

Projet Mathématiques - Informatique

Gabriel VALDES-ALONZO
Sami SOGHAIER

Licence 3 - Mathématiques-Informatique
Maria Raquel URENA PEREZ

Juin 2025



Introduction

Le problème du voyageur de commerce [1, 2] (Traveling Salesman Problem en anglais) est un problème classique d'optimisation combinatoire : le problème consiste à trouver le plus court chemin passant une seule fois par une liste de n villes définies, et revenant au point initial.

Le TSP a diverses applications dans plusieurs domaines comme la logistique, séquençage d'ADN, manufacture, et autres. Chaque problème composé d'un ensemble que doit être rempli dans un ordre particulier pourrait être pensé comme le problème TSP, où on cherche un chemin moins coûteux. Le problème peut être résolu exactement si tous les chemins entre villes sont analysés et comparés, mais la quantité de chemins à vérifier augmente rapidement, ce qu'est connu comme un problème NP-Difficile.

Dû à son coût, des algorithmes sont proposés pour trouver des solutions approximatives que peuvent être optimales ou pas, mais qui résolvent le problème rapidement. Dans ce travail, seulement la version symétrique de l'algorithme sera analysée. Cela veut dire que les distances considérées entre villes sont égales dans les deux sens. Les villes sont aussi considérées toutes interconnectées, donc il existera toujours une connexion directe entre une ville et l'autre.

Le travail suivant a été réparti de la façon suivante : chaque personne a pris deux algorithmes à implémenter. L'heuristique du plus proche voisin ainsi que 2-opt sont une continuité, comme l'heuristique d'Insertion qui fonctionne avec le recuit simulé. En ce qui concerne le rapport, il a été écrit en développant chacun les parties respectives et en faisant l'analyse ensemble.

Dans les prochaines sections, on procédera ensuite à l'analyse des résultats et puis on finira par conclure en comparant les résultats et regardant les perspectives à futur.

Divers outils ont été utilisés pour travailler sur le rapport :

- Overleaf : pour rédiger le rapport et travailler ensemble en temps réel,
- Notebook : pour rédiger le notebook jupyter,
- VSCode : pour travailler sur le code du projet,
- Github : pour stocker et échanger les différents supports.

Le dépôt Github peut être consulté sur le lien
<https://github.com/grvaldes/EADS-projet-mathematique>.

Heuristiques implémentées

Dans le contexte de ce travail sur le TSP, on va mettre en pratique des heuristiques afin d'apporter des solutions qui soient le plus correctes possible en minimisant le temps de calcul. Les heuristiques analysées sont les suivantes :

Voisins Plus Proches

L'heuristique VPP [3], aussi connu par son nom en anglais Nearest Neighbors, est un des algorithmes plus simples et intuitives pour résoudre le TSP. Comme son nom le dit, étant donnée une ville de départ quelconque (choisi arbitrairement), on cherche entre tous les villes voisines laquelle qui est à la moindre distance. Une fois dans cette ville, on la marque comme visitée et continue en cherchant la ville la plus proche encore pas visitée. On répète cette procédure jusqu'à visiter toutes les villes dans le réseau. La complexité de cet algorithme est exactement $\mathcal{O}(n^2)$ (avec n la quantité de villes), car pour chaque ville il faut vérifier la distance avec chaque voisin.

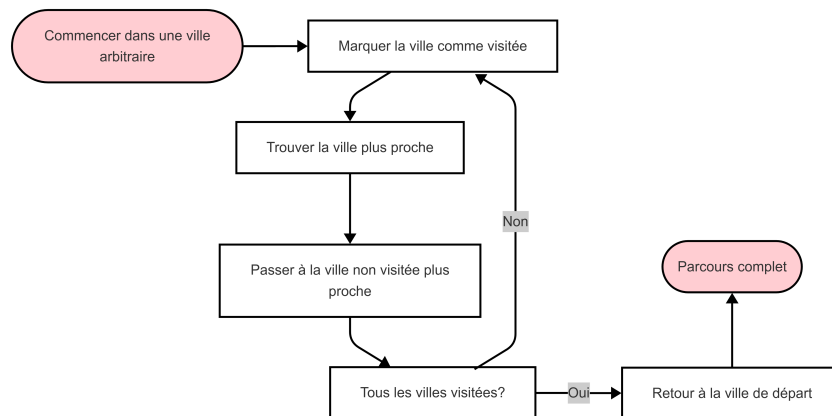


FIGURE 1 – Diagramme de l’algorithme.

