

Ultraschall-Phasengitter

Björn Lennartz Johannes Löhner-Böttcher

12.3.2009

Der Versuch beschäftigt sich mit dem Phänomen der Beugung. An mehreren Amplitudengittern werden die Gitterkonstanten und zusätzlich für eines die Aperturfunktion bestimmt.

Eine laufende Schallwelle in Flüssigkeit stellt ein Phasengitter für das Laserlicht dar. Dabei werden die Intensitäten der Beugungsordnungen für verschiedene Spannungswerte des Schallerzeugers aufgenommen und mit der Raman-Nath-Theorie verglichen. Diese behandelt die Beugung an einer Ultraschallwelle und gibt Aussagen über die Phasenänderung. Ebenso kann dann direkt die Wellenlänge bestimmt werden.

Inhaltsverzeichnis

A.) Vorbereitung

I. Ziel des Versuchs, Versuchsaufbau

II. Physikalische Grundlagen

1. Beugung
2. Amplitudengitter
3. Aperturfunktion
4. Auflösungsvermögen
5. Phasengitter
6. Raman-Nath-Theorie

B.) Versuchsdurchführung , Aufgaben

C.) Auswertung

1. Gitterkonstante des Sinusgitters
2. Gitterkonstanten von 5 Amplitudengittern
3. Aperturfunktion für Gitter 1
4. Verhältnis Spaltbreite-Spaltabstand aus Aperturfunktion
5. Auflösungsvermögen der Gitter
6. Vergleich der Phasengittermessung mit Raman-Nath-Theorie
7. Bestimmung der Schallwellenlänge
8. Zusammenfassung der Ergebnisse

Anhang:

- zu B) Messprotokoll

- zu C) Auswertungstabelle

B) Versuchsdurchführung

Als erstes nahmen wir sämtliche Linsen aus dem Strahlengang, um den Laserstrahl möglichst waagrecht auszurichten. Dann:

- Einstellen der Blende, um einen gebündelten Laserstrahl auf dem Schirm zu erhalten.
- Einbringen des Sinusgitters und Ausmessen des Abstandes zwischen 0. und 1. Ordnung
- Anordnen der Linsen L1, L2 und Einbringen des Eichungsgitters R, Aufnahme Zeiteichung
- Aufnahme der Beugungsbilder für Gitter 1 -5
- Ausmessen des Durchmessers des Laserstrahls für das Auflösungsvermögen der Gitter
- Zählen der Beugungsordnungen bei voller Ausleuchtung der Gitter

- Einsetzen der Ultraschallzelle
- Aufnahme der Intensitäten der Beugungsmaxima bei verschiedenen Spannungswerten
- Aufnahme der Spannung für das Minimum der 0. und das Maximum der 1. Ordnung
- Aufnehmen des Beugungsbildes vom Eichgitter R mit vorgesetztem Isooktantank

Aufgaben

- 1) Bestimmung der Gitterkonstanten eines Sinusgitters aus dem Abstand der 1. Beugungsordnung

C) Auswertung

1. Gitterkonstante des Sinusgitters

Zur Bestimmung der Gitterkonstanten K des Sinusgitters maßen wir den Abstand a zwischen der 0. und 1. Beugungsordnung :

$$a = (4,5 \pm 0,1) \text{ cm}$$

Als Abstand zwischen Gitter und Schirm maßen wir: $x = (5,5 \pm 0,1) \text{ cm}$

Da Strahl und Schirm senkrecht zueinander standen, ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras die Hypotenuse $c = \sqrt{x^2 + a^2}$.

Als Winkel zwischen den Seiten x und c ergibt sich durch den Sinus: $\sin \Theta = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

Mit $K = \frac{m \cdot \lambda}{\sin \Theta}$ folgt für das Sinusgitter mit $m=1$:

$$K = \frac{\lambda}{a} \cdot \sqrt{x^2 + a^2} = \lambda \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1} = 9,993 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

$$\text{mit einem Fehler } \sigma(K) = \sqrt{\left(\frac{\delta K}{\delta x}\right)^2 \cdot \sigma^2(x) + \left(\frac{\delta K}{\delta a}\right)^2 \cdot \sigma^2(a)} = \frac{\lambda \cdot x}{a^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2 \sigma^2(x) + x^2 \sigma^2(a)}{x^2 + a^2}}$$

Das ergibt einen Fehler von: $\sigma(K) = 0,172 \cdot 10^{-7} \text{ m}$

Wir erhalten als Gitterkonstante des Sinusgitters: $K = (9,993 \pm 0,172) \cdot 10^{-7} \text{ m}$

Der angegebene Wert lautet: $K_{\text{ref}} = 9,8425 \cdot 10^{-7} \text{ m}$

Unser Fehler liegt also sehr gut im 1σ -Bereich.

2. Gitterkonstanten der 5 Amplitudengitter

Um die Gitterkonstanten der 5 Amplitudengitter zu bestimmen, musste zunächst eine Eichung der Zeitachse mit Hilfe eines Referenzgitters R vorgenommen werden.

Das Referenzgitter R hatte eine bekannte Anzahl an Strichen, nämlich 80 pro cm, was eine Gitterkonstante $K_R = 0,0125 \text{ cm}$ ergab.

Durch die Beziehung $\sin \Theta = \frac{m \cdot \lambda}{K_R}$ konnten wir den $\sin \Theta$ über die gemessene Zeit für jede Beugungsordnungen in einem Diagramm erfassen.

Es ergab sich der lineare Zusammenhang $\sin \Theta = Bt + A$ und durch einen linearen Fit

erhielten wir die Steigung B und den Schnittpunkt A der Geraden mit der y-Achse.

