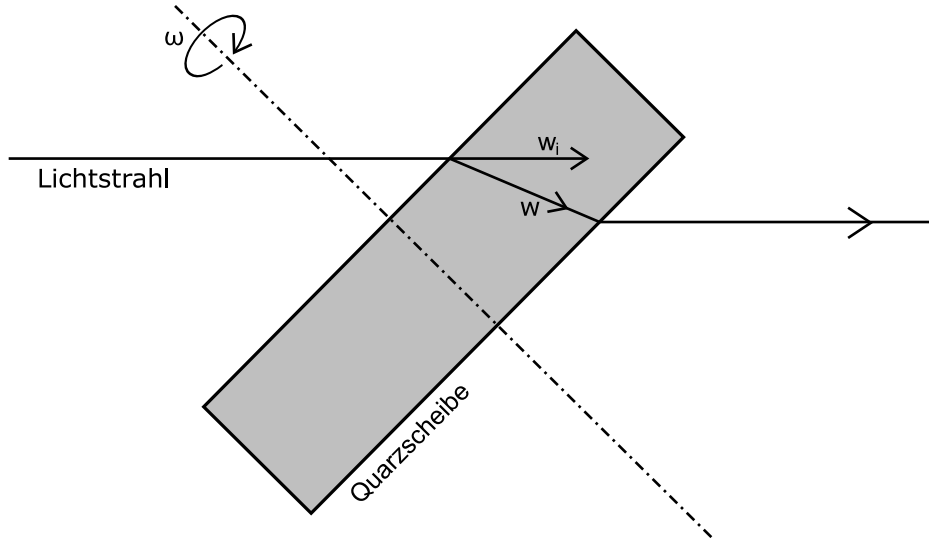


Abbildung 3: Ein Lichtstrahl fällt durch eine rotierende Quarzscheibe

Vergleicht man dieses Ergebnis mit Gleichung 4, so stellt man fest, dass zu dem dort hergeleiteten Mitführungskoeffizienten  $\alpha$  noch der Term

$$-\frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}, \quad (13)$$

der sogenannte *Dispersionsterm* hinzugekommen ist. Der Mitführungskoeffizient für unsere Versuchsanordnung lautet also unter Berücksichtigung des Dispersionsterms:

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}. \quad (14)$$

### 2.3. Frequenzdifferenz im Ringlaser

Die Geschwindigkeitsdifferenz des links- und rechtsherum laufenden Strahls im Medium (mehr dazu in Abschnitt 3) entspricht einem Unterschied der Brechungsindizes des Mediums für beide Strahlen, was einen Unterschied der jeweiligen optischen Wege bewirkt.

Für die sich im Resonator ausbildende stehende Welle gilt:

$$N \lambda = L \quad \text{mit } N \in \mathbb{N} \quad \text{und } L = \sum_i n_i l_i, \quad (15)$$

wobei  $L$  die optische Weglänge des Resonators und  $l_i$  die Längen der vom Lichtstrahl durchlaufenen Wegstrecken in Medien der Brechungsindizes  $n_i$  sind.

Für geringe Längenänderungen schwingt der Resonator in der gleichen Mode weiter, es gilt also  $N = \text{const}$  und deshalb  $dL = N d\lambda$ . Für kleine Differenzen  $\Delta L$  folgt also:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = -\frac{\Delta \nu}{\nu} \quad (16)$$

Die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen den beiden entgegengesetzt verlaufenden Strahlen ist  $2\alpha w$ . Wenn nun  $l n$  der optische Weg im ruhenden Medium ist, dann folgt:

$$\frac{\Delta(l n)}{l n} = \frac{v(w \neq 0) - v(w = 0)}{v(w = 0)} = \frac{c/n \pm \alpha w - c/n}{c/n} = \pm \frac{n \alpha w}{c} \quad (17)$$

Da die Änderung  $\Delta L$  der optischen Weglänge des Resonators durch die Änderung des optischen Weges im Medium gegeben ist, also durch  $\Delta L = \Delta(l n)$ , folgt:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{l n}{L} \frac{\Delta(l n)}{l n} = \pm \frac{n^2 \alpha l w}{L c} = -\frac{\Delta \nu}{\nu} \quad (18)$$

und für die gemessene Differenzfrequenz zwischen den beiden Strahlen erhält man:

$$\Delta \nu_{exp} = 2 \Delta \nu = \frac{2 n^2 \alpha l w \nu}{L c} = \frac{2 n^2 \alpha l w}{\lambda L} . \quad (19)$$

Betrachtet man nun den rotierenden Quarzzylinder, so kann man durch etwas kompliziertere geometrische Überlegungen (siehe [1]), auf die hier nicht im Einzelnen eingegangen werden soll,  $w$  und  $l$  durch die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , den Eintrittspunkt an der Scheibe  $x_0$ , die Dicke  $d$  der Scheibe und den Brechungsindex  $n$  ausdrücken:

$$w l = \frac{d x_0 \omega}{n} \quad (20)$$

Durch Einsetzen in Gleichung 19 erhält man daraus für den Mitführungskoeffizienten:

$$\alpha = \frac{\Delta \nu_{exp} \lambda L}{2 n d x_0 \omega} . \quad (21)$$

## 2.4. Der He-Ne-Laser

Ein Laser besteht im Wesentlichen aus drei Komponenten: einem aktiven Medium, in unserem Fall ein Helium-Neon-Gemisch, einem optischen Resonator, bei uns durch Anordnung der Spiegel ringförmig realisiert und einer Energiepumpe welche in unserem Fall die Gasentladung darstellt.

Die Energiepumpe wird benötigt um die für den Laserbetrieb notwendige Besetzungsinversion zu erzielen. Das bedeutet, dass viele Atome in einen angeregten Zustand versetzt werden müssen, bis schließlich die Besetzungsdichte der angeregten Zustände größer