Heuristique d’Insertion

Consiste à assembler un chemin en insérant à chaque étape la ville qui perturbe le moins possible le parcours déjà mis en place.

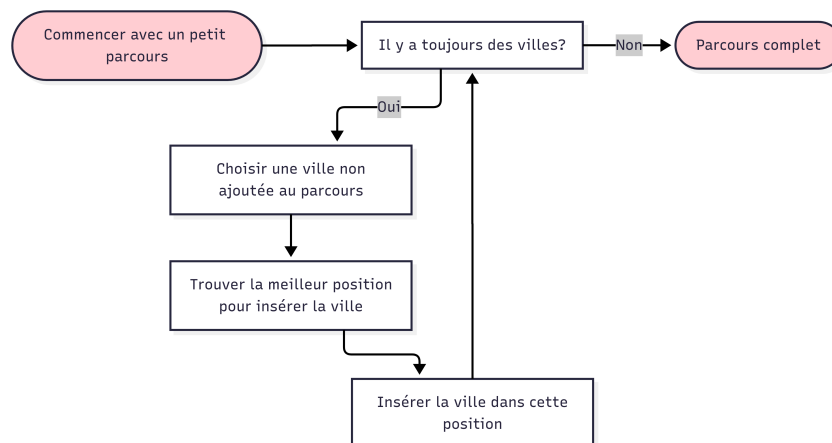


FIGURE 2 – Diagramme de l’algorithme.

2-opt

L’heuristique 2-opt [4] est aussi une procédure simplifiée pour chercher le chemin plus optimal. Pour un chemin donné, l’algorithme cherche améliorer le parcours en inversent des sous-chemins. Donc pour chaque ville, l’algorithme cherche le parcours à suivre et vérifie si la distance totale est réduite quand on inverse une partie parcourue. Si l’on trouve un parcours plus court, on garde ce nouveau chemin et commence une fois encore à partir de la ville suivante, et on répète jusqu’à trouver le chemin optimal. La quantité de sous chemins à vérifier est sous-quadratique, mais chaque sous-chemin a une quantité différente de villes, donc la complexité de l’algorithme peut exploser facilement.

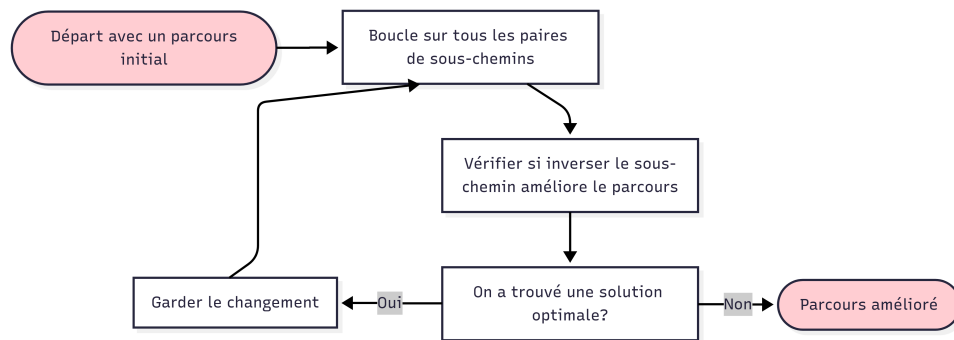


FIGURE 3 – Diagramme de l’algorithme.

Recuit Simulé

Consiste à utiliser une solution déjà proposée et à l’améliorer en utilisant des solutions temporaires qui ne sont pas optimales pour éviter les minima-locaux.