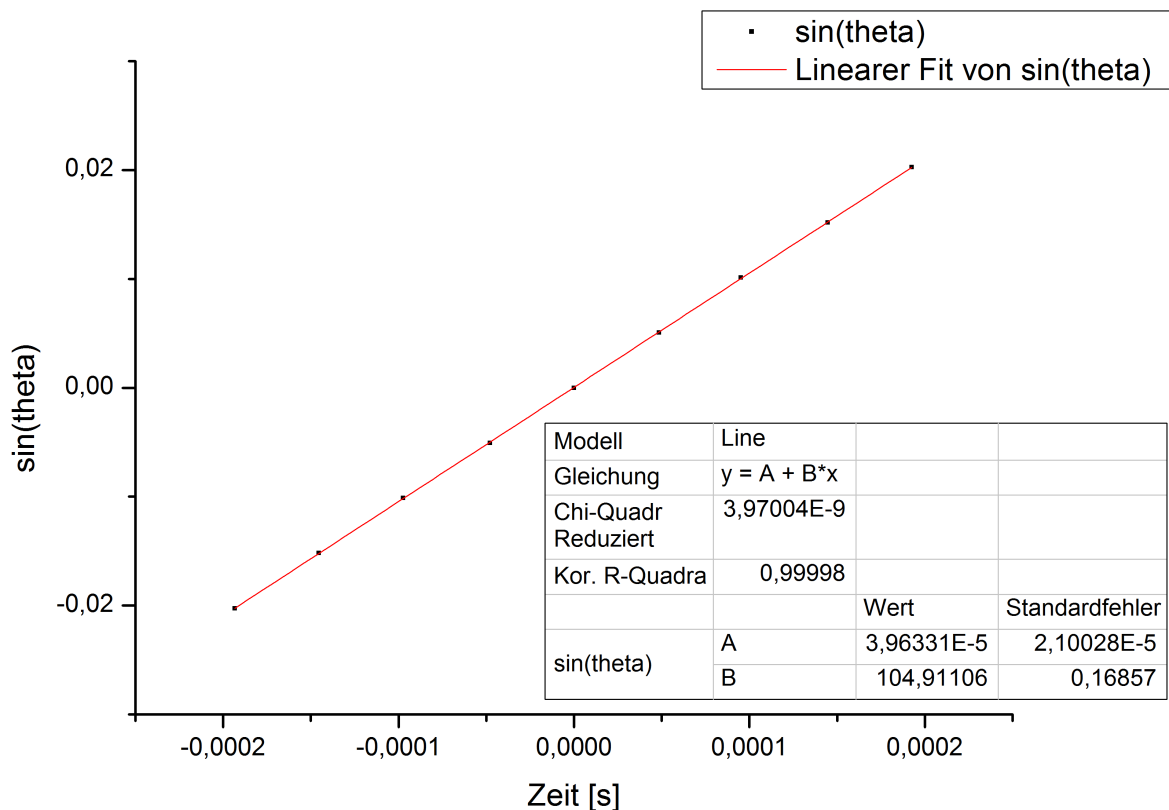


Abbildung 1: Eichung der Zeitachse mit Gitter R

Aus dem Fit erhalten wir also für die Steigung: $B = (104,911 \pm 0,169) \frac{1}{s}$

und für den y-Schnittpunkt: $A = (3,963 \pm 2,100) \cdot 10^{-5}$

Für t nehmen wir einen Fehler $\sigma(t) = 0,5 \mu s$ an.

Als Fehler für $\sin(\theta)$ ergibt sich nach der Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma(\sin \Theta) = \sqrt{\left(\frac{d \sin \Theta}{d t}\right)^2 \cdot \sigma^2(t) + \left(\frac{d \sin \Theta}{d B}\right)^2 \cdot \sigma^2(B) + \left(\frac{d \sin \Theta}{d A}\right)^2 \cdot \sigma^2(A)} = \sqrt{B^2 \sigma^2(t) + t^2 \sigma^2(B) + \sigma^2(A)}$$

Nun lassen sich die Gitterkonstante der 5 Amplitudengitter aus den beiden

Zusammenhängen $\sin \Theta = Bt + A$ und $K_i = \frac{m \cdot \lambda}{\sin \Theta}$.

Dabei wird der lineare Zusammenhang $\sin \Theta = \frac{\lambda}{K_i} \cdot m = B_i \cdot m$ ausgenutzt und die Gitter-

konstante K_i aus der jeweiligen Steigung B_i des linearen Fits in Abbildung 2) - 6) berechnet.

Als Fehler für die K_i ergibt sich: $\sigma(K_i) = K_i \cdot \frac{\sigma(B_i)}{B_i}$

Somit ergeben sich die Gitterkonstanten mit Fehler für Gitter 1-5 zu:

Gitter 1: $K_1 = 125,805 \mu m$, $\sigma(K_1) = 0,555 \mu m$

Gitter 2: $K_2 = 43,077 \mu m$, $\sigma(K_2) = 0,055 \mu m$

Gitter 3: $K_3 = 96,907 \mu m$, $\sigma(K_3) = 0,365 \mu m$

Gitter 4: $K_4 = 78,511 \mu m$, $\sigma(K_4) = 3,178 \mu m$

Gitter 5: $K_5 = 64,374 \mu m$, $\sigma(K_5) = 0,094 \mu m$

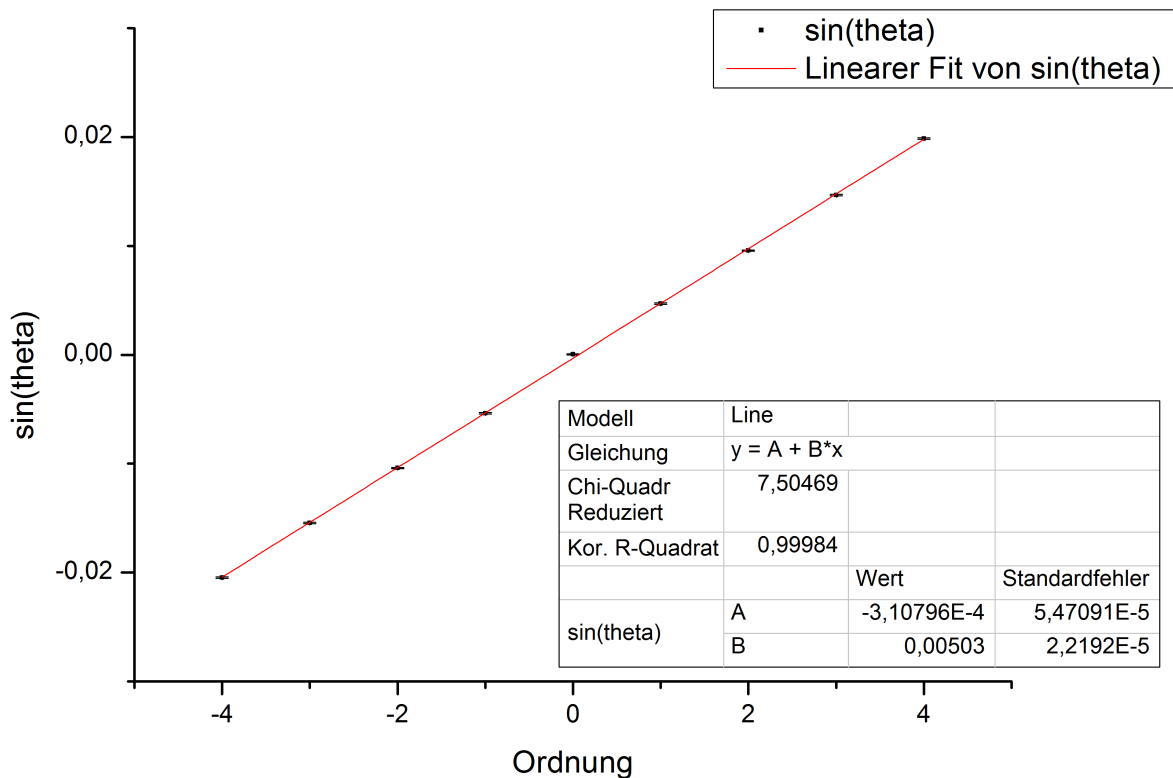


Abbildung 2: Linearer Fit für die Messwerte von Gitter 1

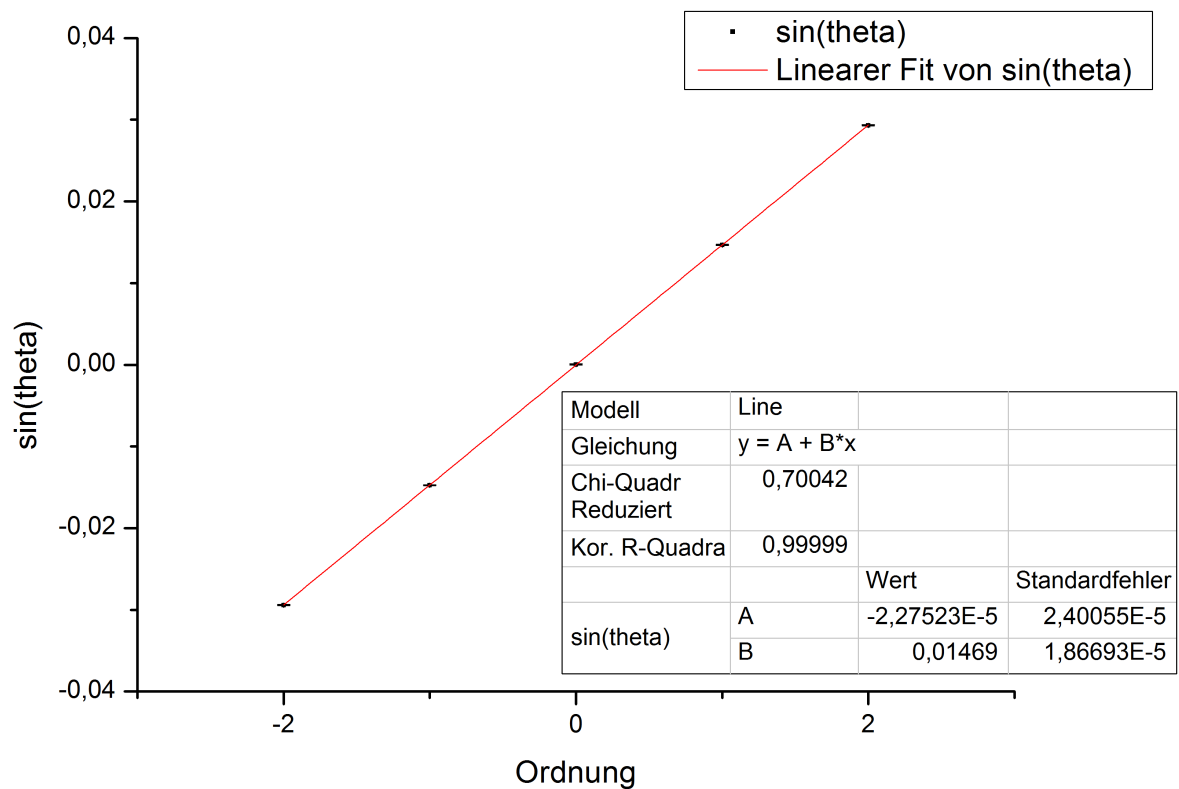


Abbildung 3: Linearer Fit für die Messwerte von Gitter 2

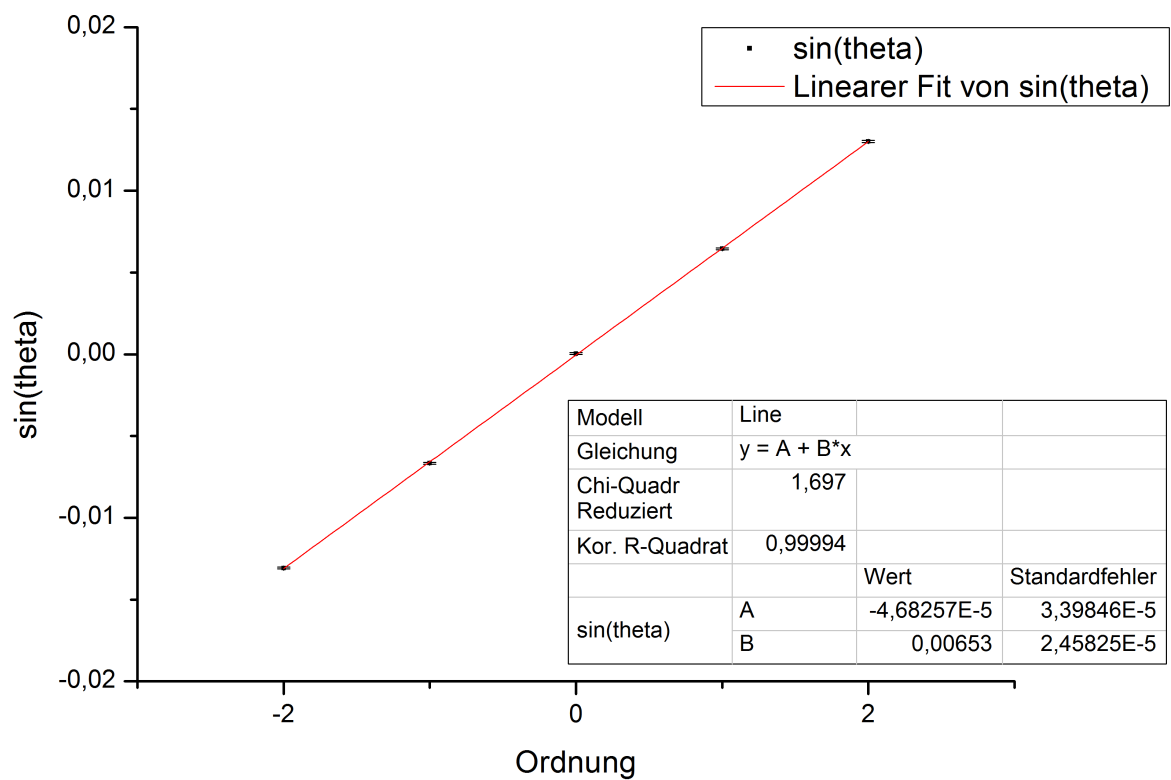


Abbildung 4: Linearer Fit für die Messwerte von Gitter 3

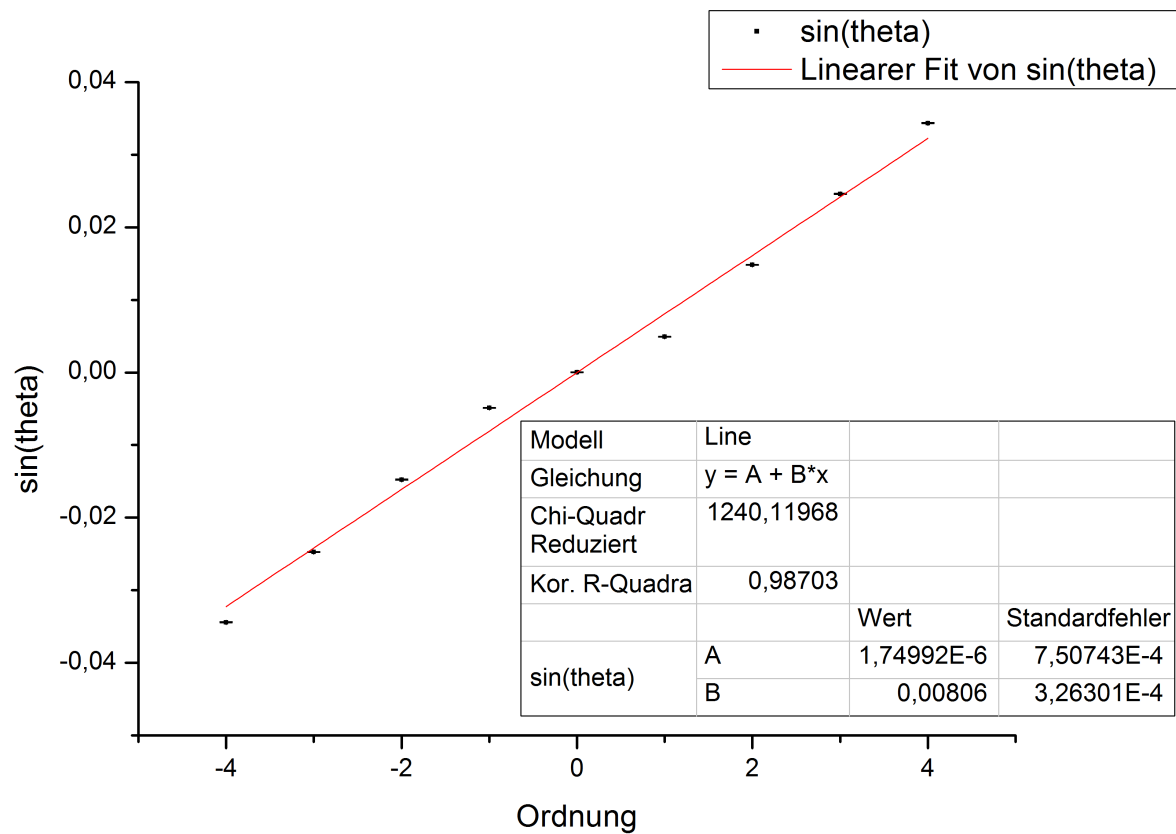


Abbildung 5: Linearer Fit für die Messwerte von Gitter 4

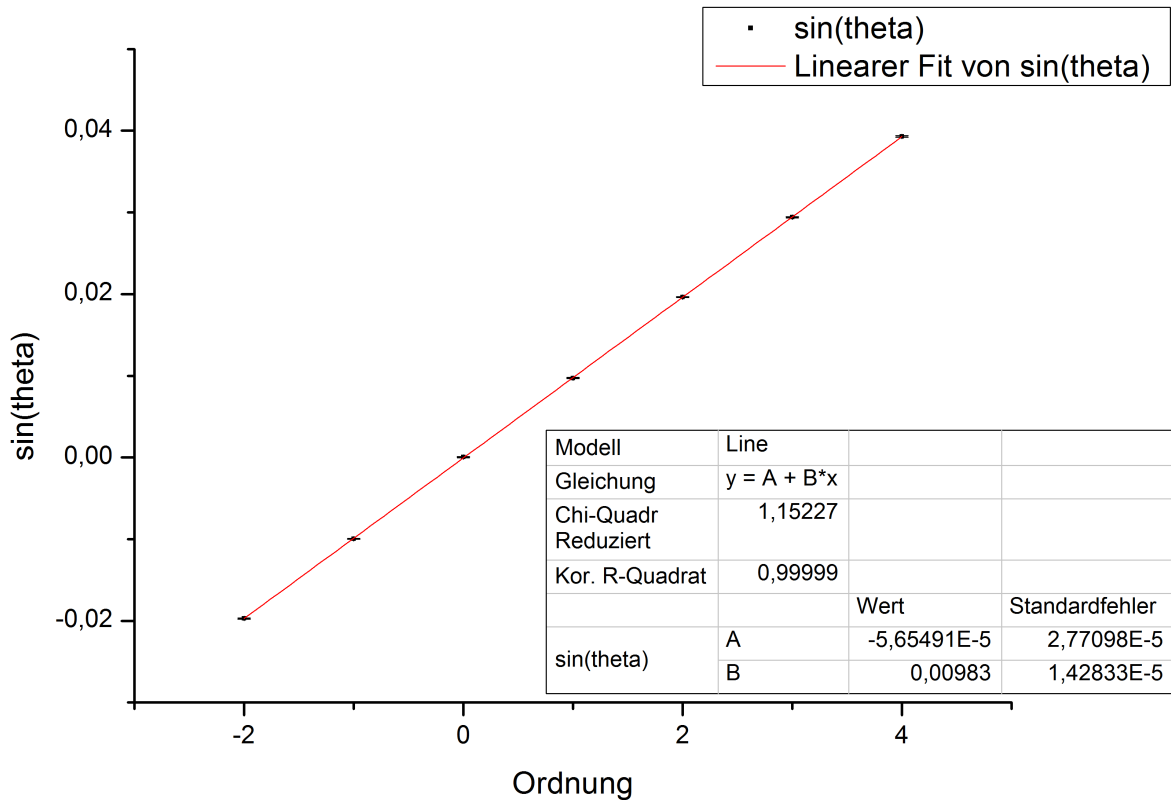


Abbildung 6: Linearer Fit für die Messwerte von Gitter 5

3. Aperturfunktion für Gitter 1

Da die Intensitätsverteilung nicht gegeben ist, benutzen wir für die Berechnung der Aperturfunktion $g(x)$ die Näherung als Fourierreihe:

$$g(x) = \sum_{j=0}^m \sqrt{I_j} \cdot \cos\left(\frac{x}{K} 2\pi j\right)$$