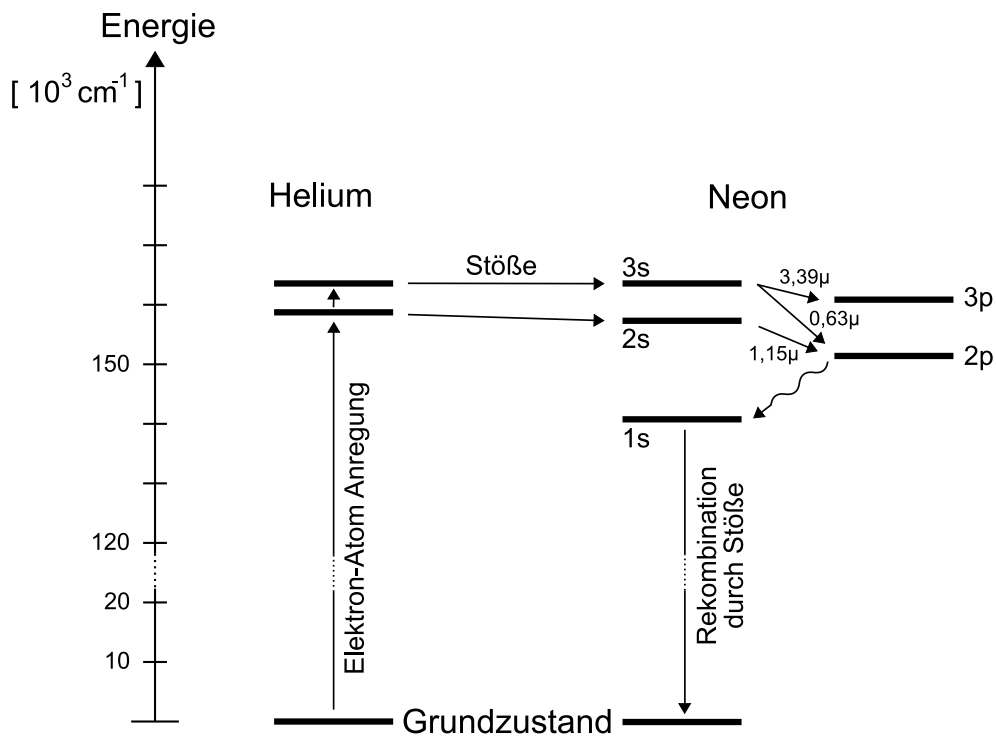


Abbildung 4: Termschema des  $He-Ne$ -Lasers

ist als die der Grundzustände, also sozusagen die Umkehrung des normalen Zustands erreicht ist. Bei unserem  $He-Ne$ -Laser geben die von den Elektronen in der Gasentladungsröhre angeregten Heliumatome ihre Energie durch Stöße 2. Art an die Neonatome ab (siehe Termschema in Abbildung 4). Diese wiederum können dann durch spontane Emission eines Photons in den Grundzustand übergehen. Trifft ein solches spontan emittiertes Photon auf ein anderes angeregtes Atom, so kann es dieses zu einer stimulierten Emission veranlassen. Das heißt, das Atom sendet ebenfalls ein Photon aus, das aber nun die gleiche Richtung, Energie und Phase wie das stimulierende Photon besitzt. Da nur eine ganz bestimmte Richtung vom optischen Resonator, also den Spiegeln, immer wieder in das aktive Medium in der Gasentladungsröhre zurückreflektiert wird, können die Photonen dieser Richtung weitere Atome zu stimulierter Emission veranlassen. Dadurch verstärkt sich diese Richtung und ein Laserstrahl bildet sich aus. Allerdings nur unter der Voraussetzung, dass es gelingt durch optisches Pumpen die Besetzungsinversion aufrecht zu erhalten, also auch ein Gleichgewicht zwischen Anregung und Übergängen in den Grundzustand herzustellen.



### 3. Versuchsaufbau und Durchführung

#### Aufbau

Der Ringlaser wird durch einen aus drei Spiegeln 'ringförmig' aufgebauten Resonator gebildet, in dessen einem Arm sich ein He-Ne-Entladungsrohr befindet (Abbildung 5). In einem anderen Arm befindet sich ein motorbetriebener, rotierender Quarzzylinder, der über eine Schraube verschiebbar ist, um die Eintrittsposition der Lasers zu variieren. Sowie ein zweiter, ruhender Zylinder, der den Strahlversatz ausgleicht der durch die Brechung am ersten Zylinder zustande kommt. Der Laserstrahl tritt unter dem Brewsterwinkel in den Quarz ein, um Reflexionsverluste zu vermeiden.

In dem Resonator können sich rechts- und links herum laufende Wellen ausbilden. Bei ruhender Quarzscheibe ist der optische Weg für beide Umlaufrichtungen derselbe. Versetzt man die Scheibe jedoch in Bewegung, so ändert sich die Lichtgeschwindigkeit innerhalb des Quarzes je nach Umlaufrichtung des Strahls um  $+\alpha w_r$  beziehungsweise  $-\alpha w_r$ . Das bedeutet, dass die Frequenzen für den einen Umlaufsinn erhöht, für den anderen erniedrigt werden. Über den Auskopplungsspiegel  $S_3$  wird ein geringer Teil des Lichts ( $< 0,1\%$ ) aus dem Kreislauf geleitet und von einer Photodiode aufgenommen. Überlagert man nun die beiden Strahlen bei  $S_4$ , so bildet sich eine Schwebung aus, welche auf dem an die Photodiode angeschlossenen Oszilloskop sichtbar gemacht wird. Ein Computer steht zum Auslesen der Bilder aus dem Oszilloskop zur Verfügung.

Desweiteren ist eine Blende im Strahlengang montiert um die Schwingungsmoden des Lasers auf 1-2 zu reduzieren. Wäre diese Blende nicht vorhanden, würde man auf dem Oszilloskop eine irreguläre Darstellung aus Anteilen vieler verschiedener Moden erhalten. Außerdem steht noch ein Gerät zur Messung der Periodendauer eines Umlaufs der Quarzscheibe zur Verfügung, um ihre Drehzahl zu bestimmen.

#### Durchführung

Nach Justierung des Lasers mittels Blende und Spiegeln nahmen wir Bilder der Schwebung mit dem Oszilloskop auf. Zuerst nahmen wir 3 Messreihen bei festen Drehzahlen auf, wobei wir den Eintrittspunkt in den Quarz durchvariierten. Danach nahmen wir bei 4 festen Eintrittspositionen jeweils eine Messreihe unter Variation der Drehzahl auf.

Bei der ersten Messreihe zeigten sich beim Auftragen zwei Messwerte, die sehr auffällig von den erwarteten Werten abwichen. Sie sind vermutlich auf anfänglich ungenaue Justierung zurückzuführen. Daher wiederholten wir die Messung für diese beiden Punkte am nächsten Tag und erhielten gute Ergebnisse. Da wir zwischenzeitlich viel an den Einstellungen geändert hatten, spricht diese gute Reproduzierbarkeit der Messungen für einen sehr stabilen Aufbau der Versuchsanordnung.

