



## 期中考试

### 地球流体动力学 I, 2022 春

危国锐 120034910021

(上海交通大学海洋学院, 上海 200030)

**摘要:** (正压) “不稳定的必要条件是:  $\beta_0 - d^2\bar{u}/dy^2$  在某个区域内至少消失一次, 并且  $(\bar{u} - \bar{u}_0)(\beta_0 - d^2\bar{u}/dy^2)$ , 其中  $\bar{u}_0$  是第一个表达式消失的  $\bar{u}(y)$  的值, 至少在区域的某些有限部分是正的. 尽管这个更强的标准仍然没有提供不稳定的充分条件, 但它通常是相当有用的” (Cushman-Roisin & Beckers, 2011, p. 321). 本文使用的程序和文档发布于 [https://grwei.github.io/SJTU\\_2021-2022-2-MS8402/](https://grwei.github.io/SJTU_2021-2022-2-MS8402/).

**关键词:** 词 1, 词 2

## Mid-term Exam

### Geophysical Fluid Dynamics I, Spring 2022

Guorui Wei 120034910021

(School of Oceanography, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China)

**Abstract:** “Necessary conditions for instability are that  $\beta_0 - d^2\bar{u}/dy^2$  vanish at least once within the domain and that  $(\bar{u} - \bar{u}_0)(\beta_0 - d^2\bar{u}/dy^2)$ , where  $\bar{u}_0$  is the value of  $\bar{u}(y)$  at which the first expression vanishes, be positive in at least some finite portion of the domain. Although this stronger criterion still offers no sufficient condition for instability, it is generally quite useful” (Cushman-Roisin & Beckers, 2011, p. 321). The programs and documents used in this article are published at [https://grwei.github.io/SJTU\\_2021-2022-2-MS8402/](https://grwei.github.io/SJTU_2021-2022-2-MS8402/).

**Keywords:** keyword 1, keyword 2



## 目 录

|                              |   |
|------------------------------|---|
| 摘要 .....                     | i |
| Abstract.....                | i |
| 1 Problem 1 .....            | 1 |
| 1.1 Solution .....           | 1 |
| 2 Problem 2 .....            | 3 |
| 2.1 Solution .....           | 3 |
| 3 Problem 3 .....            | 5 |
| 3.1 Solution .....           | 5 |
| References .....             | 6 |
| 附录 A 本文使用的 MATLAB 程序源代码..... | 7 |
| A.1 主程序.....                 | 7 |
| A.2 子程序.....                 | 7 |



# 1 Problem 1

## Problem 1 (40 pts) 40 pts

As shown in Figure 1, a vertically uniform but laterally sheared coastal current must climb a bottom escarpment. Assuming that the jet velocity still vanishes offshore, determine the velocity profile and the width of the jet downstream of the escarpment using  $h_1 = 200\text{m}$ ,  $h_2 = 160\text{m}$ ,  $U_1 = 0.5\text{m/s}$  (maximum velocity in the area with depth  $h_1$ ),  $L_1 = 10\text{km}$  and  $f = 10^{-4}\text{ s}^{-1}$ . (that is, you should obtain  $U_2$  and  $L_2$ , and plot the velocity profile). What would happen if the downstream depth were only 100m?

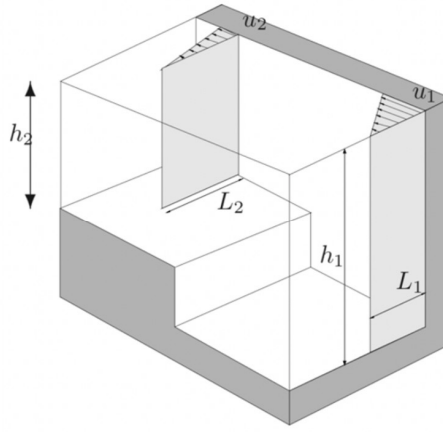


Figure 1: A sheared coastal jet negotiating a bottom escarpment.