Wir nahmen für Gitter 1 die Intensitäten der Beugungsmaxima auf und mittelten für 2

Messreihen die Werte für die Intensitäten: $\bar{I}_j = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 (I_j)_i$

Als Fehler für die Intensitäten nahmen wir eine Ablesungenauigkeit von $\sigma(Y) = 0,02$ V

an. Als Standardfehler ergibt sich für die Intensitäten: $\sigma(I_j) = \sqrt{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^4 ((I_j)_i - \bar{I}_j)^2}$

Als Gesamtfehler ergibt sich: $\sigma(I_{j_{\text{ges}}}) = \sqrt{\sigma^2(I_j) + \sigma^2(Y)}$

Wir erhalten also für die Intensitäten der Beugungsmaxima j-ter Ordnung:

<u>0. Maximum:</u>	$I_0=(13,513\pm0,039) V$
<u>1. Maximum:</u>	$I_1=(1,038\pm0,068) V$
<u>2. Maximum:</u>	$I_2=(0,776\pm0,040) V$
<u>3. Maximum:</u>	$I_3=(0,476\pm0,032) V$
<u>4. Maximum:</u>	$I_4=(0,207\pm0,051) V$

Mit den Intensitäten und der in 2.) berechneten Gitterkonstanten $K_1=125,805 \mu m$ ergibt sich beim plotten der Aperturfunktion Abbildung 7).

