**计算方法实验题**

危国锐 120034910021

（上海交通大学海洋学院，上海 200030）

**摘要：**摘要.

**关键词：**关键词1,关键词2 [[1]](#footnote-1)

# 预备知识

## 插值法

函数关于插值区间上的插值节点的Lagrange插值多项式

其中插值基函数

记号

定义

函数关于插值区间上的插值节点的Newton差商插值多项式

其中函数关于节点的阶差商定义为

可以证明（参见 [1,定理2.1]）（1）（4）是相同的插值多项式，即有

且插值余项

## 数值积分

取作为积分的近似值，这样构造出的求积公式

称为插值型的，其中求积系数通过插值基函数的积分

得出.

由插值余项定理（6）立得插值型求积公式（7）的余项

如果某个求积公式对于次数不大于*m*的多项式均能准确成立，但对于次多项式就不一定准确，则称该求积公式具有*m*次代数精度.

一般地，欲使某个求积公式具有*m*次代数精度，只要令它对于都能准确成立.

可以证明（参见 [1,定理4.1]），形如（7）的求积公式至少具有次代数精度的充要条件是，它是插值型的.

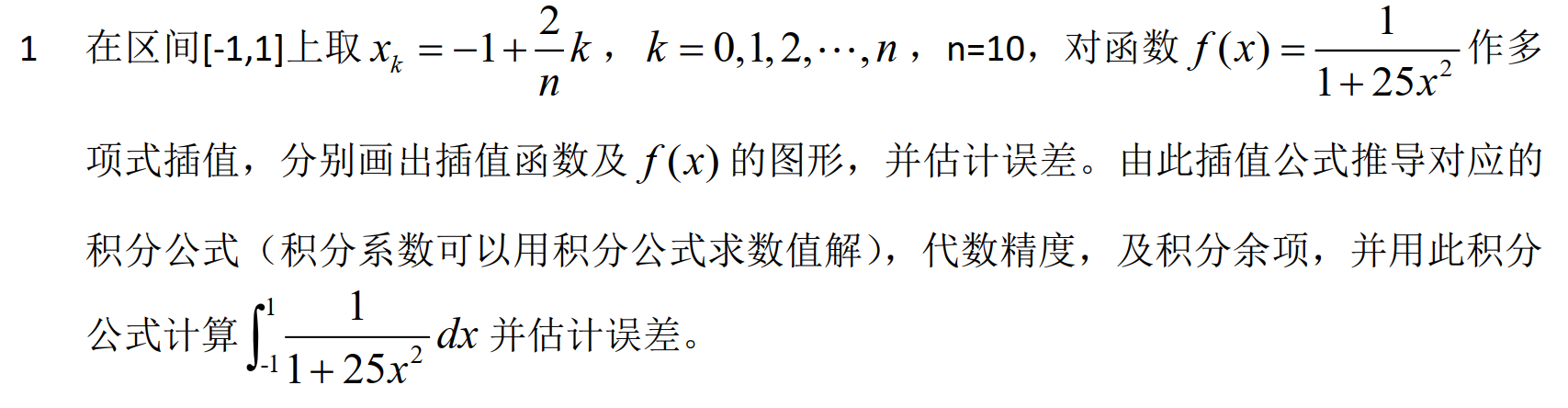
设将积分区间划分为*n*等份，步长 所谓复化求积法，就是先用低阶的Newton-Cotes公式求得每个子区间上的积分值然后再求和，用作为所求积分*I*的近似值.

如果一种复化求积公式当时成立渐近关系式

则称求积公式是*p*阶收敛的.

# 多项式插值（Lagrange）与数值求积

## 描述



## 解决方案

Lagrange插值多项式（1）成为

由定理2.2得插值余项

其中从而，用插值多项式（11）逼近的截断误差限是

其中

式（11）的图像示于图1，可见Runge现象.

相应于（11）的插值型积分公式（7）为

其中积分系数（8）为

用MATLAB编程算得

由定理4.1得（15）至少有*n*次代数精度. 当*n*为偶数时，由（参见 [1,定理4.2]）

知此时（15）至少具有次代数精度.