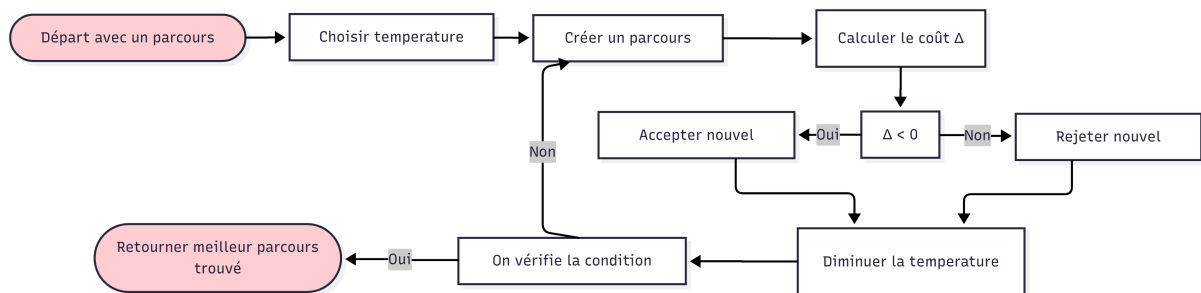


FIGURE 4 – Diagramme de l’algorithme.

Résultats

Voici on présente les résultats obtenus de l’application des algorithmes dans des réseaux de villes. Le code est organisé de façon que on peut donner une graine aléatoire qui génère toujours le même réseau, ce que facilite les comparaisons entre algorithmes.

Voisins plus proches

Pour essayer l’algorithme des voisins plus proches, on génère un réseau de 50 villes avec un graine égale à 30. On utilise l’algorithme avec trois points de départ différentes : la ville 0, 23 et 42 :

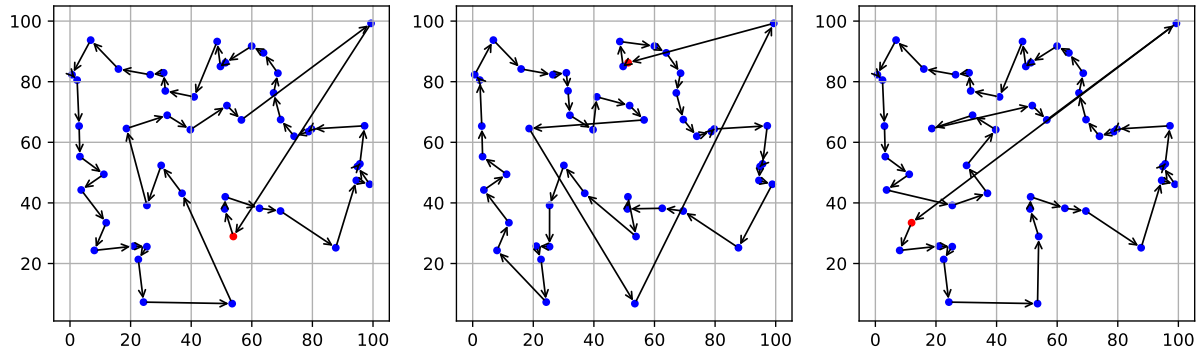


FIGURE 5 – Résultat pour l’algorithme des Voisins plus proches avec trois départs différents (50 villes). Les départs depuis la ville 0 (gauche), 23 (centre) et 42 (droite).

On a que l’algorithme prend en moyenne 299.61 microsecondes, et pour chaque point de départ on parcourt :

- Départ ville 0 : 669.16.
- Départ ville 23 : 715.63.
- Départ ville 43 : 692.43.

Après ces résultats on peut vérifier que l’optimalité de l’algorithme dépend du point de départ, donc il faudrait appliquer l’heuristique 50 fois pour obtenir la meilleure solution possible avec cet algorithme. En particulier on a une ville qui est trop loin des autres, et cela cause de problèmes avec l’optimalité du chemin parcouru (elle génère croisements dans le chemin).