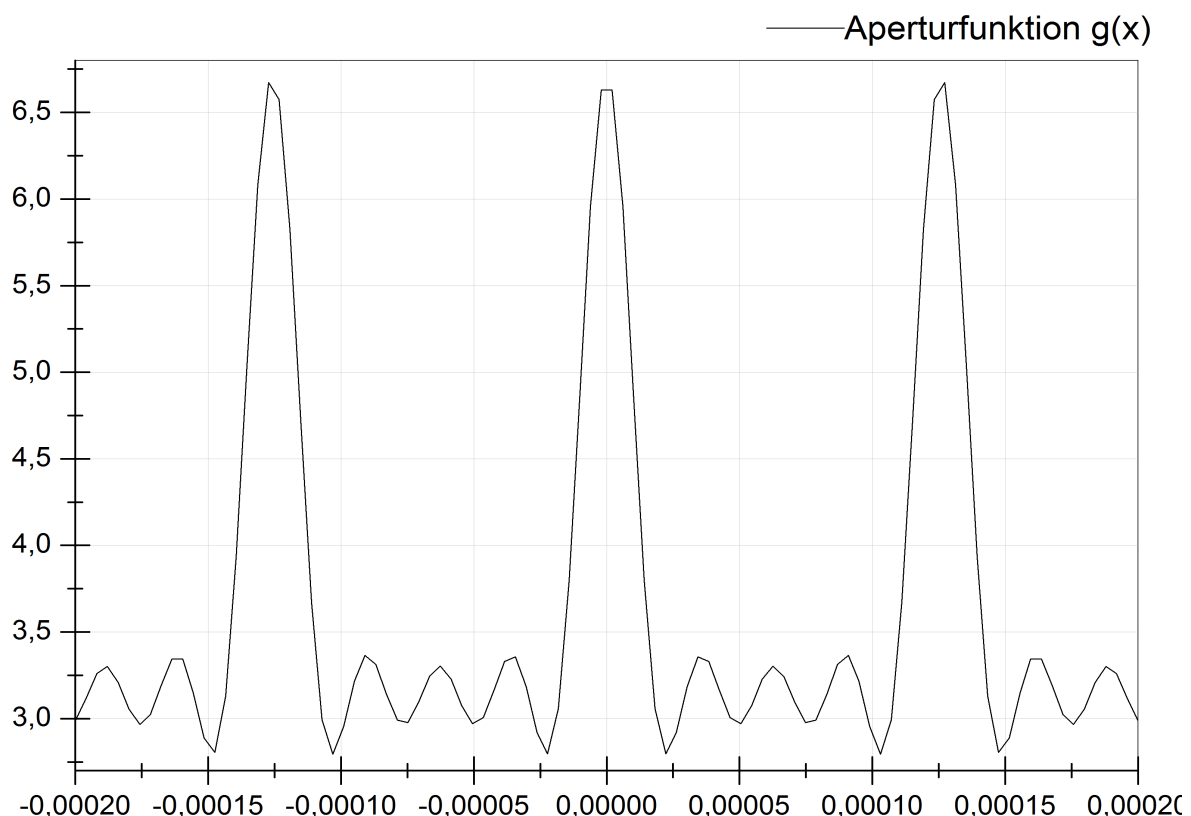


Abbildung 7: Aperturfunktion für Gitter 1

4. Verhältnis Spaltbreite-Spaltabstand aus des Aperturfunktion

Unsere berechnete Gitterkonstante $K_1=125,805 \mu m$ ist der Abstand zweier benachbarter Spaltmitten. Um den Spaltabstand d zu bestimmen, brauchen wir die Spaltbreite b .

Der Spaltabstand d ergibt sich somit zu: $d = K_1 - b$

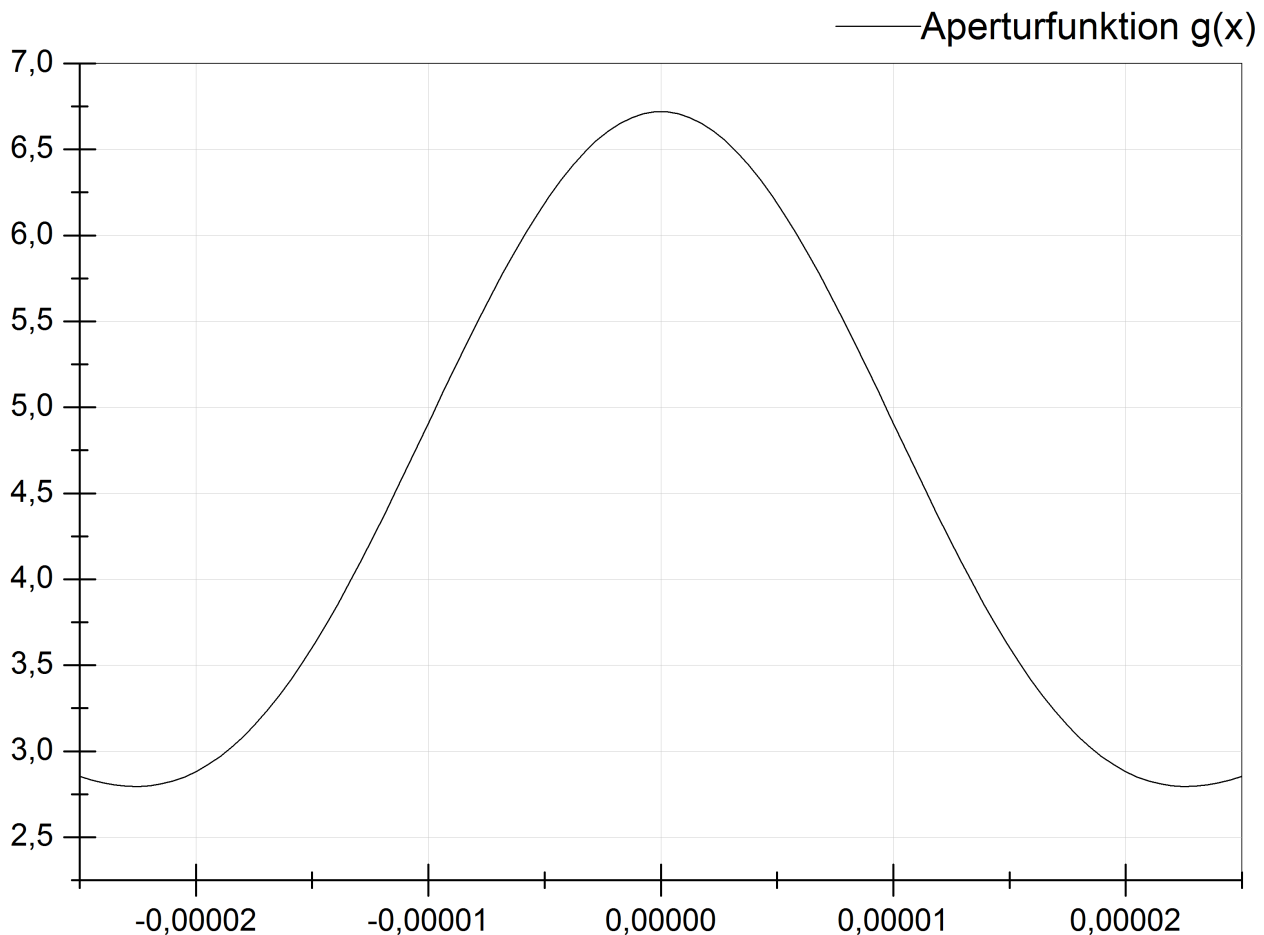
Um die Spaltbreite zu erhalten mussten wir aus Abbildung 8) die Halbwertsbreite des Maximums bestimmen, diese ergab sich zu $b=21,1\pm0,5 \mu m$.

Daraus kann man nun direkt das Verhältnis von Spaltbreite b zu Spaltabstand d bestimmen.

$$v = \frac{b}{d} = \frac{b}{K_1 - b} = \frac{21,1}{104,7} = 0,2015$$

Als Fehler ergibt sich:

$$\sigma(v) = \sqrt{\left(\frac{dv}{dK_1}\right)^2 \cdot \sigma^2(K_1) + \left(\frac{dv}{db}\right)^2 \cdot \sigma^2(b)} = \frac{1}{(K_1 - b)^2} \sqrt{K_1^2 \cdot \sigma^2(b) + b^2 \cdot \sigma^2(K_1)} = 0,0058$$



Also $v = 0,2015 \pm 0,0058$.

Abbildung 8: vergrößerte Periode der Aperturfunktion

5. Auflösungsvermögen der Gitter

Zunächst haben wir den Durchmesser d des Laserstrahls gemessen $d = (4,0 \pm 0,5) \text{ mm}$.

Die Gitter wurden nun der Reihe nach voll ausgeleuchtet und die Beugungsordnungen

abgezählt. Die Anzahl der ausgeleuchteten Gitterlinien ist $N = \frac{d}{K}$.

Das Auflösungsvermögen a lässt sich durch $a = N \cdot m = \frac{d}{K} \cdot m$ berechnen.

Der Fehler ergibt sich aus: $\sigma(a) = a \cdot \frac{\sigma(N)}{N} = a \sqrt{\left(\frac{\sigma(d)}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(K)}{K}\right)^2}$.