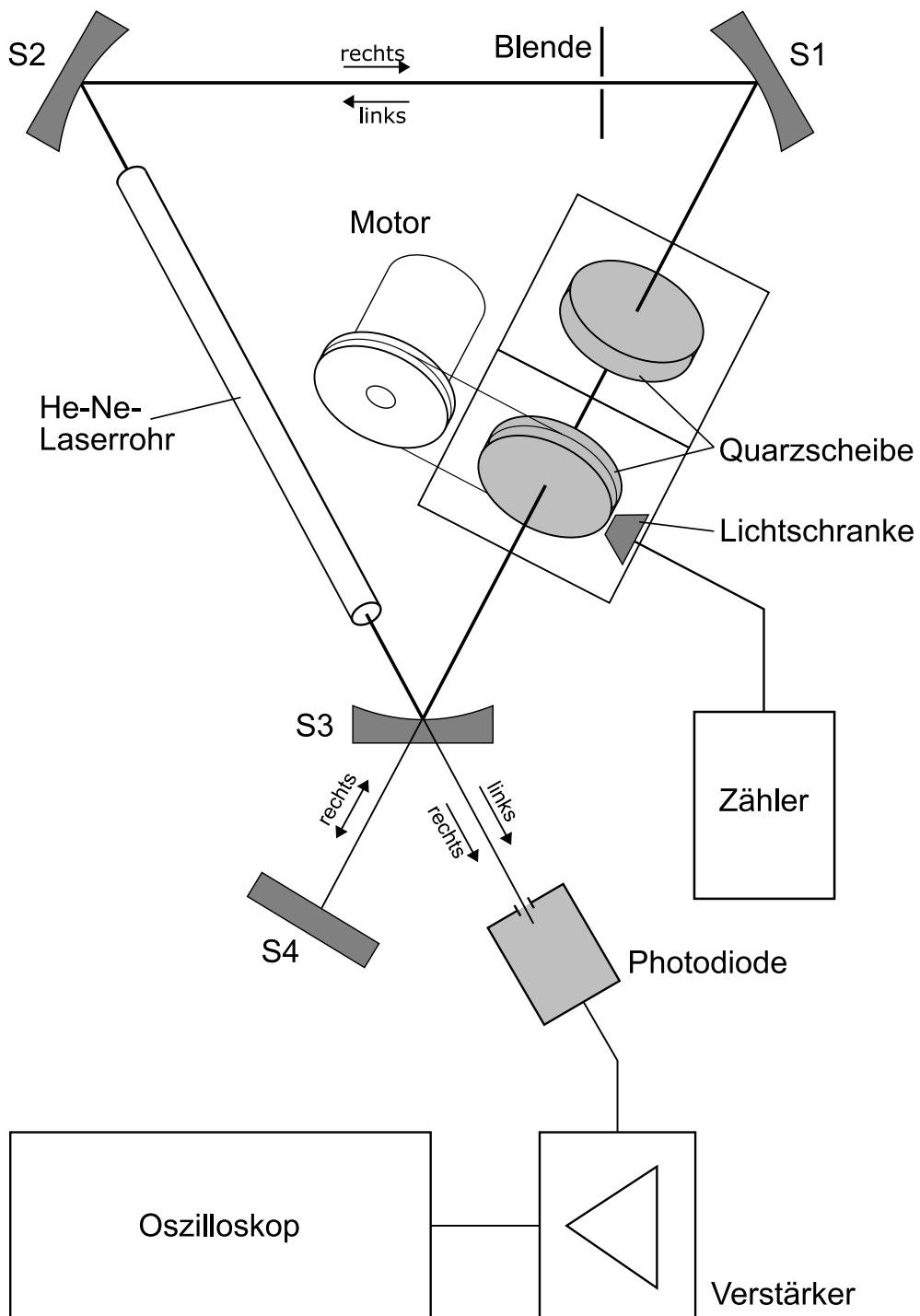


Abbildung 5: Versuchsaufbau des Ringlasers

## 4. Auswertung

### 4.1. Variation des Durchtrittspunktes

Bei den Messungen mit festen Drehzahlen und unterschiedlichen Durchtrittspunkten trugen wir den abgelesenen  $x$ -Wert gegen die Differenzfrequenz der beiden Strahlen auf. Die Differenzfrequenz  $\Delta\nu_{exp}$  ermittelten wir, indem wir die Anzahl  $N$  der in einem Zeitintervall  $\Delta t$  liegenden Schwebungsperioden zählten, also durch  $\Delta\nu_{exp} = N/\Delta t$ . Als Fehler für das Zeitintervall nahmen wir  $s_{\Delta t} = 5\mu s$  an. Daraus erhält man für den Fehler der Differenzfrequenz:

$$s_{\Delta\nu_{exp}} = \left| \Delta\nu_{exp} \frac{s_{\Delta t}}{\Delta t} \right|. \quad (22)$$

Den Ablesefehler der  $x$ -Werte schätzten wir mit  $s_x = 0,02\text{ cm}$  ab.

Nach Gleichung 21 gilt mit dem Ablesewert  $x$  und der Mittelpunktspunktskoordinate  $x_m$  für die Differenzfrequenz:

$$\Delta\nu_{exp} = \frac{2n\alpha\omega d}{L\lambda} x_0 = c x_0 = c(x - x_m) = c x - c x_m = a x + b \quad (23)$$

Liegt der Durchtrittspunkt in der Mitte der Quarzscheibe, dann gilt  $\Delta\nu_{exp}(x_m) = 0$ , also folgt:

$$a x_m + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_m = -\frac{b}{a} \quad (24)$$

Damit lässt sich mit der Steigung und dem  $y$ -Achsenabschnitt der an die Messwerte angepassten Geraden der Mittelpunkt  $x_m$  bestimmen. Der Fehler des Mittelpunkts ergibt sich aus  $s_a$  und  $s_b$  durch:

$$s_{x_m} = |x_m| \sqrt{\left(\frac{s_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{s_b}{b}\right)^2} \quad (25)$$

Diese Berechnung führten wir mit den ersten drei Messreihen durch, bei denen  $x$  variiert wurde (siehe dazu Abbildungen 6 bis 8 und Anhang A.1). Aus den so erhaltenen drei Werten für den Mittelpunkt  $x_m$  bildeten wir das gewichtete Mittel und erhielten:

$$x_m = (7,2197 \pm 0,0379)\text{ cm}$$

Mit dem so bestimmten  $x_m$  berechneten wir nach Gleichung 21 aus allen Messpunkten und den zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten  $\omega$  den Mitführungskoeffizienten  $\alpha$  durch:

$$\alpha = \frac{\Delta\nu_{exp} \lambda L}{2n d x_0 \omega} \quad (26)$$

mit dem Fehler:

$$s_\alpha = |\alpha| \sqrt{\left(\frac{s_{\Delta\nu_{exp}}}{\Delta\nu_{exp}}\right)^2 + \left(\frac{s_\omega}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{s_{x_0}}{x_0}\right)^2} \quad (27)$$

und dem mit dem Mittelpunkt berechneten Durchtrittspunkt  $x_0$ :

$$x_0 = x - x_m \quad \text{mit Fehler} \quad s_{x_0} = \sqrt{s_x^2 + s_{x_m}^2} . \quad (28)$$

Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ermittelten wir dabei aus der Umlaufzeit  $T$  der Quarzscheibe für die wir einen relativen Fehler von  $s_T/T = 1\%$  angenommen haben. Mit  $\omega = 2\pi/T$  ergibt sich für den Fehler also:  $s_\omega = \omega s_T/T = 0,01 \cdot \omega$ .

