

前面，我们介绍了什么是层化，什么是浮力频率，还引入了一个重要的无量纲数——Froude 数以衡量层化(净浮力)相对于平流项(惯性力)的重要性。

张老师在本课程的第一次课就讲了：区别于普通流体，地球流体有两个重要特征，一是流体运动受到背景场旋转(地转)的影响，二是流体运动受到自身层化的影响。

在本课程的前半部分，我们主要讨论了地球旋转对地球流体运动的影响。刚才，我们介绍了层化的基本概念。现在，我们可以正式提出这个大问题：在地转和层化两个因素同时作用下，流体的运动是什么样的？为了研究这个大问题，我们自然地想了解这个小问题：地转和层化这两个因素，哪个更重要？或者，如何衡量这两个因素的相对重要性？

下面，我们就来讨论这个小问题。

Page . 2

水平-无地转: $V_h \cdot \nabla_h V_h \sim -\frac{1}{\rho} \nabla_h p \Rightarrow \frac{U^2}{L} = \frac{\Delta P}{\rho_0 L}$.

竖直-层化 & 静力平衡:

$$\left. \begin{aligned} p = \rho g H \Rightarrow \Delta P = g H \Delta \rho \\ N^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \Rightarrow \Delta \rho = \frac{N^2 \rho_0 \Delta z}{g} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta P = N^2 H \rho_0 \Delta z.$$

水平-地转流: $V_h \sim \frac{k}{\rho f} \times \nabla_h p \Rightarrow \Omega U = \frac{\Delta P}{\rho_0 L}$.

$$U^2 = N^2 H \Delta z, \dots (1)$$

$$W = \frac{\Delta z}{T} = \frac{\Delta z}{L/U} \Rightarrow \frac{W}{H} = \frac{\Delta z}{U/L} = \frac{\Delta z}{H} \dots (3)$$

$$U = \frac{N^2 H \Delta z}{\Omega L}, \dots (2)$$

Case 1-仅(竖直)层化、无地转:

(1) & (3) $\Rightarrow \frac{W}{H} = \frac{\Delta z}{H} = \left(\frac{U}{NH} \right)^2 =: Fr^2.$

Case 2-仅地转、无层化: [1, pp.357-358]

$\frac{W}{H} = Ro := \frac{U}{\Omega L}.$

Case 3-(竖直)层化 + 地转:

(2) & (3) $\Rightarrow \frac{W}{H} = \frac{\Delta z}{H} = \frac{\Omega L U}{N^2 H^2} = \frac{Fr^2}{Ro}.$

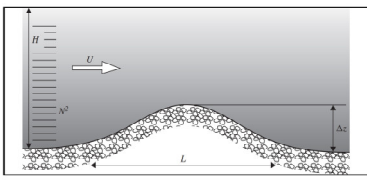


FIGURE 11.5 Situation in which a stratified flow encounters an obstacle, forcing some fluid parcels to move vertically against a buoyancy force.

上图来自: [1, p.356]

[1] Cushman-Roisin, B., & Beckers, J.-M. (2011). Chapter 11 - Stratification. In B. Cushman-Roisin & J.-M. Beckers (Eds.), *International Geophysics* (Vol. 101, pp. 347-364). Academic Press. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-088759-0.00011-9>

我们仍然使用刚才引入 Froude 数时所用的模型: 一个垂直尺度为 H 、在竖直方向上以浮力频率 N^2 层化的流体, 以水平特征速度 U 越过障碍物, 这障碍物具有水平尺度 L 和垂直尺度 Δz . 假定流体处于静力平衡状态, 且层化只沿竖直方向, 则可得压强变化量的量级为 $\Delta P = N^2 H \rho_0 \Delta z$. 假定流体翻过障碍物的时间是以水平速度 U 通过距离 L 所需的, 则得到 竖直辐合(散) 与 水平辐散(合) 的量级之比为 $\Delta z/H$.