按 [1,pp.85] 之法可证明，当*n*为偶数时，积分余项

用MATLAB编程可验证故具有11次代数精度. 由（17），用（14）近似求积的截断误差限为

其中

用MATLAB编程算得

这与积分精确值

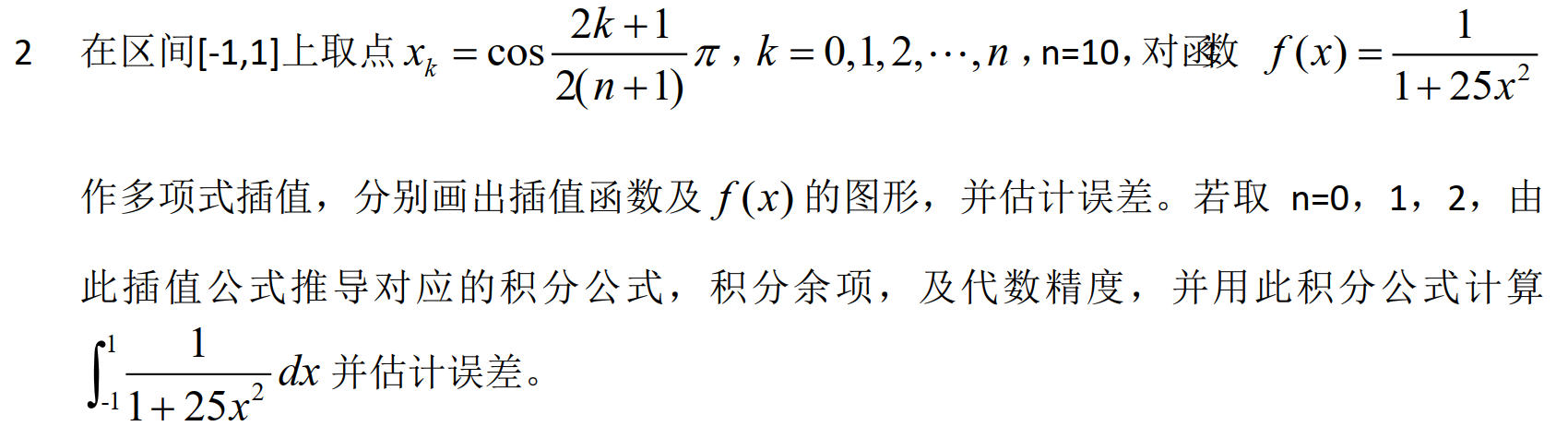
相去甚远，误差



图1 Lagrange插值多项式-等距节点

# 多项式插值（Chebyshev）与数值求积

## 描述



## 解决方案

与第1题相比，本题采取了不同的插值节点. 新的Lagrange插值多项式仍具有（11）的形式，其图像示于图2. 可见Runge现象比第1题有所改善.

新的插值截断误差限仍具有（13）的形式. 特别地，当时，插值截断误差限

相应的插值型积分公式仍具有（14）的形式. 特别地，当时，相应的积分公式成为

容易验证分别具有1次、1次、3次代数精度. 相应的积分余项成为

计算得

这与精确值相去甚远.