Aus den einzelnen Werten für  $\alpha$  berechneten wir wiederum das gewichtete Mittel und erhielten:

$$\alpha = 0,5442 \pm 0,0043$$

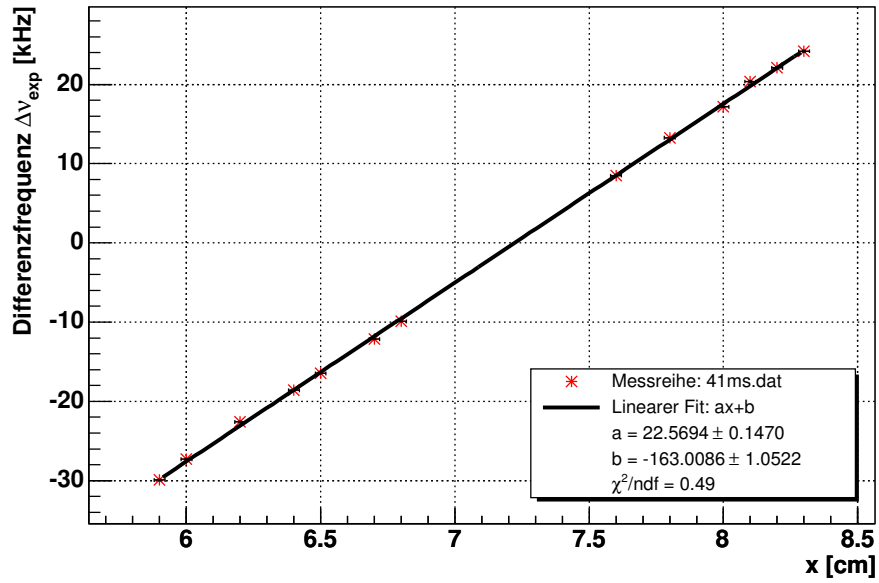


Abbildung 6: Messreihe bei  $T \approx 41\text{ms}$  mit variablem Durchtrittspunkt

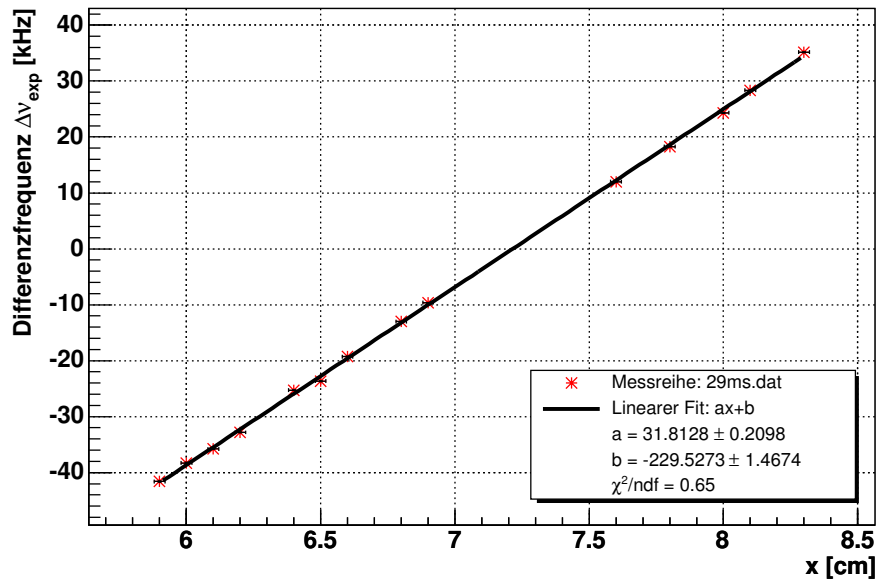


Abbildung 7: Messreihe bei  $T \approx 29\text{ms}$  mit variablem Durchtrittspunkt

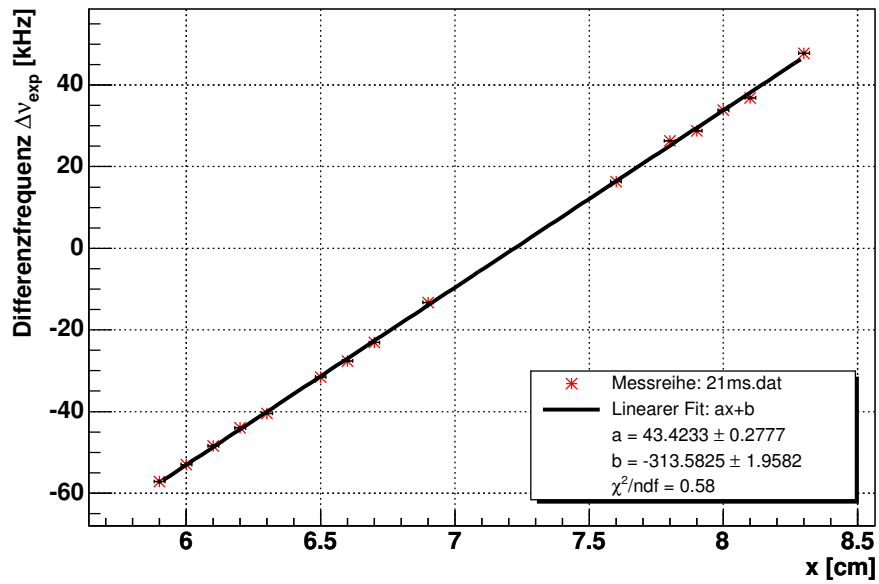


Abbildung 8: Messreihe bei  $T \approx 21\text{ms}$  mit variablem Durchtrittspunkt

## 4.2. Variation der Drehzahl

Bei den Messungen mit festen Durchtrittspunkten und unterschiedlichen Drehzahlen trugen wir die jeweiligen Winkelgeschwindigkeiten  $\omega$  der Scheibe gegen die Differenzfrequenz  $\Delta\nu_{exp}$  der beiden Strahlen auf (siehe Abbildungen 9 bis 12). Die Berechnung von  $\omega$  und  $\Delta\nu_{exp}$ , sowie ihrer Fehler, wurde bereits im vorangegangenen Abschnitt behandelt.