2-opt

Pour l’algorithme 2-opt on utilise le même réseau que dans l’heuristique précédent, pour comparer les résultats, avec un départ de la ville 0. Si pour les voisins proches on avait une distance totale de 669.16, avec l’algorithme 2-opt on réduit cette distance à 610.09. Si l’on regarde la Figure 6 on voit que cela est dû à l’élimination des croisements, en obtenant un parcours plus direct. Cependant, on a que l’algorithme 2-opt est plus lent. Dans cet exemple, on obtient un temps d’exécution de 71.25 millisecondes, qui est trois ordres de magnitude plus grand.

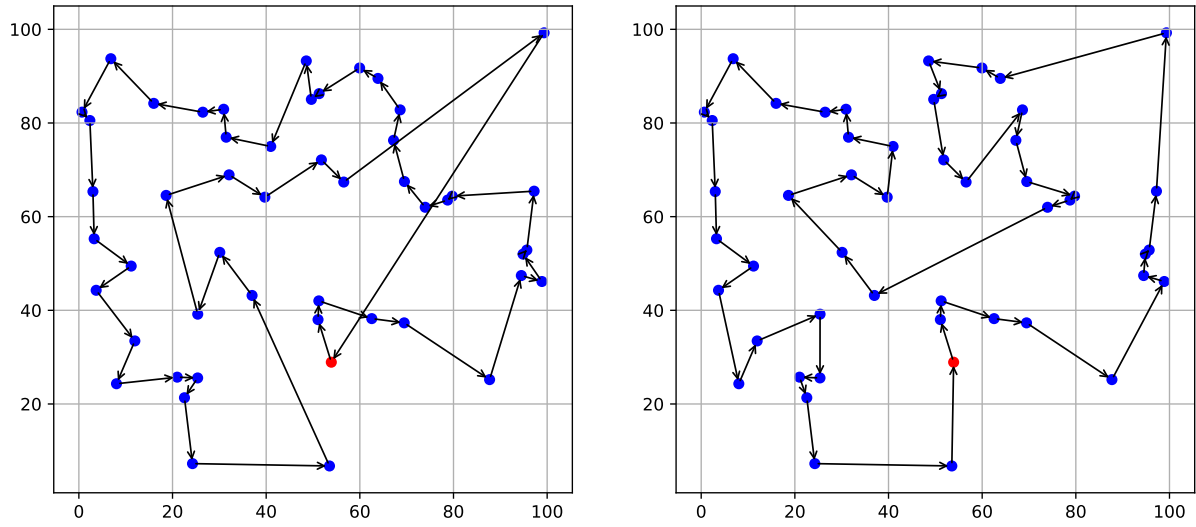


FIGURE 6 – Résultat pour l’algorithme 2-opt (gauche) et sa comparaison avec le résultat des Voisins plus proches (droite) pour 50 villes.

Si l’on applique l’heuristique 2-opt avec une autre solution de voisins plus proches (dans ce cas le même réseau avec départ du ville 23) on a que la distance diminuée de 715.63 à 607.72 mais le parcours est différent, ce que nous dit que l’optimalité de l’algorithme 2-opt aussi dépend de son initialisation.