用MATLAB编程算得

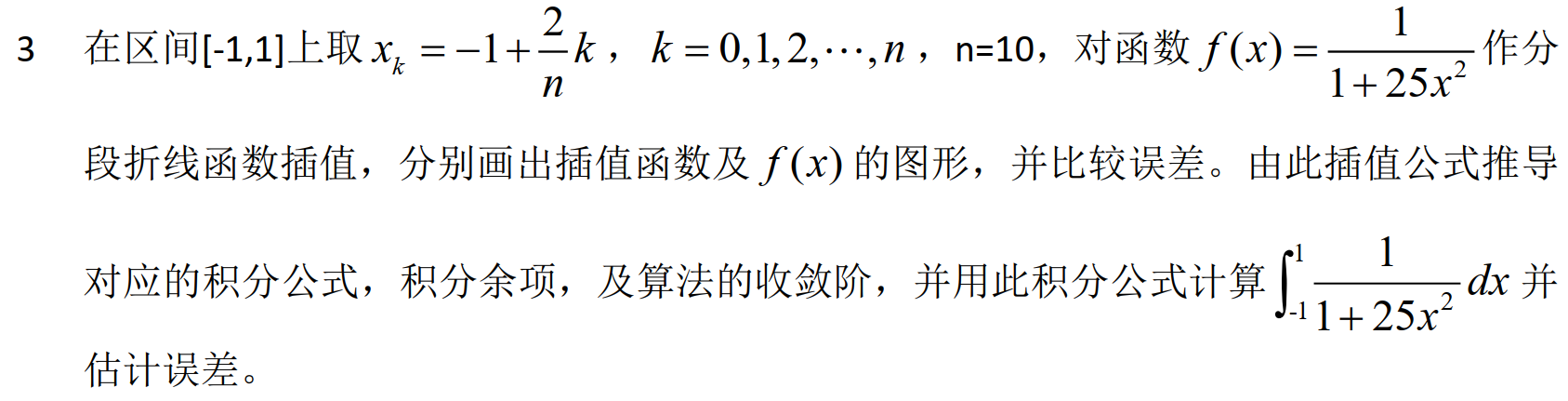
这与精确值比较接近，误差



图2 Lagrange插值多项式-Chebyshev

# 分段线性插值与复化求积

## 描述



## 解决方案

用插值基函数表示的分段线性插值函数为（）

其中插值基函数

分段线性插值函数（19）的图像示于图3，可见插值误差小于第1题和第2题的.

相应于（19）的插值型积分公式为

其中积分系数

事实上，（21）便是复化梯形公式

其积分余项

由（24）可看出，复化求积公式（23）是二阶收敛的.

计算出

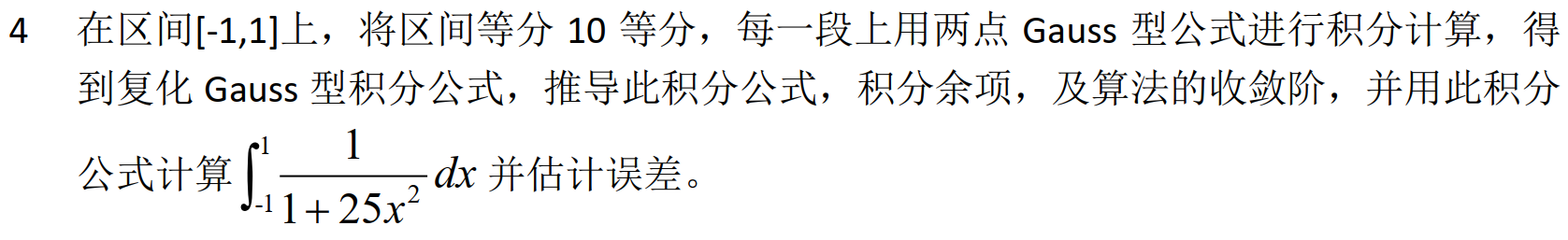
可见这与精确值相当接近，其误差比第2题的还要小.



图3 分段线性插值函数

# 复化Gauss-Legendre公式求积

## 描述



## 解决方案

记在小区间上应用两点Gauss-Legendre公式

得

其中

于是得到复化两点Gauss-Legendre公式

由 [1,定理4.5] 得（26）的积分余项

进而复化两点Gauss-Legendre公式（28）的积分余项

可见（28）是四阶收敛的.

计算得

可见这与精确值非常接近，其误差比第3题的还要小.

# 讨论与结论

# 致谢

# 参考文献

[1] 李庆阳,王能超,易大义.数值分析[M].第5版.武汉:华中科技大学出版社,2021.

危国锐 男，1998年生，硕士研究生.

E-mail: weiguorui@sjtu.edu.cn

# 附录 本实验使用的Matlab源代码

**Title**

Guorui Wei

(*School of Oceanography*, *Shanghai Jiao Tong University*, *Shanghai* 200030, *China*)

**Abstract:** Abstract.

**Keywords:** keyword1, keyword2

1. 完成日期：2021-12-28

   课程名称：研-MATH6004-M03-计算方法 [↑](#footnote-ref-1)