Für die einzelnen Gitter ergibt sich somit ein Auflösungsvermögen a_i :

<u>Gitter 1:</u>	$m = 5$	$a_1 = 158,98 \pm 19,88$
<u>Gitter 2:</u>	$m = 3$	$a_2 = 278,57 \pm 34,82$
<u>Gitter 3:</u>	$m = 2$	$a_3 = 82,55 \pm 10,32$
<u>Gitter 4:</u>	$m = 4$	$a_4 = 203,79 \pm 26,78$
<u>Gitter 5:</u>	$m = 4$	$a_5 = 248,55 \pm 31,07$

6. Vergleich der Phasengittermessung mit Raman-Nath-Theorie

Als Phasengitter in diesem Versuch dient eine Ultraschallwelle, die sich durch einen Ultraschallschwingquarz in Isooktanflüssigkeit ausbreitet.

Die Frequenz des Generators wurde auf $f=2203,71$ kHz konstant eingestellt. Bei dieser Frequenz wurden die Beugungsbilder als maximal erzielt und das Signal war stabil.

Es wurden dann Beugungsbilder für Spannungen von 0V bis 9,68V aufgenommen.

Die Intensitäten der Beugungsmaxima wurden in eine Tabelle aufgeschrieben und für die jeweiligen Beugungsordnung aus positiver und negativer Ordnung gemittelt.

Als Normierwert bei 0V für das 0.Maximum wurde $I_0(0V)=9,412 V$ gemessen.

Zum Vergleich mit der Raman-Nath-Theorie wurden alle Messwerte auf

$$I_0(0V)=J_0(0V)=1 \text{ normiert.}$$

Die normierten Intensitäten ergaben sich also aus: $I_{norm} = \frac{I_{-i} + I_{+i}}{2 \cdot I_0(0V)} = I$

Als Fehler für $I_0(0V)$ nehmen wir $\sigma(I_0(0V))=0,1 V$ an.

Der Fehler für I_{-i} und I_{+i} ergab sich aus der Standardabweichung $\sigma(I_{\pm i})$ vom Mittelwert.

Als Fehler für I erhält man mit Fehlerforpflanzung:

$$\sigma(I) = \sqrt{\left(\left(\frac{dI}{dI_{-i}}\right)^2 + \left(\frac{dI}{dI_{+i}}\right)^2\right) \cdot \sigma^2(I_{\pm i}) + \left(\frac{dI}{dI_0}\right)^2 \cdot \sigma^2(I_0)} = \sqrt{\frac{\sigma^2(I_{\pm i})}{2I_0^2} + I^2 \sigma^2(I_0)}$$

Als Fehler für die Generatorspannung U nahmen wir $\sigma(U)=0,02 V$ an.

Außerdem benötigten wir den Umrechnungsfaktor b, der die Spannung des Generators in das passende Argument für die Besselfunktion verwandelt. Dazu ermittelten wir den x-Wert des ersten spannungsabhängigen Minimums im Verlauf der 0.Beugungsordnung und teilten ihn durch den x-Wert des Minimums der Besselfunktion der 0.Ordnung. Analog für den x-Wert des Maximums für die 1. Beugungsordnung. Der Mittelwert der beiden so gewonnenen Faktoren ergab unseren Umrechnungsfaktor b.

x-Wert des ersten Minimums der 0.Ordnung:

$$U_{0,min} = 8,71 V$$

x-Wert des Minimums der Besselfunktion 0.Ordnung:

$$U_{0,min,bessel} = 2,4048 V$$

x-Wert des ersten Maximums der 1.Ordnung:

$$U_{1,max} = 8,30 V$$

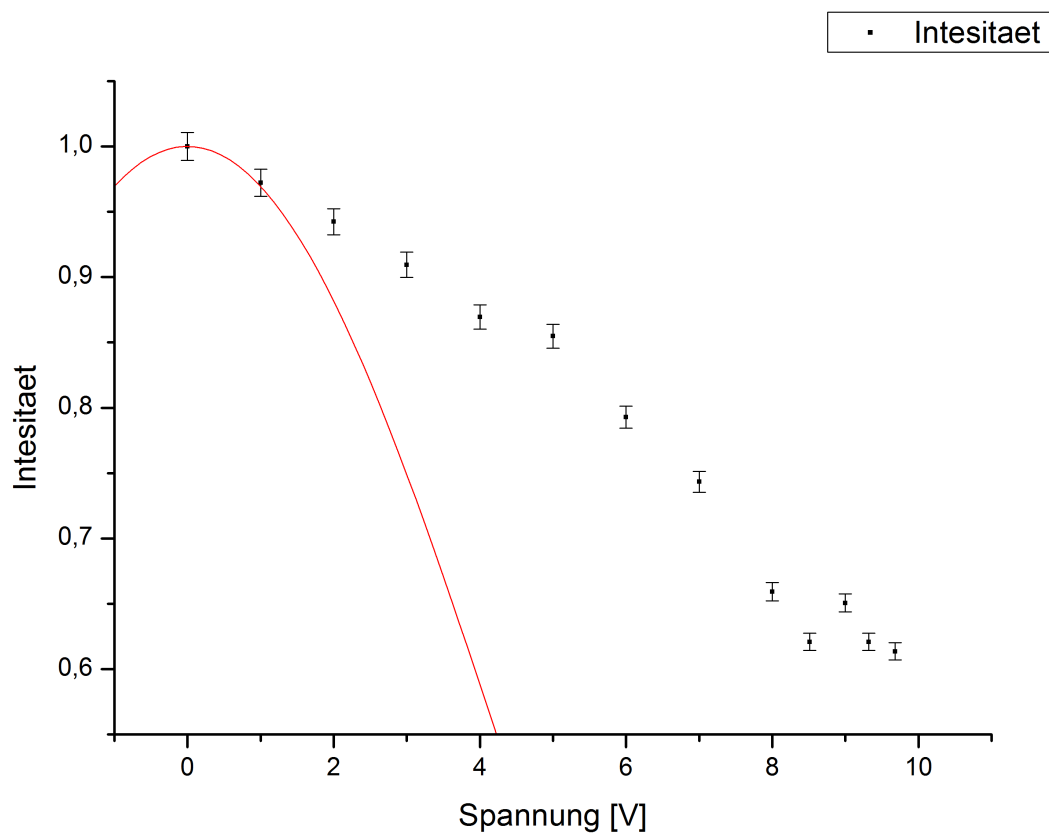
x-Wert des Minimums der Besselfunktion 0.Ordnung:

$$U_{1,max,bessel}=1,8412\text{ V}$$

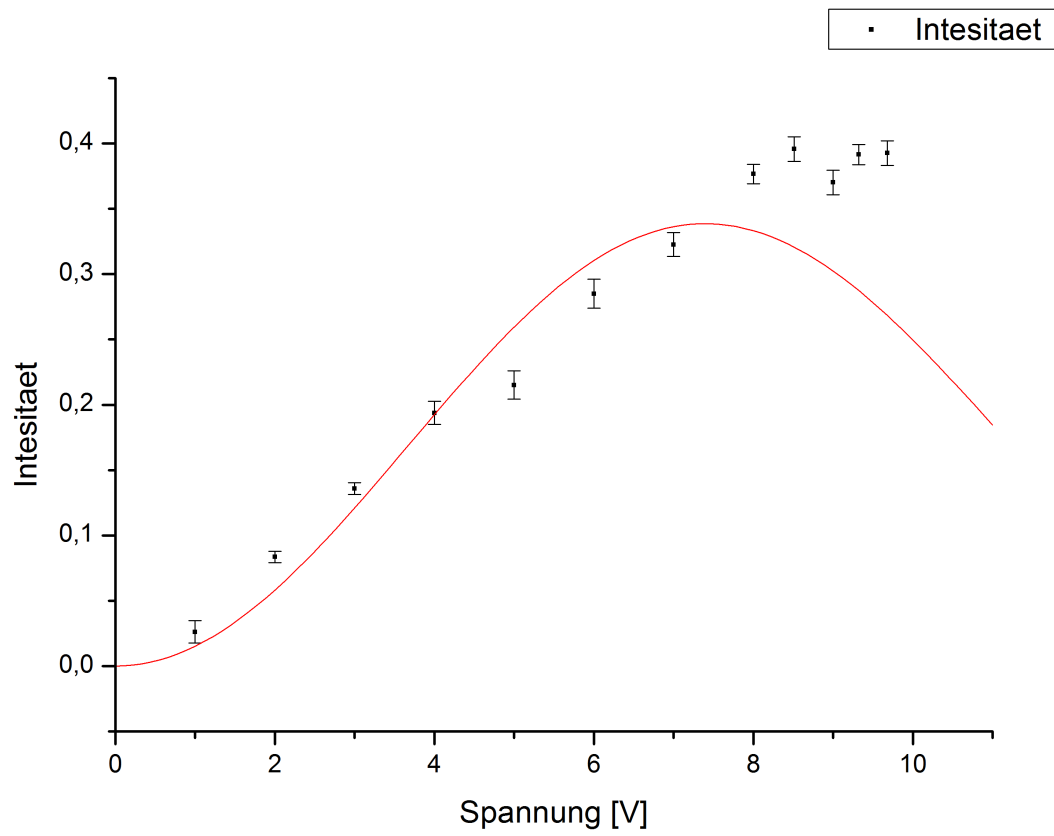
$$b=\frac{1}{2}\left(\frac{U_{0,min}}{U_{0,min,bessel}}+\frac{U_{1,max}}{U_{1,max,bessel}}\right)=0,24897$$

Nun konnten wir die quadrierten Besselfunktionen der jeweiligen Ordnungen in die Diagramme zu den gemessenen Werten einfügen und vergleichen (Abbildungen 9 – 13).

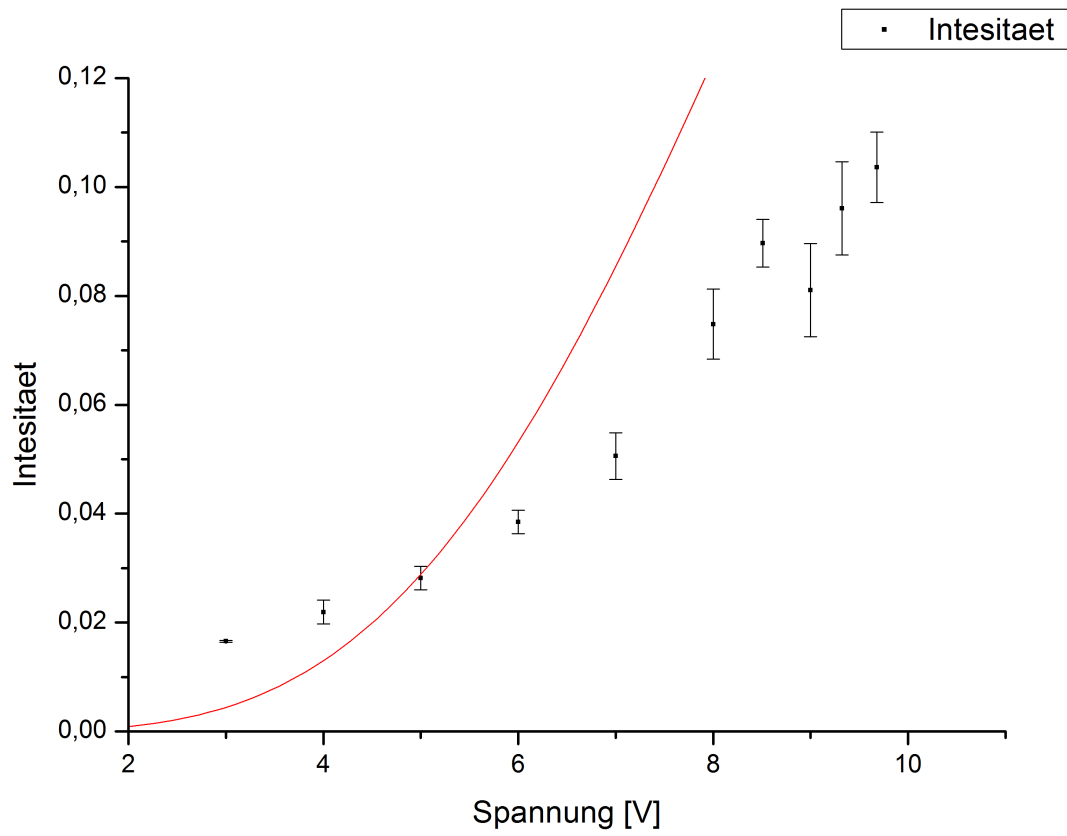
Abbildungen 9: Spannungsabh. Verlauf für 0. und 1. Beugungsordnung am Phasengitter



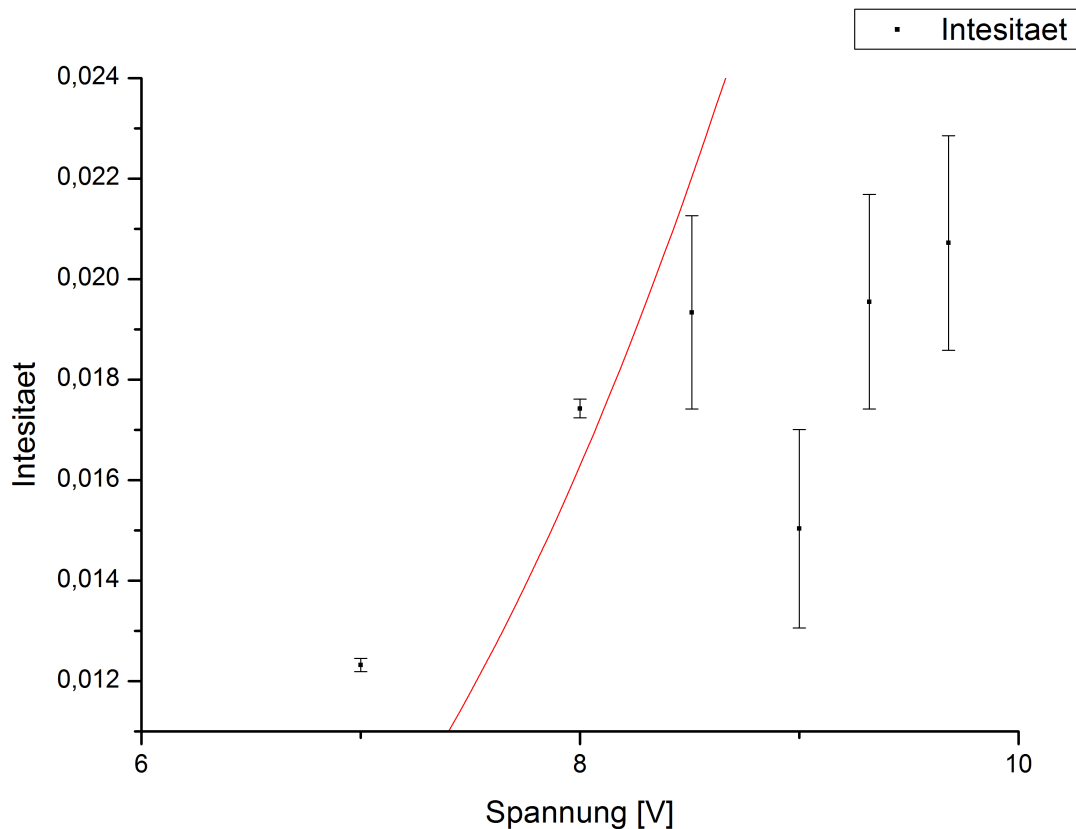
Abbildungen 10: Spannungsabh. Verlauf für 0. Beugungsordnung und Besselfunktion J_0^2



Abbildungen 11: Spannungsabh. Verlauf für 1. Beugungsordnung und Besselfunktion J_1^2



Abbildungen 12: Spannungsabh. Verlauf für 2. Beugungsordnung und Besselfunktion J_2^2



Abbildungen 13: Spannungsabh. Verlauf für 3. Beugungsordnung und Besselfunktion J_3^2

7. Bestimmung der Ultraschallwellenlänge

Aus der Raman-Nath-Theorie für die Bestimmung der Ultraschallwellenlänge Λ im Medium

geht hervor:

$$\sin(\Theta) = \pm \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right) \cdot m$$

mit Lichtwellenlänge λ , Beugungsordnung m , Beugungswinkel $\sin(\Theta)$.