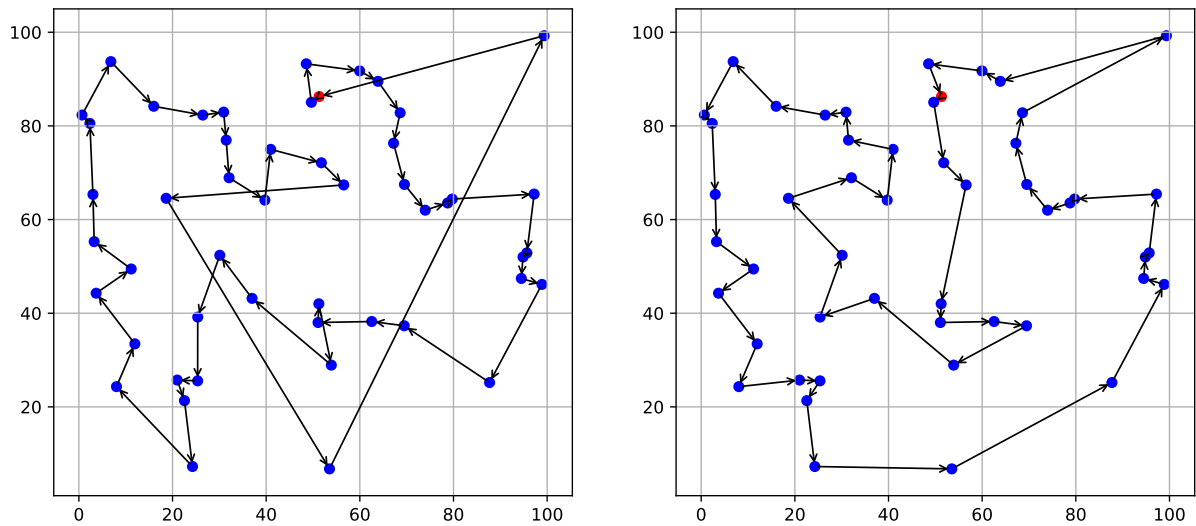


FIGURE 7 – Résultat de 2-opt et sa comparaison avec le résultat des Voisins plus proches pour un départ au milieu.

Finalement, si l’on prendre le parcours avec début dans la ville 42, on a une diminution de la distance parcourue de 692.44 à 609.91, avec l’élimination du grand croisement entre les deux dernières villes.

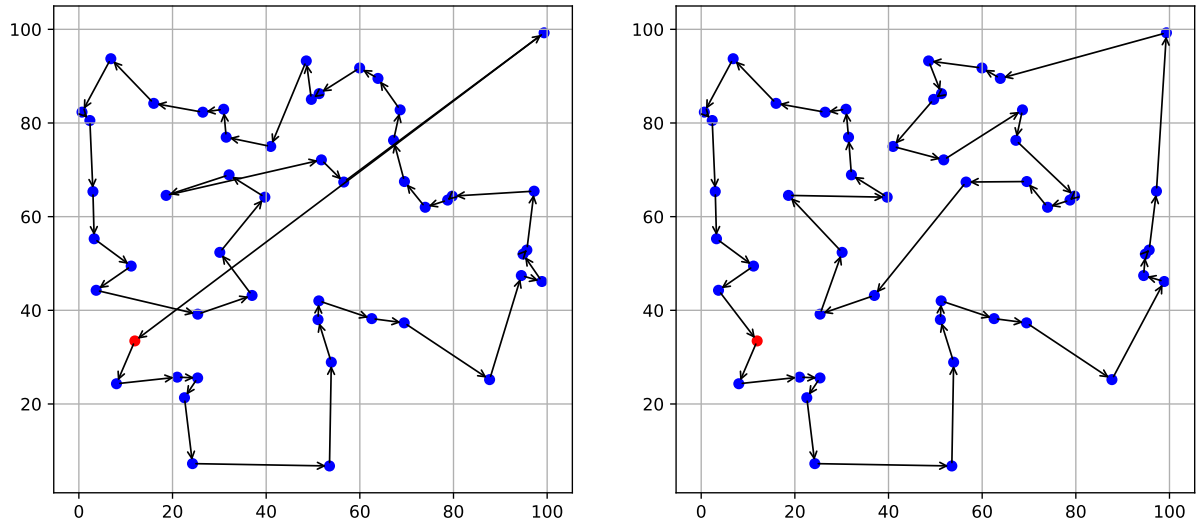


FIGURE 8 – Résultat de 2-opt pour un départ différent. On vérifie que le résultat de 2-opt est dépendent du résultat initial des voisins plus proches, donc le résultat n'est pas fixé.

Heuristique d'insertion

Pour l'heuristique d'insertion avec 20 villes, on obtient un graphe fluide avec une distance totale de 355.04 pour un temps de calcul de 535 microsecondes, que l'on voit sur la Figure 9

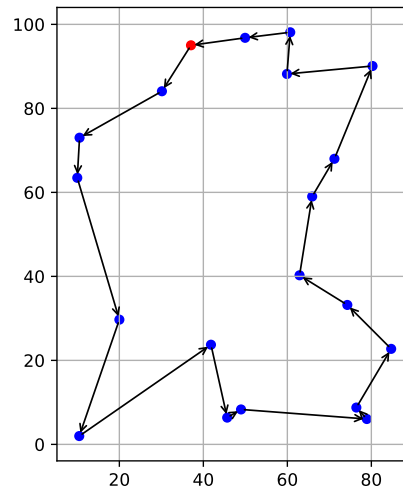


FIGURE 9 – Résultat pour l'heuristique d'insertion avec 20 villes.