## 1.1 Solution

假定这流动成立位涡守恒（例如，对正压理想 Newtonian 流体）

$$\frac{f + U_1/L_1}{h_1} = \frac{f + U_2/L_2}{h_2} \quad (1.1)$$

和质量（体积）守恒

$$\frac{U_1}{2} L_1 h_1 = \frac{U_2}{2} L_2 h_2. \quad (1.2)$$

关于  $U_2, L_2$  的方程组 (1.1) (1.2) 有实数解，当且仅当

$$h_2 \geq h_c := \frac{L_1 h_1 f}{U_1 + L_1 f}. \quad (1.3)$$

有实数解时，解为

$$U_2 = U_1 \sqrt{1 - L_1(h_1/h_2 - 1)f/U_1}, \quad (1.4)$$

$$L_2 = L_1 \sqrt{U_1 h_1^2 / (h_2 (U_1 h_2 - (h_1 - h_2) L_1 f))}. \quad (1.5)$$

可见， $U_2$  对  $h_2$  在  $[h_c, +\infty)$  上单调递增， $L_2$  对  $h_2$  在  $[h_c, +\infty)$  上单调递减，且有

$$\lim_{h_2 \rightarrow h_c^+} U_2 = 0, \quad \lim_{h_2 \rightarrow h_c^+} L_2 = +\infty, \quad (1.6)$$

$$\lim_{h_2 \rightarrow +\infty} U_2 = U_1 \sqrt{1 + L_1 f / U_1}, \quad \lim_{h_2 \rightarrow +\infty} L_2 = 0. \quad (1.7)$$

代入  $h_2 = 160\text{ (m)}$  和其他数据得



$$U_2 = 0.35 \text{ (m/s)}, \quad L_2 = 1.77 \times 10^4 \text{ (m)}.$$

若取  $h_2 = 100 \text{ (m)}$ , 则 (1.3) 不成立, 意味着水流不能流过台阶形成如题图所示的下游速度剖面.

## 2022 Spring MS8402 Mid-term Exam Pblm 1

Guorui Wei 120034910021

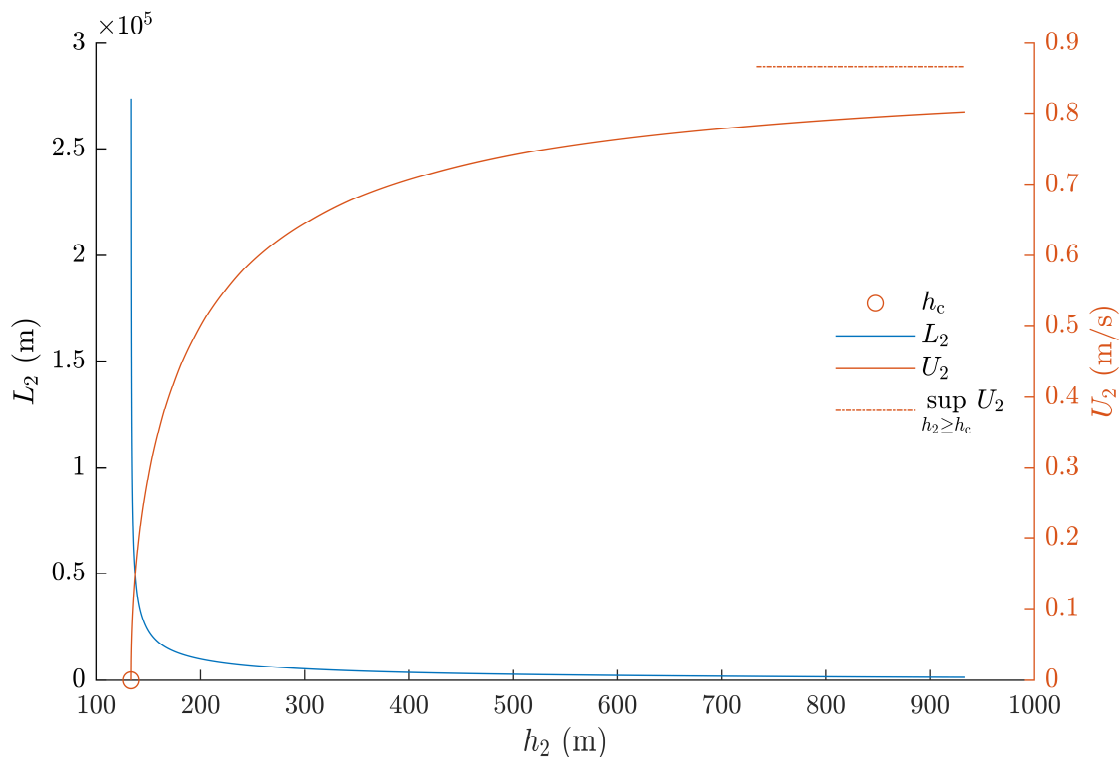


图 1.1 关于  $U_2, L_2$  的方程组 (1.1) (1.2) 的实数解关于  $h_2$  的图像. 这方程组有实数解, 当且仅当  $h_2 \geq h_c := L_1 h_1 f / (U_1 + L_1 f) = 133.3 \text{ (m)}$ .  $U_2$  对  $h_2$  在  $[h_c, +\infty)$  上单调递增,  $L_2$  对  $h_2$  在  $[h_c, +\infty)$  上单调递减. 当  $h_2 \rightarrow h_c^+$  时, 有  $U_2 \rightarrow 0^+, L_2 \rightarrow +\infty$ . 当  $h_2 \rightarrow +\infty$  时, 有  $U_2 \rightarrow \sup_{h_2 \geq h_c} U_2 =$

