Metody numeryczne projekt 2 – Układy równań liniowych

Marcel Grużewski 193589

1. Wstęp

Celem projektu jest implementacja i analiza dwóch metod iteracyjnych (Jacobiego i Gaussa-Seidla) oraz jednej metody bezpośredniej (faktoryzacja LU) rozwiązywania układów równań liniowych. Testy poszczególnych metod będą przeprowadzane na układach równań, które mogą powstać w wyniku dyskretyzacji równań różniczkowych.

Układ równań liniowych ma następującą postać:

Ax = b

gdzie A jest macierzą systemową , b jest wektorem pobudzenia , natomiast x jest wektorem rozwiązań reprezentującym szukaną wielkość fizyczną. Na potrzeby projektu macierz A będzie miała następującą postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a3 & a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a3 & a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a3 & a2 & a1 \end{bmatrix}$$

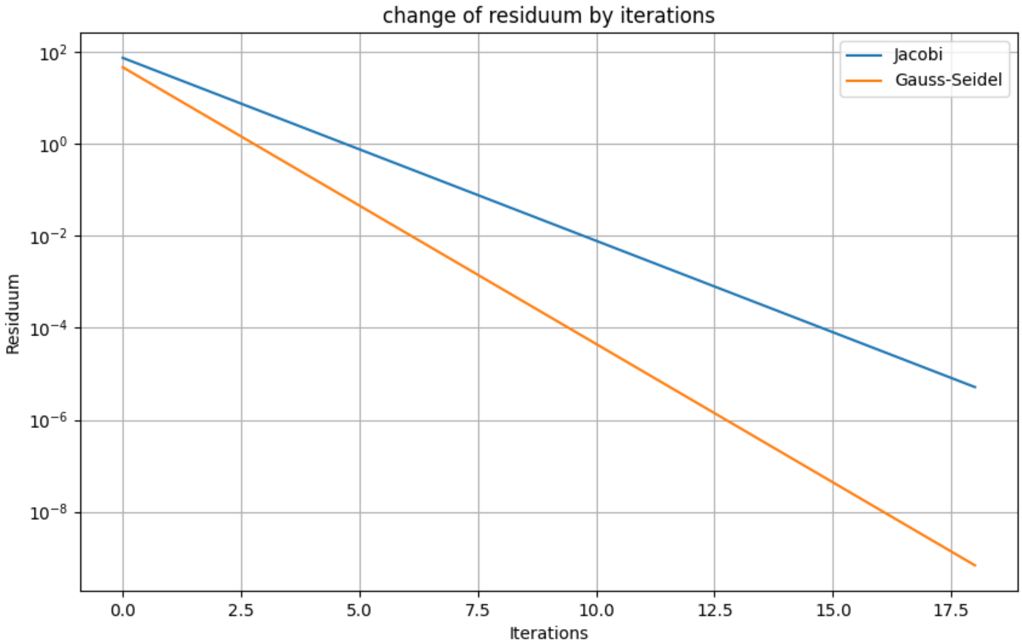
Prawa strona równania to wektor b o długości N.

W wyniku rozwiązania układu równań otrzymujemy wektor x.

Wektor residuum Ważnym elementem algorytmów iteracyjnych (np. Jacobiego i Gaussa-Seidla) jest określenie w której iteracji algorytm powinien się zatrzymać. W tym celu najczęściej korzysta się z residuum, czyli wektora który dla k – tej iteracji przyjmuje postać:

$$\mathbf{Res^{(k)} = Ax^{(k)} - b.}$$

2. **Porównanie metod Jacobiego i Gaussa-Seidla**

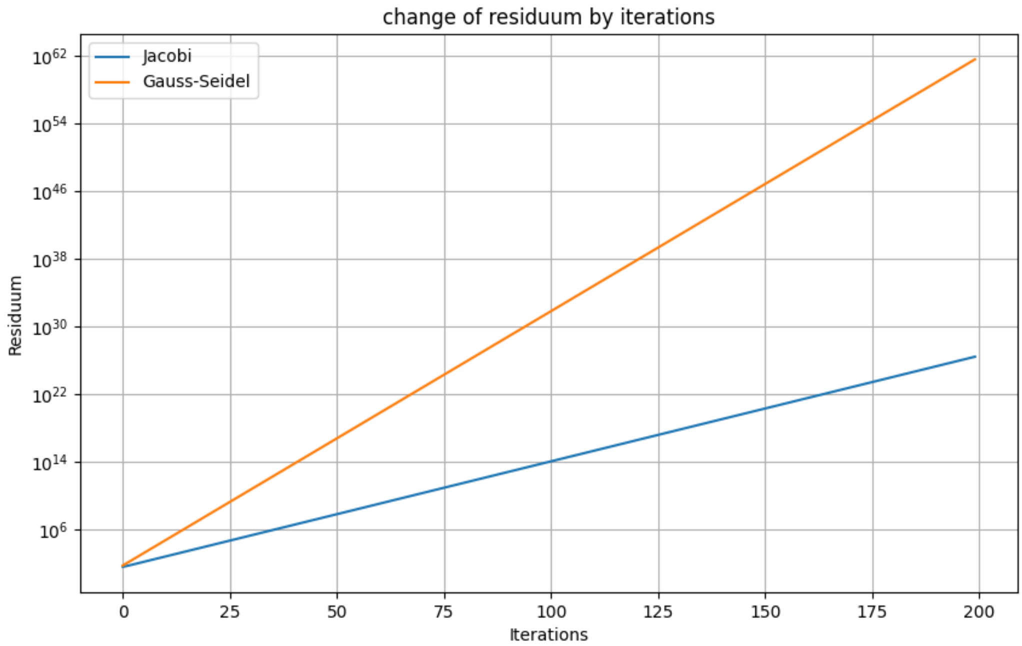


Wykres 1. Porównanie metod Jacobiego i Gaussa-Seidla (zadanie B)

```
iterations for Jacobi = 29
iterations for Gauss-Seidel = 19
Time for Jacobi: 24.874839782714844
Time for Gauss-Seidel: 15.164128303527832
```