Les résultats obtenus pour l'heuristique d'insertion avec 100 villes sont les suivants

- distance totale : 930.16,
- temps de calcul : 24.143 millisecondes,

tandis que les résultats pour l'heuristique de voisins plus proches sont :

- distance totale : 1062.79,
- temps de calcul : 0.609 millisecondes.

L'algorithme VPP est certes plus rapide que le premier mais il prendra aussi un chemin un peu plus long, et comme on peut le voir sur la figure ci-après, l'heuristique d'insertion ne coupe pas le chemin contrairement au VPP ce qui le rend plus agréable à étudier.

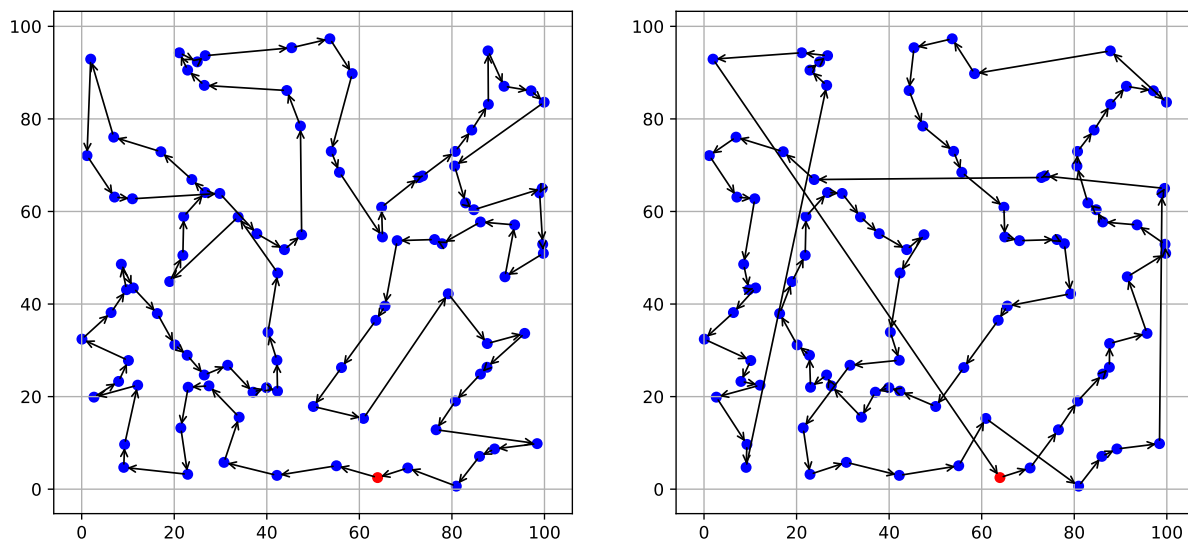


FIGURE 10 – Résultat pour l'heuristique d'insertion avec 100 villes et une comparaison avec le résultat des Voisins plus proches pour le même réseau.

Recuit simulé

Nous obtenons les mesures suivantes pour l'heuristique d'insertion :

- distance totale : 897.78,
- temps de calcul : 31.324 millisecondes,

contre ces résultats pour le recuit simulé :

- distance totale : 865.26,
- temps de calcul : 308.325 millisecondes.

Comme on le constate sur la Figure 11, même si le temps de calcul augmente et est multiplié par 10 par rapport à l'heuristique d'insertion, la distance du chemin est diminuée et optimisée. Le temps de calcul reste très faible pour cette quantité de villes : environ 300 millisecondes, ce qui rend le recuit simulé optimal pour des calculs de chemins avec un nombre de villes important.