$$U_1 \sqrt{1 + L_1 f / U_1} = 0.87 \text{ (m/s)}, L_2 \rightarrow 0^+.$$



## 2 Problem 2

### Problem 2 (30 pts) 30 pts

The atmospheric jet stream is a wandering zonal flow of the upper troposphere, which plays a central role in mid-latitude weather. If we ignore the variations in air density, we can model the average jet stream as a purely zonal flow, independent of height and varying meridionally according to

$$\bar{u}(y) = Ue^{-\frac{y^2}{2L^2}}$$

in which the constants  $U$  and  $L$ , characteristics of the speed and width, are taken as 40 m/s and 570 km, respectively. The jet center ( $y = 0$ ) is at  $45^\circ\text{N}$  where  $\beta_0 = 1.61 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}$ . Is the jet stream unstable to zonally propagating waves?

### 2.1 Solution

用特征量  $U, L$  对各物理量作无量纲化:

$$u_+ := \frac{\bar{u}}{U}, \quad y_+ := \frac{y}{L}, \quad \beta_{0+} := \frac{\beta_0}{U/L^2}, \quad (2.1)$$

则正压不稳定的 Rayleigh 条件成为:

$$\beta_{0+} - \frac{d^2 u_+}{dy_+^2}$$

在某区域内变号至少一次. 正压不稳定的 Rayleigh 条件只可能成立在  $\beta_{0+} - d^2 u_+/dy_+^2$  的零点附近.

正压不稳定的 Fjortoft 条件成为:

$$(u_+ - u_{0+}) \left( \beta_{0+} - \frac{d^2 u_+}{dy_+^2} \right)$$

在某区域内恒为正, 其中  $u_{0+}$  是  $\beta_{0+} - d^2 u_+/dy_+^2$  的零点  $y_{0+}$  处的无量纲流速.

更多关于正压不稳定的基本内容, 包括正压不稳定的必要条件的推导, 参见 [Cushman-Roisin and Beckers \(2011\)](#).

题给平均流速度场为

$$u_+ = e^{-y_+^2/2}, \quad (2.2)$$

故

$$\frac{d^2 u_+}{dy_+^2} = -(1 - y_+^2)e^{-y_+^2/2}. \quad (2.3)$$

从而  $\beta_{0+} - d^2 u_+/dy_+^2$  在  $y_+ = 0$  附近有四个零点, 为

$$y_+ = y_{1,2}^A = \pm 1.115, \quad y_+ = y_{1,2}^B = \pm 2.819. \quad (2.4)$$

绘出  $u_+$  和  $\beta_{0+} - d^2 u_+/dy_+^2$  关于  $y_+$  在  $y_+ = 0$  附近的图像 (图 2.1). 由图 2.1 可见, 在上述四个零点附近,  $\beta_{0+} - d^2 u_+/dy_+^2$  都发生符号改变, 故正压不稳定的 Rayleigh 条件在上述四个零点的任意邻域中都成立. 下面考察正压不稳定的 Fjortoft 条件在上述四个零点附近的成立情况.

由图 2.1 易见, 在  $y_+ = y_{1,2}^A$  的一个邻域中,  $\beta_{0+} - d^2 u_+/dy_+^2$  和  $u_+$  对  $y_+$  的单调性相同 (二者对  $y_+$  同增或同减), 故  $(u_+ - u_{0+})(\beta_{0+} - d^2 u_+/dy_+^2)$  在这邻域中恒为正, 正压不稳定的 Fjortoft 条件成立; 而在  $y_+ = y_{1,2}^B$  的任何充分小的邻域中,  $\beta_{0+} - d^2 u_+/dy_+^2$  和  $u_+$  对



$y_+$  的单调性相反 (二者对  $y_+$  一增一减), 故  $(u_+ - u_{0+})(\beta_{0+} - d^2u_+/dy_+^2)$  在这邻域中恒为负, 正压不稳定的 Fjortoft 条件不成立.