Nach Gleichung 21 gilt:

$$\Delta\nu_{exp} = \frac{2 n d x_0 \alpha}{L \lambda} \omega \quad (29)$$

Bei einem linearen Fit  $\Delta\nu_{exp} = a \omega + b$  lässt sich  $\alpha$  also aus der Steigung  $a$  der Geraden bestimmen:

$$\alpha = \frac{L \lambda}{2 n d} \frac{a}{x_0} \quad (30)$$

dabei berechneten wir  $x_0$  durch den in der vorangegangenen Messung bestimmten Mittelpunkt  $x_m$  der Quarzscheibe (siehe Gleichung 28). Als Fehler für  $\alpha$  erhält man durch gaußsche Fehlerfortpflanzung:

$$s_\alpha = |\alpha| \sqrt{\left(\frac{s_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{s_{x_0}}{x_0}\right)^2} \quad (31)$$

Von den so bestimmten vier Werten für  $\alpha$  berechneten wir wieder das gewichtete Mittel und erhielten:

$$\alpha = 0,5375 \pm 0,0132$$

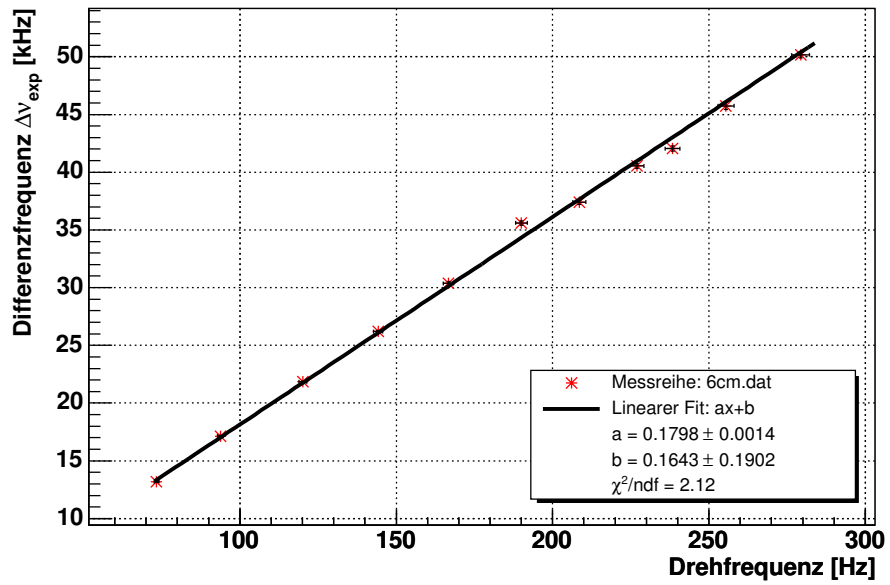


Abbildung 9: Messreihe bei  $x = 6,0 \text{ cm}$  mit variabler Drehzahl

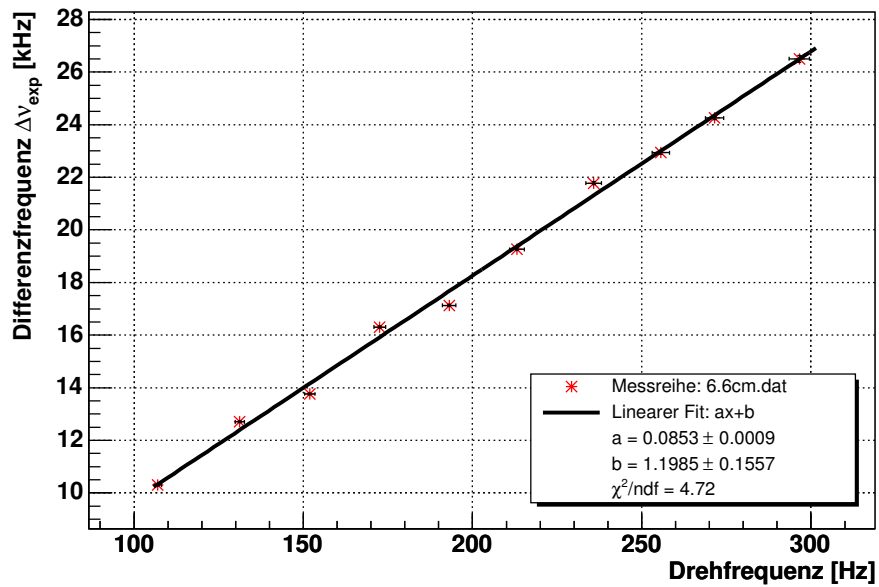


Abbildung 10: Messreihe bei  $x = 6,6 \text{ cm}$  mit variabler Drehzahl

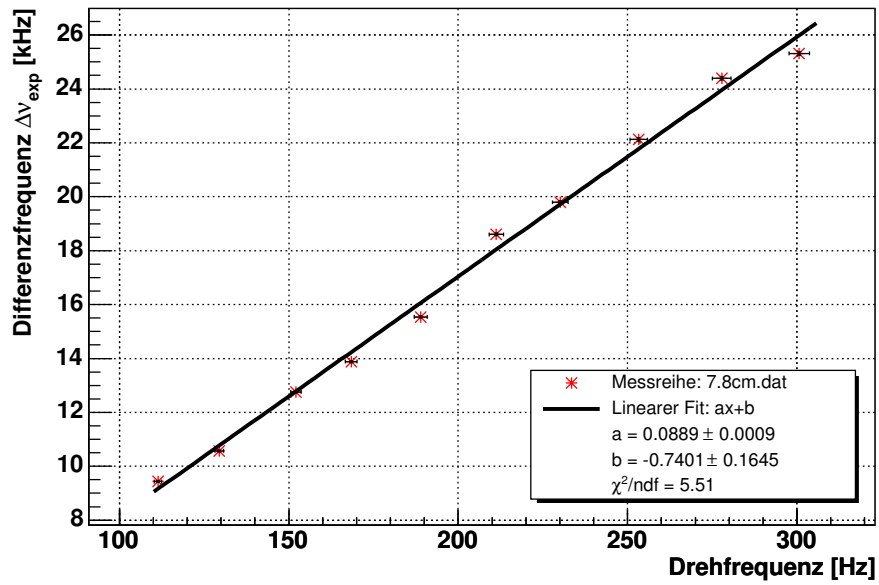


Abbildung 11: Messreihe bei  $x = 7,8 \text{ cm}$  mit variabler Drehzahl

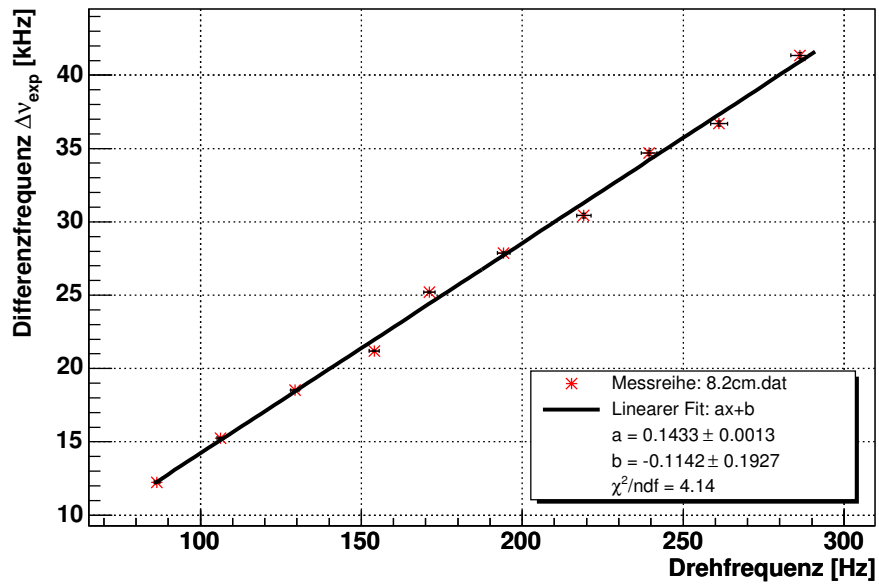


Abbildung 12: Messreihe bei  $x = 8,2 \text{ cm}$  mit variabler Drehzahl



### 4.3. Vergleich mit berechnetem Mitführungskoeffizient

Mit dem angegebenen Brechungsindex für die Quarzscheibe  $n = 1,457$  und der Änderung des Brechungsindex in Abhängigkeit zur Wellenlänge  $\Delta n/\Delta\lambda = -300\text{ cm}^{-1}$  lässt sich der Mitführungskoeffizient nach Gleichung 14 berechnen:

$$\alpha_r = 1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n} \frac{\Delta n}{\Delta\lambda} = 0,5420$$

wobei der Dispersionsterm mit 0,0130 etwa 2,4% des Wertes ausmacht. Ohne Dispersionsterm erhält man als Mitführungskoeffizient:

$$\alpha_{r,F} = 1 - \frac{1}{n^2} = 0,5289$$

Als gewichtetes Mittel der beiden Ergebnisse aus Abschnitt 4.1 und 4.2 ergibt sich:

$$\bar{\alpha} = 0,5436 \pm 0,0041$$

Vergleicht man diesen Wert mit den berechneten Mitführungskoeffizienten, so stellt man fest, dass  $\alpha_r$  im  $0,4\sigma$ -Bereich dieses Wertes liegt, während  $\alpha_{r,F}$  außerhalb des  $3,5\sigma$ -Bereich liegt. Der Dispersionsterm ist für die von uns erreichte Messgenauigkeit also durchaus noch von relevanter Größe und muss daher berücksichtigt werden.