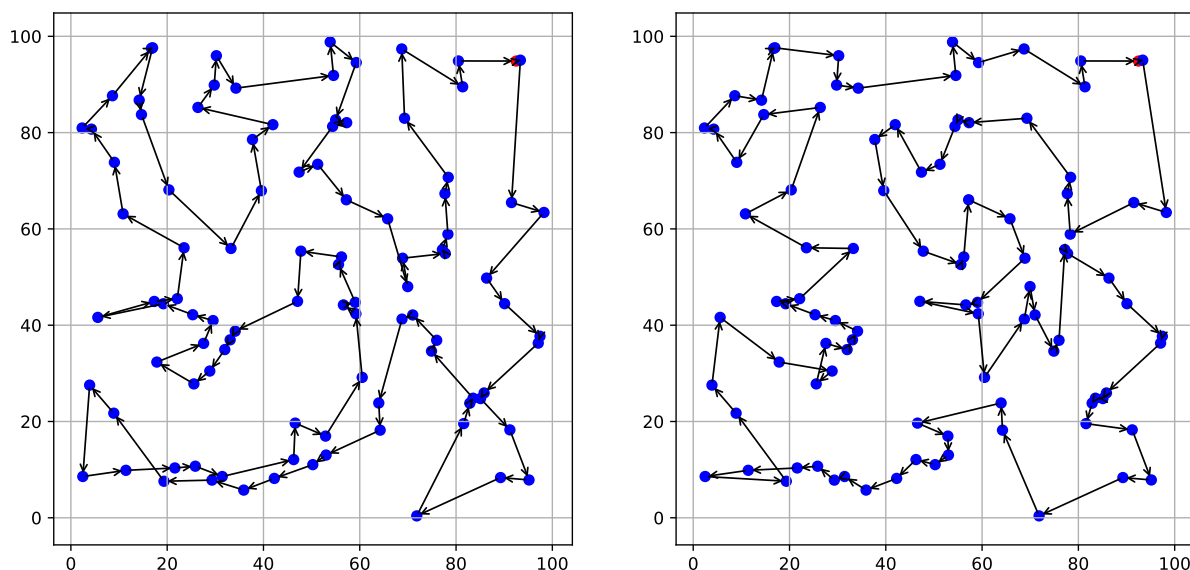


FIGURE 11 – Résultat pour l’heuristique d’insertion (à gauche) et son amélioration par l’algorithme de Recuit simulé (à droite) avec 100 villes.

Comparaison entre algorithmes

Les différents algorithmes analysés ont ses avantages et problèmes, mais sauf cas particulières on ne les compare pas directement. Ici, on prendre des réseaux avec un graine choisi aléatoirement (3456) de différentes dimensions : on génère réseaux de 10, 50, 100, 500 et 1000 villes et l’on applique les différents heuristiques pour trouver les meilleures solutions de chaque algorithme. Les résultats sont montrés dans le tableau 1 :

TABLE 1 – Distance obtenue avec les différents algorithmes pour une quantité N de villes.

N villes	VPP	2-opt	Heuristique d’insertion	Recuit simulé
10	286.2587	266.1043	299.9325	266.1043
50	588.5159	549.2188	615.9452	565.7999
100	888.5622	-	853.6044	827.6085
500	2099.8537	-	1936.8251	1936.8251
1000	2916.9891	-	2716.844	2716.8443

La première chose à noter est le manque des données pour l’algorithme 2-opt. Cela est dû à l’inefficacité de l’algorithme. Pour un réseau de 100 villes l’algorithme ne converge pas après 5 minutes, donc inutile d’attendre car l’incrément de temps pour les réseaux plus grandes rendra impossible la solution. Cependant, on peut voir que dans les cases où 2-opt est présente il donne la solution plus optimale au problème pour ce réseau particulier. C’est intéressant de noter aussi que pour les réseaux plus petites l’heuristique d’insertion n’est pas plus optimale que les voisins plus proches, mais avec la croissance des réseaux on a une amélioration de la performance de l’heuristique. Mais comme on a déjà vu, l’algorithme des Voisins plus proches est plus vite, donc est intéressante aussi de faire le compromis entre temps et précision.