于是, 存在一个  $y_+ = y_{1,2}^A$  的邻域, 使得正压不稳定的 Rayleigh 条件和 Fjortoft 条件同时成立, 故在  $y_+ = y_{1,2}^A$  附近可能 (但不必) 发生正压不稳定, 纬向传播的扰动可能 (但不必) 从平均流场中获取能量而获得不稳定的发展; 对任意给定的  $y_+ = y_{1,2}^B$  的邻域, 只成立 Rayleigh 条件而不成立 Fjortoft 条件, 故在  $y_+ = y_{1,2}^B$  附近不能发生正压不稳定, 纬向传播的扰动不能从平均流场中获得维持不稳定发展所需的能量.

## 2022 Spring MS8402 Mid-term Exam Pblm 2

Guorui Wei 120034910021

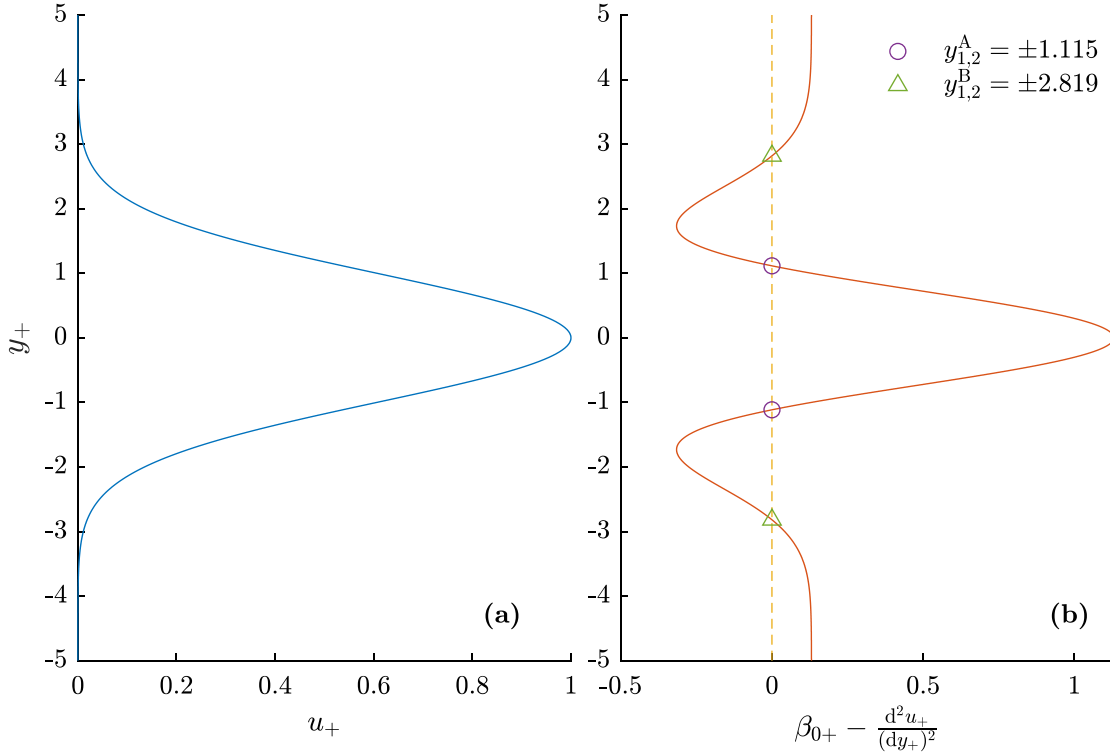


图 2.1  $u_+$  和  $\beta_{0+} - d^2u_+/dy_+^2$  关于  $y_+$  在  $y_+ = 0$  附近的图像. 易见, 在  $\beta_{0+} - d^2u_+/dy_+^2$  的零点  $y_+ = y_{1,2}^A = \pm 1.115$  (以空心圆符号标注) 的一个邻域中,  $\beta_{0+} - d^2u_+/dy_+^2$  和  $u_+$  对  $y_+$  的单调性相同 (二者对  $y_+$  同增或同减), 故  $(u_+ - u_{0+})(\beta_{0+} - d^2u_+/dy_+^2)$  在这邻域中恒为正, 即成立正压不稳定的 Fjortoft 条件; 而在  $\beta_{0+} - d^2u_+/dy_+^2$  的零点  $y_+ = y_{1,2}^B = \pm 2.819$  (以空心三角形符号标注) 的任何充分小的邻域中,  $\beta_{0+} - d^2u_+/dy_+^2$  和  $u_+$  对  $y_+$  的单调性相反 (二者对  $y_+$  一增一减), 故  $(u_+ - u_{0+})(\beta_{0+} - d^2u_+/dy_+^2)$  在这邻域中恒为负, 不成立正压不稳定的 Fjortoft 条件. 由于在上述四个零点附近,  $\beta_{0+} - d^2u_+/dy_+^2$  都发生符号改变, 故正压不稳定的 Rayleigh 条件在上述四个零点的任意邻域中都成立.