## 5. Zusammenfassung

Das Ergebnis dieses Versuchs war sehr zufriedenstellend. Der Versuchsaufbau war stabil und lieferte gut reproduzierbare Messergebnisse.

Bei den Messreihen mit variablem Durchtrittspunkt erhielten wir als gewichtetes Mittel für den Mitführungskoeffizienten:

$$\alpha_{varx} = 0,5442 \pm 0,0043$$

und bei den Messreihen mit variabler Drehzahl:

$$\alpha_{var\nu} = 0,5375 \pm 0,0132 .$$

Insgesamt ergab sich aus diesen Werten ein gewichtetes Mittel von:

$$\bar{\alpha} = 0,5436 \pm 0,0041$$

welches sehr gut mit dem berechneten Wert

$$\alpha_r = 0,5420$$

übereinstimmt. Der berechnete Wert ohne Dispersionsterm liegt im Vergleich dazu recht weit außerhalb unserer Fehlergrenzen, daher stellt der Dispersionsterm also auf jeden Fall eine Größe dar, die es zu berücksichtigen gilt.

## Literatur

- [1] Axel Ippendorf. Messung des Mitführungskoeffizienten von Licht mit einem Ringlaser. Zulassungsarbeit, July 1979.

## A. Quelltexte <sup>1</sup>

Wir verwendeten zur Auswertung die Programmiersprache Python mit dem Datenanalyse Framework ROOT.

### A.1. Berechnung des Mitführungskoeffizienten (ringlaser.py)

```
1  #!/usr/bin/python
2  # -*- coding: iso-8859-1 -*-
3
4  from array import array
5  from math import sqrt, pi
6  from ROOT import gROOT, TCanvas, TGraphErrors, TF1, TLegend
7  from tools import gew_mittel
8
9  gROOT.SetStyle("Plain")
10
11  # -----
12  # Berechnung des Mitfuehrkoeffizient
13  # -----
14
15  # Angegebene Werte
16  L = 214.9      # optische Weglänge des Resonators [cm]
17  l = 6.3282e-5  # Wellenlänge des Lasers [cm]
18  n = 1.457      # Brechungsindex der Quarzscheibe
19  d = 1.27       # Dicke der Quarzscheibe [cm]
20
21  # Abgeschaetzte Fehler
22  sxi = 0.02     # Ablesefehler der x-Position [cm]
23  sTi_Ti = 0.01  # Relativer Fehler der Umlaufzeitmessung der Quarzscheibe
24  sdti = 0.005   # Fehler des Zeitintervalls bei Schwebungsmessung [ms]
25
26  # Messung mit variablem Durchtrittspunkt -----
27
28  class MessungVarX:
29      def __init__(self, name):
30          self.name = name
31
32          # lese Messdaten ein
33          data = [map(float, line.split())
34                  for line in open('messungen/'+name, 'r')]
35          self.data = data
36          self.count = len(data)
37
38          # Umlaufzeit der Quarzscheibe und Fehler [s]
```