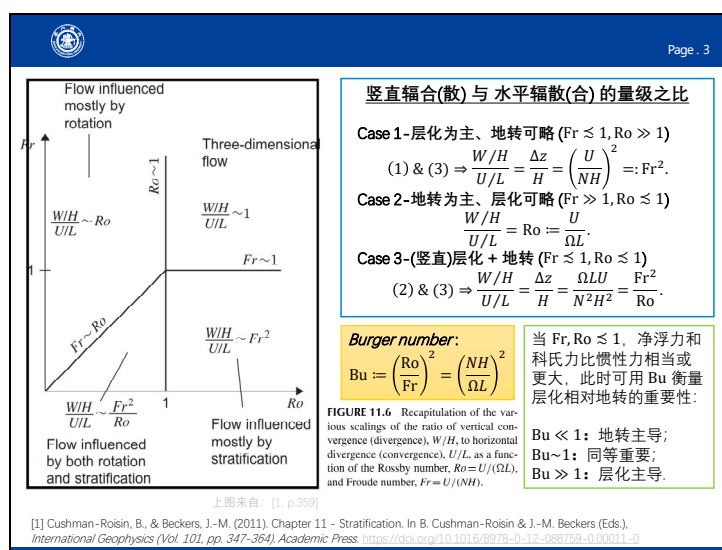
假定流体不受地转影响, 且近似是定常、无粘的, 则在水平方向上基本上是惯性力和压强梯度力平衡, 从而有量级关系 $\frac{U^2}{L} = \frac{\Delta P}{\rho_0 L}$, 进而有 $U^2 = N^2 H \Delta z$. 于是 竖直辐合(散) 与 水平辐散(合) 的量级之比为 Fr^2 . 这便是我们已经讨论过的仅层化无地转的情形.

我们现在引入地转的影响. 假定水平速度场是地转流, 即 $V_h \sim \frac{k}{\rho f} \times \nabla_h p$. 因为

$V_h, f, \nabla_h p$ 的量级分别是 $U, \Omega, \frac{\Delta P}{L}$ (暂不讨论赤道附近 $f \ll \Omega$ 的情况), 我们得到量级关系式 $\Omega U = \frac{\Delta P}{\rho_0 L}$, 进而有 $U = \frac{N^2 H \Delta z}{\Omega L}$. 这时, 竖直辐合(散) 与 水平辐散(合) 的量级之比成为 Fr^2/Ro .

还有一种极端情况, 就是地转主导、无层化的情形. 这时, 竖直辐合(散) 与 水平辐散(合) 的量级之比就是 Rossby 数. 这里略去推导.

注意蓝框内的结果. 现在, 我们将它写到右上角.



我们刚才已经得到了, 在这三种情形下, 竖直辐合(散)与水平辐散(合)的量级之比, 作为 Rossby 数和 Froude 数的函数。现在, 我们用一个图, 重述这三种情形。

这图的横坐标是 Rossby 数, 纵坐标是 Froude 数。Case 1-层化为主、地转可略 ($Fr \lesssim 1, Ro \gg 1$) 位于图中右下角, 这时流动主要受层化影响, 旋转可略, 竖直辐合(散)与水平辐散(合)的量级之比用 Fr^2 表示; Case 2-地转为主、层化可略 ($Fr \gg 1, Ro \lesssim 1$) 位于图中左上角, 这时流动主要受旋转影响, 层化可略, 竖直辐合(散)与水平辐散(合)的量级之比用 Ro 表示; Case 3-(竖直)层化 + 地转 ($Fr \lesssim 1, Ro \lesssim 1$) 位于图中左下角, 这时流动同时受旋转和层化影响, 竖直辐合(散)与水平辐散(合)的量级之比用 Fr^2/Ro 表示。图中右上角区域表示净浮力和科氏力相对惯性力可略, 层化和旋转对流动的影响小。

在这图中, 从左下角这根斜率为 1 的线段 (表示 Froude 数和 Rossby 数相等) 出发, 越往右走, 则层化越比地转重要; 越往上走, 则地转越比层化重要。事实上, 我们这里已经在使用 Rossby 数和 Froude 数的相对大小来比较层化和旋转的相对重要性。自然地, 我们将 Rossby 数和 Froude 数的比值的平方定义成一个新的无量纲数——Burger 数。当 $Fr, Ro \lesssim 1$, 净浮力和科氏力都比惯性力相当或更大, 此时可用 Burger 数衡量层化相对地转的重要性: 当 $Bu \ll 1$, 表示旋转主导流动; 当 $Bu \sim 1$, 旋转和重要性相当; 当 $Bu \gg 1$, 表示层化主导流动。

至此, 我们已能初步回答我们在开头提出的这个小问题, 即“如何衡量地转和层化这两个因素的相对重要性?”希望大家掌握 Rossby 数, Froude 数和 Burger 数这三个重要无量纲数的物理意义。

在这门课的后半部分, 我们将尝试探究开头提出的那个大问题, 即: 在地转和层化两个因素同时作用下, 流体的运动是什么样的?



我们小组的展示到此结束，请张老师和各位同学批评指正。谢谢。