### 3 Problem 3

#### Problem 3 (30 pts) 25 pts

Read the following literature for barotropic Rossby waves, 1) summarize the wave properties obtained in this study, 2) explain why these waves can be considered as Rossby waves, and 3) discuss the similarities and differences between these waves and the Rossby waves mentioned in our class.

*J. Thomas Farrar, 2020. Barotropic Rossby Waves Radiating from Tropical Instability Waves in the Pacific Ocean. Journal of Physical Oceanography, 41(6), 1160–1181.*

#### 3.1 Solution

##### 1. 波的性质.

[Farrar \(2011\)](#) 主要讨论了纬向波长, 周期, 波峰的朝向, 经向范围等波的性质. 文中所谓的正压 Rossby 波的周期约为 29-37 天, 纬向波长 10-25 个经度, 相速度方向为西南, 波信号主要出现在北纬 10-20 度, 波峰大致沿东南-西北朝向.

##### 2. 可视作正压 Rossby 波的原因.

为了说明那波可视为某种正压 Rossby 波, [Farrar \(2011\)](#) 的思路是: 从经典的正压 Rossby 波的频散关系出发, 预测在空间域和 Fourier 频域上波信号的性质; 将这性质与观测 (经滤波等处理) 比较; 结果发现许多观测现象可用经典的正压 Rossby 波的频散关系的解释. 正如文中所言, “The inference that these are barotropic Rossby waves is based on the fact that the variability obeys the barotropic Rossby wave dispersion relation”, “Perhaps the real surprise is that the simple interpretation offered here can explain as much of the observed variability as it does”.

都预测了哪些性质?

[Farrar \(2011\)](#) 得到的一个主要结论是: 1) 东太平洋 10°-20°N 的 SSH 变化与靠近赤道的高能热带不稳定波相关的变化相一致; 2) 10°-20°N 的这种变化的传播方式与对各向异性罗斯比波的预期相一致. 总之, 这些事实表明, 各向异性的 Rossby 波正在从不稳定状态中辐射出来.

##### 3. 与本课程介绍的经典正压 Rossby 波的异同.

相同: [Farrar \(2011\)](#) 讨论的波动的许多现象可用经典正压 Rossby 波的频散关系解释, 故在某种意义上, 二者具有相似的频散关系.

不同: 回复机制和传播机制不同. 课程介绍的经典正压 Rossby 波, 其产生、回复和传播都受位涡守恒控制. 而 [Farrar \(2011\)](#) 讨论的波动, 其成波机制与 TIW 相关, 文中提出两类产生机制: 要么是大振幅 TIW 导致了这波动, 要么是不稳定过程同时产生 TIWs 和正压 Rossby 波. 第一类机制可解释为: TIW 向有限振幅的演变导致了“正压化”, 或通过非线性波与波之间的相互作用将能量从斜压运动转移到正压运动. 在第二类机制中, 斜压 Rossby 波是不稳定过程的一个固有方面.

虽然文中没提, Rossby 波的传播也是遵循位涡守恒. 能量传播方向有何区别?



## References

- Cushman-Roisin, B., & Beckers, J.-M. (2011). Chapter 10 - Barotropic Instability. In B. Cushman-Roisin & J.-M. Beckers (Eds.), *International Geophysics* (Vol. 101, pp. 317-344). Academic Press.  
<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-088759-0.00010-9>
- Farrar, J. T. (2011). Barotropic Rossby Waves Radiating from Tropical Instability Waves in the Pacific Ocean. *Journal of Physical Oceanography*, 41(6), 1160-1181.  
<https://doi.org/10.1175/2011jpo4547.1>





## 附录A 本文使用的 MATLAB 程序源代码

### A.1 主程序

发布于 [https://github.com/grwei/SJTU\\_2021-2022-2-MS8402](https://github.com/grwei/SJTU_2021-2022-2-MS8402).

### A.2 子程序

发布于 [https://github.com/grwei/SJTU\\_2021-2022-2-MS8402](https://github.com/grwei/SJTU_2021-2022-2-MS8402).