Wir nahmen nun zur Bestimmung der Schallwellenlänge Λ ein zweites mal das Beugungsbild des Referenzgitters R auf, diesmal jedoch mit vorgesetzter Isooktanzelle.

Wie in 2.) haben wir nun durch die Beziehung $\sin \Theta = \frac{m \cdot \lambda}{K_R}$ den $\sin \Theta$ über die gemessene Zeit für jede Beugungsordnung in einem Diagramm erfasst.

Gitterkonstante des Referenzgitters $K_R = 0,0125 \text{ cm}$.

Es ergab sich wieder der lineare Zusammenhang $\sin \Theta = Bt + A$ und durch den linearen Fit erhielten wir die Steigung B und den Schnittpunkt A der Geraden mit der y-Achse.

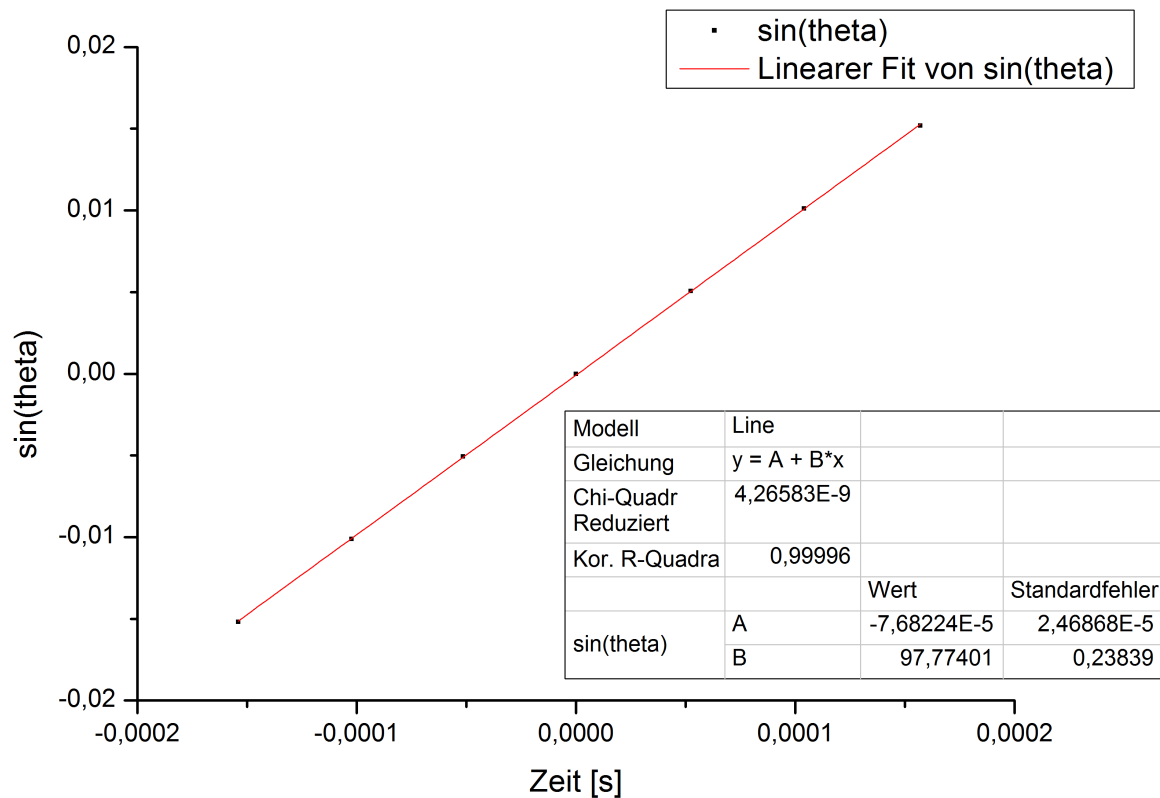


Abbildung 14: Eichung der Zeitachse mit Gitter R und Isooktanzelle

Aus dem Fit erhalten wir also für die Steigung: $B = (97,774 \pm 0,238) \frac{1}{s}$

und für den y-Schnittpunkt: $A = (-7,682 \pm 2,469) \cdot 10^{-5}$

Nun konnten wir analog zur Bestimmung der Gitterkonstanten in 2.) die $\sin \theta$ über die Beugungsordnungen m auftragen und durch eine Ausgleichsgerade die Steigung B der Geraden ermitteln.

$$B = (\dots \pm \dots) \frac{1}{s}$$

Abbildung 15: Geradenanpassung für das Phasengitter

Durch die Beziehung $\sin(\theta) = \pm \left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right) \cdot m$ lässt sich die Schallwellenlänge Λ im

Medium nun direkt berechnen zu:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{B} = (\dots \pm \dots) \mu m$$

Mit der Schallgeschwindigkeit $c_s = 1111 \frac{m}{s}$ in Isooktan ergibt sich als

Ultraschallfrequenz $\nu = \frac{c_s}{\Lambda} = (\dots \pm \dots) MHz$

8. Zusammenfassung der Ergebnisse

– Gitterkonstante des Sinusgitters $K = (9,993 \pm 0,172) \cdot 10^{-7} m$ im 1σ -Fehlerbereich

– Gitterkonstanten der Gitter 1-5 :

Gitter 1: $K_1 = 125,805 \mu m$, $\sigma(K_1) = 0,555 \mu m$

Gitter 2: $K_2 = 43,077 \mu m$, $\sigma(K_2) = 0,055 \mu m$

Gitter 3: $K_3 = 96,907 \mu m$, $\sigma(K_3) = 0,365 \mu m$

Gitter 4: $K_4 = 78,511 \mu m$, $\sigma(K_4) = 3,178 \mu m$

Gitter 5: $K_5 = 64,374 \mu m$, $\sigma(K_5) = 0,094 \mu m$

– Bild der Aperturfunktion (siehe Abbildung 7)

– Verhältnis von Spaltbreite zu Spaltabstand $\nu = 0,2015 \pm 0,0058$

– Auflösungsvermögen a_i der Gitter:

Gitter 1: $a_1 = 158,98 \pm 19,88$

Gitter 2: $a_2 = 278,57 \pm 34,82$

Gitter 3: $a_3 = 82,55 \pm 10,32$

Gitter 4: $a_4 = 203,79 \pm 26,78$

Gitter 5: $a_5 = 248,55 \pm 31,07$

– Vergleich der Phasengittermessung mit der Raman-Nath-Theorie (siehe Abb. 9 – 13)

– Schallwellenlänge $\Lambda = \dots \pm \dots \mu m$