Jak możemy wyczytać z wykresu, metoda Jacobiego jest mniej skuteczna od Gaussa-Seidla pod względem liczby iteracji jak i czasu, wynika to z tego że w metodzie Gaussa-Seidla nowo obliczone wartości są natychmiast używane w kolejnych obliczeniach co pozwala znacznie przyspieszyć obliczenia.

3. **Porównanie metod Jacobiego, Gaussa-Seidla i LU dla macierzy rozbieżnej**



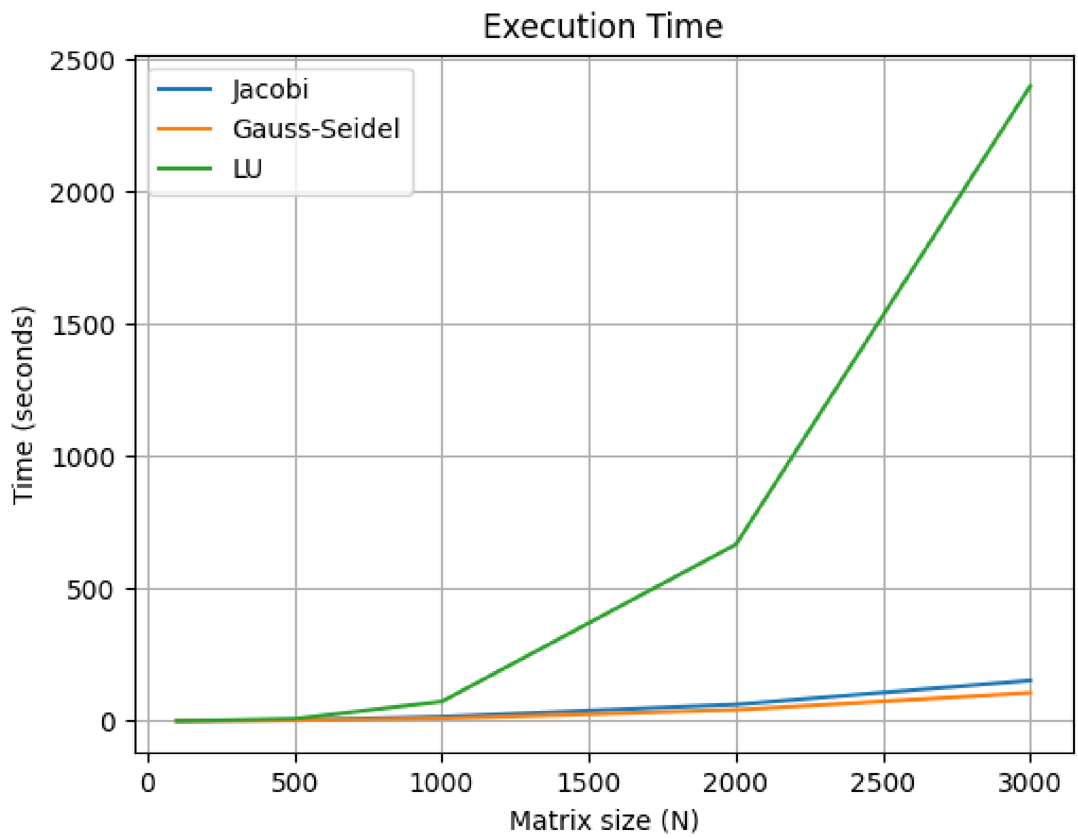
Wykres 1. Porównanie metod Jacobiego i Gaussa-Seidla (zadanie B)

Na powyższym wykresie widać że metody Jacobiego i Gaussa-Seidela ograniczone tylko przez liczbę iteracji, mają normę residuum zbiegającą do nieskończoności.

```
iterations for Jacobi = 200
iterations for Gauss-Seidel = 200
residual for LU = 3.638624994101961e-13
Time for Jacobi: 159.94079685211182
Time for Gauss-Seidel: 156.65051937103271
Time for LU: 98.19430208206177
```

Jednak gdy użyjemy metody LU do obliczenia tego równania, otrzymujemy dokładne rozwiązanie układu równań liniowych.

4. **Porównanie metod dla różnych wartości N**



Wykres 1. Porównanie metod Jacobiego i Gaussa-Seidla (zadanie B)

Jak widzimy dla macierzy z zadania A faktoryzacja LU mocno odstaje czasowo, ponieważ ma większą złożoność obliczeniową $O(n^3)$.

Metody bezpośrednie takie jak faktoryzacja LU są dobre dla małych i średnich macierzy lub gdy wykryje się rozbieżność, wtedy zawsze osiągniemy rozwiązanie, lecz kosztem czasu obliczeń. Metody iteracyjne będą lepsze gdy zależy nam na czasie i jesteśmy skłonni poświęcić dokładność określając tylko próg błędu.