Complexité temporelle

Finalement, on fait une analyse temporelle des algorithmes pour voir la tendance en fonction de la taille des réseaux. Pour ce cas, On utilise les algorithmes pour résoudre le TSP pour réseaux de 10, 50, 100, 500 et 1000 villes, mais cette fois-ci on génère des réseaux aléatoires et pour chaque taille on résout le problème 5 fois, pour avoir une signifiante statistique. Les résultats sont visibles dans la Figure 12 :

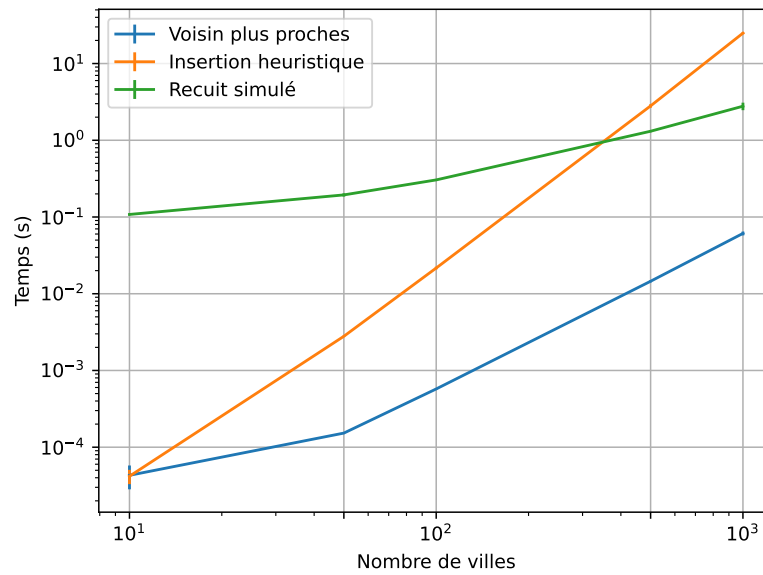


FIGURE 12 – Nombre de villes vs. le temps moyenne d'exécution des algorithmes.

On montre les courbes dans un espace logarithmique pour faire une régression polynomiale qui permette d'obtenir une droite pour chaque courbe. Ces droites ont pour pente :

- Voisins plus proches : 1.636,
- Heuristique d'insertion : 2.902,
- Recuit simulé : 0.721.

On peut voir que l'algorithme de voisins plus proches, pour les cas que l'on a analysé a une complexité de $\mathcal{O}(n^{1.636})$, qui est dans l'ordre de magnitude de n^2 , le pire cas. Pour l'heuristique d'insertion on obtient $\mathcal{O}(n^{2.902})$ qui est pire que le n^2 attendu, mais dans une marge acceptable. Finalement, on voit que le Recuit simulé donne une complexité $\mathcal{O}(n^{0.721})$, qui est très efficient en comparaison aux autres algorithmes. On peut attendre que pour des réseaux très grandes il serait l'option la plus avantageuse, mais il faut considérer quand même que pour utiliser cette stratégie il faut utiliser un autre heuristique avant pour démarrer l'analyse.

Conclusion

Résumé travail

Résumé résultats

Problèmes et challenges

Comment améliorer à futur

Références

- [1] Donald Davendra. *Traveling Salesman Problem, Theory and Applications*. InTech, Janeza Trdine 9, 51000 Rijeka, Croatia, first edition, 2010.
- [2] Karla Hoffman et al. *Traveling Salesman Problem (TSP) Traveling salesman problem*, pages 849–853. Springer US, New York, NY, 2001.
- [3] Cor A.J. Hurkens and Gerhard J. Woeginger. On the nearest neighbor rule for the traveling salesman problem. *Operations Research Letters*, 32(1) :1–4, 2004.
- [4] Matthias Englert, Heiko Röglin, and Berthold Vöcking. Worst case and probabilistic analysis of the 2-opt algorithm for the tsp. *Algorithmica*, 68(1) :190–264, 2014.