---

<sup>1</sup>Siehe <http://www.physik.uni-freiburg.de/~kolja/fp1/ringlaser/>.

```

39     T = [z[0] for z in data]
40     sT = [Ti*sTi_Ti for Ti in T]
41     self.T, self.sT = T, sT
42
43     # Winkelgeschwindigkeit der Scheibe und Fehler [rad/s]
44     w = [2*pi/Ti for Ti in T]
45     sw = [wi*sTi/Ti for wi,Ti,sTi in zip(w,T,sT)]
46     self.w, self.sw = w, sw
47
48     # Position und Fehler [cm]
49     x = [z[1] for z in data]
50     sx = [sxi] * len(x)
51     self.x, self.sx = x, sx
52
53     # Differenzfrequenz und Fehler [kHz]
54     nu = [z[2] / z[3] for z in data]
55     snu = [nui*sdti/z[3] for nui,z in zip(nu,data)]
56     self.nu, self.snu = nu, snu
57
58     # Erstelle Graphen
59     g = TGraphErrors(len(data), array('d',x), array('d',nu),
60                        array('d',sx), array('d',snu))
61     g.SetTitle(';x [cm];Differenzfrequenz #Delta#nu_{exp} [kHz]')
62     g.SetMarkerColor(2)
63     g.SetMarkerStyle(3)
64     self.graph = g
65
66     # Linearer Fit
67     f = TF1('f'+name, '[0]*x + [1]')
68     self.fcn = f
69     f.SetParameters(array('d', [10,-100]))
70     g.Fit(f, 'Q')
71     a, b = f.GetParameter(0), f.GetParameter(1)
72     sa, sb = f.GetParError(0), f.GetParError(1)
73     self.a, self.b = a, b
74     self.sa, self.sb = sa, sb
75     self.rchisq = f.GetChisquare() / f.GetNDF()
76
77     # Berechne xm [cm] aus dem Ergebnis des Fits
78     xm = -b/a
79     sxm = xm * sqrt((sa/a)**2 + (sb/b)**2)
80     self.xm, self.sxm = xm, sxm
81
82     def draw(self):
83         c = TCanvas('c'+self.name, 'Ringlaser '+self.name)
84         self.canvas = c
85         c.SetGrid()
86         self.graph.Draw('AP')
87         lg = TLegend(0.55, 0.14, 0.88, 0.34)

```

```

88         lg.SetFillColor(0)
89         lg.AddEntry(self.graph, 'Messreihe: '+self.name, 'p')
90         lg.AddEntry(self.fcn, 'Linearer Fit: ax+b', 'l')
91         lg.AddEntry(self.fcn, 'a = %.4f #pm %.4f' % (self.a,self.sa), '')
92         lg.AddEntry(self.fcn, 'b = %.4f #pm %.4f' % (self.b,self.sb), '')
93         lg.AddEntry(self.fcn, '#chi2/ndf = %.2f' % self.rchisq, '')
94         lg.Draw()
95         c.Update()
96
97
98     def berechne_alpha_varx(mess, gxm):
99         xm,sxm = gxm
100
101         # Berechne x0, also Abstand von x zu xm [cm]
102         x0 = [xi-xm for xi in mess.x]
103         sx0 = [sqrt(sxi**2+sxm**2) for sxi in mess.sx]
104
105         # Berechne alphas der Einzelmessungen und deren Fehler
106         alpha, salpha = [], []
107         data = zip(mess.nu, mess.snu, mess.w, mess.sw, x0, sx0)
108         for nui, snui, wi, swi, x0i, sx0i in data:
109             alphai = L*1*nui*1e3 / (2.*n*wi*d*x0i)
110             salphai = alphai * sqrt((snui/nui)**2 + (swi/wi)**2 + (sx0i/x0i)**2)
111             alpha += [alphai]; salpha += [salphai]
112
113         return zip(alpha,salpha)
114
115
116     # Messungen mit variablem Durchtrittspunkt
117     m_varx = []
118     namen = ['41ms.dat', '29ms.dat', '21ms.dat']
119     for name in namen:
120         mi = MessungVarX(name)
121         m_varx += [mi]
122         mi.draw()
123         print '\nMessung: ' + name
124         print 'a = %.4f, b = %.4f' % (mi.a,mi.b)
125         print 'xm = -b/a = %.4f +- %.4f cm' % (mi.xm, mi.sxm)
126
127     # Berechne gew. Mittel der xm [cm]
128     gxm = gew_mittel(zip([z.xm for z in m_varx], [z.sxm for z in m_varx]))
129     print '\nGewichtetes Mittel von xm: %.4f +- %.4f' % gxm
130
131     # Berechne alphas aus der varx-Messreihe
132     alpha_varx = []
133     for mi in m_varx:
134         alpha_varx += berechne_alpha_varx(mi, gxm)
135
136     # Berechne gewichtetes Mittel der Ergebnisse

```

```

137 galpha_varx = gew_mittel(alpha_varx)
138 print 'Gewichtetes Mittel von varx-phasas: %.5f +- %.5f' % galpha_varx
139
140
141 # Messung mit variabler Drehzahl -----
142
143 class MessungVarFreq:
144     def __init__(self, name, x, gxm=gxm):
145         self.name = name
146         xm, sxm = gxm
147
148         # bestimme x0 [cm]
149         x0 = abs(xm-x)
150         sx0 = sqrt(sxm**2 + sxi**2)
151         self.x0, self.sx0 = x0, sx0
152
153         # lese Messdaten ein
154         data = [map(float, line.split())
155                 for line in open('messungen/'+name, 'r')]
156         self.data = data
157         self.count = len(data)
158
159         # Umlaufzeit der Quarzscheibe und Fehler [s]
160         T = [z[0] for z in data]
161         sT = [Ti*sTi_Ti for Ti in T]
162         self.T, self.sT = T, sT
163
164         # Winkelgeschwindigkeit der Scheibe und Fehler [rad/s]
165         w = [2*pi/Ti for Ti in T]
166         sw = [wi*sTi_Ti for wi,Ti,sTi in zip(w,T,sT)]
167         self.w, self.sw = w, sw
168
169         # Differenzfrequenz und Fehler [kHz]
170         nu = [z[1] / z[2] for z in data]
171         snu = [nui*sdti/z[2] for nui,z in zip(nu,data)]
172         self.nu, self.snu = nu, snu
173
174         # Erstelle Graphen
175         g = TGraphErrors(len(data), array('d',w), array('d',nu),
176                           array('d',sw), array('d',snu))
177         g.SetTitle(';Drehfrequenz [Hz];Differenzfrequenz #Delta#nu_{exp} [kHz]')
178         g.SetMarkerColor(2)
179         g.SetMarkerStyle(3)
180         self.graph = g
181
182         # Linearer Fit
183         f = TF1('f'+name, '[0]*x + [1]')
184         self.fcn = f
185         f.SetParameters(array('d', [0,0]))

```

```

186         g.Fit(f, 'Q')
187         a, b = f.GetParameter(0), f.GetParameter(1)
188         sa, sb = f.GetParError(0), f.GetParError(1)
189         self.a, self.b = a, b
190         self.sa, self.sb = sa, sb
191         self.rchisq = f.GetChisquare() / f.GetNDF()
192
193         # Berechne alpha aus der Steigung des Fits
194         alpha = a*L*1e3/(2.*n*d*x0)
195         salpha = alpha * sqrt((sa/a)**2 + (sx0/x0)**2)
196         self.alpha, self.salpha = alpha, salpha
197
198     def draw(self):
199         c = TCanvas('c'+self.name, 'Ringlaser '+self.name)
200         self.canvas = c
201         c.SetGrid()
202         self.graph.Draw('AP')
203         lg = TLegend(0.55, 0.14, 0.88, 0.34)
204         lg.SetFillColor(0)
205         lg.AddEntry(self.graph, 'Messreihe: '+self.name, 'p')
206         lg.AddEntry(self.fcn, 'Linearer Fit: ax+b', 'l')
207         lg.AddEntry(self.fcn, 'a = %.4f #pm %.4f' % (self.a,self.sa), '')
208         lg.AddEntry(self.fcn, 'b = %.4f #pm %.4f' % (self.b,self.sb), '')
209         lg.AddEntry(self.fcn, '#chi^2/ndf = %.2f' % self.rchisq, '')
210         lg.Draw()
211         c.Update()
212
213     # Messungen mit variabler Drehzahl
214     m_varfreq = []
215     namen = [('6cm.dat', 6.0), ('6.6cm.dat', 6.6),
216             ('7.8cm.dat', 7.8), ('8.2cm.dat', 8.2)]
217     for name in namen:
218         mi = MessungVarFreq(name[0], name[1])
219         m_varfreq += [mi]
220         mi.draw()
221         print '\nMessung: ' + name[0]
222         print 'a = %.4f, b = %.4f' % (mi.a,mi.b)
223         print 'alpha = %.4f +- %.4f cm' % (mi.alpha, mi.salpha)
224
225     # Berechne gewichtetes Mittel der Ergebnisse
226     alpha_varfreq = []
227     for mi in m_varfreq:
228         alpha_varfreq += [(mi.alpha, mi.salpha)]
229     galpha_varfreq = gew_mittel(alpha_varfreq)
230     print '\nGewichtetes Mittel von varfreq-alphas: %.5f +- %.5f' % galpha_varfreq
231
232     # Berechne gewichtetes Mittel aus beiden Messreihen
233     galpha = gew_mittel([galpha_varfreq, galpha_varx])
234     print 'Gewichtetes Mittel aller alphas: %.5f +- %.5f' % galpha

```

Programmausgabe

```

1
2 Messung: 41ms.dat
3 a = 22.5694, b = -163.0086
4 xm = -b/a = 7.2226 +- 0.0662 cm
5
6 Messung: 29ms.dat
7 a = 31.8128, b = -229.5273
8 xm = -b/a = 7.2149 +- 0.0663 cm
9
10 Messung: 21ms.dat
11 a = 43.4233, b = -313.5825
12 xm = -b/a = 7.2215 +- 0.0645 cm
13
14 Gewichtetes Mittel von xm: 7.2197 +- 0.0379
15 Gewichtetes Mittel von varx-alphas: 0.54420 +- 0.00430
16
17 Messung: 6cm.dat
18 a = 0.1798, b = 0.1643
19 alpha = 0.5417 +- 0.0195 cm
20
21 Messung: 6.6cm.dat
22 a = 0.0853, b = 1.1985
23 alpha = 0.5058 +- 0.0354 cm
24
25 Messung: 7.8cm.dat
26 a = 0.0889, b = -0.7401
27 alpha = 0.5630 +- 0.0420 cm
28
29 Messung: 8.2cm.dat
30 a = 0.1433, b = -0.1142
31 alpha = 0.5373 +- 0.0240 cm
32
33 Gewichtetes Mittel von varfreq-alphas: 0.53747 +- 0.01321
34 Gewichtetes Mittel aller alphas: 0.54356 +- 0.00409

```

## A.2. Vergleich mit berechnetem $\alpha$ (alpha\_vgl.py)

```

1 #!/usr/bin/python
2 # -*- coding: iso-8859-1 -*-
3
4 n = 1.457      # Brechungsindex der Quarzscheibe
5 dndl = -300.   # Änderung von n in Abhängigkeit zur Wellenlänge [cm-1]
6 l = 6.3282e-5  # Wellenlänge [cm]
7
8 # Aus den Messungen ermittelter Wert für alpha
9 alpha, salpha = (0.5435590538389482, 0.0040853346099745331)

```



```

10
11 # Berechne alpha
12 disp = - 1/n * dnd1          # Dispersionsterm
13 alpha_fres = 1 - 1/n**2      # Fresnelsches alpha
14 alpha_calc = alpha_fres + disp # mit Dispersionsterm
15
16 print 'Gemessenes alpha:  %f +- %f' % (alpha, salpha)
17 print 'Berechnetes alpha:  %f (%f)' % (alpha_calc, alpha_fres)
18 print 'Dipersions-Term:   %f' % disp
19
20 # Berechnung der Abweichungen
21 sigmas = (alpha - alpha_calc) / salpha
22 sigmas_fres = (alpha - alpha_fres) / salpha
23
24 print '\nAbweichung des gemessenen alpha vom berechneten:'
25 print 'mit Dispersionsterm:  %f sigma' % sigmas
26 print 'ohne Dispersionsterm: %f sigma' % sigmas_fres

```

	Programmausgabe
1	Gemessenes alpha: 0.543559 +- 0.004085
2	Berechnetes alpha: 0.541965 (0.528935)
3	Dipersions-Term: 0.013030
4	
5	Abweichung des gemessenen alpha vom berechneten:
6	mit Dispersionsterm: 0.390223 sigma
7	ohne Dispersionsterm: 3.579662 sigma

### A.3. Hilfsroutinen (tools.py)

```

1 #!/usr/bin/python
2 # -*- coding: iso-8859-1 -*-
3
4 from math import sqrt
5
6 def gew_mittel(xsx):
7     '''gew_mittel(list(float,float)) -> (float, float)
8     xsx : Liste aus Tupeln der Messwerte mit jeweiligen Fehlern
9     ->   Tupel (gx, sgx) aus gewichtetem Mittel und dessen Fehler'''
10    suma = sumb = 0.
11    for xi,sxi in xsx:
12        suma += xi / sxi**2
13        sumb += 1. / sxi**2
14    return (suma/sumb, 1/sqrt(sumb))

```